

# *Astérisque*

EMMANUEL GIROUX

**Topologie de contact en dimension 3 [autour des  
travaux de Yakov Eliashberg]**

*Astérisque*, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki, exp. n° 760, p. 7-33

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1992-1993\\_\\_35\\_\\_7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__7_0)>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## TOPOLOGIE DE CONTACT EN DIMENSION 3

[autour des travaux de Yakov Eliashberg]

par Emmanuel GIROUX

### 0. Introduction.

#### A. Structures de contact, définition et exemples.

Une *structure de contact* sur une variété lisse de dimension 3<sup>(1)</sup> est un champ  $C^\infty$  de plans tangents qui est complètement non-intégrable. Précisément, tout champ de plans tangents est (localement<sup>(2)</sup>) le noyau d'une 1-forme  $\alpha$ , "conformément unique", appelée équation (de Pfaff) du champ; la condition infinitésimale qu'on impose, dictée par le critère d'intégrabilité de Frobenius [Ar1] et indépendante du choix de  $\alpha$ , est que la 3-forme  $\alpha \wedge d\alpha$  ne s'annule en aucun point : une 1-forme vérifiant cette condition est appelée *forme de contact*. Les structures de contact forment ainsi un ouvert de l'espace des champs de plans pour la topologie  $C^1$  fine.

La multiplication de  $\alpha$  par une fonction  $f$  partout non nulle change  $\alpha \wedge d\alpha$  en  $f^2 \alpha \wedge d\alpha$ , de sorte qu'une structure de contact oriente la variété sous-jacente. Quand celle-ci est orientée a priori, les structures de contact qu'elle porte ont donc un *signe*.

On dit souvent qu'une structure de contact est un "champ de plans tordu". De fait, soit  $\xi$  un champ de plans (local) et  $X$  un champ de vecteurs non singulier contenu dans  $\xi$ . Dans des coordonnées adaptées  $(x, y, t)$  voisines de  $(0, 0, 0)$ ,  $X$  s'écrit  $\partial/\partial t$  et  $\xi$  a une équation du type  $dy = p(x, y, t) dx$  (avec, si on veut,  $p(0, 0, 0) = 0$ ). Alors  $\xi$  est une structure de contact si et seulement si  $\partial p/\partial t$  ne s'annule pas, ce qui signifie géométriquement que, lorsqu'on suit le flot de  $\partial/\partial t$ , on voit les plans de  $\xi$  tourner dans les coordonnées  $(x, y)$  (le sens de rotation donne le signe de la structure). De là le théorème de Darboux : *une structure de contact n'a pas d'invariants locaux* puisqu'elle est toujours localement définie par  $dy = p dx$  dans des coordonnées  $(x, y, p)$  convenables.

#### Exemples 0.1.

a) Sur  $\mathbf{R}^3$  muni de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , une 1-forme d'expression  $f(r) dz - g(r) d\theta$  (où  $g$  s'annule au second ordre en 0) est une forme de contact si  $f(dg/dr) - g(df/dr)$  ne s'annule pas, ce qui signifie que la courbe plane

$r \mapsto (f(r), g(r))$  tourne “sans arrêt” autour de l’origine. On notera  $\zeta_0$  et  $\zeta_1$  les structures de ce type définies par :

$$\zeta_0 : dz - r^2 d\theta = 0, \quad \zeta_1 : \cos r dz - r \sin r d\theta = 0.$$

Toutes ces structures sont invariantes par translation verticale et donnent donc des structures de contact sur  $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1$ . Elles sont de plus tangentes aux rayons  $(\theta, z) = \text{cste}$ . Le long de ces rayons,  $\zeta_0$  pivote d’un quart de tour entre  $r = 0$  et  $r = \infty$  tandis que  $\zeta_1$  fait une infinité de tours.

b) Soit  $F$  une surface et  $\pi : ST^*F \rightarrow F$  le fibré des droites coorientées tangentes à  $F$ . La variété  $ST^*F$  porte une structure de contact naturelle  $\xi$  définie comme suit : un vecteur  $v$  tangent à  $ST^*F$  en  $(x, \delta)$  (où  $x$  est un point de  $F$  et  $\delta$  une droite tangente à  $F$  en  $x$ ) appartient à  $\xi$  si le vecteur projeté  $T_{(x,\delta)}\pi(v) \in TF$  est sur  $\delta$  (la coorientation de  $\delta$  donne celle de  $\xi$ ). Si  $F = \mathbf{R}^2$ ,  $x$  est donné par deux coordonnées  $(x_1, x_2)$  et  $\delta$  est repérée par l’angle  $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  de sa normale directe avec l’axe des  $x_1$  ; une équation de  $\xi$  est alors  $\cos \theta dx_1 + \sin \theta dx_2 = 0$ .

c) Toute hypersurface réelle  $V$  d’une variété complexe de dimension 2 porte un champ de plans  $\xi$  naturel formé par les droites complexes tangentes à  $V$ . Quand  $V$  est orientée, on dit qu’elle est strictement pseudo-convexe si  $\xi$  est une structure de contact positive. C’est par exemple le cas pour la sphère unité de  $\mathbf{C}^2$  orientée comme bord de la boule :  $\xi$  est la structure de contact usuelle sur  $\mathbf{S}^3$  et sera notée  $\zeta_0$ . Elle est définie, en coordonnées multipolaires  $(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2)$  ( $r_1^2 + r_2^2 = 1$ ), par  $r_1^2 d\theta_1 + r_2^2 d\theta_2 = 0$ .

## Notes.

(1) La géométrie de contact existe en toute dimension impaire, sur certains espaces, et est naturellement liée avec la physique et les géométries symplectique, riemannienne et analytique complexe [Ar3, Ar4, BFG, Bl]. Mais si ses aspects locaux ou, plus généralement, flexibles sont assez bien compris [Ar2, Au, Gra, Gro3, McD1, Ru], les contours de sa rigidité globale, qu’on souhaite “dessiner” ici en dimension 3, restent mal connus en grande dimension : on ne dispose par exemple que de résultats très partiels d’existence sur les variétés fermées (voir [El7, El8, Gei, Gro2, Lu3, Me, Mul, We]).

(2) Par commodité, dans ce texte, les champs de plans sont tous coorientés, donc définis par des équations globales déterminées à multiplication près par des fonctions positives. De même, les variétés sont toutes orientées et leur bord éventuel est coorienté par la normale sortante. Les variétés complexes, symplectiques ou de contact, sont munies de leur orientation canonique. Enfin, tout hyperplan coorienté d’un espace orienté est orienté suivant la règle : “la normale directe d’abord”. Ainsi, une structure de contact  $\xi$  coorientée par une équation  $\alpha$  est orientée par  $d\alpha|_{\xi}$ .

## B. Courbes legendriennes, courbes transversales, feuilletage caractéristique des surfaces.

Si une structure de contact n'admet pas de surfaces intégrales, elle possède en revanche beaucoup de *courbes legendriennes*, c'est-à-dire de courbes tangentes en chaque point au plan de contact. En fait, on peut rendre legendrienne toute courbe en la bougeant (à extrémités fixes) par une isotopie  $C^0$ -petite.

**Exemple 0.2.** Soit  $\zeta'_0$  la structure de contact sur  $\mathbf{R}^3$  définie en coordonnées cartésiennes  $(x, y, p)$  par  $dy = p dx$ . Une courbe  $t \mapsto (x(t), y(t), p(t))$  est legendrienne si, à tout instant  $t$ ,  $p(t)$  est la pente  $dy/dx$  de la courbe projetée  $t \mapsto (x(t), y(t))$ . Cette courbe projetée, qui détermine entièrement la courbe legendrienne, n'a alors aucune tangente verticale mais présente des rebroussements : on l'appelle *front d'onde* [Ar2]. Maintenant, étant donné une courbe quelconque dans  $\mathbf{R}^3$ , on peut approcher  $C^0$ -uniformément sa projection horizontale par un front d'onde dont la pente approche simultanément la coordonnée verticale (cf. figure 1).

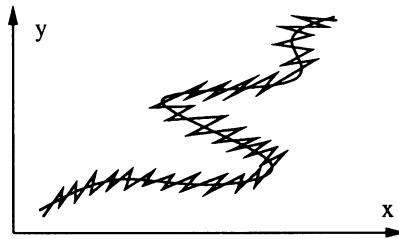


Figure 1

L'argument utilisé en 0.A pour le théorème de Darboux permet de modéliser n'importe quelle structure de contact  $\xi$  près d'une courbe legendrienne  $C$  : elle a pour équation  $dy = p dx$  où  $C = \{(x, 0, 0)\}$ . On voit alors qu'en poussant légèrement  $C$  suivant le champ de vecteurs  $\partial/\partial p$  (normal à  $C$  dans  $\xi$ ), on obtient des courbes  $C_\varepsilon = \{(x, 0, \varepsilon)\}$  qui sont *transversales* à  $\xi$  (positivement ou négativement suivant le signe de  $\varepsilon$ ). Il existe donc également beaucoup de courbes transversales et, en particulier, on peut joindre deux points quelconques par une transversale. Enfin, près d'une courbe transversale, on peut (encore avec le même argument) modéliser la structure  $\xi$  par l'équation  $dz = r^2 d\theta$ , où  $z$  paramètre la courbe et  $(r, \theta)$  sont des coordonnées polaires normales.

L'outil géométrique essentiel pour étudier une variété de contact  $(V, \xi)$  est fourni par les courbes legendriennes obtenues comme suit : sur toute surface  $F$  contenue dans  $V$ , la structure  $\xi$  trace un champ de droites singulier, noyau de la 1-forme qu'induit sur  $F$  n'importe quelle équation de  $\xi$ . Ses singularités sont les points, génériquement isolés, où  $F$  est tangente à  $\xi$  et ses courbes intégrales régulières sont legendriennes. Ce feuilletage, noté  $F_\xi$ , est appelé *feuilletage caractéristique* de  $F$ . De

fait, il détermine entièrement, au signe près, le germe de  $\xi$  le long de  $F$ . Ainsi, si  $F$  sépare  $V$ , deux structures de contact données de part et d'autre, dont les orientations coïncident le long de  $F$  et qui tracent sur  $F$  le même feuilletage, se recollent (après lissage) pour former une structure de contact sur  $V$ .

La non-intégrabilité de  $\xi$  ne confère aux feuilletages caractéristiques qu'une seule propriété spécifique, qui porte sur les singularités : ce sont des singularités de champs de vecteurs à divergence non nulle (voir par exemple [Gi1]). Par convention, si  $F$  est orientée par une 2-forme  $\omega$  et si  $\alpha_0$  est la 1-forme induite par une équation  $\alpha$  de  $\xi$ , on oriente le feuilletage  $F_\xi$  par le champ de vecteurs  $Y$  dont le produit intérieur avec  $\omega$  est égal à  $\alpha_0$ . Ce choix (contraire aux conventions de **0.A**) a le mérite suivant : en une singularité,  $d\alpha|_\xi = d\alpha_0 = \operatorname{div}_\omega Y \cdot \omega$  ; ainsi, la divergence de  $Y$  est positive ou négative suivant que les orientations de  $F$  et  $\xi$  coïncident ou non. Génériquement (pour un nombre quelconque de paramètres), il n'existe que trois types topologiques de singularités à divergence non nulle [Ar5] : les foyers ou nœuds (sources ou puits selon leur signe), les selles ou cols et les nœuds-selles. En référence au contexte analytique complexe (cf. exemple **0.1 c**), ces singularités sont souvent aussi appelées points (complexes) respectivement elliptiques, hyperboliques et paraboliques.

