Astérisque

MICHEL LEDOUX

Inégalités isopérimétriques en analyse et probabilités

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 773, p. 343-375

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__343_0>

Séminaire BOURBAKI
45ème année, 1992-93, n° 773

Juin 1993

INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES EN ANALYSE ET PROBABILITÉS

par Michel LEDOUX

Les développements modernes de l'utilisation des inégalités isopérimétriques en analyse et probabilités trouvent leur origine en théorie locale des espaces de Banach, avec la démonstration de V. D. Milman [Mi1] (*voir* aussi [F-L-M]), au début des années soixante-dix, du fameux théorème de A. Dvoretzky [Dv] sur les sections presque sphériques des corps convexes (*cf.* [Mi3]) Cette démonstration (présentée dans l'exposé de B. Maurey [Ma2]) s'appuie en effet sur l'inégalité isopérimétrique sur les sphères due à P. Lévy [Lé] et E. Schmidt [Sc], généralisée aux variétés riemanniennes à courbure de Ricci positive par M. Gromov [Gr1]. Outre son apport fonctionnel, V. D. Milman en dégage le principe général de concentration de la mesure qui a permis le développement et l'extension des idées isopérimétriques au delà de leur cadre géométrique propre habituel. Ce principe a éclairé de façon décisive plusieurs aspects géométriques en théorie locale des espaces de Banach (*voir* [M-S], [Mi2], [Pi3]...) et s'est révélé comme un outil majeur du calcul des probabilités dans les espaces de Banach [L-T2]. En particulier, M. Talagrand a tiré au cours des dernières années, dans de multiples applications probabilistes (mesures gaussiennes de dimension infinie, processus gaussiens, mesure de Wiener), toute la force de la version gaussienne de l'inégalité de Lévy-Gromov. Simultanément, et dans une remarquable série de travaux, il établit de nouvelles inégalités isopérimétriques et de concentration dans des produits d'espaces probabilisés par une analyse, très novatrice, de la notion isopérimétrique traditionnelle de grossissement. Ces inégalités, répondant à l'origine à des questions sur les évaluations et les propriétés limites des sommes de variables aléatoires vectorielles indépendantes, ouvrent aujourd'hui l'isopérimétrie sur un vaste champ d'applications. Outre le calcul des probabilités dans les espaces de Banach, celles-ci concernent à ce jour de nombreux domaines des probabilités, vectorielles, géométriques et combinatoires. La majeure partie de cet exposé est consacrée aux résultats de M. Talagrand sur les inégalités isopérimétriques et de concentration des mesures gaussiennes et produits.

Dans une seconde partie, nous esquissons plus brièvement quelques idées sur des approches fonctionnelles du phénomène de concentration de la mesure et de l'isopérimétrie des opérateurs différentiels du second ordre de l'analyse et des probabilités (chaînes de Markov, laplacien des variétés riemanniennes, générateur d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener, liens avec l'hypercontractivité). L'étude du théorème de Dvoretzky a en effet motivé parallèlement la recherche de démonstrations simplifiées de la concentration sphérique ou gaussienne. B. Maurey et G. Pisier [Pi1], [Pi3] ont ainsi découvert un argument simple suffisant au principe de démonstration proposé par V. D. Milman. Dans un cadre riemannien par exemple, cette méthode se traduit directement sur la courbure et le semigroupe de la chaleur, rejoignant les travaux de N. Varopoulos [Va3], [Va4], [V-SC-C] sur l'isopérimétrie et les estimations du noyau de la chaleur sur les variétés riemanniennes et les groupes de Lie. Par ces développements isopérimétriques, on voit ainsi interagir inégalités fonctionnelles, théorie des semigroupes, probabilités et géométrie.

L'inégalité isopérimétrique de Lévy-Gromov a joué, dans les développements qui nous occupent, un rôle important au carrefour de la géométrie riemannienne et euclidienne (par son application au théorème de Dvoretzky), de l'analyse, et des probabilités (par l'intermédiaire de sa version limite gaussienne). Soit V une variété riemannienne compacte connexe de dimension $N \geq 2$, d sa métrique riemannienne et μ sa mesure riemannienne normalisée. La mesure de surface correspondante sera notée abusivement de la même façon. Désignons par $R(V)$ l'infimum du tenseur de Ricci $\mathrm{Ric}(\cdot,\cdot)$ de V sur tous les vecteurs tangents de longueur un. Rappelons que si S_r^N est la sphère de rayon $r > 0$ dans $\mathbb{R}^{N+1}$, $R(S_r^N) = (N-1)/r^2$. On désigne ci-dessous par σ_r^N la mesure invariante par rotation normalisée sur S_r^N.

THÉORÈME 1. *Supposons que $R(V) = R > 0$ et associons à V la variété S_r^N de courbure constante égale à R (i.e. r vérifie $R(S_r^N) = (N-1)/r^2 = R$). Soit A une partie mesurable de V à bord ∂A suffisamment régulier et soit B une calotte sphérique ou boule géodésique de S_r^N de même mesure $\sigma_r^N(B) = \mu(A)$. Alors,*

$$\mu(\partial A) \geq \sigma_r^N(\partial B). \tag{1}$$

La démonstration de E. Schmidt [Sc] (qui ne concerne que les sphères) fait appel aux délicates techniques de symétrisation au sens de Steiner (pour des démonstrations plus accessibles, *voir* [F-L-M], [Ben]). La démonstration de P. Lévy [Lé] (pour les surfaces à courbure positive) et M. Gromov [Gr1], [M-S], [G-H-L] (pour les variétés riemanniennes à courbure positive) s'appuie sur l'existence d'hypersurfaces minimales et sur les outils plus modernes de courants intégraux. L'égalité dans (1) ne peut avoir lieu que si V est une sphère elle-même et A une boule géodésique sur cette sphère, élément extrémal du problème isopérimétrique. Notons par ailleurs que le théorème 1, appliqué à des ensembles dont le diamètre tend vers 0, inclut l'inégalité isopérimétrique euclidienne classique indiquant, qu'à volume donné, les boules réalisent le minimum de surface.

Il est une formulation équivalente, mais peut-être moins connue, du théorème 1 à l'aide de voisinages qui présente l'avantage d'éviter les considérations de bord et de mesure de surface. Si A est une partie de V, on désigne par A_u son voisinage (ou grossissement isopérimétrique) pour la métrique d d'ordre $u \geq 0$, soit $A_u = \{x \in V;\, d(x,A) \leq u\}$. Une version du théorème 1 ([F-L-M]) indique alors que pour tout $u \geq 0$,

$$\mu(A_u) \geq \sigma_r^N(B_u). \tag{2}$$

Le lien entre (1) et (2) est fourni par une formule de contenu de Minkowski [B-Z], [Os]. C'est de cette formulation de l'isopérimétrie que V. D. Milman a dégagé le principe de concentration en s'intéressant à l'inégalité (2) pour des grandes valeurs de u plutôt que des valeurs infinitésimales. Dans le cadre du théorème de Lévy-Gromov, si A est de mesure suffisamment grande, par exemple $\mu(A) \geq \frac{1}{2}$, alors, en vertu du calcul explicite du voisinage d'une calotte de volume moitié, on voit que, pour tout $u \geq 0$,

$$\mu(A_u) \geq 1 - \exp\Big(-R\,\frac{u^2}{2}\Big), \tag{3}$$

soit un contrôle gaussien du complémentaire du voisinage d'ordre u de A uniformément en les ensembles A tels que $\mu(A) \geq \frac{1}{2}$, pour donc des valeurs de u relativement grandes. Autrement dit, A_u recouvre rapidement tout l'espace (au sens de la mesure). De façon essentiellement équivalente, si f est une fonction lipschitzienne sur V et si m est une médiane de f pour μ (*i.e.* $\mu(\{f \geq m\}) \geq \frac{1}{2}$ et $\mu(\{f \leq m\}) \geq \frac{1}{2}$), pour tout $u \geq 0$,

$$\mu\big(\{|f-m| \leq u\}\big) \geq 1 - 2\exp\big(-Ru^2/2\|f\|_{\mathrm{Lip}}^2\big). \tag{4}$$

Ainsi, f se concentre autour d'une valeur (moyenne) avec forte probabilité suivant le rapport $R/\|f\|_{\mathrm{Lip}}^2$. Ce phénomène, dont nous verrons qu'il a un caractère très général, a été rassemblé dans la littérature (*cf.* [M-S]) sous le nom de phénomène de concentration de la mesure.

Les estimées précédentes sont particulièrement intéressantes pour des familles de mesures comme par exemple les mesures σ_1^N sur les sphères unités S_1^N lorsque N devient grand pour lesquelles (4) par exemple s'écrit

$$\sigma_1^N\big(\{|f-m|\le u\}\big)\ge 1-2\exp\big(-(N-1)u^2/\|f\|_{\mathrm{Lip}}^2\big).$$

C'est de ce jeu entre N grand, u de l'ordre de $1/\sqrt{N}$, et les tailles respectives de m et $\|f\|_{\mathrm{Lip}}$ pour f la jauge du convexe que V. D. Milman tire alors l'information nécessaire pour choisir au hasard des sections euclidiennes du convexe et démontrer de la sorte le théorème de Dvoretzky (*voir* [Ma2] et les références qui y sont citées).

Une fois formulé abstraitement sur un espace métrique (polonais) (X,d) muni d'une mesure de probabilité μ (ou d'une famille de mesures de probabilités), le phénomène de concentration de la mesure se traduit sur la fonction de concentration

$$\alpha(u)=\alpha\big((X,d;\mu);u\big)=\inf\big\{\mu(A_u);\ A\subset X,\mu(A)\ge\tfrac12\big\},\quad u\ge 0.$$

Il est remarquable que cette fonction de concentration puisse être contrôlée dans un très grand nombre de situations, le plus souvent par une décroissance gaussienne, comme plus haut. Si les arguments isopérimétriques font partie des outils privilégiés utilisés pour évaluer une fonction de concentration, le fait de s'intéresser ici aux grossissements A_u pour les grandes valeurs de u plutôt les valeurs infinitésimales (ce qui constitue réellement le problème isopérimétrique) rend l'étude du phénomène de concentration bien souvent assez différente de celle de l'isopérimétrie. En particulier, les techniques de réarrangement n'y sont pas souveraines et la structure plus large y offre plus de possibilités. Cette distinction se retrouve également dans le champ des applications. Divers outils nouveaux se sont ainsi développés. M. Gromov et V. D. Milman [G-M] ont par exemple démontré que si X est une variété riemannienne compacte, pour tout $u\ge 0$,

$$\alpha(u)\ge 1-C\exp\big(-c\sqrt{\lambda_1}u\big)$$

(avec $C=\frac34$ et $c=\log(\frac32)$) où λ_1 est la première valeur propre non triviale du laplacien sur X. Ils développent également diverses applications topologiques de la concentration dont certains théorèmes de points fixes. Du côté probabiliste, des inégalités de martingales mises en évidence par B. Maurey [Ma1] sont mises à profit en théorie locale des espaces de Banach (construction de sous-suites symétriques [Ma1], extensions du théorème de Dvoretzky, *voir* [Ma2], [M-S], [Pi1]). L'idée principale consiste ici à représenter, pour une bonne fonction f, la différence $f-\mathbb{E}(f)$ sous la forme d'une somme de différences de martingale

$d_i = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})$ pour une certaine filtration (finie) $(\mathcal{F}_i)_i$. Les raisonnements classiques sur les sommes de variables aléatoires indépendantes montrent de la même façon que si $\sum_i \|d_i\|_\infty^2 \leq 1$, pour tout $u \geq 0$,

$$\mathbb{P}\big(\{|f - \mathbb{E}(f)| \leq u\}\big) \geq 1 - 2e^{-u^2/2} \tag{5}$$

(*voir* [Az], [Ma1]). Un corollaire en est la concentration de la mesure de Haar μ sur $\{0,1\}^n$ muni de la distance de Hamming de la forme

$$\alpha(u) \geq 1 - C\exp\Big(-\frac{u^2}{Cn}\Big)$$

pour une certaine constante numérique $C > 0$. Ce résultat peut être établi à partir de la connaissance des éléments extrémaux de l'isopérimétrie ([Ha], [W-W]), mais V. D. Milman et G. Schechtman [M-S] le déduisent de l'inégalité (5). Ce même outil est utilisé pour étudier la concentration du groupe symétrique [Ma1].

