

# *Astérisque*

MARCEL BERGER

## **Systoles et applications selon Gromov**

*Astérisque*, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki,  
exp. n° 771, p. 279-310

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1992-1993\\_\\_35\\_\\_279\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__279_0)>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SYSTOLES ET APPLICATIONS SELON GROMOV

par Marcel BERGER

1. Définition et remarques
2. Les systoles des espaces standards
  - A. La 1-systole des tores plats
  - B. Les  $(2; 2r)$ -systoles des tores plats
  - C. Les systoles des espaces projectifs standards
3. Un programme naturel
4. Le cas des surfaces :  $d = 2$  et  $k = 1$ 
  - A. Le cas du tore
  - B. Les surfaces de genre plus grand : l'échec de la théorie classique
  - C. Les résultats de Gromov
  - D. Pot-pourri
5. Le cas  $d$  quelconque mais toujours  $k = 1$ 
  - A. Le résultat de Gromov
  - B. Pot-pourri
- 5  $\frac{1}{2}$ . Complainte des systoles
6. Les contre-exemples de Gromov
7. Les systoles se vengent de leurs échecs
  - A. Caractériser les jacobiniennes parmi les tores plats
  - B. Mesurer le défaut de kählérianité d'une métrique riemannienne
8. Pourquoi les systoles à  $k > 1$  sont inaccessibles ; les systoles stables

Le présent texte se veut une introduction aux trois textes de base sur le sujet, à savoir (Gromov 1983), (Gromov 1992 b) et (Gromov 1993). En fait, le second texte est une introduction au sujet tout en présentant de nombreux résultats nouveaux.

Cependant nous pensons qu'une introduction supplémentaire n'est peut-être pas de trop. Nous nous sommes donc efforcés d'insister sur le départ de la théorie, les exemples les plus simples et l'architecture générale. En contrepartie, les théorèmes principaux seront certes énoncés mais on ne donnera qu'une très vague idée de ce qui "fait marcher les choses". En effet, ces résultats sont extrêmement difficiles à démontrer, entre autres parce qu'il s'agit d'un sujet pratiquement vierge et pour lequel il n'existait aucune technique avant (Gromov 1983).

*On ne considère que des variétés riemanniennes compactes notées  $(M, g)$ , où  $M$  est une variété de dimension toujours notée par  $d$  et  $g$  désigne la métrique riemannienne considérée sur  $M$ .*

## 1. DÉFINITION ET REMARQUES

**DÉFINITION.**— *Pour tout entier  $k$  entre 1 et  $d$ , on appelle  $k$ -systole de la variété riemannienne compacte  $(M, g)$  de dimension  $d$  la borne inférieure du volume  $k$ -dimensionnel de tous les  $k$ -cycles singuliers entiers de  $M$  qui ne sont pas homologues à zéro dans  $M$ . La notation utilisée est  $Sys_k(g)$ . On simplifiera la notation  $Sys_1$  en  $Sys$  "tout court". Les cycles considérés seront toujours, sauf mention explicite du contraire, des cycles entiers.*

Par souci de simplification, on ne considérera (sauf mention explicite du contraire) que des variétés orientables.

Le cas  $k = d$  est simple (et fondamental) : la  $d$ -systole est simplement le volume total  $Vol(g)$  de  $(M, g)$ .

D'abord quelques remarques. Pour commencer, il n'y a de  $k$ -systole que si l'homologie entière de degré  $k$  de  $M$  est non nulle. Ensuite cela n'a guère de sens de calculer la valeur exacte d'une systole pour une  $(M, g)$  générale. Dans le cas  $k = 1$ , on sait certes qu'elle est réalisée par une géodésique périodique (donc la plus courte parmi les courbes non homologues à zéro) et ce sera important dans la suite. Pour les  $k$  plus grands, on tombe d'abord sur le problème de représentation des classes d'homologie par de sous-variétés. Rappelons qu'en toute généralité une  $k$ -classe d'homologie n'est pas toujours réalisable par une sous-variété, mais que c'est toujours possible pour  $k$  allant de 1 à 6. Sur cette question, voir (Thom 1954).

S'il y a réalisation des classes d'homologie par des sous-variétés, on tombe ensuite sur la question de réaliser la valeur de la systole par telle ou telle sous-variété. Ceci est étroitement lié à la question générale des sous-variétés *minima*. On rencontrera ce problème dans la section 7.A.

Par contre, si les valeurs exactes des systoles n'ont guère de sens dans le cas général, ce qui est intéressant c'est de rechercher s'il existe entre les différentes systoles des *inégalités universelles* (*i.e.* indépendantes de  $g$ , mais dépendant seulement de  $M$  par exemple). Et c'est la recherche de ces *inégalités a priori* qui fait l'objet du présent exposé. En particulier typiquement, on n'impose absolument aucune condition sur la courbure, quelle qu'elle soit, des structures riemanniennes considérées.

Une grande partie des résultats de Gromov sont valables dans le cas plus général des variétés finslériennes, voir (Gromov 1983).

Une dernière remarque : on pourrait penser à considérer l'homotopie au lieu de l'homologie. Nous préférons ne pas compliquer l'entrée du lecteur dans ce sujet assez nouveau, et reporter cette question à plus bas dans le courant du texte lorsque l'occasion s'en présentera.

## 2. LES SYSTOLES DES ESPACES STANDARDS

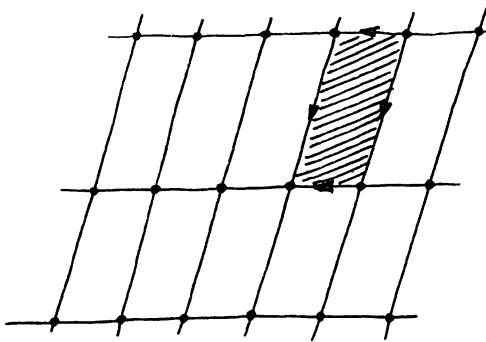
Le calcul des systoles de *variétés riemanniennes standards* est évidemment du plus grand intérêt. C'est par cela que nous allons commencer, ce qui permettra au lecteur de faire connaissance avec les systoles, objets apparemment tout simples à définir, mais pratiquement peu familiers. Le terme de variétés riemanniennes standards est vague. Pour nous, ce sera : les tores plats et les espaces symétriques de rang un (munis de leur métrique canonique), c'est-à-dire (exceptées les sphères) les différents espaces projectifs  $KP^n$  de dimension projective  $n$ , ceci pour un corps de base qui peut être  $\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$  et  $\mathbf{Ca}$  : ils sont, en tant que variétés réelles, de dimensions respectives  $n, 2n, 4n$  et  $16$ . Pour le dernier cas, celui du plan projectif sur les octaves de Cayley  $\mathbf{Ca}$ , rappelons que  $\mathbf{Ca}$  n'est pas un corps. Quant aux sphères, si elles sont absentes, c'est justement qu'elles n'ont pas de systoles, à part leur seul volume, puisque leur homologie est triviale excepté en dimensions  $0$  et  $d$ .