### Exemples 0.3.

a) Dans  $\mathbf{R}^3$ , une sphère strictement convexe  $S$  de révolution autour de l'axe des  $z$  n'est tangente aux structures  $\zeta_0$  et  $\zeta_1$  (cf. exemple **0.1 a**) qu'en ses pôles. Pour  $\zeta_0$ , le feuilletage caractéristique de  $S$  est toujours formé de courbes qui vont d'un pôle à l'autre. Mais pour  $\zeta_1$ , le feuilletage caractéristique de  $S$  présente des orbites fermées dès que  $S$  coupe le cylindre de rayon  $\pi$  autour de l'axe des  $z$  : ces orbites sont précisément les cercles horizontaux de rayons  $k\pi$  contenus dans  $S$ ,  $k = 1, 2, \dots$  (la figure 2 représente le feuilletage d'une sphère contenue dans un cylindre de rayon inférieur à  $3\pi/2$ ).

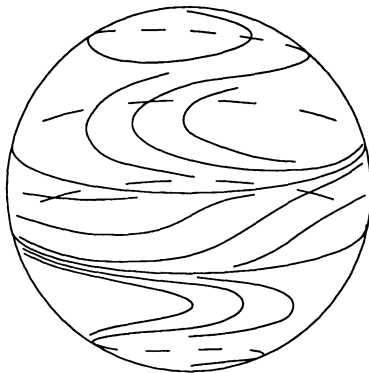


Figure 2

b) Soit  $F$  une surface de  $\mathbf{R}^3$  définie par une équation régulière  $f(x, y, p) = 0$ . Les courbes du feuilletage caractéristique de  $F$  pour  $\zeta'_0 : dy = p dx$  sont les courbes intégrales de l'équation différentielle implicite  $f(x, y, dy/dx) = 0$  (voir [Ar5, Dav]).

### C. Le problème de classification des structures de contact.

Deux structures de contact sur une variété  $V$  sont dites *isomorphes* (resp. *isotopes*) s'il existe un difféomorphisme de  $V$  (resp. un difféomorphisme de  $V$  isotope à l'identité) qui envoie l'une sur l'autre. Par exemple, sur  $\mathbf{R}^3$ , les structures  $\zeta_0 : dz = r^2 d\theta$  et  $\zeta'_0 : dy = p dx$  sont isomorphes via le changement de variables  $p = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $z = 2y - px$ .

Le problème de la classification des structures de contact à isomorphisme près sur une variété donnée, posé par S.S. Chern dans les années 60 [Ch], est encore largement ouvert. L'espoir d'une solution tient pour beaucoup à la propriété de  $C^1$ -stabilité démontrée par J.W. Gray en 1959 :

**Théorème 0.4** [Gra]. *Sur une variété fermée (compacte sans bord), deux structures de contact sont isotopes si et seulement si elles sont homotopes dans l'espace des structures de contact.*

**Remarque.** Sur une variété compacte à bord, on a le même énoncé avec des isotopies et des homotopies relatives au bord.

L'idée est donc d'étudier d'abord le type d'homotopie de l'espace des structures de contact, ou plutôt le type d'homotopie relatif de cet espace dans celui, "bien connu", de tous les champs de plans. Sur une variété *ouverte* (i.e. dont aucune composante connexe n'est fermée), M. Gromov a montré en 1969 l'équivalence homotopique de ces deux espaces [Gro1, Gro3], d'où l'existence de structures de contact dans chaque classe d'homotopie de champs de plans. Malheureusement, le théorème de Gray ne s'applique pas : deux structures de contact homotopes n'ont a priori qu'un lien géométrique de concordance [McD1]. Sur les variétés fermées, le premier résultat a été obtenu par R. Lutz et J. Martinet en 1971 :

**Théorème 0.5** [Lu1, Lu2, Ma] (voir aussi [ThWi]). *Sur une variété fermée (orientée) de dimension 3, tout champ de plans est homotope à une structure de contact.*

Le problème suivant est de savoir si deux structures de contact qui sont homotopes comme champs de plans le sont comme structures de contact.

**Exemple 0.6** : *Modification de Lutz* [Lu2]. Cette modification consiste à changer une structure  $\xi_0$  donnée sur une variété  $V$  en la "villant" au voisinage d'une courbe transversale fermée. Près d'une telle courbe, dans un tube  $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{S}^1$  muni de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ ,  $r \leq \varepsilon$ ,  $\xi_0$  est modélisée par l'équation  $dz = r^2 d\theta$ . On remplace  $\xi_0$  dans ce tube par une structure d'équation  $f(r) dz = g(r) d\theta$  (cf.

exemple **0.1 a**) où  $r \mapsto (f(r), g(r))$  est une courbe dans  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  qui va de  $(1, 0)$  à  $(1, \varepsilon^2)$  en faisant une fois le tour de l'origine dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

La structure  $\xi_1$  ainsi obtenue est homotope à  $\xi_0$  via les champs de plans  $\xi_s$ ,  $s \in [0, 1]$ , définis sur le tube par :

$$(1 - s)(dz - r^2 d\theta) + s(f(r) dz - g(r) d\theta) + s(1 - s)r(\varepsilon - r) dr = 0$$

et égaux à  $\xi_0$  en dehors.

Enfin, il est important d'observer que, comme dans l'exemple **0.3 a**, la variété  $(V, \xi_1)$  contient des disques (par exemple d'équation  $z = \varepsilon' r^2$  dans le tube) dont le feuilletage caractéristique présente des orbites fermées.

À ce point, il est commode de donner une définition introduite par Ya. Eliashberg en 1988 et 1991. Au-delà des mots, elle établit une dichotomie qui est l'une des idées les plus fécondes de la théorie.

**Définition 0.7** [El1, El2]. Soit  $(V, \xi)$  une variété de contact. On dit que  $\xi$  est *vrillée* (*overtwisted*) s'il existe un disque  $\Delta$  de dimension 2 plongé dans  $V$  dont le feuilletage caractéristique  $\Delta_\xi$  présente une orbite régulière fermée avec une seule singularité à l'intérieur, au "centre". Quand on veut spécifier ce disque, on dit que  $\xi$  est *vrillée le long de*  $\Delta$ . On dit que  $\xi$  est *tendue* (*tight*) lorsqu'elle n'est pas vrillée.

En utilisant cette terminologie, un des résultats fondamentaux démontrés par D. Bennequin en 1982 s'énonce comme suit :

**Théorème 0.8** [Ben1, Dou]. *Sur  $\mathbf{R}^3$  et  $\mathbf{S}^3$ , la structure de contact usuelle  $\zeta_0$  (cf. exemples 0.1) est tendue.*

Ainsi, toute modification de Lutz sur  $\zeta_0$  donne une structure non isomorphe à  $\zeta_0$ . Si donc le travail de D. Bennequin constitue un pas décisif dans la compréhension des structures de contact, il semble paradoxalement briser l'espoir d'une classification en faisant craindre que la multiplication des modifications de Lutz le long d'entrelacs compliqués ne conduise à des structures de plus en plus exotiques. Dans ce contexte, le théorème démontré par Ya. Eliashberg en 1988 est une heureuse et providentielle surprise :

**Théorème 0.9** [El1] (cf. 1.A). *Sur une variété fermée, deux structures de contact vrillées sont isotopes si et seulement si elles sont homotopes comme champs de plans.*

Il ne reste donc "plus qu'à" classifier les structures tendues...

**D. Le monde des structures tendues.**

Le premier fait établi par Ya. Eliashberg sur les structures tendues est qu'elles jouissent de propriétés communes remarquables, précisément celles découvertes par D. Bennequin dans la structure usuelle de  $S^3$ . Il s'agit d'inégalités portant sur certains invariants des courbes legendriennes et transversales (cf. 2.D), et qui imposent de fortes contraintes à la classe d'Euler des structures tendues vues comme fibrés vectoriels réels orientés de rang 2.

**Théorème 0.10** [El2] (cf. 2.B). *Pour une variété  $V$  fermée, les éléments du groupe  $H^2(V, \mathbf{Z})$  qu'on peut réaliser comme classes d'Euler de structures tendues sur  $V$  sont en nombre fini.*

Outre cette rigidité homologique, Ya. Eliashberg montre que :

**Théorème 0.11** [El2] (cf. 2.C). *Sur  $\mathbf{R}^3$  et  $S^3$ , la structure usuelle  $\zeta_0$  est la seule structure tendue.*

En fait, Ya. Eliashberg montre qu'un champ de plans donné le long de  $\partial D^3$  s'étend en au plus une structure tendue sur  $D^3$  (cf. théorème 2.8). Comme la classe d'Euler d'un champ  $\xi$  détermine la classe d'homotopie de  $\xi$  sur le 2-squelette de  $V$ , on obtient :

**Théorème 0.12** [El2]. *Sur une variété fermée, les classes d'homotopie de champs de plans qui contiennent des structures tendues sont en nombre fini.*

Le problème est alors de trouver des exemples. L'outil le plus efficace pour ce faire vient de la théorie des courbes pseudo-holomorphes de M. Gromov [Gro2, El4]. Moyennant le critère qu'elle donne (cf. 3.B) et un travail de D. Gabai, un résultat annoncé récemment par W. Thurston montre que :

**Théorème 0.13** [Th3, Ga] (cf. 3.C). *Toute variété fermée irréductible dont le second groupe d'homologie est non nul porte des structures de contact tendues.*

Quant au problème de classification, il reste largement ouvert. Ya. Eliashberg conjecture dans [El2] qu'une variété fermée ne porte qu'un nombre fini de structures tendues différentes. Ceci ne peut résulter immédiatement du théorème de finitude 0.12 car :

**Théorème 0.14** [Gi2] (cf. 3.D). *Il existe sur  $\mathbf{T}^3$  des structures de contact tendues homotopes comme champs de plans mais non isomorphes.*

Pour ce qui est des variétés ouvertes, la situation semble encore plus sauvage puisque :

**Théorème 0.15** [El3] (cf. 3.D). *Il existe sur  $\mathbf{R}^2 \times S^1$  une famille continue de structures tendues deux à deux non isomorphes.*



## 1. Flexibilité des structures de contact vrillées.

### A. Le théorème de classification.

Soit  $V$  une variété de dimension 3, connexe, fermée et orientée, et soit  $\Delta$  un disque de dimension 2 plongé dans  $V$ . On désigne par  $\text{Cont}^{vr}(V, \Delta)$  l'espace des structures de contact (coorientées et positives) qui sont *vrillées le long de  $\Delta$*  (cf. définition 0.7). Par ailleurs, on note  $\text{Distr}(V, \Delta)$  l'espace des champs de plans (coorientés) qui sont tangents à  $\Delta$  en son centre. Ces espaces sont munis de la topologie  $C^\infty$ .