Par ailleurs, la traduction gaussienne de l'inégalité de Lévy-Gromov et de son phénomène de concentration associé s'est révélée comme l'un des outils les plus puissants du calcul des probabilités dans les espaces de Banach. M. Talagrand en développe ainsi, lors de ces dernières années, de nombreuses conséquences à l'étude des mesures gaussiennes de dimension finie ou infinie dont nous présentons les aspects principaux ci-dessous. Mais, face aux questions laissées en suspens, notamment dans l'étude des sommes de variables aléatoires vectorielles indépendantes et de leurs propriétés limites, M. Talagrand invente alors de nouvelles inégalités isopérimétriques et de concentration dans des produits d'espaces de probabilités. Il analyse la propriété de concentration en étudiant des notions de voisinages et de grossissements dans ces structures, sortant en particulier du cadre métrique et géométrique classique. Ces inégalités abstraites sont démontrées par un principe simple, mais puissant, de récurrence sur le nombre de coordonnées. Il y a quelques mois, par un examen systématique de la méthode, M. Talagrand a enrichi encore ses résultats et ses applications qui touchent aujourd'hui à de nombreux thèmes probabilistes. Nous présentons, dans la première partie, les inégalités de M. Talagrand et quelques unes de leurs importantes applications.

Dans la deuxième partie de cet exposé, nous examinons quelques idées fonctionnelles permettant d'établir des propriétés isopérimétriques et de concentration. Ces idées ont aussi pour source l'étude du théorème de Dvoretzky. B. Maurey et G. Pisier [Pi1] (voir aussi [Pi2] sur les transformées de Riesz gaussiennes) ont en effet remarqué comment l'invariance par rotation sphérique ou gaussienne pouvait être mise à profit pour démontrer de façon simple la propriété de concentration nécessaire au théorème de Dvoretzky. Formulée dans le cadre de l'inégalité de Lévy-Gromov, cette remarque fait appel à des outils de semigroupes et des inégalités fonctionnelles. À titre d'introduction, nous présentons brièvement cette démonstration sous la forme de la proposition suivante – cette proposition nous servira également pour une approche élémentaire de la concentration gaussienne –. La traduction fonctionnelle de la courbure à l'aide de la formule de Bochner et du semigroupe de la chaleur qui y est utilisée est à rapprocher des travaux de P. Li et S.-T. Yau [L-Y] et N. Varopoulos [Va5] sur les inégalités de Harnack paraboliques et, plus généralement, les estimations du noyau de la chaleur sur les variétés et les groupes de Lie dont nous développerons les aspects isopérimétriques dûs à N. Varopoulos [Va4], [Va5], [V-SC-C].

PROPOSITION 2. *Soit V comme dans le théorème 1 avec $R(V) = R > 0$; soit f une fonction lipschitzienne sur V telle que $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$ et de moyenne nulle. Alors, pour tout réel λ,*

$$\int \exp(\lambda f)\, d\mu \leq \exp\big(\lambda^2/2R\big).$$

Il est aisé de se convaincre avec l'inégalité de Tchebitcheff que le contenu de cette proposition est essentiellement équivalent à (4) (avec moyenne au lieu de médiane) et (3).

Démonstration. (*cf.* [Led2]) Soit ∇ le gradient sur V et Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami. D'après la formule de Bochner [B-G-M], pour toute fonction suffisamment régulière f sur V,

$$\frac{1}{2}\,\Delta\big(|\nabla f|^2\big) - \nabla f \cdot \nabla(\Delta f) = \mathrm{Ric}\,(\nabla f, \nabla f) + \big\|\mathrm{Hess}\,(f)\big\|_2^2.$$

En particulier,

$$\frac{1}{2}\,\Delta\big(|\nabla f|^2\big) - \nabla f \cdot \nabla(\Delta f) \geq R\,|\nabla f|^2 + \frac{1}{N}\,(\Delta f)^2. \tag{6}$$

De cette inégalité où interviennent courbure et dimension, nous userons seulement de la version sans terme dimensionnel

$$\frac{1}{2}\,\Delta\big(|\nabla f|^2\big) - \nabla f \cdot \nabla(\Delta f) \geq R\,|\nabla f|^2. \tag{7}$$

Considérons alors le semigroupe de la chaleur $P_t = \mathrm{e}^{t\Delta}$, $t \geq 0$, sur V et fixons f suffisamment régulière. Pour tout $s > 0$ fixé, soit $F(t) = P_t\big(|\nabla(P_{s-t} f)|^2\big)$, $t \leq s$.

En vertu de l'inégalité (7) appliquée à $P_{s-t}f$, $F'(t) \geq 2RF(t)$, $t \leq s$. Ainsi, la fonction $\mathrm{e}^{-2Rt}F(t)$ est croissante sur l'intervalle $[0, s]$. Donc, pour tout $s \geq 0$,

$$(8) \qquad \left|\nabla(P_s f)\right|^2 \leq \mathrm{e}^{-2Rs} P_s\big(|\nabla f|^2\big).$$

Cette relation, en fait équivalente à (7), exprime une propriété de commutation entre les actions respectives du semigroupe et du gradient. C'est d'elle uniquement dont nous nous servons pour établir la proposition. Soit en effet une fonction régulière f sur V telle que $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$ et $\int f\, d\mu = 0$. Pour tout λ fixé, posons $G(s) = \int \exp(\lambda P_s f)\, d\mu$, $s \geq 0$. Comme $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$, notons que, en vertu de (8), $|\nabla(P_s f)|^2 \leq \mathrm{e}^{-2Rs}$ pour tout s. Il vient, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
G(t) = 1 - \int_t^\infty G'(s)\, ds &= 1 - \lambda \int_t^\infty \left(\int \Delta(P_s f) \exp(\lambda P_s f)\, d\mu \right) ds \\
&= 1 + \lambda^2 \int_t^\infty \left(\int \left|\nabla(P_s f)\right|^2 \exp(\lambda P_s f)\, d\mu \right) ds \\
&\leq 1 + \lambda^2 \int_t^\infty \mathrm{e}^{-2Rs} G(s)\, ds
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé une intégration par parties en la variable spatiale. Par itération, $G(0) \leq \exp(\lambda^2/2R)$, ce qui fournit le résultat pour toute f régulière, mais en général aussi par une approximation simple. La proposition est établie.

I. Concentration de la mesure et inégalités isopérimétriques dans les espaces produits d'après M. Talagrand

1. La concentration gaussienne

L'inégalité isopérimétrique gaussienne peut être considérée comme la version à l'infini de l'inégalité isopérimétrique sur les sphères S_r^N lorsque la dimension N et le rayon r tendent tous deux vers l'infini dans le rapport géométrique $(R(S_r^N) = (N-1)/r^2)$ et probabiliste $r^2 = N$. C'est en effet une propriété ancienne attribuée (mais de façon erronée semble-t-il [D-F]) à H. Poincaré suivant laquelle la mesure gaussienne standard peut être obtenue comme limite des mesures uniformes $\sigma^N_{\sqrt{N}}$ sur les sphères $S^N_{\sqrt{N}}$ (convenablement projetées). Plus précisément, soit γ_n la mesure gaussienne canonique sur $\mathbb{R}^n$ de densité par rapport à la mesure de Lebesgue $(2\pi)^{-n/2}\exp(-|x|^2/2)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Alors, pour tout borélien A de $\mathbb{R}^n$, $\gamma_n(A)$ est la limite de $\sigma^N_{\sqrt{N}}(\Pi^{-1}_{N+1,n}(A))$ quand N tend vers l'infini, où $\Pi_{N+1,n}$ est la projection de $\mathbb{R}^{N+1}$ sur $\mathbb{R}^n$ $(N \geq n)$. Cette propriété a fait dire à H. P. McKean [MK] que la mesure de Wiener s'interprétait comme la mesure uniforme sur une sphère de dimension infinie et de rayon racine carrée de l'infini.

À l'aide de cette observation, C. Borell [Bo1] et V. N. Sudakov et B. S. Tsirel'son [S-T] déduisent indépendamment en 1974 la version gaussienne de l'isopérimétrie sur les sphères. Les grossissements isopérimétriques s'entendent ici simplement par rapport à la métrique euclidienne. Autrement dit, et pour des comparaisons futures, si $A \subset \mathbb{R}^n$ et $u \geq 0$, $A_u = A + B_2(0,u)$ où $B_2(0,u)$ est la boule euclidienne de centre l'origine et de rayon u.

THÉORÈME 3. *Soit A un borélien de $\mathbb{R}^n$ et soit H un demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^n\,;\langle x,h\rangle \leq a\}$, $|h|=1$, $a \in \mathbb{R}$, de même mesure gaussienne que A : $\gamma_n(H) = \gamma_n(A)$; alors, pour tout $u \geq 0$,*

$$\gamma_n(A_u) \geq \gamma_n(H_u).$$

Les demi-espaces sont ainsi les éléments extrémaux de l'isopérimétrie gaussienne ; ils apparaissent en effet simplement comme la limite de Poincaré des calottes sphériques extrémales sur les sphères. Une démonstration plus intrinsèque, mais qui reste néanmoins délicate, du théorème 3 a été donnée par A. Ehrhard [Eh1], [Eh3] à partir d'une technique de symétrisation de Steiner adaptée à la mesure gaussienne.

En vertu de l'invariance par rotation gaussienne et du caractère produit de γ_n, la mesure gaussienne d'un demi-espace se calcule en fait en dimension 1, de sorte que l'isopérimétrie gaussienne est indépendante de la dimension, un trait souvent caractéristique du cadre gaussien. De fait, si Φ désigne la fonction de répartition de γ_1,

$$\Phi(t) = \gamma_1\big(]-\infty,t]\big) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-x^2/2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

le théorème 3 s'exprime de façon équivalente par l'implication suivante : si $\gamma_n(A) = \Phi(a)$ (ou seulement $\geq$) pour un $a \in \mathbb{R}$, pour tout $u \geq 0$,

$$\gamma_n(A_u) \geq \Phi(a+u). \tag{9}$$

Sous cette forme se déduit immédiatement le phénomène de concentration pour γ_n : si $\gamma_n(A) \geq \frac{1}{2}$, on peut choisir $a = 0$ et, pour tout $u \geq 0$,

$$\gamma_n(A_u) \geq \Phi(u) \geq 1 - \mathrm{e}^{-u^2/2}.$$

Pour les fonctions, si f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$ avec $\|f\|_{\text{Lip}} \leq 1$ et si m est une médiane de f pour γ_n, pour tout $u \geq 0$,

$$\gamma_n(\{|f-m| \leq u\}) \geq 1 - 2\mathrm{e}^{-u^2/2}. \tag{10}$$

Cette concentration gaussienne peut être utilisée avec avantage en lieu et place de celle des sphères dans la démonstration du théorème de Dvoretzky [Pi1], [Pi3].