On va voir que le calcul désiré est plus subtil qu'il n'y pourrait paraître au premier abord.

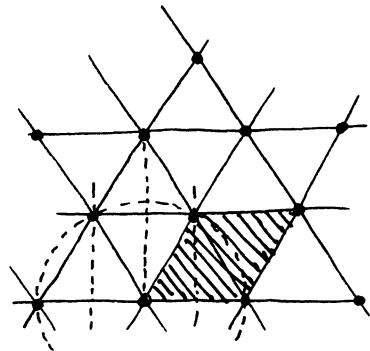
### A. La 1-systole des tores plats

Les tores plats sont les variétés riemanniennes quotients de l'espace euclidien standard  $\mathbf{R}^d$  par les translations d'un réseau  $\Lambda$  de  $\mathbf{R}^d$ . On les *notera*  $(T^d, \Lambda)$ . Deux tores plats sont isométriques, c'est-à-dire isomorphes en tant que variétés riemanniennes, si et seulement si les réseaux  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  qui les définissent sont déductibles l'un de l'autre par une isométrie de  $\mathbf{R}^d$ . Les géodésiques d'un tore plat sont les projections des géodésiques de l'espace euclidien, à savoir les droites. Puisque les courbes non-homologues à zéro dans  $T^d$  se relèvent en des courbes joignant deux points de  $\mathbf{R}^d$  déduits l'un de l'autre par un élément non nul de  $\Lambda$ , il en résulte donc que la 1-systole de  $(T^d, \Lambda)$  est égale à la borne inférieure des normes des éléments non nuls de  $\Lambda$  :

$$Sys(T^d, \Lambda) = Sys_1(T^d, \Lambda) = \inf \{ \|\lambda\| : \lambda \in \Lambda \setminus \{0\} \}$$



tore quelconque



tore équilatéral

On devrait donc dès à présent être à même de résoudre la question de la relation intersystolique universelle *pour les tores plats* entre  $Sys(T^d, \Lambda)$  et  $Sys_d(T^d, \Lambda)$  : en effet, on connaît la 1-systole mais aussi le volume :  $\text{Vol}(T^d, \Lambda) = \det(\Lambda)$ , le *déterminant* du réseau  $\Lambda$ . Et on a bien l'intuition en effet que le volume (le déterminant) ne peut pas être trop petit quand tous les éléments non nuls du réseau ne sont pas trop petits.

En fait, cette question apparemment naïve est l'une des questions clef des mathématiques. Elle est à la base de la théorie géométrique des nombres. Par ailleurs, trouver le  $\Lambda$  qui donne le meilleur rapport  $\det^{1/d}(\Lambda)/Sys(\Lambda)$  n'est rien moins que trouver l'empilement de sphères en dimension  $d$  le plus dense possible (à l'intérieur certes de l'ensemble des empilements de sphères associés à des réseaux). Pour ceci, voir (Oesterlé 1990).

La situation actuelle de cette question est la suivante. Nous exprimerons la valeur exacte de ce meilleur rapport plutôt sous la forme de la plus grande 1-systole possible pour un réseau de déterminant égal à 1 : nous noterons  $c(d)$  cette valeur. La valeur exacte de  $c(d)$  n'est connue aujourd'hui que pour  $d = 2, \dots, 8$ . Pour  $d = 2$ , c'est le réseau équilatéral figuré ci-dessus qui la fournit. Pour les dimensions plus grandes, on ne connaît que des bornes, à savoir d'abord l'encadrement classique :

$$\left(\frac{2}{\beta(d)}\right)^{\frac{1}{6}} \leq c(d) \leq \sqrt{2} \left(\frac{d+2}{\beta(d)}\right)^{\frac{1}{4}},$$

où l'on a noté  $\beta(d)$  le volume de la boule unité de  $\mathbf{R}^d$ . Avec la valeur classique  $\beta(d) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)}$  et la formule de Stirling, on déduit un comportement asymptotique de  $c(d)$  pour  $d$  grand :

$$\left(\frac{1}{2\pi e}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{c(d)}{\sqrt{d}} \leq \left(\frac{1}{\pi e}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ceci a été amélioré récemment à droite en  $\left(\frac{1,744}{2\pi e}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Mais on ne sait pas si  $\frac{c(d)}{\sqrt{d}}$  tend vers une limite ou non lorsque  $d$  tend vers l'infini. En conclusion,  $c(d)$  se comporte asymptotiquement comme  $\sqrt{d}$  et l'on a pour la constante correspondante un rapport d'encadrement voisin de l'unité. En particulier le réseau cubique  $\mathbf{Z}^d$  est tout à fait atypique pour la question étudiée. Dans la littérature, les encadrements ci-dessus sont habituellement désignés sous le nom de théorème de Minkowski-Hlawka : une référence de base est (Gruber and Lekerkerker 1987), voir chap. 6, §38 où ce qui est appelée constante d'Hermite et désignée par  $\gamma(d)$  n'est autre que le carré  $\gamma(d) = c^2(d)$  (voir aussi le supplément au chapitre 6 de cette même référence et, plus précisément (Kabajanski and Levenstein 1978)). La référence la plus récente pour la borne à droite est (Ball 1992) mais l'amélioration obtenue sur

les précédentes se lit, non pas sur  $c(d)$ , mais seulement sur sa puissance  $\frac{d}{2}$ -ième. Une autre référence essentielle est (Conway and Sloane 1988). Mentionnons enfin qu'il est très difficile de construire explicitement des réseaux avec  $c(d)$  grand, voir toujours (Oesterlé 1990) et que, en tout cas, on ne sait pas en construire avec la densité optimale donnée par la borne inférieure ci-dessus ; or c'est un problème pratique très important de trouver des empilements de sphères très denses.

En résumé, d'une part un réseau ne peut jamais être trop "serré", mais il y a aussi en toutes dimensions des réseaux très "serrés".