**Théorème 1.1** [El1]. *L'inclusion  $i : \text{Cont}^{vr}(V, \Delta) \longrightarrow \text{Distr}(V, \Delta)$  est une équivalence d'homotopie (faible).*

### Remarques 1.2.

a) Comme l'espace des plongements du disque dans  $V$  est connexe, toute structure vrillée est isotope à une structure de  $\text{Cont}^{vr}(V, \Delta)$ . De plus,  $\text{Distr}(V, \Delta)$  est, dans l'espace de tous les champs de plans (coorientés) sur  $V$ , la fibre au-dessus de la sphère  $S^2$  des plans orientés tangents à  $V$  au centre de  $\Delta$ . Ainsi, et compte tenu du théorème de Gray (cf. 0.4), il découle du théorème 1.1 que deux structures vrillées qui sont homotopes comme champs de plans sont isotopes (théorème 0.9).

b) Dans [Lu1, Lu2], R. Lutz montre que  $i_*$  est surjective sur  $\pi_0$ . La prolifération des paramètres n'étant pas la difficulté principale, on se contente d'indiquer ici pourquoi  $i_*$  est injective sur  $\pi_0$ , ce qui, d'après a, suffit à établir le théorème 0.9.

Il s'agit de voir que deux structures  $\xi_0$  et  $\xi_1$  de  $\text{Cont}^{vr}(V, \Delta)$  qui sont reliées par un chemin  $\xi_s$ ,  $s \in [0, 1]$ , dans  $\text{Distr}(V, \Delta)$  peuvent aussi être jointes dans  $\text{Cont}^{vr}(V, \Delta)$ . On observe d'abord que, comme tous les champs  $\xi_s$  coïncident au centre de  $\Delta$ , on peut les déformer pour qu'ils soient tous égaux à  $\xi_0$  près de  $\Delta$ . On peut alors sans peine trouver une boule  $B_0$  contenant  $\Delta$  et un plongement  $\psi$  de  $B_0$  dans  $\mathbf{R}^3$  qui envoie  $\xi_s|_{B_0} = \xi_0|_{B_0}$  sur la structure  $\zeta_1$  d'équation  $\cos r dz - r \sin r d\theta = 0$  et dont l'image  $\psi(B_0)$  est une boule convexe du type  $\{(r, \theta, z) \mid (z/\varepsilon)^2 + r^2 \leq (\pi + \varepsilon)^2\}$  (où  $\varepsilon$  est un nombre positif petit). Le feuilletage caractéristique de  $S_0 = \partial B_0$  (cf. exemple 0.3 a) est le double du feuilletage de  $\Delta$  (avec deux orbites fermées et deux singularités, une source et un puits : voir figure 2). Voici maintenant les étapes suivantes.

### B. Où l'on laisse des trous.

#### Définition 1.3.

a) Dans une variété de contact, un *domaine de Darboux* est une boule qui se plonge dans la structure usuelle  $\zeta_0$  de  $\mathbf{R}^3$  (d'équation  $dz - r^2 d\theta = 0$ ).

b) Soit  $\xi$  un champ de plans coorienté défini près d'une 2-sphère orientée  $S$  et soit  $S_\xi$  le feuilletage tracé par  $\xi$  sur  $S$ . On dit que  $\xi$  est *simple* s'il n'est tangent à

$S$  qu'en deux "pôles", l'un, dit pôle nord, où les orientations de  $S$  et  $\xi$  coïncident et l'autre, dit pôle sud, où elles sont opposées. On dit que  $\xi$  est *presque horizontal* si, de plus, près des orbites fermées éventuelles de  $S_\xi$ , le champ  $\xi$  est toujours coorienté "du pôle sud vers le pôle nord".

**Exemples 1.4.** Le champ  $\xi_0$  est simple le long de  $\partial B_0$  mais n'est pas presque horizontal car les orbites fermées n'ont pas la bonne coorientation. Par contre, un champ de plans "constant" sur  $\mathbf{R}^3$  est presque horizontal le long de toute sphère strictement convexe. Plus généralement, un champ de plans  $\xi$  sur un compact  $A$  de  $\mathbf{R}^3$  est donné par son application de Gauss  $G_\xi : A \rightarrow \mathbf{S}^2$ . On pose :  $|\xi| = \sup_{x \in A} \{\|T_x G_\xi\|\}$ . Alors, si  $|\xi| \leq k$  et si  $S$  est une sphère dont toutes les courbures principales sont supérieures à  $k$ ,  $\xi$  est presque horizontal le long de  $S$ .

**Lemme 1.5.** *Par une homotopie à extrémités fixes, on peut imposer au chemin  $\xi_s$  les conditions suivantes :*

- (i) *en dehors d'un nombre fini de boules  $B_i$  disjointes de  $B_0$ ,  $1 \leq i \leq p$ , tous les champs  $\xi_s$  sont des structures de contact ;*
- (ii) *le long du bord de chaque  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , chaque  $\xi_s$  est presque horizontal ;*
- (iii) *pour  $s = 0, 1$ , toutes les boules  $B_i$  sont des domaines de Darboux.*

**Démonstration.** On construit l'homotopie carte après carte. Cela permet de travailler dans un domaine compact  $A$  de  $\mathbf{R}^3$ , mais relativement à un sous-domaine  $B$  près duquel les champs  $\xi_s$  sont déjà de contact (grâce aux modifications antérieures). On pave un voisinage  $P$  de  $A$  (sur lequel les  $\xi_s$  sont encore définis) par des cubes isométriques assez petits pour que les champs  $\xi_s$  soient encore de contact sur la réunion  $Q$  des cubes qui rencontrent  $B$ .

Par ailleurs, étant donné un nombre positif  $\delta$  petit, on se fixe un plongement  $\varphi$  de  $\mathbf{S}^2 \times [-1, 1]$  dans le  $\delta$ -voisinage du bord du cube unité  $C$  de  $\mathbf{R}^3$  ayant les propriétés suivantes :

- les sphères  $\Sigma_t = \varphi(\mathbf{S}^2 \times \{t\})$  sont strictement convexes ;
- $\Sigma_{-1}$  est à l'extérieur de  $C$  et  $\Sigma_1$  est à l'intérieur ;
- les sphères  $\Sigma_t$ ,  $t \in ]-1/2, 1/2[$ , recouvrent le  $\delta/2$ -voisinage du bord de  $C$ .

Par homothétie et translation, on construit des sphères  $\Sigma_{t_j}$  près du bord de chaque cube  $C_j$  de  $P$ . Si ces cubes sont petits, chaque champ  $\xi_s$  est presque horizontal le long des sphères  $\Sigma_{t_j}$  car celles-ci sont très courbées. On applique alors, sur chaque couronne  $\bigcup_{t \in [-1, 1]} \Sigma_{t_j}$  et pour tout  $s \in [0, 1]$ , la construction suivante.

Sur  $\mathbf{S}^2 \times [-1, 1]$ , soit  $\xi$  un champ de plans d'équation  $\alpha_t + u_t dt = 0$ , où les  $\alpha_t$  sont des 1-formes et les  $u_t$  des fonctions sur  $\mathbf{S}^2$ . On suppose que  $\xi$  est presque

horizontal le long de chaque sphère  $\mathbf{S}^2 \times \{t\}$ , si bien que chaque forme  $\alpha_t$  n'a que deux singularités (d'indice 1), l'une où  $u_t$  est positive et l'autre où  $u_t$  est négative. On rend  $\xi$  de contact sur  $\mathbf{S}^2 \times [-1/2, 1/2]$  en trois étapes.

- *Modification longitudinale* : on perturbe les  $\alpha_t$  pour que  $d\alpha_0$  soit non nulle et de même signe que  $u_0$  aux singularités de  $\alpha_0$ .
- *Modification transversale* : on déforme les  $\alpha_t$  pour que  $\alpha_t + u_t dt$  soit une forme de contact pour  $t$  proche de 0. La condition de contact s'écrit :

$$u_t d\alpha_t + \alpha_t \wedge (du_t - \dot{\alpha}_t) > 0.$$

Il s'agit donc de modifier  $\dot{\alpha}_t$  près de  $t = 0$  pour satisfaire cette inégalité.

- *Grossissement* : par une isotopie de  $\mathbf{S}^2 \times [-1, 1]$  fixe près du bord et qui envoie  $\mathbf{S}^2 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$  sur  $\mathbf{S}^2 \times [-1/2, 1/2]$ , on propage la déformation.

On peut clairement adapter cette construction pour garder  $\xi$  inchangé sur tout compact du type  $K \times [-t, t]$  près duquel il est déjà de contact. Enfin, on contrôle assez la norme des champs pour que, si les sphères  $\Sigma_{ij}$  sont très courbées, on puisse appliquer la construction le nombre de fois nécessaire en préservant la presque horizontalité le long des  $\Sigma_{ij}$ . ■

### C. Où l'on connecte les trous.

D'après le lemme 1.5, chaque  $\xi_s$  est maintenant une structure de contact sur la variété  $V' = V \setminus \bigcup_{0 \leq i \leq p} (B_i)$ . Comme les structures de contact possèdent beaucoup de courbes transversales, il est facile, pour tout  $s \in [0, 1]$  et tout  $i = 1, \dots, p$ , de relier dans  $V'$  le pôle nord de  $\partial B_{i-1}$  au pôle sud de  $\partial B_i$  par un arc plongé  $A_{si}$  (directement) transversal à  $\xi_s$ . On peut de plus faire en sorte que les arcs  $A_{si}$  soient disjoints pour  $s$  fixé et qu'ils dépendent différenciablement de  $s$  pour  $i$  fixé. En effectuant, pour chaque  $s$ , la somme connexe plongée de  $B_0, B_1, \dots, B_p$  le long des arcs  $A_{si}$ ,  $1 \leq i \leq p$ , on obtient une boule  $V_s$  plongée dans  $V$ .

### D. Où l'on bouche le trou.

Il faut maintenant trouver un chemin  $\xi'_s$ ,  $s \in [0, 1]$ , de structures de contact sur  $V_s$  ayant les propriétés suivantes :

- pour  $s = 0, 1$ ,  $\xi'_s = \xi_s|_{V_s}$  ;
- pour tout  $s \in [0, 1]$ , les feuilletages tracés respectivement par  $\xi_s$  et  $\xi'_s$  sur  $\partial V_s$  sont les mêmes.

À cette fin, il importe d'observer que :

- pour chaque  $s \in [0, 1]$ , le feuilletage  $\mathcal{F}_s$  tracé par  $\xi_s$  sur  $\partial V_s$  est, en un sens évident, la “somme connexe” des feuilletages tracés sur  $\partial B_0, \partial B_1, \dots, \partial B_p$  (sur un petit cylindre autour d’un arc transversal, les courbes caractéristiques vont d’un bord à l’autre en s’enroulant);  $\xi_s$  est donc simple le long de  $\partial V_s$ ;
- $\mathcal{F}_s$  n’a que deux orbites fermées le long desquelles  $\xi_s$  soit coorienté du pôle nord au pôle sud : ce sont celles provenant de  $\partial B_0$ ;
- pour  $s = 0, 1$ ,  $\mathcal{F}_s$  n’a pas d’autres orbites fermées. En effet,  $(V_s, \xi_s)$  est la somme connexe de  $(B_0, \xi_s = \xi_0)$  et de domaines de Darboux au bord desquels il n’y a aucune orbite fermée d’après le théorème de Bennequin. Il est alors facile de montrer que  $(V_0, \xi_0)$  et  $(V_1, \xi_1)$  sont isomorphes, comme variétés de contact, à  $(W, \zeta_1)$  (cf. 1.A).