Si nous avons déduit la concentration (10) de l'isopérimétrie elle-même, elle peut aussi, bien entendu, s'établir directement par le schéma de la proposition 2. Il suffit d'y remplacer le semigroupe de la chaleur par le semigroupe gaussien $(U_t)_{t\geq 0}$, dit d'Hermite ou d'Ornstein-Uhlenbeck, de représentation intégrale (formule de Mehler)

$$U_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f\big(\mathrm{e}^{-t} + (1-\mathrm{e}^{-2t})^{1/2} y\big)\, d\gamma_n(y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0.$$

Son générateur L est donné par $Lf(x) = \Delta f(x) - \langle x, \nabla f(x)\rangle$ pour toute fonction régulière f sur $\mathbb{R}^n$. Il vérifie trivialement la relation de commutation $\nabla U_t f = \mathrm{e}^{-t} U_t(\nabla f)$ nécessaire à la démonstration de la proposition 2. Cette commutation exprime de façon équivalente une formule de Bochner pour le générateur du second ordre L de dimension infinie ($N=\infty$) et de courbure constante égale à 1 (limite de $R(S^N_{\sqrt{N}})$ quand N tend vers l'infini) par l'inégalité (*cf.* (6) ou (7))

$$\frac{1}{2} L(|\nabla f|^2) - \nabla f \cdot \nabla(Lf) \geq (Lf)^2$$

pour toute bonne fonction f. La géométrie du générateur de Markov L est donc purement de dimension infinie, même sur un espace de dimension finie. Les conséquences abstraites de ces observations sont à l'origine de l'étude par D. Bakry et M. Émery des diffusions hypercontractives sous des hypothèses de courbure et dimension (inégalité (6)) de générateurs de Markov [B-É], [Ba].

D'un point de vue probabiliste, la démonstration de la proposition 2 pour γ_n revient à écrire une formule d'Itô ainsi que l'a noté B. Maurey [Pi1]. Pour toute fonction f suffisamment régulière sur $\mathbb{R}^n$,

$$f(B_1) - \mathbb{E} f(B_1) = \int_0^1 \nabla P_{1-t} f(B_t) \cdot dB_t$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien usuel sur $\mathbb{R}^n$ et $(P_t)_{t\geq 0}$ son semigroupe associé (le semigroupe de la chaleur). Il ne reste plus qu'à noter que l'intégrale stochastique a même loi que β_T où $(\beta_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien linéaire et $T = \int_0^1 |\nabla P_{1-t}f(B_t)|^2\,dt$. Ainsi, pour toute fonction lipschitzienne f telle que $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$, $T \leq 1$ presque sûrement et, si $u \geq 0$,

$$\mathbb{P}\big(\{f(B_1) - \mathbb{E}f(B_1) \geq u\}\big) \leq \mathbb{P}\big(\{\max_{0\leq t\leq 1} \beta_t \geq u\}\big) \leq \mathrm{e}^{-u^2/2}$$

Bien que présentée ci-dessus pour la mesure gaussienne canonique de dimension finie, la forme même de (9) autorise, par des procédés tout à fait standard, l'extension de l'isopérimétrie et de sa concentration aux mesures gaussiennes (quelconques) de dimension infinie. C'est en effet en dimension finie qu'est concentrée toute la quintessence de l'isopérimétrie (et de bien d'autres propriétés) gaussiennes, son adaptation en dimension infinie reposant simplement sur une approximation finie-dimensionnelle convenable. Soit par exemple $(E, \mathcal{H}, \mu)$ un espace de Wiener abstrait, c'est-à-dire un espace de Banach réel séparable E muni d'une mesure gaussienne (centrée) μ d'espace de Hilbert autoreproduisant $\mathcal{H} \subset E$. De façon plus précise, la factorisation $E' \xrightarrow{i} \mathrm{L}^2(\mu) \xrightarrow{{}^t i} E$ où i est l'injection canonique définit un sous-espace hilbertien $\mathcal{H} = {}^t i(\mathrm{L}^2(\mu))$ appelé espace autoreproduisant de μ. Alors (*voir* [Bo1]), si $\mu(A) \geq \Phi(a)$, pour tout $u \geq 0$,

$$\mu_*(A_u) \geq \Phi(a+u), \tag{11}$$

où le grossissement A_u est entendu ici au sens de l'espace autoreproduisant comme la somme de Minkowski $A_u = A + B_{\mathcal{H}}(0,u)$, $B_{\mathcal{H}}(0,u)$ étant la boule de $\mathcal{H}$ de centre 0 et de rayon u. L'utilisation de la mesure intérieure μ_* est rendue nécessaire par le possible manque de mesurabilité de $A + B_{\mathcal{H}}(0,u)$. Il est à noter que si le support de μ est de dimension infinie, $\mu(\mathcal{H}) = 0$, rendant ainsi l'énoncé (11) plus surprenant peut-être que son analogue de dimension finie.

L'inégalité isopérimétrique gaussienne – et plus particulièrement la concentration associée – apparaît à ce jour comme la clef dans la compréhension de nombreuses questions touchant aux mesures et processus gaussiens. Mentionnons quelques unes de ses applications les plus frappantes. Historiquement, l'étude de l'intégrabilité des normes de vecteurs gaussiens a été un thème important d'investigation. Après la découverte de l'intégrabilité exponentielle par H. S. Landau et L. A. Shepp [L-S] (avec une démonstration déjà d'inspiration isopérimétrique) et X. Fernique [Fer1] (que l'on peut faire remonter en fait aux travaux de J.-P. Kahane sur les séries de Rademacher aléatoires [Ka]), l'outil isopérimétrique a jeté un éclairage décisif. Soit comme précédemment μ une mesure gaussienne centrée sur un espace de Banach réel séparable $(E, \|\cdot\|)$; soit m tel que $\mu(\{x;\, \|x\| \leq m\}) \geq \frac{1}{2}$ et appliquons (11) à $A = \{x;\, \|x\| \leq m\}$ pour lequel on peut alors choisir $a = 0$. Or, $A_u \subset \{x;\, \|x\| \leq m + \sigma u\}$ où

$$\sigma = \sup_{x \in B_{\mathcal{H}}(0,1)} \|x\| \qquad \left(= \sup_{\xi \in E', \|\xi\| \leq 1} \left(\int \xi(x)^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \right)$$

de sorte que, pour tout $u \geq 0$,

$$\mu\big(\{x;\ \|x\| \leq m + \sigma u\}\big) \geq 1 - \mathrm{e}^{-u^2/2}. \tag{12}$$

Le même argument appliqué à $A = \{x;\ \|x\| \geq m\}$ pour m une médiane fournit une formule de concentration de la norme autour de m.

Une inégalité similaire s'obtient bien entendu de la même façon à partir de la version gaussienne de dimension infinie de la proposition 2. Il suffit d'y remplacer médiane par moyenne. Le raisonnement s'applique de la même façon aux fonctions f sur E lipschitziennes au sens de $\mathcal{H}$, c'est-à-dire telle que $|f(x+h) - f(x)| \leq |h|$ pour tout $x \in E$ et tout $h \in \mathcal{H}$.

Comme conséquence de (12), $\int \exp(\alpha \|x\|^2)\, d\mu(x) < \infty$ si et seulement si $\alpha < 1/2\sigma^2$, ou, autrement dit,

$$\lim_{u \to \infty} \frac{1}{u^2} \log \mu\big(\{x;\ \|x\| \geq u\}\big) = -\frac{1}{2\sigma^2}\,. \tag{13}$$

Mais (12) nous apprend en fait beaucoup plus par le jeu entre les deux paramètres m et σ, le premier étant en général beaucoup plus grand que le second. (Comme sur les sphères, c'est de ce jeu dont sont issues les démonstrations gaussiennnes du théorème de Dvoretzky [Pi1].)

Cette application simple cache en fait quelque peu toute la puissance de l'outil isopérimétrique. M. Talagrand [Ta1] a ainsi démontré, par un choix plus judicieux de l'ensemble A doublé d'un argument d'approximation en dimension finie, que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout u assez grand,

$$\mu\big(\{x;\ \|x\| \leq \varepsilon + \sigma u\}\big) \geq 1 - \exp\Big(-\frac{u^2}{2} + \varepsilon u\Big). \tag{14}$$

Un remarquable résultat d'A. Ehrhard [Eh1] indique que la fonction sur $[0, \infty[$, $F(u) = \Phi^{-1}(\mu(x; \|x\| \leq u))$ est concave. Alors que (13) exprime que l'on a $\lim_{u \to \infty} F(u)/u = 1/\sigma$, (14) s'interprète par le fait que $\lim_{u \to \infty}[F(u) - (u/\sigma)] = 0$. Autrement dit, la droite u/σ est asymptote à l'infini de F.

L'inégalité isopérimétrique et la concentration gaussiennes peuvent également être mises à profit dans le contexte des grandes déviations [Ch], [BA-L], [Led2]. Si $A \subset E$, soit $I(A) = \inf\{\frac{1}{2}|h|^2; h \in A \cap \mathcal{H}\}$ la fonctionnelle de grandes déviations associée à la mesure gaussienne μ sur $(E, \|\cdot\|; \mathcal{H})$. Considérons alors une partie fermée A de E et r tel que $0 < r < I(A)$; par définition de $I(A)$, $A \cap B_{\mathcal{H}}(0, \sqrt{2r}) = \emptyset$. Comme A est fermée et les boules de $\mathcal{H}$ sont compactes dans $(E, \|\cdot\|)$, il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait encore $A \cap \big[B_{\mathcal{H}}(0, \sqrt{2r}) + B_E(0, \delta)\big] = \emptyset$

(où $B_E(0,\delta)$ est la boule de centre l'origine et de rayon δ pour la norme $\|\cdot\|$ sur E). Il est immédiat alors par (11) que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$\mu(\varepsilon^{-1}A) \leq \mu\big(\big[B_{\mathcal{H}}(0,\varepsilon^{-1}\sqrt{2r}) + B_E(0,\varepsilon^{-1}\delta)\big]^c\big) \leq \mathrm{e}^{-r/\varepsilon^2},$$

soit la borne supérieure des grandes déviations (qui généralise (13))

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log \mu(\varepsilon^{-1}A) \leq -I(A).$$

Outre son caractère élémentaire, cette approche permet de préciser le rôle de la topologie dans les grandes déviations gaussiennes et de s'en affranchir dans des extensions purement mesurables [BA-L].

Récemment, M. Talagrand a approfondit divers aspects de la concentration gaussienne. Outre [Ta4] et [Ta11], c'est ainsi qu'il analyse, de deux façons distinctes, la géométrie des ensembles A pour lesquels le principe général de concentration peut être précisé, et parfois considérablement amélioré. En effet, s'il y a extrémalité sur les demi-espaces, ce n'est plus le cas pour des ensembles, par exemple, convexes et symétriques. Pour ceux-ci, M. Talagrand [Ta12] démontre le théorème suivant.

THÉORÈME 4. *Soit A un ensemble convexe et symétrique (par rapport à l'origine) de $\mathbb{R}^n$; supposons que le polaire A° de A puisse être recouvert par N ensembles $(T_i)_{1\leq i\leq N}$ tels que $\int \sup_{y\in T_i}\langle x,y\rangle\, d\gamma_n(x) \leq \frac{1}{2}$; alors, pour tout $u \geq 0$,*

$$\gamma_n(A_u) \geq 1 - 4N\log(\mathrm{e}u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}.$$

Cet énoncé admet, comme précédemment, une version analogue pour des mesures gaussiennes quelconques de dimension infinie. Mettre à profit ce résultat revient à estimer les nombres (d'entropie) N. M. Talagrand fournit plusieurs exemples de calcul. Une de ses applications concerne la mesure de Wiener μ sur $C([0,1])$ pour laquelle il démontre à partir du théorème 4 (en fait directement dans [Ta10] pour l'application à la vitesse de convergence dans la loi du logarithme itéré de Strassen) que si U est la boule unité de $C([0,1])$ pour la norme uniforme, pour tous $\varepsilon > 0$ et $u \geq 0$ et une certaine constante numérique $C > 0$,

$$\mu\big(\varepsilon U + B_{\mathcal{H}}(0,u)\big) \geq 1 - \exp\bigg(\frac{C}{\varepsilon^2} - \frac{\varepsilon u}{2} - \frac{u^2}{2}\bigg).$$

Des estimations similaires ont lieu pour d'autres normes sur l'espace de Wiener, comme par exemple les normes hölderiennes. Par rapport à la concentration, l'ensemble εU a ici une mesure très petite. Ce résultat est étroitement lié aux comportements des mesures gaussiennes pour les petites boules et à la récente importante découverte de J. Kuelbs et W. Li [K-L] liant ces comportements (une nouvelle fois à travers l'isopérimétrie) aux nombres d'entropie apparaissant dans le théorème 4, qui peuvent alors être contrôlés par la fonction $\gamma_n(\varepsilon A)$, $0 < \varepsilon \leq 1$ (*voir* [Ta12]).