L'égalité précédente signifie que pour tout tore plat, on a une inégalité systolique de la forme :

$$\frac{\text{Vol}^{\frac{1}{d}}}{\text{Sys}} \geq * d^{\frac{1}{2}}$$

et elle est optimale quant au fait que la dimension  $d$  y figure par sa racine carrée.

*Dans tout le texte, \* signifiera une constante universelle et  $*(\cdot)$  une constante ne dépendant que de l'argument qui figure entre les parenthèses.*

## B. Les 2-systoles de rang $2r$ des tores plats

Pour tous les tores plats de dimension  $d$  et pour tous les entiers  $k$ , il est facile de voir que l'on a une inégalité optimale de la forme :

$$\frac{\text{Vol}^{\frac{k}{d}}}{\text{Sys}_k} \geq * d^{\frac{k}{2}}$$

obtenue essentiellement pour des cycles associés à des produits extérieurs de la forme  $\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_k$ .

Restreignons-nous maintenant aux 2-systoles. La définition de la systole permet des cycles donnés par une somme de produits extérieurs convenables  $\lambda_1 \wedge \lambda_2 + \lambda_3 \wedge \lambda_4 + \dots$ . Ce sont des cycles qui *s'étalent* plus ou moins dans le tore. Dans (Gromov 1992 b), on introduit les définitions suivantes : le *rang* d'une classe d'homologie  $h \in H_2(M)$  d'une variété compacte  $M$  est le rang de la 2-forme alternée  $h^*$  que  $h$  définit sur  $H^1(M; \mathbf{R})$  par la formule :

$$h^*(\alpha, \beta) = \langle \alpha \cup \beta, h \rangle \text{ où } \cup \text{ désigne le cup-produit.}$$

Ce rang est donc toujours pair et on note  $Sys_{2;2r}(M, g)$  (pour une variété riemannienne quelconque) la 2-systole de rang  $2r$  de  $(M, g)$ , c'est-à-dire, par définition, la borne inférieure des aires pour  $g$  des 2-cycles de  $M$  qui sont de rang exactement  $2r$ . Exemple : lorsqu'un cycle est représenté par une surface sans singularité et de genre  $\gamma$ , le rang de la classe d'homologie dans  $M$  de la classe fondamentale de cette surface ne pourra pas dépasser  $2\gamma$ .

On trouvera dans (Gromov 1992 b) le calcul montrant que pour le tore plat associé au réseau cubique  $\mathbf{Z}^d$  :  $Sys_{2;2r} = r$  pour tout  $r$  allant de 1 à partie entière de  $\frac{d}{2}$ . Le calcul est fait "à la Wirtinger", technique sur laquelle nous reviendrons dans le paragraphe C ci-dessous et dans 7.B.

On y trouvera aussi le fait qu'il n'y a pas d'inégalité systolique universelle pour les tores plats et pour leurs  $(2; 2r)$ -systoles lorsque  $r$  est fixé : par exemple, pour le tore plat "rectangulaire" de côtés  $(1; 1; 1; \varepsilon)$ , le volume vaut  $\varepsilon$ , tandis que la  $(2; 4)$ -systole vaut  $1 + \varepsilon$  et donc le rapport à étudier peut être aussi petit que voulu.

Le comportement des  $(2; 2r)$ -systoles sur l'espace des tores plats est un problème très difficile, voir la fin du §2 de (Gromov 1992 b). On trouvera plus bas en 6.A des faits essentiels les concernant pour le cas des dimensions paires  $d = 2\gamma$  et les  $(2; 2\gamma)$ -systoles.

### C. Les systoles des espaces projectifs standards

Nous considérons les  $KP^n$  munis de leur métrique riemannienne canonique. Leur volume étant connu, ce qu'il faut, c'est calculer leurs systoles. On doit à Chern (communication personnelle à l'auteur en 1962) les façons de les calculer. Nous exposons ce que l'on peut trouver en détail dans (Berger 1972) et aussi en partie dans (Gromov 1992b).

Les résultats sont ceux attendus : les systoles sont atteintes et ce, exactement et seulement par les sous-espaces projectifs de toute dimension. Mais les démonstrations sont loin d'être faciles.

Nous commençons avec le projectif réel  $\mathbf{R}P^d$  : il possède une systole pour toute dimension  $1, \dots, d$  à condition de travailler en homologie modulo 2 quand nécessaire. Pour  $k = 1$ , puisque l'on sait que la systole est réalisée par une géodésique périodique et que celles-ci ne sont autres que les droites projectives, on a donc gagné :  $Sys_1 = \pi$ . Mais dès  $k = 2$ , même si l'on savait



que la systole est réalisée par une sous-variété minima, on est loin d'avoir une classification de ces sous-variétés de  $\mathbf{R}P^d$  (et la même remarque s'applique pour les autres  $\mathbf{K}P^n$ ). On utilise alors la géométrie intégrale : l'espace de tous les sous-espaces projectifs de dimension  $d - k$  est muni d'une mesure canonique. Celle-ci permet de calculer le volume d'une sous-variété de dimension  $k$  de  $\mathbf{R}P^d$  comme la moyenne du nombre de points d'intersection avec ces sous-espaces projectifs. Puisque la topologie force à se rencontrer toute paire formée d'un cycle homologue à un sous-espace projectif de dimension  $k$  et d'un sous-espace projectif de dimension  $d - k$ , on voit que la  $k$ -systole est bornée inférieurement par le volume (canonique) de  $\mathbf{K}P^k$  et que la borne est atteinte exactement par tout sous-espace de dimension  $k$ . Toutes ces valeurs sont  $\text{Vol}(\mathbf{K}P^k) = (1/2) \text{Vol}(S^k) = \frac{k}{2} \beta(k)$ .