L’observation fondamentale de Ya. Eliashberg est qu’on peut trouver dans  $(\mathbf{R}^3, \zeta_1)$  une famille  $W_s$  de boules plongées,  $s \in [0, 1]$ , telles que :

- $W_0 = W_1 = W$ ;
- pour tout  $s \in [0, 1]$ , le feuilletage caractéristique de  $\partial W_s$  dans  $(\mathbf{R}^3, \zeta_1)$  est topologiquement conjugué à  $\mathcal{F}_s$ .

Pour cela, il suffit de voir qu’en bougeant  $\partial W$  parmi les sphères de révolution, on peut faire apparaître et disparaître comme on veut, dans le feuilletage caractéristique, des orbites fermées le long desquelles  $\zeta_1$  soit coorientée du pôle sud vers le pôle nord. Ces sphères sont engendrées par la rotation autour de l’axe des  $z$  de courbes du type représenté sur la figure 3 :

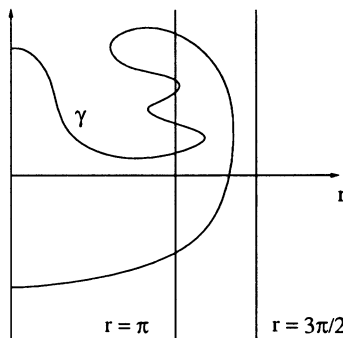


Figure 3

**Légende** : chaque point d’intersection de  $\gamma$  avec la droite  $r = \pi$  donne un cycle sur le feuilletage. Les deux premiers points, en venant du pôle sud, correspondent aux cycles immuables. Le long des autres cycles, qu’on peut clairement créer et éliminer à loisir,  $\zeta_1$  est coorienté du pôle nord vers le pôle sud (sur la sphère).

## 2. Rigidité des structures de contact tendues.

### A. Modifications de feuilletages caractéristiques par isotopies.

Soit  $F$  une surface fermée orientée. Un feuilletage de  $F$  désigne ici l'ensemble  $\mathcal{F}$  des courbes intégrales orientées d'un champ de vecteurs (ou, dualement, d'une 1-forme). On dira que  $\mathcal{F}$  est *dilatant* (resp. *contractant*) sur un domaine  $F'$  de  $F$  s'il est porté par un champ qui sort (resp. rentre) transversalement le long du bord de  $F'$  et dont le flot dilate (resp. contracte) une forme d'aire sur  $F'$ . On dira que  $\mathcal{F}$  est *scindé* par une courbe fermée simple  $\Gamma$  (pas forcément connexe) si  $\Gamma$  découpe  $F$  en régions où  $\mathcal{F}$  est alternativement dilatant et contractant.

On prend maintenant  $F$  plongée dans une variété de contact  $(V, \xi)$ . On oriente le feuilletage caractéristique  $F_\xi$  comme en 0.B, pour que les singularités dites *positives*, c'est-à-dire où  $F$  et  $\xi$  ont même orientation, soient à divergence positive.

**Lemme 2.1** [Gil].

a) *Tout feuilletage de  $F$   $C^\infty$ -proche de  $F_\xi$  est feuilletage caractéristique d'une surface  $C^\infty$ -proche de  $F$ .*

b) *Génériquement,  $F$  contient une courbe fermée simple  $\Gamma$  (souvent non connexe) qui scinde  $F_\xi$ ;  $F$  possède alors un voisinage tubulaire trivialisé,  $U \simeq F \times \mathbf{R}$ , dans lequel  $\xi$  est  $\mathbf{R}$ -invariante.*

c) *Tout feuilletage de  $F$  qui est scindé par  $\Gamma$  est feuilletage caractéristique d'une surface isotope à  $F$  dans  $U$ .*

**Démonstration.**

a) On réalise le feuilletage  $C^\infty$ -proche de  $F_\xi$  comme feuilletage caractéristique  $F_{\xi'}$  pour une structure  $\xi'$   $C^\infty$ -proche de  $\xi$  et on applique le théorème de stabilité de Gray 0.4.

b) Le théorème de M. Peixoto (selon lequel *les feuilletages des surfaces compactes sont génériquement de type Morse-Smale*) et le a montrent que  $F_\xi$  vérifie génériquement les propriétés suivantes :

- les singularités sont isolées et les orbites fermées sont non dégénérées (leur application de premier retour n'est pas tangente à l'identité);
- toute demi-orbite a pour ensemble limite soit une singularité, soit une orbite fermée, soit une réunion de singularités et de liaisons;
- aucune liaison ne va d'une singularité négative à une singularité positive.

On construit alors  $\Gamma$  comme suit. On prend un anneau (resp. un disque) autour de chaque orbite fermée répulsive (resp. de chaque foyer répulsif, i.e. positif). On place ensuite une bande autour de la variété stable de chaque selle positive. La réunion de ces anneaux, disques et bandes, est une surface dont le bord est la courbe  $\Gamma$  cherchée.

Pour montrer l'existence du tube  $U$ , il suffit (principalement parce que  $F_\xi$  détermine complètement  $\xi$  près de  $F$ ) de construire sur  $F \times \mathbf{R}$  une structure de contact  $\zeta$  qui soit  $\mathbf{R}$ -invariante et qui induise  $F_\xi$  comme feuilletage sur  $F \times \{0\}$ . On cherche une équation de  $\zeta$  sous la forme  $\beta + u dt$ , où  $t$  est la coordonnée sur  $\mathbf{R}$  et où  $\beta$  et  $u$  sont respectivement une 1-forme et une fonction sur  $F$  telles que :

- $u d\beta + \beta \wedge du > 0$  (condition de contact);
- $\beta$  est une équation de  $F_\xi$ .

Or il existe sur  $F$  un champ de vecteurs  $Y$  portant  $F_\xi$  et une forme d'aire  $\omega$  tels que  $\text{div}_\omega Y$  change de signe le long de  $\Gamma$  et ne s'annule pas ailleurs. On trouve alors facilement une fonction  $u : F \rightarrow \mathbf{R}$ , s'annulant elle aussi uniquement sur  $\Gamma$ , telle que  $u(\text{div}_\omega Y) - (Y \cdot u)$  soit une fonction partout strictement positive. Si on note  $\beta$  le produit intérieur de  $\omega$  par  $Y$ , on a  $u d\beta + \beta \wedge du > 0$ .

c) Tout feuilletage  $\mathcal{F}$  scindé par  $\Gamma$  est, comme  $F_\xi$ , le feuilletage caractéristique de  $F \times \{0\}$  pour une structure de contact  $\zeta'$   $\mathbf{R}$ -invariante sur  $F \times \mathbf{R}$  et d'équation  $\beta' + u dt = 0$  :  $u$  est la même fonction que pour  $F_\xi$  car elle est essentiellement déterminée par  $\Gamma$ . Alors les formes  $s\beta' + (1-s)\beta + u dt$  sont, pour  $s \in [0, 1]$ , des formes de contact  $\mathbf{R}$ -invariantes sur  $F \times \mathbf{R}$ . Une version ad hoc du théorème de Gray montre que  $\zeta'$  est isotope à  $\zeta$ , ce qui permet de réaliser  $\mathcal{F}$  comme feuilletage caractéristique d'une surface isotope à  $F$  dans  $(U, \xi)$ . ■

**Remarque 2.2.** Pour une surface  $F$  à bord, les parties **a** et **b** du lemme 2.1 s'adaptent bien (par exemple, si le bord est transversal à  $\xi$ , on trouve une courbe  $\Gamma$  qui ne le coupe pas). En ce qui concerne **c** on n'a plus droit au théorème de Gray. Cependant, tous les feuilletages qu'on veut voir apparaître (cf. 2.D) se laissent réaliser dans  $U \simeq F \times \mathbf{R}$  sur les graphes de fonctions "explicites"  $F \rightarrow \mathbf{R}$ .

**Exemple 2.3.** Si  $F_\xi$  contient une selle positive dont une séparatrice stable  $\gamma$  vient d'un foyer, on peut, par une isotopie de  $F$ , éliminer cette paire de singularités sans changer  $F_\xi$  hors d'un voisinage de  $\gamma$ .

## B. Classe d'Euler des structures tendues.

Soit  $\xi$  une structure de contact (orientée) sur une variété  $V$  et soit  $F$  une surface fermée orientée contenue dans  $V$ . On désigne par  $E(\xi) \in H^2(V, \mathbf{Z})$  la classe d'Euler de  $\xi$  et par  $[F] \in H_2(V)$  la classe d'homologie de  $F$ .

**Théorème 2.4** [El2]. *On suppose que  $\xi$  est tendue et que  $F$  est plongée dans  $V$ . Alors :*

- (i) si  $F = \mathbf{S}^2$ ,  $E(\xi) \cdot [F] = 0$ ;
- (ii) si  $F \neq \mathbf{S}^2$ ,  $|E(\xi) \cdot [F]| \leq -\chi(F)$ .

**Remarque 2.5.** Si  $V$  est fermée, cette inégalité confine  $E(\xi)$  dans un sous-ensemble fini de  $H^2(V, \mathbf{Z})$  (théorème 0.10). En effet, la torsion de  $H^2$  est finie et chaque système générateur de  $H_2$  se représente par des surfaces plongées.

**Démonstration.** Quitte à bouger  $F$  par une isotopie  $C^\infty$ -petite, on peut supposer que  $F_\xi$  est scindé par une courbe  $\Gamma$ . Ainsi,  $F$  est divisée en deux surfaces compactes, de bord commun  $\Gamma$ ,  $F^+$  où  $F_\xi$  est dilatant et  $F^-$  où  $F_\xi$  est contractant. Comme les singularités dilatantes (resp. contractantes) sont celles où les orientations de  $F$  et  $\xi$  coïncident (resp. différent), un argument classique [Th2] montre que  $E(\xi) \cdot [F] = \chi(F^+) - \chi(F^-)$ . Par ailleurs,  $\chi(F) = \chi(F^+) + \chi(F^-)$ . Le lemme qui suit dit que  $\chi(F^+)$  et  $\chi(F^-)$  sont négatifs ou nuls (sauf si  $F = \mathbf{S}^2$  auquel cas  $\chi(F^+) = \chi(F^-) = 1$ ), ce qui entraîne (i) et (ii).

**Lemme 2.6.** *Si une composante de  $F \setminus \Gamma$  est un disque,  $F$  est une sphère et  $\Gamma$  est connexe (car  $\xi$  est tendue).*

**Démonstration.** On suppose qu'une composante de  $F^+$  est un disque  $F'$  et que la composante contiguë  $F''$ , dans  $F^-$ , n'est pas un disque. On va montrer qu'alors  $\xi$  est vrillée en faisant apparaître dans le feuilletage caractéristique de  $F$ , par une isotopie, une orbite fermée bordant un disque qui ne contient qu'une singularité.

On note  $\Gamma_0$  la composante de  $\Gamma$  qui sépare  $F'$  et  $F''$ , et on munit  $F'$  d'un feuilletage radial dilatant. Si le bord de  $F''$  ne se réduit pas à  $\Gamma_0$ , on construit facilement sur  $F''$  un feuilletage contractant ayant une orbite fermée (attractive) qui borde avec  $\Gamma_0$  un anneau sans singularités. En recollant ces deux feuilletages avec le reste de  $F_\xi$ , on trouve un feuilletage scindé par  $\Gamma$  et qui présente la figure promise. D'après le lemme 2.1, on peut le réaliser par une isotopie de  $F$  donc  $\xi$  est vrillée.