Dans une autre direction, M. Talagrand [Ta7] observe qu'il y a parfois intérêt à sortir tout à fait du cadre gaussien (parallèlement à ses travaux sur les mesures produits). Il remplace ainsi la loi gaussienne standard sur $\mathbb{R}$ par la loi μ_1 de densité $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ et examine les propriétés isopérimétriques des lois produits μ_n sur $\mathbb{R}^n$ (*voir* aussi [Ta15], [Ma3]). Il met en évidence pour ces mesures une inégalité isopérimétrique pour un grossissement qui n'est plus euclidien, mais un mélange approprié entre la distance euclidienne et la distance de la norme ℓ_1. Ce résultat a constitué une phase importante de l'évolution abstraite de son approche.

THÉORÈME 5. *Il existe une constante numérique $c > 0$ ayant la propriété suivante : si A est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$, et si $\mu_n(A) = \mu_1(]-\infty, a])$, $a \in \mathbb{R}$, alors, pour tout $u \geq 0$,*

$$\mu_n\big(A + \sqrt{u}\, B_2 + u\, B_1\big) \geq \mu_1\big(]-\infty, a + cu]\big)$$

où B_1 et B_2 sont respectivement les boules unités de $\mathbb{R}^n$ pour les normes ℓ_1 et ℓ_2. En particulier, si $\mu_n(A) \geq \frac{1}{2}$,

$$\mu_n\big(A + \sqrt{u}\, B_2 + u\, B_1\big) \geq 1 - e^{-cu}.$$

La géométrie (complexe !) du grossissement $\sqrt{u}\, B_2 + u\, B_1$ a plusieurs conséquences importantes, même donc au cadre gaussien. En effet, par un principe de contraction (*cf.* [Pi1]), le théorème 5 peut préciser dans certains cas le phénomène de concentration gaussien. Par exemple, on peut déduire du théorème 5 que si A est un cube de $\mathbb{R}^n$ de la forme $A = \{x;\ |x_i| \leq \sqrt{\log n},\ i = 1, \ldots, n\}$, et si $\sqrt{\log n}$ est beaucoup plus grand que u,

$$\gamma_n(A_u) \geq 1 - \exp\left(-\frac{u^2}{C} \cdot \frac{\sqrt{\log n}}{u}\right),$$

ce qui se vérifie bien sûr directement.

Parmi les autres applications de l'isopérimétrie et de la concentration gaussiennes développées au cours de la décennie passée, mentionnons les remarquables travaux de C. Borell [Bo2], [Bo3] sur l'intégrabilité et les comportements des queues des éléments des chaos de Wiener ainsi que les liens étroits avec les propriétés hypercontractives qu'il met de cette façon en évidence (*voir* aussi [Eh4], [Led3]), l'étude de la géométrie de la mesure gaussienne [Eh2], [Eh3], [Bo4], les applications à l'analyse sur l'espace de Wiener [Fa1], [Fa2]. Citons également l'application à la caractérisation de M. Talagrand de la bornitude et la continuité des processus gaussiens par les mesures majorantes [Ta2] (*voir* l'exposé [Fer2]). M. Talagrand en fournit lui-même [Ta8] une nouvelle démonstration simplifiée grâce à l'outil isopérimétrique, qui ouvre la possibilité de minorations hors du cadre gaussien [Ta6], [Ta14].

2. Mesures produits

Motivé par le cadre produit gaussien et des problèmes ouverts sur les sommes de variables aléatoires vectorielles indépendantes, M. Talagrand s'interroge, dès 1986, sur les propriétés isopérimétriques dans des produits d'espaces de probabilités. Une mesure gaussienne sur un espace de Banach séparable E est en effet la loi d'une série convergente $\sum_i g_i x_i$ où (g_i) est une suite orthogaussienne et les x_i sont éléments de E. Il est naturel d'examiner alors d'autres suites que la suite gaussienne, en particulier une suite de variables de Rademacher, ou plus généralement des séries convergentes $\sum_i X_i$ où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans E. L'un des premiers exemples examinés par M. Talagrand est celui de la mesure uniforme sur $\{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$ pour lequel il améliore la concentration avec un énoncé indépendant de la dimension, et il invente surtout une méthode de démonstration par récurrence sur la dimension [Ta3]. C'est cette méthode entièrement nouvelle qui lui permet de dégager des inégalités isopérimétriques et de concentration dans une structure produit abstraite.

Soit (Ω, Σ, μ) un espace probabilisé et soit P la mesure produit $\mu^{\otimes n}$ sur Ω^n. Un point x de Ω^n a pour coordonnées $x = (x_1, \dots, x_n)$. (Il est aisé de se convaincre que l'on ne gagne pas en généralité, dans les résultats qui vont suivre, à considérer des produits $\left(\Pi_{i=1}^n \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^n \mu_i\right)$ où les facteurs ne sont pas nécessairement identiques.)

La distance de Hamming sur Ω^n est donnée par $d(x,y) = \mathrm{Card}\{1 \leq i \leq n;\, x_i \neq y_i\}$. La fonction de concentration α de Ω^n pour la distance d vérifie, pour toute mesure produit P,

$$\alpha(u) \geq 1 - C\exp\Big(-\frac{u^2}{Cn}\Big) \tag{15}$$

où $C > 0$ est numérique. Ce résultat s'interprète en disant que si $P(A) \geq \frac{1}{2}$, pour la plupart des éléments x de Ω^n, il existe $y \in A$ à distance de l'ordre de

$\sqrt{n}$. Dans le cas de l'espace à deux points, le résultat précédent se déduit d'une inégalité isopérimétrique [Ha], [W-W]. Une démonstration utilisant l'inégalité de martingales (5) est présentée dans [M-S] (*voir* aussi [MD] pour une version avec meilleure constante). M. Talagrand en donne une démonstration élémentaire par récurrence sur n. Si A est une partie de Ω^n et x est un point de Ω^n, désignons par $\varphi_A^1(x)$ la distance de Hamming de x à A définie donc par

$$\varphi_A^1(x) = \inf\bigl\{k \geq 0;\, \exists\, y \in A,\, \mathrm{Card}\{1 \leq i \leq n;\, x_i \neq y_i\} \leq k\bigr\}.$$

M. Talagrand [Ta15] démontre que pour tout $\lambda > 0$,

$$\int \mathrm{e}^{\lambda\varphi_A^1}\, dP \leq \frac{1}{P(A)}\,\mathrm{e}^{n\lambda^2/4}. \tag{16}$$

En particulier, d'après l'inégalité de Tchebitcheff, pour tout entier k,

$$P\bigl(\{\varphi_A^1 \leq k\}\bigr) \geq 1 - \frac{1}{P(A)}\,\mathrm{e}^{-k^2/n},$$

soit la concentration (15). Le raisonnement s'applique de la même façon à toutes les métriques de Hamming $d_a(x,y) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{\{x_i \neq y_i\}}$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, avec $|a|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$ en lieu et place de n dans le second membre de (16). Le résultat peut aussi se renforcer lorsque l'on s'intéresse de façon plus générale à d'autres fonctions de la probabilité de A dans le second membre de cette inégalité, comme par exemple $P(A)^{-\gamma}$; après une optimisation en $\gamma > 0$, M. Talagrand obtient ainsi que pour $k \geq \bigl(\frac{n}{2}\log\frac{1}{P(A)}\bigr)^{1/2}$,

$$P\bigl(\{\varphi_A^1 \leq k\}\bigr) \geq 1 - \exp\biggl(-\frac{2}{n}\biggl[k - \Bigl(\frac{n}{2}\log\frac{1}{P(A)}\Bigr)^{1/2}\biggr]^2\biggr),$$

inégalité qui présente l'avantage de se rapprocher du meilleur exposant $-2k^2/n$.

Notons que diverses questions de mesurabilité se posent sur φ_A^1 ; celles-ci ne sont en aucun cas essentielles et seront ignorées dans ce qui suit (en supposant par exemple Ω fini).

L'écriture précédente de φ_A^1 ouvre la possibilité de mesurer de façons très variées la proximité (ou l'éloignement) d'un point x d'un ensemble A. En particulier, elle permet de s'affranchir du cadre métrique. C'est ainsi, qu'outre la fonction φ_A^1, qui exprime en quelque sorte le contrôle d'un point x de Ω^n par un seul point de A, M. Talagrand imagine deux autres contrôles, ou fonctions de grossissements, principaux : un contrôle par plusieurs points (non métrique) et un contrôle par enveloppe convexe.

Si q est un entier ≥ 2 et $A^1, \dots, A^q$ sont des parties de Ω^n, posons, pour tout élément $x = (x_1, \dots, x_n)$ de Ω^n,

$$\varphi^q(x) = \varphi^q_{A^1,\dots,A^q}(x) = \inf\big\{k \geq 0;\ \exists\, y^1 \in A^1, \dots, \exists\, y^q \in A^q \text{ tels que } \\ \operatorname{Card}\big\{1 \leq i \leq n;\ x_i \notin \{y_i^1, \dots, y_i^q\}\big\} \leq k\big\}.$$

En choisissant tous les A^i identiques à un même A, $\varphi^q(x) \leq k$ indique que les coordonnées de x peuvent être copiées, sauf peut-être pour k d'entre elles, par les coordonnées de q éléments de A. En adoptant à nouveau un raisonnement de récurrence sur le nombre de coordonnées, M. Talagrand démontre le théorème suivant [Ta15].

THÉORÈME 6. *Avec les notations précédentes,*

$$\int q^{\varphi^q(x)}\, dP(x) \leq \prod_{i=1}^{q} \frac{1}{P(A^i)}\,.$$

En particulier, pour tout entier k,

$$P\big(\{\varphi^q \leq k\}\big) \geq 1 - q^{-k} \prod_{i=1}^{q} \frac{1}{P(A^i)}\,.$$

Dans la pratique, q est le plus souvent fixé, par exemple égal à 2, et l'on voit ainsi comment contrôler par un ensemble A fixé au départ des échantillons arbitraires avec une décroissance exponentielle de la probabilité en le nombre de coordonnées négligées. Ce théorème, le premier établi par M. Talagrand (avec à l'origine une démonstration beaucoup plus délicate basée sur des arguments plus classiques de réarrangements [Ta5]), a permis de résoudre de nombreux problèmes en probabilités dans les espaces de Banach. Il est à la genèse, avec [Ta3], des développements abstraits qui suivent (*voir*, pour un historique, [Ta15], [L-T2]). Pour illustrer son emploi, soit S une somme $X_1 + \cdots + X_n$ de variables aléatoires indépendantes et positives sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On se place donc sur $[0, \infty[^n$ muni du produit P des lois des X_i. Soit $A = \big\{\sum_{i=1}^n x_i \leq m\big\}$ avec m choisi de sorte que, par exemple, $P(A) \geq \frac{1}{2}$; soit $\varphi^q = \varphi^q_{A,\dots,A}$. Si $x \in \{\varphi^q \leq k\}$, il existe $y^1, \dots, y^q \in A$ tels que $\operatorname{Card} I \leq k$ où $I = \{1 \leq i \leq n;\ x_i \notin \{y_i^1, \dots, y_i^q\}\}$. Considérons une partition $(J_j)_{j \leq q}$ de $\{1, \dots, n\} \backslash I$ telle que $x_i = y_i^j$ si $i \in J_j$. Alors,

$$\sum_{i \notin I} x_i = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i \in J_j} y_i^j \leq qm$$

où nous avons fait usage d'une propriété cruciale de monotonie compte tenu de la positivité des x_i. Il s'ensuit que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq qm + \sum_{i=1}^{k} x_i^*$$

où $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ est le réarrangé décroissant de l'échantillon $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Alors, en vertu du théorème 6, pour tous k, q entiers,

$$\mathbb{P}\big(\{S \geq qm + k\}\big) \leq 2^q q^{-(k+1)} + \mathbb{P}\bigg(\bigg\{\sum_{i=1}^{k} X_i^* \geq k\bigg\}\bigg).$$

Joint à un argument de symétrisation pour retrouver la propriété de monotonie (développé à l'origine dans l'étude de la loi du logarithme itéré [L-T1]), cette approche gouverne aujourd'hui les estimations de normes de sommes de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans un espace de Banach – dont les arguments de martingales (par exemple (5)) ne peuvent rendre compte – et constitue le principe général d'évaluation de ces sommes. Il étend à ce cadre diverses estimations de type gaussien et précise souvent des résultats scalaires plus anciens. Nous renvoyons à [L-T2] pour de plus amples détails.