Le volume de  $\mathbf{C}P^n$  (toujours muni de sa métrique standard) vaut ("depuis" Elie Cartan)  $\frac{\pi^n}{n!}$  et il est héréditaire pour les sous-espaces projectifs. Pour calculer la  $2k$ -systole, la méthode ici consiste à utiliser l'inégalité de Wirtinger pour la 2-forme canonique  $\omega$  de  $\mathbf{C}P^n$ , le théorème de Stokes, le théorème de de Rham et le fait que  $\omega$  est fermée. Explicitons ceci, pour simplifier, dans le cas  $k = 2$  ; alors l'inégalité de Wirtinger dit que  $|\omega(x, y)| \leq 1$  pour tout couple  $x, y$  orthonormé de vecteurs tangents (l'égalité ayant lieu si et seulement si  $x, y$  définissent une droite complexe). La 2-homologie de  $\mathbf{C}P^n$  est engendrée par la droite projective complexe  $\mathbf{C}P^1$  ; soit donc  $S$  une surface (un 2-cycle) de  $\mathbf{C}P^n$  homologue à  $\mathbf{C}P^1$ . On aura

$$\int_S \omega = \int_{\mathbf{C}P^1} \omega = \pi = \int_S \omega(x, y) ds \leq \int_S |\omega(x, y)| ds \leq \int_S ds = \text{Aire}(S)$$

et l'égalité est atteinte pour les droites projectives et pour elles seulement. Plus généralement, on aura :

$$\text{Sys}_{2k}(\mathbf{C}P^n; \text{standard}) = \frac{\pi^k}{k!} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Pour la 4-systole par exemple (classe de  $\mathbf{C}P^2$ ), on travaillera avec la 4-forme  $\frac{\omega \wedge \omega}{2}$ , etc.

Pour les projectifs restants, les quaternioniens  $\mathbf{H}P^n$  et le plan projectif des octaves de Cayley  $\mathbf{C}a P^2$ , il suffit de montrer que la 4-forme canonique de  $\mathbf{H}P^n$  et ses puissances extérieures, ainsi que la 8-forme canonique de  $\mathbf{C}a P^2$ , vérifient une inégalité généralisant celle de Wirtinger. Ceci est fait dans (Berger 1972). On en déduit la valeur des  $4k$ -systoles pour  $\mathbf{H}P^n$  et pour  $\mathbf{C}a P^2$  le fait que la 8-systole est le volume de  $\mathbf{C}a P^1$ . Les valeurs de ces volumes figurent dans (Berger 1965 ; Berger 1972 ; Berger and others 1971 ; Besse 1978). Voir aussi (Gromov 1992 b).

### 3. UN PROGRAMME NATUREL

Ce programme m'a été suggéré par René Thom en 1962 dans la bibliothèque de mathématiques de Strasbourg lorsqu'y arriva l'article de Blatter dont il va être question bientôt. Il s'agit de celui mentionné plus haut : trouver des inégalités entre différentes systoles qui soient absolument indépendantes de toute métrique riemannienne sur la variété considérée.

La question générale est à plusieurs niveaux : on considère une variété  $M$  ayant une  $k$ -homologie non triviale.

Q 1 : *a-t-on une inégalité  $\text{Vol}^{k/d}(g)/\text{Sys}_k(g) \geq \text{constante positive et valable pour toute } g \text{ sur } M$ ?*

Q 2 : *quelle est la meilleure constante possible?*

Q 3 : *est-elle atteinte et, si oui, étudier les  $g$  et les cycles correspondants.*

Remarquons d'abord que la question n'a pas de sens en trop grande généralité. L'exemple de base est le produit de deux sphères  $M = S^k \times S^h$  avec  $d = k + h$  et  $k \neq h$ . En effet, considérons sur  $M$  des métriques produit  $g = (g', g'')$  : la  $k$ -systole de  $M$  vaudra  $\text{Vol}(S^k, g')$  tandis que  $\text{Vol}(M) = \text{Vol}(S^k) \times \text{Vol}(S^h)$  et il n'y a qu'à prendre des  $(S^h, g'')$  de volume très petit en gardant  $\text{Vol}(S^k, g')$  fixe pour avoir un rapport dans Q 1 aussi petit que l'on veut.

La philosophie de cet exemple est importante : les choses ne peuvent pas marcher parce que la classe fondamentale de  $M^k \times M^h$  n'est pas "engendrée" par la topologie de dimension  $k$  ( $k \neq h!$ ). Par contre la question se pose pour une question de type Q 1, mais portant sur le rapport ci-dessous :

$$\text{Q 4 : } \frac{\text{Vol}(g)}{\text{Sys}_k(g) \times \text{Sys}_h(g)} \geq \text{constante positive.}$$

Les questions ci-dessus semblent aussi raisonnables et pour une seule systole au dénominateur, pour :

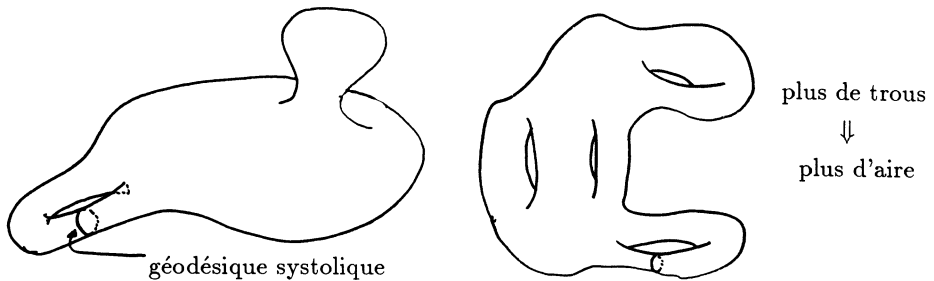
- les tores (toutes  $d$  et tous  $k$ )
- les quotients compacts des espaces hyperboliques (toutes  $d$  et tous  $k$ ), ce qui comprend en particulier toutes les surfaces compactes ( $d = 2$  et  $k = 1$ )
- les produits  $M^k \times \dots \times M^k$  pour  $d = pk$  et  $\text{Sys}_k$
- les  $\mathbf{K}P^n$  pour tous  $\mathbf{K}$ , tous  $n$  et tous  $k$  multiples entiers de la dimension réelle du corps  $\mathbf{K}$ .

Et pour plusieurs systoles au dénominateur, toutes les variétés produits. Mais on peut aussi étudier les quotients du type Q 4 ci-dessus pour les  $KP^n$  avec les indices de systoles convenables.

Dans la suite, nous allons donner ce qui nous semble être les résultats principaux obtenus jusqu'à ce jour pour ce programme. Nous ne serons pas exhaustifs et nous renvoyons le lecteur à (Gromov 1983 ; Gromov 1992 b ; Gromov 1993). À part quelques cas très simples, nous ne pourrons donner aucune démonstration, celles-ci étant à la fois très profondes et très techniques.