Si le bord de  $F''$  se réduit à  $\Gamma_0$ , on observe que, la surface  $F''$  n'étant pas un disque, elle admet un feuilletage contractant ayant une orbite fermée  $\gamma$ . On peut donc supposer que  $\gamma$  est déjà une orbite fermée de  $F''_\xi$ . Dans un voisinage de  $F$  du type  $F \times \mathbf{R}$ , où  $\xi$  est  $\mathbf{R}$ -invariante, on plie  $F$  le long de  $\gamma$  (cf. figure 4), créant ainsi dans le feuilletage caractéristique deux nouvelles orbites fermées  $\gamma'$  et  $\gamma''$ , parallèles à  $\gamma$ , sans ajouter de singularités. Ce feuilletage est scindé par la réunion de  $\Gamma$  et de deux courbes qui entourent l'orbite répulsive  $\gamma'$ . On a ainsi retiré à  $F''$  un anneau, donc ajouté à son bord deux composantes, et la première procédure s'applique. ■

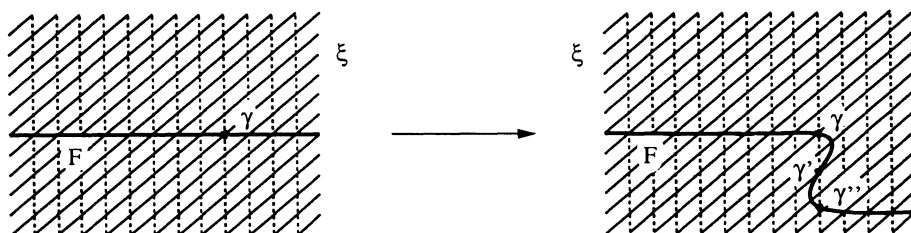


Figure 4

**Remarque 2.7.** Le lemme 2.6 montre que le feuilletage caractéristique d'une sphère plongée dans une structure tendue ne présente jamais d'orbites fermées (un feuilletage dilatant sur un disque n'a pas d'orbites fermées). Avec le lemme 2.1 c, il montre également que, sur une surface orientée  $F$  différente de la sphère, on peut, par isotopie, supprimer du feuilletage caractéristique tous les foyers pour ne garder comme singularités que des selles. En particulier, tout tore est isotope à un tore transversal à  $\xi$ .

### C. Classification des structures tendues sur $D^3$ , $S^3$ et $R^3$ .

**Théorème 2.8** [El2]. *L'espace des structures tendues sur  $D^3$  qui induisent un feuilletage donné sur le bord est faiblement contractile.*

**Démonstration.** On va exhiber dans cet espace un point-base et un procédé "canonique" pour joindre un point quelconque à ce point-base.

**Lemme 2.9** [El2]. *Soit  $S$  une sphère orientée plongée dans une variété  $(V, \xi)$  tendue.*

a) *Il existe une fonction  $f : S \rightarrow \mathbf{R}$  ayant les propriétés suivantes :*

- (i)  *$f$  décroît strictement sur toute orbite régulière de  $S_\xi$  et ses points critiques coïncident avec les singularités de  $S_\xi$  ;*
- (ii) *quand on passe une selle de  $S_\xi$  dans le sens décroissant des valeurs de  $f$ , le nombre de composantes du niveau de  $f$  diminue si la selle est positive et augmente sinon.*

b) *On peut plonger  $S$  dans  $\mathbf{R}^3 = \{(x, y, u)\}$  de telle sorte que  $f$  soit la fonction hauteur  $u|_S$  et qu'en un point critique correspondant à une singularité positive (resp. négative) de  $S_\xi$ , la normale sortante à  $S$  soit  $\partial/\partial u$  (resp.  $-\partial/\partial u$ ).*

c) *La boule  $B$  que  $S$  borde dans  $\mathbf{R}^3$  porte une structure de contact bordée par  $S_\xi$  et canoniquement (à quelques choix contractiles près) définie par  $S_\xi$ .*

#### Démonstration.

a) On construit les niveaux de  $f$ . Les foyers positifs sont des maxima locaux de  $f$  donc les niveaux voisins sont des cercles. Il faut ensuite faire, entre ces cercles, les sommes connexes prescrites par les variétés stables des selles et ceci dans un ordre tel que (ii) soit satisfaite. Pour fixer les idées, on suppose que  $S_\xi$  n'a pas de nœuds-selles et présente exactement une liaison entre selles, allant d'une selle négative  $x_-$  à une selle positive  $x_+$ . Soit  $n$  le nombre de selles positives, donc  $n + 1$  le nombre de foyers positifs (cf. lemme 2.6). Comme il n'y a pas d'orbites fermées (cf. remarque 2.7), toute séparatrice stable d'une selle positive autre que  $x_+$  vient d'un foyer : on fait les  $n - 1$  sommes connexes associées. À chaque fois, le nombre de composantes baisse sans quoi on aurait un cycle formé de foyers répulsifs et de



séparatrices de selles positives : en éliminant ces singularités par paires (cf. exemple **2.3**), on obtiendrait une orbite fermée répulsive. À la fin, le niveau de  $f$  n'a que deux composantes,  $C$  et  $C'$  et de l'une,  $C$  par exemple, part une séparatrice de  $x_+$ . Alors aucune séparatrice de  $x_-$  ne peut venir de  $C$  car sinon, par une petite perturbation du feuilletage, on pourrait détruire la liaison de selles et relier les deux séparatrices stables de  $x_+$  à  $C$ , d'où encore un cycle formé de foyers et de selles positifs. Ainsi, les deux séparatrices stables de  $x_-$  viennent de  $C'$ , de sorte que la somme connexe associée crée une composante de niveau et qu'ensuite, la somme connexe associée à  $x_+$  en supprime une.

b) On associe à  $f$  un arbre  $T$  en identifiant à un point chaque composante connexe de chaque niveau de  $f$ ; la fonction  $f$  induit sur  $T$  une fonction qu'on peut réaliser comme fonction hauteur en plongeant  $T$  dans  $\mathbf{R}^3$ . On prend pour plongement de  $S$  le bord d'un voisinage régulier de  $T$ .

c) On regarde  $\mathbf{R}^3$  comme l'hyperplan d'équation  $v = 0$  dans  $\mathbf{C}^2 = \{(x + iy, u + iv)\}$ , et on cherche une fonction  $h : B \rightarrow \mathbf{R}$ , nulle au bord et positive à l'intérieur, telle que les droites complexes tangentes à l'hypersurface d'équation  $v = h(x, y, u)$  donnent la structure voulue. Le feuilletage  $S_\xi$  détermine le 1-jet de  $h$  le long de  $S$ . On le réalise sur un collier par une fonction  $h_0$  qui convient, puis on étend  $h_0$  en la raccordant, par un procédé de lissage classique, avec une fonction du type  $\varepsilon\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - u^2}$  ( $\varepsilon$  petit et  $R$  grand).

Ces constructions sont canoniques en ce sens qu'elles marchent avec un nombre arbitraire de paramètres. ■

On termine maintenant comme suit. Soit  $\xi$  une structure de contact tendue sur  $\mathbf{D}^3$  vue comme boule unité de  $\mathbf{R}^3$ . On désigne par  $S_r \subset \mathbf{D}^3$  la sphère de rayon  $r$  et par  $B_r$  la boule qu'elle borde. Pour  $r$  variant de 0 à 1, on remplace  $\xi|_{B_r}$  par la structure obtenue canoniquement à partir du feuilletage  $S_{r,\xi}$ . On obtient ainsi un chemin  $\xi_r$ ,  $r \in [0, 1]$ , formé de structures de contact qui coïncident toutes au bord, dont l'origine  $\xi_0$  n'est autre que  $\xi$  et dont l'extrémité est le point-base défini par  $\partial\mathbf{D}_\xi^3$ . ■

**Démonstration du théorème 0.11** [El2]. Pour voir que deux structures de contact tendues sur  $\mathbf{S}^3$  sont isotopes, on les fait coïncider, par isotopie, sur une petite boule et on applique le théorème **2.8** à la boule complémentaire. Maintenant, pour montrer qu'une structure de contact tendue  $\xi$  sur  $\mathbf{R}^3$  est isomorphe à la structure usuelle  $\zeta_0$ , on procède par exhaustion (voir [ElGr] pour des arguments analogues en topologie symplectique). Pour tout  $n \geq 1$ , soit  $B_n$  la boule de rayon  $n$  centrée à l'origine. En appliquant une première isotopie à  $\xi$ , on peut faire en sorte que, pour tout  $n$ , les feuilletages tracés par  $\xi$  et  $\zeta_0$  sur  $\partial B_n$  soient différentiablement conjugués (lemmes **2.1** et **2.6**). D'après le théorème **2.8**,  $(B_n, \xi)$  est alors isomorphe à  $(B_n, \zeta_0)$  pour tout  $n$ . Pour rendre compatibles ces isomorphismes (ou du moins une sous-suite d'entre eux) afin qu'ils engendrent un isomorphisme de  $(\mathbf{R}^3, \xi)$  dans  $(\mathbf{R}^3, \zeta_0)$ , il reste simplement à vérifier que l'espace des plongements  $(B_n, \xi) \rightarrow (\mathbf{R}^3, \zeta_0)$  est

connexe et que toute isotopie de plongements de contact se prolonge en une isotopie ambiante. ■

#### D. Nœuds legendriens et transversaux.

Les nœuds legendriens et transversaux ont d'abord été étudiés dans  $S^3$  par W. Thurston puis D. Bennequin qui ont dégagé certains invariants de nature homologique. Ya. Eliashberg a étendu leur définition comme suit.

Soit  $(V, \xi)$  une variété de contact et  $L$  (resp.  $K$ ) une courbe legendrienne (resp. transversale à  $\xi$ ) fermée, orientée et homologue à zéro. On se donne une surface orientée  $F$  bordée par  $L$  (resp. par  $K$ ) et une section non singulière  $\tau$  de  $\xi|_F$ . On appelle :

- *invariant de Thurston-Bennequin de  $L$*  le nombre d'enlacement  $\text{TB}(L)$  de  $L$  avec la courbe obtenue en poussant légèrement  $L$  suivant un champ de vecteurs normal à  $\xi$  ;
- *enroulement de  $L$  dans  $\xi$  relativement à  $F$*  le degré  $\mathfrak{r}(L, F)$ , dans  $\xi$  orienté, de la tangente orientée à  $L$  par rapport à  $\tau|_{L=\partial F}$  ;
- *auto-enlacement de  $K$  dans  $\xi$  relativement à  $F$*  le nombre d'enlacement  $\mathfrak{l}(K, F)$  de  $K$  avec la courbe obtenue en poussant  $K$  suivant  $\tau$ .

Les nombres  $\mathfrak{r}(L, F)$  et  $\mathfrak{l}(K, F)$  ne dépendent en fait que de la classe d'homologie de  $F$  relativement à son bord. De plus, le choix de  $F$  est souvent clair dans le contexte ou sans importance (par exemple si la classe d'Euler de  $\xi$  est nulle) si bien qu'on écrit simplement  $\mathfrak{r}(L)$  et  $\mathfrak{l}(K)$ . Enfin, quand on renverse les orientations de  $L$  et  $K$ ,  $\mathfrak{r}(L)$  change de signe mais  $\text{TB}(L)$  et  $\mathfrak{l}(K)$  restent les mêmes.