Le contrôle par enveloppe convexe est assez différent des précédents. En première approche, il peut être défini par la distance $\varphi_A^c(x) = \sup_{|a|=1} d_a(x, A)$. Cette écriture cache cependant les propriétés de convexité de la fonctionnelle φ_A^c essentielles à son analyse. Pour une partie $A \subset \Omega^n$ et $x \in \Omega^n$, soit

$$U_A(x) = \big\{s = (s_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{0,1\}^n;\ \exists y \in A \text{ tel que } y_i = x_i \text{ si } s_i = 0\big\}.$$

On désigne par $V_A(x)$ l'enveloppe convexe de $U_A(x)$ en tant que sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Il est à noter que $0 \in V_A(x)$ si et seulement si $x \in A$. Il est alors naturel de mesurer la distance de x à A par la distance euclidienne de 0 à $V_A(x)$. En vertu du théorème de Hahn-Banach, celle-ci est alors égale à $\varphi_A^c(x)$. La fonctionnelle $\varphi_A^c(x)$ mesure donc la distance de x à A uniformément en les métriques de Hamming d_a, $|a| = 1$. M. Talagrand [Ta9], [Ta15] étend la concentration (15) à cette uniformité dans un énoncé indépendant de la dimension.

THÉORÈME 7. *Pour tout sous-ensemble A de Ω^n, et toute probabilité produit P,*

$$\int \exp\Big(\frac{1}{4}\,(\varphi_A^c)^2\Big)dP \leq \frac{1}{P(A)}.$$

En particulier, pour tout $u \geq 0$,

$$P\big(\{\varphi_A^c \leq u\}\big) \geq 1 - \frac{1}{P(A)}\,\mathrm{e}^{-u^2/4}.$$

Pour illustrer le principe général des démonstrations par récurrence, esquissons celle du théorème 7. La difficulté réside le plus souvent dans la mise en place de la bonne hypothèse de récurrence, représentée par les formes intégrales des diverses inégalités que nous avons énoncées.

Démonstration. Le cas $n = 1$ est aisé. Pour passer de n à $n+1$, soit A un sous-ensemble de Ω^{n+1} et B sa projection sur Ω^n ; soit en outre, pour $\omega \in \Omega$, $A(\omega)$ la coupe de A suivant ω. Si $x \in \Omega^n$ et $\omega \in \Omega$, on pose $z = (x, \omega)$. L'observation fondamentale est la suivante : si $s \in U_{A(\omega)}(x)$, alors $(s, 0) \in U_A(z)$, et si $t \in U_B(x)$, alors $(t, 1) \in U_A(z)$. Il s'ensuit que pour $s \in V_{A(\omega)}(x)$, $t \in V_B(x)$ et $0 \leq \lambda \leq 1$, $(\lambda s + (1-\lambda)t, 1-\lambda) \in V_A(z)$. Par définition de φ_A^c et convexité du carré,

$$\varphi_A^c(z)^2 \leq (1-\lambda)^2 + \lambda \varphi_{A(\omega)}^c(x)^2 + (1-\lambda)\varphi_B^c(x)^2.$$

En vertu de l'inégalité de Hölder et de l'hypothèse de récurrence, pour tout ω de Ω,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^n} \exp\Big(\frac{1}{4}\,(\varphi_A^c(x,\omega))^2\Big)dP(x) \\
&\qquad \leq e^{(1-\lambda)^2/4}\Big(\int_{\Omega^n} \exp\Big(\frac{1}{4}\,(\varphi_{A(\omega)}^c)^2\Big)dP\Big)^{\lambda}\Big(\int_{\Omega^n} \exp\Big(\frac{1}{4}\,(\varphi_B^c)^2\Big)dP\Big)^{1-\lambda} \\
&\qquad \leq e^{(1-\lambda)^2/4}\Big(\frac{1}{P(A(\omega))}\Big)^{\lambda}\Big(\frac{1}{P(B)}\Big)^{1-\lambda} \\
&\qquad \leq \frac{1}{P(B)}\, e^{(1-\lambda)^2/4}\Big(\frac{P(A(\omega))}{P(B)}\Big)^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

Une optimisation en λ fournit alors

$$\int_{\Omega^n} \exp\Big(\frac{1}{4}\,(\varphi_A^c(x,\omega))^2\Big)dP(x) \leq \frac{1}{P(B)}\Big(2 - \frac{P(A(\omega))}{P(B}\Big).$$

Enfin, par une intégration par rapport à ω et le théorème de Fubini,

$$\int_{\Omega^{n+1}} \exp\Big(\frac{1}{4}\,(\varphi_A^c(x,\omega))^2\Big)dP(x)d\mu(\omega) \leq \frac{1}{P(B)}\Big(2 - \frac{P\otimes\mu(A)}{P(B)}\Big) \leq \frac{1}{P\otimes\mu(A)}.$$

Le théorème est établi.

Il est aisé de vérifier que si $\Omega = [0,1]$, et si d_A est la distance (euclidienne) à $\mathrm{Conv}(A)$, alors $d_A \leq \varphi_A^c$. Soit f une fonction convexe sur $[0,1]^n$ telle que $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$, et soit m est une médiane de f pour P et $A = \{f \leq m\}$. Par convexité de f, $f \leq m$ sur $\mathrm{Conv}(A)$. Par ailleurs, comme $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$, $f(x) \leq m+u$

pour tout x tel que $d_A(x) \leq u$. En raisonnant de la même façon avec l'ensemble $\{f \leq m - u\}$, on conclut alors du théorème 7 que

$$P(\{|f - m| \leq u\}) \geq 1 - 4\,\mathrm{e}^{-u^2/4} \tag{17}$$

pour tout $u \geq 0$ et toute probabilité sous-jacente μ sur $[0,1]$. La constante 4 dans l'exponentielle peut être améliorée comme précédemment pour approcher 2. Cette concentration est similaire à la concentration gaussienne, avec toutefois f convexe. Elle s'applique en particulier aux normes de moyennes aléatoires $\sum_i \varphi_i x_i$ à coefficients x_i dans un espace de Banach E où les φ_i sont des variables réelles indépendantes uniformément bornées (en particulier un jeu de pile ou face) pour lesquelles l'inégalité (17) permet de préciser les théorèmes pionniers d'intégrabilité et d'équivalences de moments de Khintchine-Kahane [Ka]. De façon précise, si $\|\varphi_i\|_\infty \leq 1$ pour tout i et si $S = \sum_i \varphi_i x_i$ converge presque sûrement, pour tout $u \geq 0$,

$$\mathbb{P}\big(\big\{\big|\|S\| - m\big| \leq u\big\}\big) \geq 1 - 4\,\mathrm{e}^{-u^2/16\sigma^2}$$

où m est une médiane de $\|S\|$ et $\sigma = \sup_{\|\xi\|\leq 1}\big(\sum_i \xi(x_i)^2\big)^{1/2}$. Cet énoncé est l'analogue exact de la formule (12) pour les séries gaussiennes et certifie ainsi la puissance des arguments du théorème 7 vis-à-vis des techniques de l'isopérimétrie gaussienne. Dans l'exemple de l'espace à deux points, la méthode de démonstration par récurrence sur le nombre de coordonnées est peut-être à rapprocher des techniques d'hypercontractivité [Gro], [Be] dont les aspects “mesure de surface” sont considérées dans [Ta13] par analogie avec l'exemple gaussien [Led3].

Le théorème 7 sur l'enveloppe convexe φ^c contient d'une certaine façon les deux énoncés précédents sur le contrôle par un ou un nombre fini de points. Une version du théorème 7 peut être utilisée afin de retrouver les applications aux sommes de variables aléatoires indépendantes déduites précédemment de l'examen de la fonctionnelle φ^q [Ta9]. Celle-ci nécessite cependant une forme plus abstraite de φ^c où la distance euclidienne de 0 à $V_A(x)$ est remplacée par une nouvelle fonction non nécessairement métrique.

Cette ligne d'étude s'inscrit dans les tous derniers développements de M. Talagrand [Ta15] où celui-ci analyse de façon systématique les fonctions de proximités φ^1, φ^q et φ^c par l'introduction d'un concept de pénalité. En effet, dans un contrôle par un point par exemple, les coordonnées qui diffèrent sont comptées pour 1 alors qu'un poids adapté permet de préciser ce contrôle de manière plus fine. Posons, pour une fonction positive h sur $\Omega \times \Omega$ telle que $h(\omega,\omega) = 0$, et $A \subset \Omega^n$, $x \in \Omega^n$,

$$\varphi_A^{1,h}(x) = \inf\left\{\sum_{i=1}^n h(x_i, y_i);\ y \in A\right\}.$$

Le choix de $h(\omega,\omega')=1$ si $\omega\neq\omega'$ correspond donc à la distance de Hamming ou contrôle par un point φ_A^1, la nouvelle fonction $\varphi_A^{1,h}$ imposant une pénalité variable sur les coordonnées de x et y qui diffèrent. On peut alors reprendre toute l'étude précédente de ce point de vue et en déduire divers énoncés suivant les hypothèses sur la fonction h. Un résultat typique est le suivant. Posons, pour tout $B\subset\Omega$, et tout $\omega\in\Omega$, $h(\omega,B)=\inf\{h(\omega,\omega');\ \omega'\in B\}$. Supposons que

$$\int \mathrm{e}^{2h(\omega,B)}\,d\mu(\omega)\leq\frac{\mathrm{e}}{\mu(B)}\,.$$

Alors, pour tout $0\leq\lambda\leq 1$,

$$\int \mathrm{e}^{\lambda\varphi_A^{1,h}}\,dP\leq\frac{1}{P(A)}\,\mathrm{e}^{Cn\lambda^2}$$

où $C>0$ est numérique. Par rapport à (16) et la distance de Hamming φ_A^1, on apprécie sur cet énoncé le degré supplémentaire de liberté et de souplesse pour les applications. Les extensions portent également sur la fonction de la probabilité $P(A)$ à droite de l'inégalité précédente, en lien avec les hypothèses sur h : plus la dépendance en $P(A)$ est générale, plus les hypothèses sur h peuvent être affaiblies. Certaines conséquences abstraites de cette nouvelle idée présentent de grandes similitudes avec des inégalités probabilistes classiques, binomiales ou de Bernstein. Outre les preuves unifiées par récurrence, l'on voit aussi comment une propriété de concentration sur chacun des facteurs (Ω,μ) se transfère en quelque sorte à l'espace produit (Ω^n,P). En particulier, le résultat précédent s'avère efficace lorsque Ω lui-même est déjà un produit. Ces méthodes de pénalités permettent également de retrouver le difficile théorème 5 (*voir* aussi l'approche de B. Maurey [Ma3]).

Les fonctions de pénalité (ou fonctions d'interaction) utilisées sont variées (sur $\mathbb{R}$ par exemple, $h(\omega,\omega')=|\omega-\omega'|$ ou $h(\omega,\omega')=(\omega,\omega')^+$). L'un des traits frappants des résultats de M. Talagrand est le caractère dissymétrique des hypothèses faites sur ω et ω' dans h, autrement dit sur le point x que l'on veut contrôler et le point y qui contrôle ; si elle ne dépend que de la première coordonnée, h doit être bornée, si elle ne dépend que de la seconde, des propriétés d'intégrabilité (relativement à μ) assez faibles sont suffisantes.