#### 4. LE CAS DES SURFACES $d = 2$ ET $k = 1$

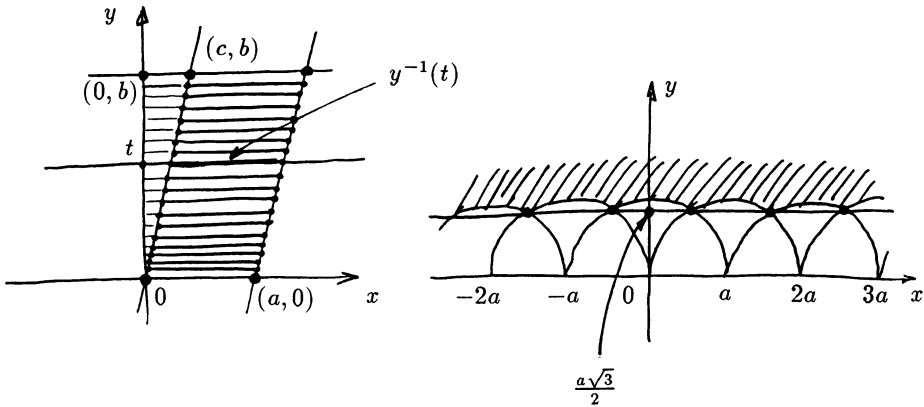
##### A. Le cas du tore



Le dessin ci-dessus montre qu'il est assez intuitif d'espérer, au moins pour les métriques plongées dans  $\mathbf{R}^3$ , une inégalité du type Q 1 pour le tore  $T^2$ . En fait, on a un résultat optimal pour Q 1, Q 2 et Q 3 et qui semble avoir été le premier du domaine qui nous intéresse :

**THÉORÈME** (Loewer, 1949, non publié).— *Pour toute métrique riemannienne  $g$  sur le tore  $T^2$ , on a  $\text{Aire}(g)/\text{Sys}^2(g) \geq \sqrt{3}/2$  et l'égalité a lieu si et seulement si  $(T^2, g)$  est un tore plat équilatéral.*

On utilise la représentation conforme : il existe toujours sur  $T^2$  une structure plate  $g_0$  telle que  $g = f \cdot g_0$  pour une fonction  $f$  convenable.



On choisit, pour engendrer le réseau définissant le tore  $\Lambda$ , deux vecteurs  $(a, 0)$  et  $(c, b)$ , où le vecteur  $(a, 0)$  est de longueur minima. On considère la bande de courbes fermées figurant sur le dessin, courbes qui réalisent la systole de  $g_0$ . Ce sont de bonnes candidates pour travailler : on va faire la moyenne de leur longueur, cette fois-ci pour  $f \cdot g_0$ , en remarquant que chacune de ces courbes a, par définition, une longueur supérieure ou égale à  $Sys(g)$  :

$$\int_0^b \text{long}(y^{-1}(t)) dt = \int_0^a \int_0^b f^{\frac{1}{2}} dt dx > b \cdot Sys(g).$$

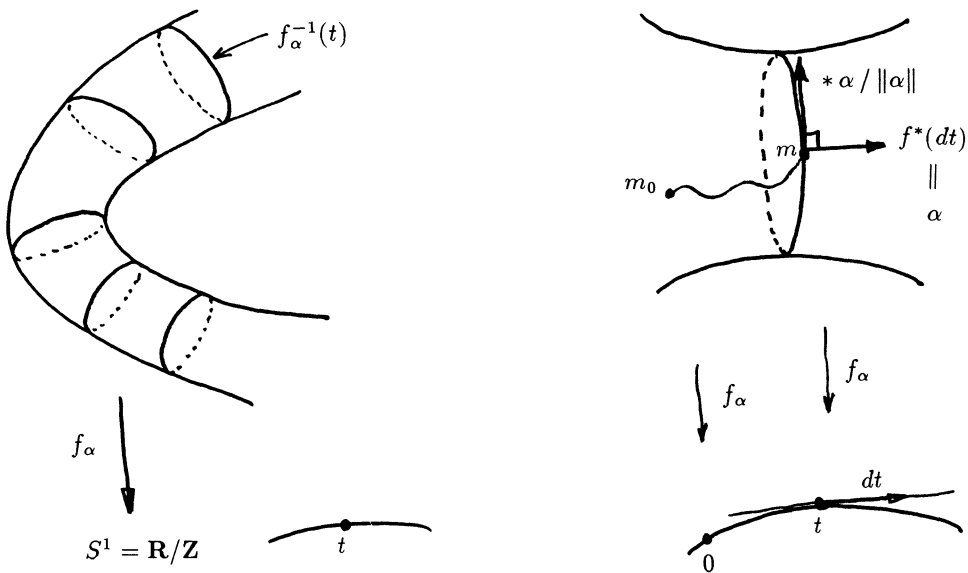
Puisque l'on a  $\text{Aire}(g) = \int_0^a \int_0^b f dx dt$ , l'inégalité de Schwarz fournit  $\text{Aire}(g)/Sys^2(g) \geq \frac{b}{a}$ . Par le choix de  $a$  et le dessin, on voit que  $b \geq a \frac{\sqrt{3}}{2}$  et que l'égalité a lieu seulement pour le tore équilatéral.

## B. Le cas des surfaces de genre plus grand : l'échec de la théorie classique

Les dessins ci-dessus semblent montrer que l'on peut espérer pour les surfaces compactes orientables une inégalité du type Q 1, mais avec en outre une constante qui devrait augmenter avec le genre  $\gamma$  (le nombre de trous) de la surface en question. En fait, cet espoir n'est pas complètement dans les nuages, puisque la théorie de la représentation conforme s'applique toujours à de telles surfaces.

C'est cette représentation conforme qu'ont utilisée Accola et Blatter indépendamment l'un

de l'autre dans les années 60 : (Accola 1960), (Blatter 1961). Voici, un peu nettoyé, ce qu'ils ont obtenu. Il est plus simple de ne retenir de la représentation conforme que les formes harmoniques (théorie de Hodge). Ici donc  $M$  est une surface compacte orientable de genre  $\gamma$  munie d'une métrique riemannienne  $g$ . Pour remplacer la bande de courbes utilisée plus haut dans le cas du tore, il faut trouver une famille de courbes non homologues à zéro et estimer leurs longueurs. Pour ce faire, on considère une 1-forme différentielle fermée  $\alpha$  qui soit à périodes entières. Fixant un point  $m_0$  de  $M$ , on fabrique une application  $f_\alpha : M \rightarrow S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  en intégrant  $\alpha$  le long d'un chemin quelconque joignant  $m_0$  à  $m$ . En effet, l'image dans  $\mathbf{R}$  ne dépend pas du chemin choisi lorsqu'on le bouge un peu parce que  $\alpha$  est fermée et si l'on bouge beaucoup le chemin, le résultat sera à prendre modulo les entiers, parce que  $\alpha$  est à périodes entières.