Comme pour la classe d'Euler, il est facile de lire les invariants précédents sur le feuilletage caractéristique de  $F$  et de voir ainsi que, comme  $\chi(F)$ ,  $\mathfrak{l}(K, F)$  est nécessairement un entier impair. De plus, en adaptant aux surfaces à bord les techniques utilisées en 2.A et 2.B, Ya. Eliashberg obtient les inégalités suivantes, que D. Bennequin avait mises en lumière dans  $S^3$  [Ben1] :

**Théorème 2.10 :** *Inégalités de Bennequin [El4, El5]. Si  $\xi$  est tendue et si  $F$  est plongée dans  $V$ , les invariants ci-dessus vérifient :*

$$\begin{aligned} \text{TB}(L) &\leq -\chi(F) - |\mathfrak{r}(L, F)| \\ \mathfrak{l}(K, F) &\leq -\chi(F). \end{aligned}$$

**Exemple 2.11.** Dans  $\mathbf{R}^3$ , la structure usuelle  $\zeta_0$  d'équation  $dz - r^2 d\theta = 0$  est partout transversale à  $\partial/\partial z$ , donc la projection d'un nœud legendrien  $L$  sur le plan  $z = 0$  donne toujours un *diagramme*  $L_0$ . Par suite, pour que deux nœuds legendriens soient isotopes comme tels, ils doivent d'abord être *régulièrement isotopes* comme

nœuds topologiques (i.e. isotopes parmi des nœuds qui se projettent par immersion). De plus, les invariants  $\mathfrak{r}(L)$  et  $\text{TB}(L)$  sont, au signe près, l'enroulement et le nombre de Tait (somme algébrique des croisements) du diagramme  $L_0$ . Or il est bien connu que ces deux invariants caractérisent, dans une classe d'isotopie donnée, la classe d'isotopie régulière d'un nœud topologique. Le théorème qui suit est un analogue de ce fait pour les nœuds legendriens topologiquement triviaux.

**Théorème 2.12** [El5]. *Dans une variété de contact tendue, deux nœuds legendriens topologiquement triviaux  $L$  et  $L'$  sont isotopes comme nœuds legendriens si et seulement si  $\mathfrak{r}(L) = \mathfrak{r}(L')$  et  $\text{TB}(L) = \text{TB}(L')$ . De même, deux nœuds transversaux topologiquement triviaux  $K$  et  $K'$  sont isotopes comme nœuds transversaux si et seulement si  $1(K) = 1(K')$ .*

**Démonstration.** On esquisse simplement le cas des nœuds transversaux. Les techniques de 2.A permettent de voir que  $K$  (comme  $K'$ ) borde un disque  $D$  dont le feuilletage caractéristique sort transversalement le long du bord et a pour singularités exactement  $n + 1$  foyers positifs et  $n$  selles négatives (où  $1(K) = -(2n + 1)$ ), les variétés stables de ces selles formant un arbre  $T$  n'ayant que deux extrémités. Comme on peut, par isotopie, rétracter  $K$  sur un voisinage arbitrairement petit de  $T$  dans  $D$ , il suffit de trouver une isotopie qui envoie le germe de  $D$  le long de  $T$  sur le germe analogue pour  $K'$  : c'est facile. ■

**Remarque 2.13.** On peut construire sans difficulté des nœuds legendriens (resp. transversaux) topologiquement triviaux et dont les invariants  $\text{TB}$  et  $\mathfrak{r}$  (resp.  $1$ ) prennent toutes les valeurs (resp. les valeurs impaires) permises par l'inégalité de Bennequin. En revanche, pour les nœuds topologiquement non triviaux, l'inégalité de Bennequin semble loin d'être optimale et, de plus, il est peu probable que le théorème 2.12 reste vrai.

### 3. Exemples de structures de contact tendues.

#### A. Structures revêtues par des structures tendues.

Le théorème de D. Bennequin donne comme premiers exemples de structures tendues les structures usuelles de  $\mathbf{S}^3$  et  $\mathbf{R}^3$ . On en obtient d'autres en observant que toute structure qui revêt une structure vrillée est elle-même vrillée puisque la pré-image d'un disque est un disque ayant même feuilletage caractéristique. Autrement dit, toute structure revêtue par une structure tendue est tendue.

#### Exemples 3.1.

a) La structure de contact naturelle sur l'espace  $ST^*\mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  des droites coorientées tangentes à  $\mathbf{R}^2$  est définie par  $\cos \theta dx_1 + \sin \theta dx_2 = 0$  (cf. exemple 0.1 b). Son revêtement universel est donc donné par la même équation mais avec  $\theta \in \mathbf{R}$ . On ramène cette structure à la structure usuelle d'équation  $dy -$

$p dx = 0$  par le changement de variables  $x = \theta$ ,  $p = -\sin \theta x_1 + \cos \theta x_2$ ,  $y = \cos \theta x_1 + \sin \theta x_2$ . Il en résulte que, pour toute surface  $F$  différente de  $\mathbf{S}^2$  et  $\mathbf{P}^2$ , la structure naturelle sur  $ST^*F$  est tendue. Par suite, la structure de contact invariante sur  $SL_2(\mathbf{R})$  (fibré tangent unitaire du disque de Poincaré) est tendue, ainsi que toutes les structures qu'on en déduit sur les quotients  $SL_2(\mathbf{R})/\Gamma$ .

b) Les structures naturelles sur  $ST^*\mathbf{S}^2$  et  $ST^*\mathbf{P}^2$  sont également tendues car revêtues par la structure usuelle de  $\mathbf{S}^3$ . Par ailleurs, si  $p$  et  $q$  sont des entiers premiers entre eux,  $0 < q < p$ , et si  $\nu$  est une racine primitive  $p$ -ième de l'unité, l'application linéaire complexe  $\mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ ,  $(z, w) \mapsto (\nu z, \nu^q w)$ , préserve la structure  $\zeta_0$  des droites complexes tangentes à  $\mathbf{S}^3$ ; il en résulte une structure de contact tendue sur l'espace lenticulaire  $\mathbf{L}(p, q)$ .

## B. Structures symplectiquement remplissables.

**Définition 3.2** [El1, El4]. Soit  $\xi$  un champ de plans orientés sur une variété fermée orientée  $V$  de dimension 3 (si  $\xi$  est une structure de contact, on met sur  $V$  l'orientation induite par  $\xi$ ). On dit que  $(V, \xi)$  (ou simplement  $\xi$ ) est *symplectiquement remplissable* s'il existe une variété symplectique compacte  $(W, \omega)$  de dimension 4 pour laquelle :

- (i)  $V$  est le bord orienté de  $W$  ;
- (ii)  $\omega|_{\xi}$  est positive.

**Exemple 3.3.** Une variété complexe compacte  $W$  (de dimension 2) à bord strictement pseudo-convexe  $V = \partial W$  est toujours kählérienne [GuRo, Ben2]. Il s'en suit que la structure de contact naturelle de  $V$  (cf. exemple 0.1 c) est symplectiquement remplissable. C'est par exemple le cas de la structure de contact usuelle sur  $\mathbf{S}^3$ .

Le théorème qui suit, dû à M. Gromov et Ya. Eliashberg, est une généralisation puissante du théorème de D. Bennequin :

**Théorème 3.4** [Gro2, El4, Ben2]. *Toute structure de contact symplectiquement remplissable est tendue.*

**Remarque.** On ignore s'il existe des structures tendues qui n'admettent pas de remplissages symplectiques.

Voici maintenant un procédé pour construire des structures symplectiquement remplissables. Soit  $L$  un nœud legendrien orienté dans une variété de contact  $(V, \xi)$ . Comme  $\xi$  oriente  $V$ , le fibré normal à  $L$  est orienté; de plus, il possède une section canonique définie par  $\xi$ . Ainsi, tout champ de vecteurs  $\nu$  normal à  $L$  détermine une chirurgie de Morse d'indice 2 le long de  $L$  (via "la" trivialisations normale directe qu'il induit) et cette chirurgie ne dépend que du degré  $k$  de  $\nu$  par rapport à  $\xi$  : on l'appelle *k-chirurgie de V le long de L*. On montre sans trop de peine que :

**Théorème 3.5** [El5, El7, We]. *Si  $(V, \xi)$  est symplectiquement remplissable, la variété  $V'$  obtenue par  $-1$ -chirurgie de  $V$  le long de  $L$  porte naturellement une structure de contact  $\xi'$  symplectiquement remplissable.*

**Remarque 3.6.** Si  $L$  est homologue à zéro dans  $V$ , il est clair que la topologie de  $V'$  dépend uniquement du type de  $L$  comme nœud topologique et de la valeur de l'invariant de Thurston-Bennequin  $TB(L)$ . Cependant, la structure  $\xi'$  peut, elle, dépendre du type de  $L$  comme nœud legendrien. En particulier, l'enroulement  $r(L)$  peut influencer sur la classe d'Euler de  $\xi'$ .

**Exemple 3.7** [El5]. *Soit  $L$  un nœud legendrien orienté topologiquement trivial dans  $S^3$  muni de sa structure usuelle. Si  $TB(L) = -p$  et  $r(L) = q$ , la  $-1$ -chirurgie de  $S^3$  le long de  $L$  donne l'espace lenticulaire  $\mathbf{L}(p+1, 1)$  muni d'une structure remplissable  $\xi$  dont la classe d'Euler vaut :*

$$E(\xi) = q \pmod{p+1} \in H^2(\mathbf{L}(p+1, 1), \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_{p+1}.$$

### C. Structures de contact tendues et feuilletages tendus.

**Définition 3.8.** Soit  $V$  une variété fermée orientée de dimension 3 et  $\mathcal{F}$  un feuilletage orienté de codimension 1 sur  $V$ .

a) On dit que  $\mathcal{F}$  est *tendu (taut)* s'il existe une courbe fermée transversale à  $\mathcal{F}$  qui coupe toutes les feuilles (en particulier,  $\mathcal{F}$  n'a aucune composante de Reeb).

b) On dit qu'une feuille  $F$  est de *profondeur 0* si elle est compacte, et de *profondeur  $k+1$* ,  $k = 0, 1, \dots$ , si  $(\text{Adh}F) \setminus F$  est formé de feuilles de profondeurs strictement inférieures et contient au moins une feuille de profondeur  $k$ . Si toutes les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont de profondeur finie et bornée, on appelle *profondeur du feuilletage* le maximum des profondeurs de ses feuilles (voir [CaCo, Ga, He]).