Ces développements s'effectuent également sur les fonctionnelles φ^q et φ^c, avec le plus de profit sans doute sur cette dernière. Pour une fonction positive h comme précédemment, soit à présent, pour $A\subset\Omega^n$ et $x\in\Omega$,

$$\begin{aligned}U_A(x)=\big\{s=(s_i)_{1\leq i\leq n}\in\mathbb{R}_+^n;\ \exists\, y\in A \text{ tel que}\\ s_i\geq h(x_i,y_i) \text{ pour tout } i=1,\ldots,n\big\}.\end{aligned}$$

$V_A(x)$ est l'enveloppe convexe de $U_A(x)$. Pour mesurer la "distance" de 0 à $V_A(x)$, on considère une fonction ψ sur $\mathbb{R}$ avec $\psi(0) = 0$ telle que $\psi(t) \leq t^2$ si $t \leq 1$ et $\psi(t) \geq t$ si $t \geq 1$. (Ce choix est à rapprocher du théorème 5.) Puis, soit

$$\varphi_A^{c,h,\psi}(x) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} \psi(s_i);\ s = (s_i)_{1\leq i\leq n} \in V_A(x)\right\}.$$

La distance φ^c correspondait donc simplement à $h(\omega,\omega') = 1$ si $\omega \neq \omega'$ et $\psi(t) = t^2$. Toujours par récurrence sur la dimension, M. Talagrand établit alors une forme générale du théorème 7 en montrant que, pour une certaine constante $\alpha > 0$,

$$\int \exp\bigl(\alpha\, \varphi_A^{c,h,\psi}\bigr) \leq \exp\bigl(\theta(P(A))\bigr)$$

sous diverses hypothèses liant les paramètres μ, h et ψ à la fonction θ de la probabilité de A. La démonstration est bien plus délicate compte tenu du degré de la généralité.

Cette étude abstraite systématique est justifiée par les larges applications proposées par M. Talagrand ; elles s'étendent aujourd'hui à de multiples cadres probabilistes et combinatoires. Le plus souvent, les résultats de M. Talagrand proposent une propriété de concentration chaque fois qu'une valeur moyenne a été mise auparavant en évidence (l'analyse de cette valeur moyenne est un autre sujet d'étude). Esquissons par exemple son application aux premiers temps de passage en percolation. Soit (G,E) un graphe de sommets G et d'arêtes E ; supposons donnée, sur une espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, une famille $(X_e)_{e\in E}$ de variables aléatoires positives indépendantes, de même loi qu'une variable X. X_e représente le temps de passage par l'arête e. Soit $\mathcal{T}$ une famille de parties (finies) de E, et, pour $T \in \mathcal{T}$, $X_T = \sum_{e\in T} X_e$. Si T est composée d'arêtes contigües, X_T s'interprète comme le temps de passage par ce chemin T. Posons $Z_{\mathcal{T}} = \inf_{T\in\mathcal{T}} X_T$ et $R = \sup_{T\in\mathcal{T}} \mathrm{Card}(T)$, et désignons par m une médiane de $Z_{\mathcal{T}}$. Comme corollaire de sa version avec pénalités du théorème 7, M. Talagrand [Ta15] établit le résultat suivant.

THÉORÈME 8. *Il existe une constante numérique $c > 0$ telle que si $\mathbb{E}(e^{cX}) \leq 2$, alors, pour tout $u \geq 0$,*

$$\mathbb{P}\bigl(\{|Z_{\mathcal{T}} - m| \leq u\}\bigr) \geq 1 - 4\exp\left(-c\,\min\left(\frac{u^2}{R}, u\right)\right).$$

Lorsque G est $\mathbb{Z}^2$ et E les côtés joignant deux points adjacents, et $\mathcal{T} = \mathcal{T}_n$ est l'ensemble des chemins ne se recoupant pas joignant l'origine au point $(0,n)$, et pour $0 \le X \le 1$ presque sûrement, H. Kesten [Ke] a démontré comment se ramener, lorsque $\mathbb{P}(\{X = 0\}) < \frac{1}{2}$ (percolation), aux chemins de longueur plus petite qu'un multiple de n. Joint à ce résultat, le théorème 8 permet alors de conclure que

$$\mathbb{P}\big(\{|Z_{\mathcal{T}_n} - m| \le u\}\big) \ge 1 - 5\exp\Big(-\frac{u^2}{Cn}\Big)$$

pour tout $u \le n/C$ où C est une constante indépendante de n. Cette estimation précise le résultat de H. Kesten [Ke] comportant un exposant de la forme $u/C\sqrt{n}$ et basé sur des arguments de martingales.

Outre les sommes de variables aléatoires vectorielles indépendantes (qui restent l'appli- cation la plus délicate de ces résultats), les autres applications proposées par M. Talagrand portent sur des questions de sous-suites aléatoires, graphes aléatoires, probabilités géométriques... Nous renvoyons le lecteur à son important projet en préparation [Ta15] pour plus de détails.

II. Approches fonctionnelles de l'isopérimétrie

Les paragraphes précédents présentent diverses inégalités isopérimétriques dont le cadre, comme les modalités d'approche, sont éloignées des techniques géométriques habituelles, en particulier les réarrangements. Dans cette seconde partie, nous reprenons un cadre isopérimétrique plus traditionnel, en retournant en particulier aux inégalités infinitésimales, pour lequel des techniques fonctionnelles, cette fois-ci, vont être mises à profit à l'image de la démonstration de la proposition 2. Cette proposition fournit en effet une démonstration fonctionnelle élémentaire de la concentration sur les sphères basée sur le semigroupe de la chaleur, la formule de Bochner et la courbure de Ricci, en s'appuyant essentiellement sur une traduction fonctionnelle de cette courbure. Ces outils, utilisés de façon rudimentaire, rejoignent les résultats de N. Varopoulos sur les inégalités isopérimétriques et les estimations du noyau de la chaleur sur les variétés riemanniennes et les groupes de Lie qu'il a développées ces dernières années. Dans cette dernière partie, nous voudrions simplement aborder ce lien en illustrant le (court) chemin qu'il reste parcourir d'un point de vue fonctionnel pour passer de la démonstration simple de la concentration à une forme de l'isopérimétrie. Nous présentons ainsi des résultats de N. Varopoulos [Va4], [Va5], [V-SC-C] dans le cadre des variétés riemanniennes à courbure de Ricci positive ou nulle.

Il est maintenant bien connu ([C-L-Y], [Va1]) qu'une inégalité isopérimétrique sur une variété riemannienne, par exemple, force un contrôle du noyau de la chaleur. Plus précisément, soit par exemple V une variété riemannienne complète et connexe de dimension N, non compacte ; soit en outre Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur V et $(P_t)_{t\ge 0}$ le semigroupe de la chaleur de noyau $p_t(x,y)$.

THÉORÈME 9. *Supposons qu'il existe $n > 1$ et $C > 0$ tels que pour tout partie compacte A de V à bord ∂A régulier,*

$$\mathrm{vol}(A)^{(n-1)/n} \leq C\,\mathrm{vol}(\partial A). \tag{18}$$

Alors, pour une certaine constante $C > 0$,

$$p_t(x,y) \leq \frac{C}{t^{n/2}} \tag{19}$$

pour tout $t > 0$ et tous $x, y \in V$. En outre, pour tout $\delta > 0$, il existe $C_\delta > 0$ telle que

$$p_t(x,y) \leq \frac{C_\delta}{t^{n/2}} \exp\left(-\frac{d(x,y)^2}{4(1+\delta)t^2}\right) \tag{20}$$

pour tout $t > 0$ et tous $x, y \in V$.

Le schéma de la démonstration est particulièrement instructif. Il consiste à comparer chacune des propriétés (18) et (19) sur l'échelle des inégalités de Sobolev. Par la formule de la coaire [Fe], [Os],(18) équivaut à dire que pour toute fonction f de classe C^∞ à support compact sur V,

$$\|f\|_{n/n-1} \leq C\big\||\nabla f|\big\|_1. \tag{21}$$

En vertu de l'inégalité de Hölder (remplacer f positive par f^α), cette inégalité est la plus forte dans la famille des inégalités de Sobolev. Elle implique en particulier (supposer $n > 2$) l'inégalité de Sobolev au niveau L^2 (pour le gradient) qui s'exprime, après une intégration par parties, comme

$$\|f\|^2_{2n/n-2} \leq C\big\||\nabla f|\big\|_2^2 = C\int f(-\Delta f)\,dx \tag{22}$$

pour toute fonction f de $C_0^\infty(V)$. La constante $C > 0$ peut varier, ici et ci-dessous, d'une ligne à l'autre. Plutôt que le gradient, cette inégalité concerne donc le laplacien Δ. Or, l'un des points de départ des travaux de N. Varopoulos [Va2] est l'équivalence formelle, dans un cadre abstrait de semigroupes, de cette dernière inégalité de Sobolev (22) et de la décroissance du semigroupe de la chaleur (ou de son noyau)

$$\|P_t f\|_\infty \leq \frac{C}{t^{n/2}}\|f\|_1, \quad t > 0, \quad f \in C_0^\infty(V). \tag{23}$$

Ce résultat, inspiré de travaux de J. Nash [Na] et J. Moser [Mo] sur la régularité des solutions des équations différentielles paraboliques, constitue ici le pont entre analyse et géométrie. Diverses techniques permettent alors de passer de cette estimation uniforme aux estimations gaussiennes (20) de $p_t(x,y)$ pour $x \neq y$ (*voir* [Da], [L-Y], [Va5]...). Le théorème peut aussi être localisé en temps petit (à partir d'une inégalité isopérimétrique sur les ensembles de petit volume), ou en temps grand [C-F] (ensembles de grand volume).

Réciproquement, il est possible, dans certains cas, de renverser le cheminement de la démonstration précédente et de déduire d'un comportement (uniforme) du noyau de la chaleur des propriétés isopérimétriques sur V. Plaçons-nous, pour plus de simplicité, dans le cadre d'une variété à courbure de Ricci positive ou nulle. (Bien qu'a posteriori, ce cadre est quelque peu restrictif – les variétés à courbure positive ou nulle vérifiant l'isopérimétrie ont un comportement, du volume des boules par exemple, assez rigide –, il s'agit simplement d'illustrer ici l'enchaînement des idées.) D'après l'esquisse de la démonstration du théorème 9, il convient de comprendre ce qui doit être ajouté à une inégalité de Sobolev au niveau L^2 (22) pour atteindre le niveau L^1 (21) et donc l'isopérimétrie. Le maillon manquant est fourni ici par la courbure et une inégalité fondamentale démontrée par P. Li et S.-T. Yau [L-Y] dans leur étude des inégalités de Harnark paraboliques. Comme la proposition 2, cette inégalité est une certaine traduction fonctionnelle sur le semigroupe de la chaleur de la formule de Bochner. Sa démonstration repose uniquement sur l'inégalité de courbure et dimension (6). Nous n'énonçons que la forme dans les variétés à courbure de Ricci positive ou nulle.

PROPOSITION 10. *Soit V une variété riemannienne de dimension N et de courbure de Ricci ≥ 0 et soit $(P_t)_{t\geq 0}$ le semigroupe de la chaleur sur V ; pour toute fonction f strictement positive de $C_o^\infty(V)$ et tout $t > 0$,*

$$\frac{|\nabla P_t f|^2}{(P_t f)^2} - \frac{\Delta P_t f}{P_t f} \leq \frac{N}{2t}. \tag{24}$$

Comme l'a montré N. Varopoulos [Va5], on déduit sans trop de peine de l'inégalité ponctuelle (24) que, pour toute f régulière et tout $t > 0$,

$$\big\| |\nabla P_t f| \big\|_\infty \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \|f\|_\infty \tag{25}$$

pour une certaine constante C ne dépendant que de la dimension N. En effet, d'après (24), $(\Delta P_t f)^- \leq N(2t)^{-1} P_t f$ de sorte que $\|\Delta P_t f\|_1 \leq N t^{-1} \|f\|_1$. Par dualité, c'est donc que $\|\Delta P_t f\|_\infty \leq N t^{-1} \|f\|_\infty$ qui, utilisé à nouveau dans (24), fournit immédiatement (25).