Si en outre  $\alpha$  n'est pas une différentielle exacte, alors toutes les images inverses  $f_\alpha^{-1}(t)$  seront non homologues à zéro et donc de longueur supérieure ou égale à  $Sys(g)$ . Calculons donc la valeur moyenne de la longueur des courbes  $f_\alpha^{-1}(t)$  pour  $t$  parcourant  $S^1$ . On a seulement à remarquer que l'élément de longueur le long de la courbe  $f_\alpha^{-1}(t)$  est  $*\alpha / \|\alpha\|$  tandis que l'élément d'aire de  $g$  est  $(*\alpha \wedge \alpha) / \|\alpha\|^2$  : ici on a désigné, selon l'usage, par  $*\alpha$  la 1-forme adjointe de  $\alpha$ , c'est-à-dire ici celle déduite de  $\alpha$  par rotation de  $+\frac{\pi}{2}$  pour  $g$ . On a donc via l'inégalité de Schwarz :

$$Sys(g) \leq \int_{S^1} \text{long}(f_\alpha^{-1}(t)) dt = \int_{S^1} \int_{f_\alpha^{-1}(t)} \frac{* \alpha \wedge \alpha}{\|\alpha\|} = \int_M \frac{* \alpha \wedge \alpha}{\|\alpha\|} \leq \text{Aire}^{\frac{1}{2}} \cdot N(\alpha),$$

où

$$N^2(\alpha) = \int_M * \alpha \wedge \alpha \quad \text{est la norme } L^2 \text{ de la 1-forme } \alpha.$$

Finalement

$$\frac{\text{Aire}(g)}{Sys^2(g)} \geq \frac{1}{N^2(\alpha)}.$$

Puisque ce qui précède est valable pour toute telle  $\alpha$ , pour gagner il suffit donc d'être sûrs de pouvoir trouver, parmi les formes  $\alpha$  considérées, une qui soit de norme  $N(\alpha)$  assez petite. Ces  $\alpha$  parcourent la cohomologie entière  $H^1(M; \mathbf{Z}) \setminus 0$  non nulle de  $M$  qui est de dimension réelle égale au double  $2\gamma$  du genre de  $M$ . En outre, dans une classe donnée, le minimum de  $N(\alpha)$  est atteint exactement par la 1-forme harmonique correspondante. L'espace des 1-formes harmoniques est un espace euclidien  $\mathcal{H}^1(M; g)$  de dimension réelle  $2\gamma$ , espace dans lequel les formes entières forment un réseau  $\Lambda$ .

La topologie des surfaces compactes montre que le réseau  $\Lambda$  est toujours de déterminant égal à 1. D'après les propriétés de théorie géométrique des nombres rappelés en 2.A sur les 1-systoles des tores plats, on voit donc que, prenant d'abord des formes  $\alpha$  harmoniques pour minimiser  $N(\alpha)$ , le mieux que l'on puisse espérer en toute généralité est (Accola et Blatter) :

*quelle que soit  $(M, g)$  de genre  $\gamma$ , et pour toute métrique riemannienne  $g$  sur elle, on a toujours*

$$\frac{\text{Aire}(g)}{Sys^2(g)} \geq * \frac{1}{\gamma}.$$

On peut donc considérer ce résultat comme un échec (relatif) : en effet, nous tenons ferme à notre intuition que la constante obtenue doit grandir avec le genre (alias le nombre de trous). C'est l'un des rares cas où, pour étudier les surfaces, la méthode classique (usage de la représentation conforme, etc.) est un échec. Nous allons voir que, au contraire, ce sont des techniques de géométrie pure, plus ou moins sophistiquées, qui permettent de gagner.

### C. Les résultats de Gromov

Gromov a démontré des résultats à deux niveaux. Le premier est :

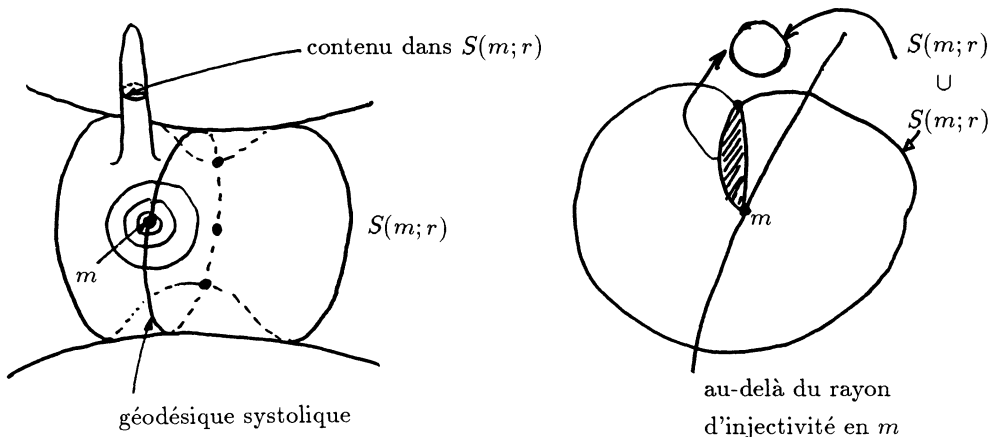
**THÉORÈME** ((Gromov 1983), p. 50).— *Pour une surface de genre  $\gamma$  et pour toute métrique riemannienne  $g$  sur elle, on a toujours*

$$\frac{\text{Aire}(g)}{\text{Sys}^2(g)} \geq * \gamma^{\frac{1}{2}}.$$

Ce premier niveau est accessible et consiste à partir du “truc de Hebda” (Hebda 1982). On désigne par  $c$  une plus petite géodésique périodique non homologue à zéro et par un point quelconque  $m \in c$ . Alors le disque métrique  $B(m; \text{Sys}(g)/2)$  possède une aire vérifiant :

$$\text{Aire}(B(m; \text{Sys}(g)/2)) \geq \frac{1}{2} \text{Sys}^2(g).$$

L'idée est de calculer cette aire du disque comme intégrale de la longueur des cercles métriques  $S(m; r)$  pour  $r$  allant de 0 à  $\text{Sys}(g)/2$ . La définition de la systole et le choix de la géodésique périodique  $c$  montrent que chacun de ces cercles a une longueur  $\geq 4r$  parce qu'il est composé de deux morceaux chacun de longueur  $\geq 2r$ . On fera bien attention à ce que ce raisonnement n'est pas entièrement trivial lorsque  $r$  dépasse le rayon d'injectivité de  $g$ , c'est-à-dire lorsque l'application exponentielle de  $(M, g)$  en  $m$  et restreinte à la boule euclidienne de rayon  $r$  dans  $T_m M$  n'est plus nécessairement un difféomorphisme.