Les travaux de G. Reeb, S.P. Novikov et H. Rosenberg [Ros] montrent que, si  $V$  porte un feuilletage tendu  $\mathcal{F}$ , ou bien  $V$  est irréductible (c'est-à-dire que toute sphère plongée dans  $V$  y borde une boule), ou bien  $V$  est  $S^2 \times S^1$  et  $\mathcal{F}$  est le feuilletage produit. Réciproquement :

**Théorème 3.9** [Ga]. *Si  $V$  est irréductible et si  $H_2(V)$  est non nul,  $V$  porte un feuilletage tendu de profondeur finie (en général peu différentiable).*

En comparant les énoncés de **2.B** avec certains résultats de [Le, Rou, Su, Th1, Th2], on note une parenté entre les structures de contact tendues et les feuilletages sans composantes de Reeb. D'ailleurs, la modification de Lutz, qui vrille les structures de contact, rappelle beaucoup l'opération qui permet d'introduire une composante de Reeb dans un feuilletage. Le théorème qui suit, annoncé récemment par W. Thurston, établit des liens concrets :

**Théorème 3.10** [Th3]. *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage tendu de profondeur finie sur une variété  $V$  irréductible. Il existe sur  $V$  des structures de contact positives arbitrairement  $C^0$ -proches de  $\mathcal{F}$  et (pour cette raison) tendues.*

Le fil de la démonstration présentée par W. Thurston [Th3, El6] est le suivant : on définit d'abord la structure de contact près des feuilles compactes puis on l'étend successivement aux feuilles de profondeur  $1, 2, \dots$  en adaptant le procédé de diffusion mis au point par S. Altschuler [Al]. On montre que les structures sont tendues en montrant que le feuilletage  $\mathcal{F}$  est *symplectiquement cobordant* (en un sens évident avec la définition 3.2) à un feuilletage tendu  $\mathcal{F}'$  de profondeur strictement inférieure sur une variété irréductible  $V'$ . Voici comment traiter le cas des feuilletages de profondeur 0, c'est-à-dire des fibrations sur le cercle.

**Exemple 3.11** [Th3, El6]. *Soit  $V$  une variété fermée orientée de dimension 3 fibrée au-dessus du cercle en surfaces orientées  $F$  de genre  $g$ . On note  $\eta$  le champ des plans orientés tangents aux fibres.*

a) *À revêtement fini près,  $(V, \eta)$  est symplectiquement remplissable (cf. définition 3.2).*

b) *Si  $g \geq 1$ , il existe sur  $V$  des structures de contact positives arbitrairement  $C^0$ -proches de  $\eta$ , donc tendues puisque revêtues par des structures symplectiquement remplissables.*

### Démonstration.

a) Le groupe modulaire de  $F$  (groupe des classes d'isotopies de difféomorphismes préservant l'orientation) a pour abélianisé un groupe cyclique fini (nul dès que  $g \geq 3$  [Mum, Po]). Autrement dit, à revêtement fini près, la monodromie  $\varphi$  du fibré  $V$  est le produit d'un certain nombre  $h$  de commutateurs. Il en résulte que ce fibré s'étend en un fibré  $\pi : W \rightarrow S$  où  $W$  est une variété compacte de dimension 4 bordée par  $V$  et  $S$  est une surface compacte orientée de genre  $h$  bordée par un cercle. De plus, il existe sur  $W$  une 2-forme fermée  $\omega_0$  de rang partout égal à 2 et positive sur les fibres au-dessus de  $S$ . En effet, tout difféomorphisme d'une variété fermée est isotope à un difféomorphisme isochore [Mo], de sorte qu'on peut supposer que  $\varphi$  et tous les difféomorphismes de sa décomposition en commutateurs préservent l'aire. Étant donné alors une forme d'aire  $\omega$  sur  $S$ , la somme  $\pi^*\omega + \omega_0$  est une structure symplectique sur  $W$  qui est positive sur les fibres.

b) On regarde  $V$  comme le produit  $F \times [0, 1]$  dans lequel  $F \times \{0\}$  et  $F \times \{1\}$  sont identifiés par la monodromie  $\varphi$ , difféomorphisme de  $F$  bien défini seulement à isotopie près. On va définir les structures de contact voulues par des équations du type  $\alpha_t + dt = 0$  où  $t$  désigne la coordonnée dans  $[0, 1]$ , les  $\alpha_t$  sont des 1-formes sur  $F = F \times \{t\}$  et  $\alpha_1 = \varphi_*\alpha_0$ . La  $C^0$ -proximité avec le champ  $\eta$  d'équation  $dt = 0$  est mesurée par la petitesse des formes  $\alpha_t$  et la condition de contact s'écrit  $d\alpha_t - \alpha_t \wedge \dot{\alpha}_t > 0$ . Cette inégalité signifie qu'aux singularités de  $\alpha_t$ ,  $d\alpha_t$  doit être positive et qu'en dehors, le feuilletage défini par  $\alpha_t$  doit tourner en fonction de  $t$

(dans le sens indirect) assez vite pour compenser  $d\alpha_t$  mais surtout d'autant plus vite qu'on veut les  $\alpha_t$  petites (la multiplication de  $\alpha_t$  par  $\varepsilon$  change  $d\alpha_t$  en  $\varepsilon d\alpha_t$  et  $\alpha_t \wedge \dot{\alpha}_t$  en  $\varepsilon^2 \alpha_t \wedge \dot{\alpha}_t$ ). Il s'agit maintenant d'exhiber une forme  $\alpha_0$  pour laquelle on puisse trouver un bon chemin  $\alpha_t$  entre  $\alpha_0$  et  $\varphi_*\alpha_0$ .

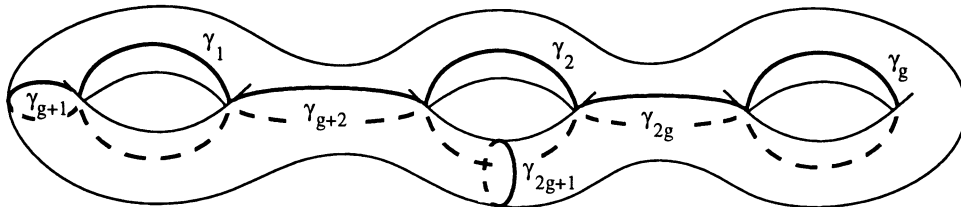


Figure 5

D'après [Hu], le groupe modulaire de  $F$  est engendré par les twists de Dehn autour des  $2g + 1$  courbes  $\gamma_i$  de la figure 5. Soit alors  $\alpha_0$  une 1-forme fermée sur  $F$  n'ayant comme singularités que  $2g - 2$  selles et dont le feuilletage  $\mathcal{F}_0$  est dessiné sur la figure 6. La forme  $\alpha_0$  définit une trivialisaton de la surface à bord  $F'$  obtenue en retirant à  $F$  un petit voisinage ouvert  $U$  des selles. Autour de chaque courbe  $\gamma_i$ , on peut trouver un anneau  $A_i$  disjoint de  $U$  et feuilleté par  $\mathcal{F}_0$  en cercles parallèles au bord ou en segments allant d'un bord à l'autre. Par suite, un twist de Dehn à support dans  $A_i$  envoie  $\mathcal{F}_0$  sur un feuilletage qui est homotope à  $\mathcal{F}_0$  relativement à  $F \setminus A_i$  et ceci parmi les feuilletages non singuliers sur  $A_i$ . Comme (à isotopie près)  $\varphi$  est produit de tels twists,  $\alpha_1 = \varphi_*\alpha_0$  coïncide avec  $\alpha_0$  hors de la réunion des anneaux  $A_i$  et définit sur  $F'$ , via la trivialisaton donnée par  $\alpha_0$ , une application  $h_1 : F' \rightarrow S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  homotope à l'application constante  $h_0 = 0$  donnée par  $\alpha_0$ . Étant donné un entier  $n$  arbitrairement grand, on peut donc relever  $h_1$  en une fonction  $\tilde{h}_1 : F' \rightarrow \mathbf{R}$  égale à  $-2n$  au bord et partout majorée par  $-n$ . On peut ainsi joindre les restrictions à  $F'$  de  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  par un chemin  $\alpha_t$  tel que  $-\alpha_t \wedge \dot{\alpha}_t$  soit arbitrairement grand ( $d\alpha_t$  restant borné). Pour prolonger  $\alpha_t$  à  $F$ , on observe qu'une selle étant d'indice  $-1$ , quand on fait tourner son portrait de phase de  $n$  tours dans le sens indirect, les vecteurs font en chaque point  $2n$  tours dans le même sens. Enfin, on perturbe légèrement  $\alpha_t$  pour que  $d\alpha_t$  soit positive aux singularités. ■

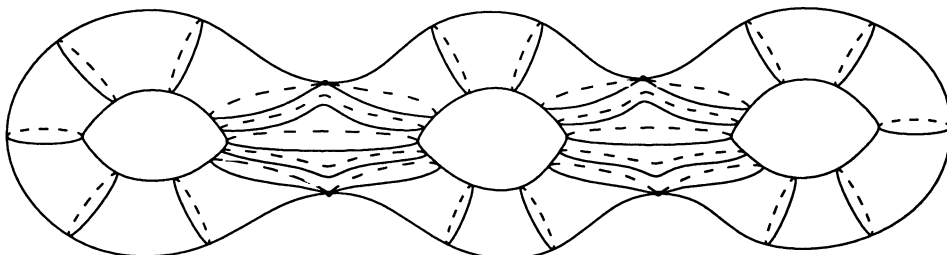


Figure 6

**Remarque 3.12.** Dans la preuve du **a**, on peut choisir le genre  $h$  de  $S$  arbitrairement grand et obtenir ainsi une infinité de remplissages symplectiques topologiquement différents qui ont tous un  $\pi_2$  nul. Ceci contraste avec les résultats de Ya. Eliashberg et D. McDuff qui montrent que les structures usuelles sur la sphère et les espaces lenticulaires (cf. exemple **3.1 b**) n'admettent, à éclatement près, qu'un nombre fini de remplissages [El4, McD2, Ben2].

#### D. Exemples de structures tendues non isomorphes.

Pour clore cet exposé, voici deux résultats qui contrastent avec les théorèmes d'unicité de **2.C**. Pour tout réel positif  $a$ , on note  $\xi_a$  la structure de contact définie sur  $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1$  par  $a^2 r^2 d\theta_1 + (1+r^2) d\theta_2 = 0$ , où  $(r, \theta_1)$  sont des coordonnées polaires dans  $\mathbf{R}^2$  et où  $\theta_2 \in \mathbf{S}^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ . Chaque structure  $\xi_a$  est tendue car elle se plonge dans  $(\mathbf{S}^3, \zeta_0) : (r, \theta_1, \theta_2) \mapsto (r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) \in \mathbf{C}^2$ , où  $r_1^2 + r_2^2 = 1$  et  $r_1^2/r_2^2 = a^2 r^2/(1+r^2)$  (l'image du plongement est le tore plein  $0 \leq r_1 < a/\sqrt{1+a^2}$ ).