Le contrôle (25) du gradient du semigroupe en $\sqrt{t}$ est l'ingrédient crucial qui, joint à la décroissance (23), permet d'atteindre l'isopérimétrie. Notons que l'information dimensionnelle est uniquement contenue dans la décroissance (23) et que (25) en est en quelque sorte indépendante. L'inégalité (25) montre, par dualité, que, pour toute fonction f de $C_0^\infty(V)$ et tout $t > 0$,

$$\|f - P_t f\|_1 \leq C\sqrt{t}\, \big\| |\nabla f| \big\|_1.$$

En effet (*cf.* [Led4]), pour toute fonction régulière g telle que $\|g\|_\infty \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\int g\,(f - P_t f)\,dx &= -\int_0^t \Big(\int g\,\Delta P_s f\,dx \Big) ds \\
&= -\int_0^t \Big(\int \Delta P_s g\, f\,dx \Big) ds \\
&= \int_0^t \Big(\int \nabla P_s g \cdot \nabla f\,dx \Big) ds \leq \int_0^t \|\nabla P_s g\|_\infty \big\| |\nabla f| \big\|_1\,ds.
\end{aligned}$$

Soit alors A une partie compacte de V à bord ∂A suffisamment régulier. En appliquant l'inégalité précédente à une suite de fonctions régulières approchant la fonction indicatrice χ_A de A, il vient, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}
C\sqrt{t}\,\mathrm{vol}(\partial A) &\geq \|\chi_A - P_t(\chi_A)\|_1 \\
&= 2\Big[\mathrm{vol}(A) - \int_A P_t(\chi_A)\,dx\Big] = 2\big[\mathrm{vol}(A) - \|P_{t/2}(\chi_A)\|_2^2\big].
\end{aligned}$$

Cette chaîne d'inégalités fournit le passage avec la théorie L^2 puisque si (23) a lieu, par une interpolation évidente, $\|P_t f\|_2 \leq C t^{-n/4} \|f\|_1$, $t > 0$, et donc

$$C\sqrt{t}\,\mathrm{vol}\,(\partial A) \geq 2\Big[\mathrm{vol}(A) - \frac{C}{t^{n/2}}\,\mathrm{vol}(A)^2\Big].$$

Il ne reste plus qu'à optimiser en t pour en déduire que pour une certaine constante $C > 0$,

$$\mathrm{vol}(A)^{(n-1)/n} \leq C\,\mathrm{vol}(\partial A), \tag{26}$$

soit l'isopérimétrie annoncée. Nous avons ainsi établi le théorème suivant [Va5].

THÉORÈME 11. *Soit V une variété riemannienne de courbure de Ricci ≥ 0 ; si, pour un $n > 1$ et une constante $C > 0$,*

$$p_t(x,y) \leq \frac{C}{t^{n/2}}$$

uniformément en $t > 0$ et $x, y \in V$, alors, pour une certaine constante $C > 0$ et tout ensemble compact A de V à bord ∂A suffisamment régulier

$$\mathrm{vol}(A)^{(n-1)/n} \leq C \,\mathrm{vol}(\partial A).$$

Cette démonstration élémentaire, qui présente même quelque intérêt dans le cas euclidien, ne fournit guère de renseignements sur la meilleure constante C dans (26), et donc par exemple sur le caractère extrémal des boules dans $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas de $\mathbb{R}^n$, on peut en fait démontrer qu'il existe une version de (25) avec meilleure constante et que la perte de précision se fait au niveau de la décroissance (23). Pour que la démonstration précédente fournisse la meilleure constante dans le cas euclidien, il convient de remplacer (23) par le fait que le semigroupe de la chaleur croît en norme L^2 par réarrangement isopérimétrique, c'est-à-dire

$$\|P_t(\chi_A)\|_2 \leq \|P_t(\chi_B)\|_2 \tag{27}$$

pour tout $t > 0$ et tout compact A de même volume qu'une boule B. La propriété (27) a été établie par A. Baernstein et B. A. Taylor [B-T], [Bae] par l'intermédiaire des outils de symétrisation isopérimétrique ; les observations élémentaires précédentes démontrent son équivalence formelle avec l'isopérimétrie. On peut s'interroger sur la signification de ces observations dans une variété riemannienne.

Notons que cette approche fonctionnelle peut également être développée dans le cadre de l'isopérimétrie gaussienne (9). Il est facile de se convaincre, à partir des arguments de la proposition 2, que le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck $(U_t)_{t\geq 0}$ vérifie une propriété de type (25). Intrinsèquement de dimension infinie au sens de la géométrie des semigroupes de Markov, il n'est cependant d'aucune décroissance polynômiale n. L'analogue de cette décroissance est la propriété d'hypercontractivité de $(U_t)_{t\geq 0}$ [Ne], équivalente à l'inégalité de Sobolev logarithmique de Gross [Gro] (version de dimension infinie des inégalités de Sobolev usuelles), qui, utilisée dans le schéma précédent, permet d'accéder à l'isopérimétrie gaussienne (*voir* [Led3]).

À l'équivalence précédente s'ajoute la minoration $V(x,r) \geq Cr^{-n}$ du volume des boules de centre x et de rayon $r > 0$, renforçant ainsi les liens entre analyse et géométrie. En fait, en vertu des inégalités de Harnack, le noyau $p_t(x,x)$ est gouverné par $V(x,\sqrt{t})^{-1/2}$ [L-Y], [Va5] (*voir* aussi [Da]). Cette minoration se déduit aisément de l'isopérimétrie, un peu plus difficilement du contrôle (19) du noyau de la chaleur. La double équivalence précédente dans les variétés à courbure de Ricci positive ou nulle ne subsiste cependant plus, sauf localement [L-Y], en courbure seulement minorée : il existe [Va5] une variété dont les boules ont un volume exponentiel mais pour laquelle $p_t(x,x)$ est de l'ordre de t^{-1} ; il existe également [C-L] une variété dans laquelle $\sup_{x,y} p_t(x,y) \leq Ct^{-n/2}$ mais où l'isopérimétrie de dimension correspondante est en défaut (pour les ensembles de grand volume).

Le cadre initial des travaux de N. Varopoulos [Va2], [Va3], [Va4], [V-SC-C] est celui des groupes discrets (finiment engendré) ou de leur version continue, les groupes de Lie. Dans ce cadre, les résultats de N. Varopoulos (*voir* [Va6]) conduisent à une classification des groupes suivant la croissance du volume des boules. Soit par exemple G un groupe de Lie connexe unimodulaire et $\{X_1,\dots,X_k\}$ un système de champs de vecteurs invariants à gauche engendrant l'algèbre de Lie de G. Soit $V(r)$ le volume des boules de rayon r pour la distance de contrôle associée aux champs $X_1,\dots,X_k$, $V(r)$ ne dépendant pas ici du centre. Le volume à l'infini est à croissance soit polynômiale, soit exponentielle [Gu], et localement à croissance polynômiale [N-S-W]. La conclusion principale [Va4] est alors l'équivalence entre une croissance du volume $V(r) \geq Cr^d$, $r > 0$, une inégalité isopérimétrique

$$\|f\|_{d/d-1} \leq C \sum_{i=1}^{k} \|X_i f\|_1, \quad f \in C_o^\infty(G),$$

et une estimation du noyau $p_t(e) \leq Ct^{-d/2}$, $t > 0$, où e est l'élément neutre de G et p_t la solution fondamentale de l'équation de la chaleur $\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^{k} X_i^2 = 0$. L'étape importante est à nouveau l'équivalence formelle entre la décroissance de $p_t(e)$ et une inégalité de Sobolev. L'isopérimétrie se déduit d'une estimation des dérivées spatiales du noyau issue d'une inégalité de Harnack [SC1]. Par rapport à la situation riemannienne, cette description complète est plus de nature harmonique que potentielle [Va5].

Pour les groupes discrets, ces résultats s'interprètent de façon directe sur les chaînes de Markov des probabilistes et le comportement des marches aléatoires. Soit G un groupe discret finiment engendré et soit μ une mesure de probabilité symétrique sur G de support fini et générateur. Le comportement du volume est décrit par les travaux de M. Gromov [Gr2]. En croissance polynômiale, le comportement des puissances de convolution $\mu^{*k}(e)$ est alors gouverné par le volume : si $V(r) \geq Cr^d$, alors, pour tout k, $\mu^{*k}(e) \leq Ck^{-d/2}$. Cette description résout en particulier la conjecture dite de Kesten et les seuls groupes récurrents sont ainsi les extensions finies de $\{0\}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$. La situation est plus complexe en croissance superpolynômiale. Des résultats nouveaux de T. Coulhon et L. Saloff-Coste [C-SC] utilisent, plutôt que le semigroupe lui-même, des familles d'inégalités de Poincaré à l'échelle sur les boules (*cf.* [Bu]), déjà utilisées avec profit dans [SC2]. Nous renvoyons au traité [V-SC-C] pour une discussion et des références complètes.

Bibliographie

[Az] K. Azuma. Weighted sums of certain dependent random variables. Tohoku Math. J. 19, 357–367 (1967).

[Bae] A. Baernstein II. Integral means, univalent functions and circular symmetrization. Acta Math. 133, 139–169 (1974).

[B-T] A. Baernstein II, B. A. Taylor. Spherical rearrangements, subharmonic functions and *-functions in n-space. Duke Math. J. 43, 245–268 (1976).

[Ba] D. Bakry. L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes. École d'Été de Probabilités de St-Flour 1992. Lecture Notes in Math.. Springer-Verlag. À paraître.

[B-É] D. Bakry, M. Émery. Diffusions hypercontractives. Séminaire de Probabilités XIX. Lecture Notes in Math. 1123, 175–206 (1985). Springer-Verlag.

[Be] W. Beckner. Inequalities in Fourier analysis. Ann. Math. 102, 159–182 (1975).

[BA-L] G. Ben Arous, M. Ledoux. Schilder's large deviation principle without topology. Asymptotic problems in probability theory : Wiener functionals and asymptotics. Pitman Research Notes in Math. Series 284, 107–121 (1993). Longman.

[Ben] Y. Benyamini. Two point symmetrization, the isoperimetric inequality on the sphere and some applications. Texas Functional Analysis Seminar 1983-84. The University of Texas (1984).

[B-B-G] P. Bérard, G. Besson, S. Gallot. Sur une inégalité isopérimétrique qui généralise celle de Paul Lévy-Gromov. Invent. Math. 80, 295–308 (1985).

[B-G-M] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet. Le spectre d'une variété riemannienne. Lecture Notes in Math. 194 (1971). Springer-Verlag.

[Bo1] C. Borell. The Brunn-Minskowski inequality in Gauss space. Invent. Math. 30, 207–216 (1975).

[Bo2] C. Borell. Tail probabilities in Gauss space. Vector Space Measures and Applications, Dublin 1977. Lecture Notes in Math. 644, 71–82 (1978). Springer-Verlag.

[Bo3] C. Borell. On polynomials chaos and integrability. Prob. Math. Statist. 3, 191–203 (1984).

[Bo4] C. Borell. Geometric bounds on the Ornstein-Uhlenbeck process. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Gebiete 70, 1–13 (1985).

[B-Z] Y. D. Burago, V. A. Zalgaller. Geometric inequalities. Springer-Verlag (1988). Pre- mière édition (en russe) : Nauka (1980).

[Bu] P. Buser. A note on the isoperimetric constant. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 15, 213–230 (1982).

[C-F] I. Chavel, E. Feldman. Modified isoperimetric constants, and large time heat diffusion in Riemannian manifold. Duke Math. J. 64, 473–499 (1991).

[C-L-Y] S. Cheng, P. Li, S.-T. Yau. On the upper estimate of the heat kernel on a complete Riemannian manifold. Amer. J. Math. 156, 153–201 (1986).