Hebda démontrait donc ainsi que l'on a toujours, quel que soit le genre :  $\text{Aire}(g)/\text{Sys}^2(g) \geq *$ . Pour aller plus loin, Gromov introduit un ensemble de  $2\gamma$  géodésiques périodiques constituant une base convenable de l'homologie de  $M$  et les recouvre avec des boules qui soient toutes justiciables du truc de Hebda. Si le nombre de ces boules est  $N$ , la construction est telle que  $N(N-1)/2 \geq \gamma$ . Ceci fournit bien finalement une constante en  $\gamma^{1/2}$ .

Le second théorème est :

**THÉORÈME** ((Gromov 1992 b), section 2.C).— *Pour une surface de genre  $\gamma$  et pour toute métrique riemannienne  $g$  sur elle, on a toujours*

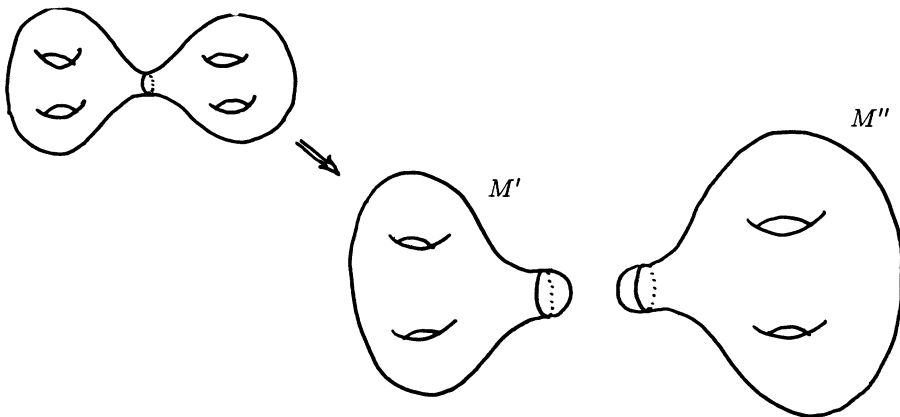
$$\frac{\text{Aire}(g)}{\text{Sys}^2(g)} \geq * \frac{\gamma}{\log^2 \gamma}.$$

Ce résultat est d'un tout autre niveau de profondeur et de difficulté. En fait, il est assez simple une fois connu le résultat analogue mais pour la *systole homotopique*  $\text{Sys}_\pi$  : celle-ci est la borne inférieure des courbes fermées non contractiles, *i.e.* non homotopes à zéro dans la surface considérée. Dans (Gromov 1983), 6.4.D' (à corriger avec la section 2.C de (Gromov 1992 b)), Gromov démontre le :

**THÉORÈME**.— *Pour une surface de genre  $\gamma$  et pour toute métrique riemannienne  $g$  sur elle, on a toujours*

$$\frac{\text{Aire}(g)}{\text{Sys}_\pi^2(g)} \geq * \frac{\gamma}{\log^2 \gamma}.$$

Ce théorème est optimal (Gromov, à paraître).





Passer de la systole homotopique  $Sys_\pi$  à la systole homologique  $Sys$  n'est pas trop difficile et fait dans (Gromov 1992 b), section 2.C. On procède par récurrence sur le genre. On considère une courbe réalisant la systole homotopique : si elle divise la surface en deux surfaces  $M'$  et  $M''$ , on ferme chacune de ces surfaces par des hémisphères d'équateur la géodésique périodique donnant la systole. À chacune de ces surfaces (de genre plus petit que  $\gamma$ ), on applique l'hypothèse de récurrence, ce qui est possible parce que la quantité  $\frac{\gamma}{\log^2 \gamma}$  se comporte bien additivement. Le départ de la récurrence est assuré précisément par le théorème de Loewner, puisqu'alors homologie et homotopie coïncident. Reste donc à démontrer le résultat pour la systole homotopique.

C'est ce résultat qui est extrêmement difficile et nécessite une connaissance approfondie de la première moitié de (Gromov 1983). Il y faut la technique du "filling", qui est aussi à la base de la démonstration du théorème de la section 5.A ci-dessous.

On se sert d'abord de la notion de *volume simplicial*, noté  $\|M\|$ , pour la surface  $M$ . Une excellente référence pour cet invariant est (Benedetti and Petronio 1992) où d'ailleurs le volume simplicial est appelé *norme de Gromov*. Pour les surfaces de genre  $\gamma$ , il vaut exactement  $4(\gamma - 1)$ .

Rappelons que ce volume (aire pour les surfaces !) simplicial est la borne inférieure de la somme des valeurs absolues des coefficients  $r_i$  pour les représentations de la classe fondamentale de  $M$  comme un cycle réel  $\sum_i r_i c_i$ . On sait donc d'une part que pour notre surface de genre donné,  $\sum_i |r_i|$  ne peut pas être trop petit. D'autre part, si nous partons d'un cycle  $\sum_i r_i c_i$  représentant la classe fondamentale de  $M$  : on a  $Aire(g) = \sum_i |r_i| Aire(c_i)$ . L'idée est de trouver une telle écriture de telle sorte que les  $c_i$  aient des aires toutes assez grandes. Si l'on pouvait appliquer à chaque  $c_i$  le truc de Hebda, on trouverait pour ces aires une borne inférieure en  $* Sys^2(g)$ . Malheureusement, les choses sont loin d'être aussi simples et d'ailleurs ne peuvent pas l'être vu l'optimalité du résultat. Gromov utilise une opération très technique qu'il appelle *diffusion* et fait sur elle des calculs difficiles, le tout fonctionnant sur le revêtement universel de  $(M, g)$  et basé en outre sur les résultats de la technique du "filling".