**Théorème 3.13** [El3]. *Deux structures  $\xi_a$  et  $\xi_b$  sont isomorphes si et seulement si  $1/a^2 - 1/b^2$  est un entier.*

**Démonstration.** Si  $1/a^2 - 1/b^2$  est un entier  $k$ , le difféomorphisme

$$(r, \theta_1, \theta_2) \mapsto ((a/b)r, \theta_1 + k\theta_2, \theta_2)$$

envoie  $\xi_a$  sur  $\xi_b$ . Maintenant, s'il existe un difféomorphisme  $\varphi$  qui envoie  $\xi_a$  sur  $\xi_b$ , il induit, par son action à l'infini de  $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1$ , un isomorphisme  $\psi : H^1(\mathbf{T}^2, \mathbf{R}) \rightarrow H^1(\mathbf{T}^2, \mathbf{R})$  qui préserve  $[d\theta_2]$  (au signe près) et envoie donc  $[d\theta_1]$  sur  $[d\theta_1 + kd\theta_2]$  pour un certain entier  $k$ . Pour tous  $c$  et  $C$  positifs, on pose  $V_C = \{(r, \theta_1, \theta_2) \mid r > C\}$ ,  $U_{cC} = \{(c^2 r^2 t, (1+r^2)t) \in \mathbf{R}^2 \mid t > 0, r > C\}$  et on munit  $T^*\mathbf{T}^2 = \mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^2 = \{(\theta_1, \theta_2, p_1, p_2)\}$  de sa structure symplectique canonique, différentielle de la forme  $p_1 d\theta_1 + p_2 d\theta_2$ . Pour tout  $B > 0$ ,  $V_B$  contient l'image d'un certain  $V_A$ . Par *symplectisation* de  $\varphi|_{V_A} : V_A \rightarrow V_B$  [Ar1, El3], on construit un plongement  $\mathbf{T}^2 \times U_{aA} \rightarrow \mathbf{T}^2 \times U_{bB}$  qui préserve la forme  $p_1 d\theta_1 + p_2 d\theta_2$ . Un théorème de V. Benci, généralisé par J.-C. Sikorav [Si1], montre qu'alors  $U_{bB}$  contient l'image de  $U_{aA}$  par l'isomorphisme linéaire  $\psi^{-1} \in GL_2(\mathbf{Z})$ . Cela entraîne  $1/b^2 \leq 1/a^2 - k \leq (1+B^2)/b^2 B^2$  donc, en faisant tendre  $B$  vers l'infini,  $k = 1/a^2 - 1/b^2$ . ■

Ce recours, via symplectisation, aux théorèmes de rigidité concernant les sous-variétés lagrangiennes exactes des espaces cotangents [Gro2, LaSi, Si1, Si2] est également à la base du résultat suivant. Pour tout  $n \geq 1$ , on désigne par  $\zeta_n$  la structure de contact définie sur  $\mathbf{T}^3 = ST^*\mathbf{T}^2 = \mathbf{T}^2 \times \mathbf{S}^1$  par  $\cos(n\theta) dx_1 + \sin(n\theta) dx_2 = 0$ , où  $(x_1, x_2) \in \mathbf{T}^2$  et  $\theta \in \mathbf{S}^1$  (la structure  $\zeta_1$  est la structure usuelle sur  $ST^*\mathbf{T}^2$ ). Les structures  $\zeta_n$  sont toutes tendues (cf. **3.A**) et sont homotopes comme champs de plans (cf. exemple **0.6**).

**Théorème 3.14** [Gi2]. *Pour  $n > 1$ ,  $\zeta_n$  n'est pas isomorphe à  $\zeta_1$ .*



## BIBLIOGRAPHIE

- [Al] S. ALTSCHULER, *A linear contact flow for 3-dimensional manifolds*, prépublication (Cambera) 1991.
- [Ar1] V.I. ARNOLD, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir 1974.
- [Ar2] V.I. ARNOLD, *Singularities of caustics and wave fronts*, Kluwer 1990.
- [Ar3] V.I. ARNOLD, *Contact geometry and wave propagation*, L'Ens. Math. **36** (1990), 215–266.
- [Ar4] V.I. ARNOLD, *Contact geometry : the geometrical method of Gibbs's thermodynamics*, Proc. of the Gibbs Symp., D.G. Caldi et G.D. Mostow eds, Amer. Math. Soc. (1990), 163–179.
- [Ar5] V.I. ARNOLD, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Mir 1978.
- [Au] M. AUDIN, *Cobordisme d'immersions lagrangiennes et legendriennes*, Travaux en Cours **20**, Hermann 1987.
- [Ben1] D. BENNEQUIN, *Entrelacements et équations de Pfaff*, Soc. Math. France, Astérisque **107-108** (1983), 83–161.
- [Ben2] D. BENNEQUIN, *Topologie symplectique, convexité holomorphe et structures de contact [d'après Ya. Eliashberg, D. McDuff et al.]*, Sémin. Bourbaki exposé 725, Soc. Math. France, Astérisque **189-190** (1990), 285–323.
- [BFG] M. BEALS, C. FEFFERMAN et R. GROSSMAN, *Strictly pseudo-convex domains in  $\mathbb{C}^n$* , Bull. Amer. Math. Soc. **89** (1983), 125–322.
- [Bl] D. BLAIR, *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Springer Lect. Notes in Math. **509** (1976).
- [CaCo] J.C. CANTWELL et L.W. CONLON, *Poincaré-Bendixson's theory for leaves of codimension 1*, Trans. Amer. Math. Soc. **265** (1981), 181–209.
- [Ch] S.S. CHERN, *The geometry of G-structures*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 167–219.
- [Dav] A.A. DAVYDOV, *Normal forms of differential equations, unresolved in derivative*, Funct. Anal. Appl. **19** (1985), 1–10.
- [Dou] A. DOUADY, *Nœuds et structures de contact en dimension 3 [d'après D. Bennequin]*, Sémin. Bourbaki exposé 604, Soc. Math. France, Astérisque **105-106** (1983), 129–148.
- [El1] YA. ELIASHBERG, *Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds*, Invent. Math. **98** (1989), 623–637.

- [E12] YA. ELIASHBERG, *Contact 3-manifolds, twenty years since J. Martinet's work*, Ann. Inst. Fourier **42** (1992), 165–192.
- [E13] YA. ELIASHBERG, *New invariants of open symplectic and contact manifolds*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 513–520.
- [E14] YA. ELIASHBERG, *Filling by holomorphic discs and its applications*, London Math. Soc. Lect. Notes Ser. **151** (1991), 45–67.
- [E15] YA. ELIASHBERG, *Legendrian and transversal knots in tight contact manifolds*, à paraître dans le livre *Topological methods in modern mathematics* (en l'honneur de J. Milnor), Publish or Perish.
- [E16] YA. ELIASHBERG, communication orale privée sur des travaux récents de W. Thurston (Luminy), mai 1992.
- [E17] YA. ELIASHBERG, *Topological characterization of Stein manifolds of dimension  $> 2$* , Int. J. of Math. **1** (1990), 29–46.
- [E18] YA. ELIASHBERG, *On symplectic manifolds with some contact properties*, J. Diff. Geom. **33** (1991), 233–238.
- [ElGr] YA. ELIASHBERG et M. GROMOV, *Convex symplectic manifolds*, Proc. of Symp. in Pure Math. **52** (1991), 135–162.
- [Ga] D. GABAI, *Foliations and the topology of 3-manifolds*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 445–503.
- [Gei] H. GEIGES, *Contact structures on  $(n - 1)$ -connected  $(2n + 1)$ -manifolds*, Pacific J. of Math (à paraître).
- [Gi1] E. GIROUX, *Convexité en topologie de contact*, Comment. Math. Helv. **66** (1991), 637–677.
- [Gi2] E. GIROUX, *Une structure de contact, même tendue, est plus ou moins tordue*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. (à paraître).
- [Gra] J.W. GRAY, *Some global properties of contact structures*, Ann. of Math. **69** (1959), 421–450.
- [Gro1] M. GROMOV, *Stable maps of foliations into manifolds*, Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. **33** (1969), 707–734.
- [Gro2] M. GROMOV, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307–347.
- [Gro3] M. GROMOV, *Partial differential relations*, Springer Verlag 1986.
- [GuRo] R. GUNNING et H. ROSSI, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice Hall 1965.

- [He] G. HECTOR, *Architecture des feuilletages de classe  $C^2$* , Soc. Math. France, Astérisque **107-108** (1983), 243–258.
- [Hu] S. HUMPHRIES, *Generators for the mapping class group*, Springer Lect. Notes in Math. **722** (1979), 44–47.
- [LaSi] F. LALONDE et J.-C. SIKORAV, *Sous-variétés lagrangiennes et lagrangiennes exactes des fibrés cotangents*, Comment. Math. Helv. **66** (1991), 18–33.
- [Le] G. LEVITT, *Feuilletages des variétés de dimension 3 qui sont des fibrés en cercles*, Comment. Math. Helv. **53** (1978), 572–594.
- [Lu1] R. LUTZ, *Sur quelques propriétés des formes différentielles en dimension 3*, thèse (Strasbourg) 1971.
- [Lu2] R. LUTZ, *Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles de dimension 3*, Ann. Inst. Fourier **27** (1977), 1–15.
- [Lu3] R. LUTZ, *Sur la géométrie des structures de contact invariantes*, Ann. Inst. Fourier **29** (1979), 283–303.
- [Ma] J. MARTINET, *Formes de contact sur les variétés de dimension 3*, Springer Lect. Notes in Math. **209** (1971), 142–163.
- [McD1] D. MCDUFF, *Applications of convex integration to symplectic and contact geometry*, Ann. Inst. Fourier **37** (1987), 107–133.
- [McD2] D. MCDUFF, *The structure of rational and ruled symplectic 4-manifolds*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 679–712.
- [Me] C. MECKERT, *Forme de contact sur la somme connexe de deux variétés de contact de dimension impaire*, Ann. Inst. Fourier **32** (1982), 251–260.
- [Mo] J. MOSER, *On the volume element of a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. **120** (1965), 286–294.
- [Mul] M.-P. MULLER, *Une structure symplectique sur  $\mathbf{R}^6$  avec une sphère lagrangienne plongée et un champ de Liouville complet*, Comment. Math. Helv. **65** (1990), 623–663.
- [Mum] D. MUMFORD, *Abelian quotients of the Teichmüller modular group*, J. d'Anal. Math. **18** (1967), 227–244.
- [Po] J. POWELL, *Two theorems on the mapping class group of a surface*, Proc. Amer. Math. Soc. **68** (1978), 347–350.
- [Ros] H. ROSENBERG, *Foliations by planes*, Topology **7** (1968), 131–138.
- [Rou] R. ROUSSARIE, *Plongements dans les variétés feuilletées et classification de feuilletages sans holonomie*, Publ. Math. I.H.E.S. **43** (1973), 101–142.

- [Ru] M. RUMIN, *Formes différentielles sur les variétés de contact*, thèse (Orsay) 1992.
- [Si1] J.-C. SIKORAV, *Rigidité symplectique dans le cotangent de  $\mathbf{T}^n$* , Duke Math. J. **59** (1989), 227–231.
- [Si2] J.-C. SIKORAV, *Quelques propriétés des plongements lagrangiens*, Suppl. Bull. Soc. Math. France, Mem. No 46, **119** (1991), 151–167.
- [Su] D. SULLIVAN, *A homological characterization of foliations consisting of minimal surfaces*, Comment. Math. Helv. **54** (1979), 218–223.
- [Th1] W. THURSTON, *Foliations of manifolds which are circle-bundles*, thèse (Berkeley) 1972.
- [Th2] W. THURSTON, *A norm for the homology of 3-manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **339** (1986), 99–130.
- [Th3] W. THURSTON, *Contact structures and foliations on 3-manifolds*, exposé oral à la West Coast Topology Conf. (Stanford), mai 1992.
- [ThWi] W. THURSTON et H. WINKELNKEMPER, *On the existence of contact forms*, Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), 345–347.
- [We] A. WEINSTEIN, *Contact surgeries and symplectic handlebodies*, Hokkaido Math. J. **20** (1991), 241–251.

Emmanuel GIROUX  
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées  
U.M.R. 128 du C.N.R.S.  
Ecole Normale Supérieure de Lyon  
46, Allée d'Italie  
69364 LYON CEDEX 07