[Ch] S. Chevet. Gaussian measures and large deviations. Probability in Banach spaces IV. Lecture Notes in Math. 990, 30–46 (1983). Springer-Verlag.

[Co] T. Coulhon. Sobolev inequalities on graphs and on manifolds. Harmonic Analysis and Discrete Potential Theory, 207–214 (1991). Plenum Press.

[C-L] T. Coulhon, M. Ledoux. Isopérimétrie, décroissance du noyau de la chaleur et transformées de Riesz : un contre-exemple (1992). À paraître in Ark. för Math..

[C-SC] T. Coulhon, L. Saloff-Coste. Isopérimétrie pour les groupes et les variétés (1992). À paraître in Rev. Ibero Americana.

[Da] E. B. Davies. Heat kernels and spectral theory. Cambridge Univ. Press (1989).

[Dv] A. Dvoretzky. Some results on convex bodies and Banach spaces. Proc. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem, 123–160 (1961).

[D-F] P. Diaconis, D. Freedman. A dozen de Finetti-style results in search of a theory. Ann. Inst. H. Poincaré 23, 397–423 (1987).

[Eh1] A. Ehrhard. Symétrisation dans l'espace de Gauss. Math. Scand. 53, 281–301 (1983).

[Eh2] A. Ehrhard. Inégalités isopérimétriques et intégrales de Dirichlet gaussiennes. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 17, 317–332 (1984).

[Eh3] A. Ehrhard. Eléments extrémaux pour les inégalités de Brunn-Minskowski gaussiennes. Ann. Inst. H. Poincaré 22, 149–168 (1986).

[Eh4] A. Ehrhard. Sur l'inégalité de Sobolev logarithmique de Gross. Séminaire de Probabilités XVIII. Lecture Notes in Math. 1059, 194–196 (1984). Springer-Verlag.

[Fa1] S. Fang. Isoperimetric inequalities on the Wiener space. Bull. Sc. Math. 112, 345-355 (1988).

[Fa2] S. Fang. Grandes déviations pour le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Prépublication (1991).

[Fe] H. Federer. Geometric measure theory. Springer-Verlag (1969).

[Fer1] X. Fernique. Intégrabilité des vecteurs gaussiens. C. R. Acad. Sci. Paris 270, 1698–1699 (1970).

[Fer2] X. Fernique. Fonctions aléatoires gaussiennes, les résultats récents de M. Talagrand. Séminaire Bourbaki, exp. 660. Astérisque 145-146, 177–186 (1987).

[F-L-M] T. Figiel, J. Lindenstrauss, V. D. Milman. The dimensions of almost spherical sections of convex bodies. Acta Math. 139, 52–94 (1977).

[G-H-L] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine. Riemannian Geometry. Deuxième édition, Springer-Verlag (1990).

[Gr1] M. Gromov. Paul Lévy's isoperimetric inequality. Prépublication I.H.E.S. (1980).

[Gr2] M. Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. Publ. Math. I.H.E.S. 53, 53–78 (1981).

[G-M] M. Gromov, V. D. Milman. A topological application of the isoperimetric inequality. Amer. J. Math. 105, 843–854 (1983).

[Gro] L. Gross. Logarithmic Sobolev inequalities. Amer. J. Math. 97, 1061–1083 (1975).

[Gu] Y. Guivarc'h. Croissance polynômiale et périodes des fonctions harmoniques. Bull. Soc. Math. France 101, 333–379 (1973).

[Ha] L. H. Harper. Optimal numbering and isoperimetric problems on graphs. J. Comb. Th. 1, 385–393 (1966).

[Ka] J.-P. Kahane. Some random series of functions. Heath Math. Monographs (1968). Deuxième édition : Cambridge Univ. Press (1985).

[Ke] H. Kesten. On the speed of convergence in first-passage percolation (1991). À paraître in Ann. Appl. Probability.

[K-L] J. Kuelbs, W. Li. Metric entropy and the small ball problem for Gaussian measures (1992). À paraître in J. Funct. Anal..

[L-S] H. J. Landau, L. A. Shepp. On the supremum of a Gaussian process. Sankhyà A32, 369–378 (1970).

[Led1] M. Ledoux. A note on large deviations for Wiener chaos. Séminaire de Probabilités XXIV. Lecture Notes in Math. 1426, 1–14, Springer-Verlag (1990).

[Led2] M. Ledoux. A heat semigroup approach to concentration on the sphere and on a compact Riemannian manifold. Geometric and Funct. Anal. 2, 221–224 (1992).

[Led3] M. Ledoux. Semigroup proofs of the isoperimetric inequality in Euclidean and Gauss space (1992). À paraître in Bull. Sc. math..

[Led4] M. Ledoux. A simple analytic proof of an inequality by P. Buser (1992). À paraître in Proc. Amer. Math. Soc..

[L-T1] M. Ledoux, M. Talagrand. Characterization of the law of the iterated logarithm in Banach spaces. Ann. Probability 16, 1242–1264 (1988).

[L-T2] M. Ledoux, M. Talagrand. Probability in Banach spaces (Isoperimetry and processes). Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag (1991).

[Lé] P. Lévy. Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars (1951).

[L-Y] P. Li, S.-T. Yau. On the parabolic kernel of the Schrödinger operator. Acta Math. 156, 153–201 (1986).

[MD] C. J. H. McDiarmid. On the method of bounded differences. Twelfth British Combinatorial Conference. Surveys in Combinatorics, 148–188 (1989). Cambrige Univ. Press.

[MK] H. P. McKean. Geometry of differential space. Ann. Probability 1, 197–206 (1973).

[Ma1] B. Maurey. Constructions de suites symétriques. C. R. Acad. Sci. Paris 288, 679–681 (1979).

[Ma2] B. Maurey. Sous-espaces ℓ^p des espaces de Banach. Séminaire Bourbaki, exp. 608. Astérisque 105-106, 199–216 (1983).

[Ma3] B. Maurey. Some deviations inequalities. Geometric and Funct. Anal. 1, 188–197 (1991).

[Mi1] V. D. Milman. New proof of the theorem of Dvoretzky on sections of convex bodies. Funct. Anal. Appl. 5, 28–37 (1971).

[Mi2] V. D. Milman. The heritage of P. Lévy in geometrical functional analysis. Colloque Paul Lévy sur les processus stochastiques. Astérisque 157-158, 273–302 (1988).

[Mi3] V. D. Milman. Dvoretzky's theorem - Thirty years later (Survey). Geometric and Funct. Anal. 2, 455–479 (1992).

[M-S] V. D. Milman, G. Schechtman. Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces. Lecture Notes in Math. 1200 (1986). Springer-Verlag.

[Mo] J. Moser. On Harnack's theorem for elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 14, 557–591 (1961).

[N-S-W] A. Nagel, E. Stein, M. Wainger. Balls and metrics defined by vector fields. Acta Math. 155, 103–147 (1985).

[Na] J. Nash. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. Amer. J. Math. 80, 931–954 (1958).

[Ne] E. Nelson. The free Markov field. J. Funct. Anal. 12, 211–227 (1973).

[Os] R. Osserman. The isoperimetric inequality. Bull. Amer. Math. Soc. 84, 1182–1238 (1978).

[Pi1] G. Pisier. Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces. Probability and Analysis, Varenna (Italy) 1985. Lecture Notes in Math. 1206, 167–241 (1986). Springer-Verlag.

[Pi2] G. Pisier. Riesz transforms : a simpler analytic proof of P. A. Meyer inequality. Séminaire de Probabilités XXII. Lecture Notes in Math. 1321, 485–501, Springer-Verlag (1988).

[Pi3] G. Pisier. The volume of convex bodies and Banach space geometry. Cambridge Univ. Press (1989).

[SC1] L. Saloff-Coste. Analyse sur les groupes de Lie à croissance polynômiale. Ark. för Math. 28, 315–331 (1990).

[SC2] L. Saloff-Coste. A note on Poincaré, Sobolev and Harnack inequalities. Duke Math. J. 65, 27-38 (1992).

[Sc] E. Schmidt. Die Brunn-Minkowskische Ungleichung und ihr Spiegelbild sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie. Math. Nach. 1, 81–157 (1948).

[S-T] V. N. Sudakov, B. S. Tsirel'son. Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures. J. Soviet. Math. 9, 9–18 (1978) ; translated from Zap. Nauch. Sem. L.O.M.I. 41, 14–24 (1974).

[Ta1] M. Talagrand. Sur l'intégrabilité des vecteurs gaussiens. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Gebiete 68, 1–8 (1984).

[Ta2] M. Talagrand. Regularity of Gaussian processes. Acta Math. 159, 99–149 (1987).

[Ta3] M. Talagrand. An isoperimetric theorem on the cube and the Khintchine-Kahane inequalities. Proc. Amer. Math. Soc. 104, 905–909 (1988).

[Ta4] M. Talagrand. Small tails for the supremum of a Gaussian process. Ann. Inst. H. Poincaré 24, 307–315 (1988).

[Ta5] M. Talagrand. Isoperimetry and integrability of the sum of independent Banach space valued random variables. Ann. Probability 17, 1546–1570 (1989).

[Ta6] M. Talagrand. Supremum of some canonical processes (1990). À paraître in J. Amer. Math. Soc..

[Ta7] M. Talagrand. A new isoperimetric inequality and the concentration of measure phenomenon. Geometric Aspects of Functional Analysis, Israel Seminar 1989-90. Lecture Notes in Math. 1469, 94–124 (1991). Springer-Verlag.

[Ta8] M. Talagrand. Simple proof of the majorizing measure theorem. Geometric and Funct. Anal. 2, 118–125 (1992).

[Ta9] M. Talagrand. A new isoperimetric inequality for product measure and the tails of sums of independent random variables. Geometric and Funct. Anal. 1, 211-223 (1991).

[Ta10] M. Talagrand. On the rate of clustering in Strassen's law of the iterated logarithm. Probability in Banach spaces 8. Progress in Probability 30, 339–351 (1992). Birkhäuser.

[Ta11] M. Talagrand. Sharper bounds for Gaussian and empirical processes (1992). À paraître in Ann. Probability.

[Ta12] M. Talagrand. New Gaussian estimates for enlarged balls (1992). À paraître in Geometric and Funct. Anal..

[Ta13] M. Talagrand. Isoperimetry, logarithmic Sobolev inequalities on the discrete cube, and Margulis' graph connectivity theorem (1992). À paraître.

[Ta14] M. Talagrand. Regularity of infinitely divisible processes. Ann. Probability 21, 362–432 (1993).

[Ta15] M. Talagrand. Concentration of measure and isoperimetric inequalities in product spaces. En préparation (1993).

[Va1] N. Varopoulos. Une généralisation du théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev pour les espaces de Dirichlet. C. R. Acad. Sci. Paris 299, 651–654 (1984).

[Va2] N. Varopoulos. Hardy-Littlewood theory for semigroups. J. Funct. Anal. 63, 240–260 (1985).

[Va3] N. Varopoulos. Isoperimetric inequalities and Markov chains. J. Funct. Anal. 63, 215–239 (1985).

[Va4] N. Varopoulos. Analysis on Lie groups. J. Funct. Anal. 76, 346–410 (1988).

[Va5] N. Varopoulos. Small time Gaussian estimates of heat diffusion kernels. Part I : The semigroup technique. Bull. Sc. math. 113, 253–277 (1989).

[Va6] N. Varopoulos. Analysis and geometry on groups. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Kyoto (1990), vol. II, 951–957 (1991). Springer-Verlag.

[V-SC-C] N. Varopoulos, L. Saloff-Coste, T. Coulhon. Analysis and geometry on groups. Cambridge Univ. Press (1992).

[W-W] D. L. Wang, P. Wang. Extremal configurations on a discrete torus and a generalization of the generalized Macaulay theorem. Siam J. Appl. Math. 33, 55–59 (1977).

Michel LEDOUX

Université Paul-Sabatier

Département de Mathématiques

Laboratoire de Statistique et Probabilités

Bâtiment 1R1

118, route de Narbonne

31062 Toulouse, France