Le résultat de cette diffusion fournit, pour l'ensemble de la chaîne diffusée, un résultat final de la forme :

$$\sum_i |r_i| \leq * \frac{Aire(g)}{Sys^2(g)} \left( \log \frac{Aire(g)}{Sys^2(g)} \right)^2,$$

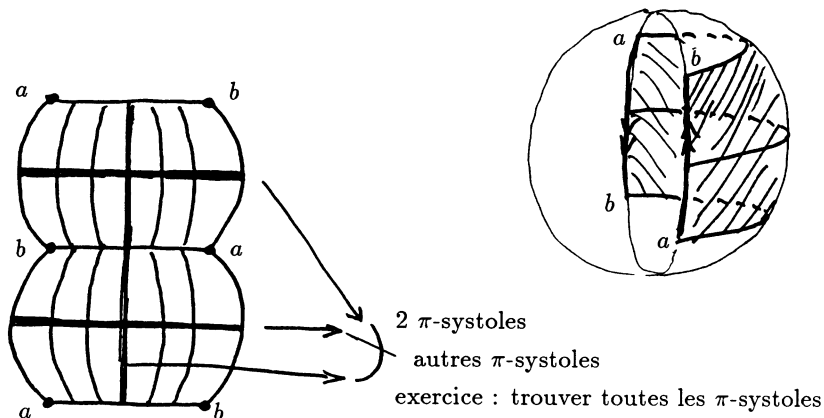
ce qui suffit pour le théorème annoncé, vue la valeur de  $\|M\|$ . Pour tout ceci, nous renvoyons le lecteur à la section 6 de (Gromov 1983).

### D. Pot-pourri

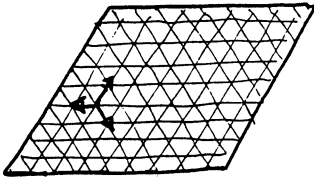
Pour le lecteur trop curieux pour avoir la patience de se reporter aux textes fondateurs, nous citons rapidement les réponses connues ou ouvertes aux questions naturelles qu'il serait en droit de se poser.

D'abord les résultats ci-dessus pour un genre quelconque restent valables sans modification d'énoncé pour les surfaces non orientables. Ceci ne présente pas de difficulté supplémentaire : voir (Gromov 1992 b).

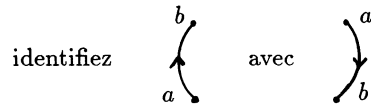
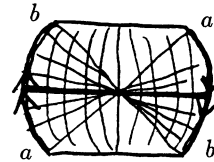
En genre petit, pour le projectif réel et la bouteille de Klein, les questions Q 1, Q 2, Q 3 sont complètement résolues. Pour le projectif réel  $RP^2$ , la borne inférieure optimale est celle de la métrique standard et atteinte seulement pour elle : (Pu 1952) (on gagne avec la représentation conforme et le groupe de Möbius). Pour la bouteille de Klein, c'est l'occasion de réaliser la difficulté du problème des systoles : la meilleure borne n'est pas obtenue pour la bouteille de Klein plate carrée, mais cette borne est connue. Elle n'est jamais atteinte pour une métrique riemannienne au sens "lisse" mais correspond à une bouteille de Klein ayant une singularité le long d'une courbe fermée. On l'obtient en recollant le long de leur courbe frontière deux copies d'un ruban de Möbius obtenu comme quotient par l'antipodie de la partie de la sphère standard qui est celle des latitudes variant de  $-45^\circ$  à  $+45^\circ$  : (Bavard 1988) et voir aussi (Gromov 1992 b), section 2.C, remark b.



Ce sont les seules surfaces pour lesquelles on ait actuellement mieux que les résultats généraux de Gromov. En particulier, le premier cas qui se pose est celui de la surface de genre deux. Le lecteur pourra d'abord se convaincre lui-même que les métriques à courbure négative constante ne sont jamais optimales. En fait, le raisonnement qui vient d'être laissé au lecteur montre, sans trop de peine, qu'une métrique optimale sur une surface quelconque doit être telle que, par chaque point, il passe au moins deux géodésiques périodiques, réalisant la systole. Vérifiez que c'est bien le cas pour le tore plat équilatéral, le projectif réel standard et la bouteille de Klein optimale qui vient d'être décrite.



les trois bandes du tore plat équilatéral, elles se coupent à 3 fois  $\frac{2\pi}{3}$



La situation actuelle est la suivante. Dans (Gromov 1983), section 5, on trouvera un théorème d'existence d'une métrique extrémale. Mais ces métriques sont très sauvages. Calabi, dans (Calabi 1993), a étudié les métriques extrémales, supposées être assez lisses par morceaux. Le calcul des variations fournit une équation du genre Monge-Ampère, mais plus délicate. On pourra aussi consulter (Bryant 1994). Quoi qu'il en soit, il est probable que les métriques extrémales présentent (en genre supérieur ou égal à 2) à la fois des régions à courbure positive, des régions à courbure nulle et des régions à courbure négative. Et soient, en fin de compte, des objets extrêmement complexes.

## 5. LE CAS DES DIMENSIONS $d$ PLUS GRANDES QUE 2 MAIS TOUJOURS POUR LES 1-SYSTOLES

### A. Le résultat de Gromov

Nous avons vu en 3 que la question n'avait de sens que pour les variétés telles que leur 1-cohomologie "engendre" la classe fondamentale. Et que, en outre, les candidats naturels étaient les tores, les quotients hyperboliques compacts et les projectifs réels. Aucun résultat n'apparut sur le sujet avant (Gromov 1983). Dans ce texte, on trouve le résultat fondamental suivant, mais valable seulement pour la systole *homotypique*  $Sys_\pi$  :

**THÉORÈME.**— *Pour toute variété essentielle de dimension  $d$  et pour toute métrique riemannienne  $g$  sur une telle variété, on a toujours  $\frac{Vol(g)}{Sys_\pi^d(g)} > *(d)$ .*

La définition des variétés essentielles se fait en deux temps. Dans le premier, on définit (on rappelle ce que sont) les variétés *asphériques* : ce sont celles qui sont revêtues par un espace contractile ou, ce qui revient au même, celles dont tous les groupes d'homotopie sont nuls après la dimension 1. Les variétés essentielles sont celles qui admettent une application dans une variété asphérique telle que l'image de leur classe fondamentale, au niveau de l'homologie, ne soit pas nulle. Tous les candidats cités plus haut sont essentiels. C'est évident pour les tores et les quotients hyperboliques compacts. Par contre, pour le projectif réel, il faudra le plonger dans  $\mathbf{R}P^\infty$ , qui est bien asphérique et de groupe fondamental  $\mathbf{Z}^2$  mais de dimension infinie. On en a aussi beaucoup d'autres, parce que la somme connexe de n'importe quelle variété avec une variété essentielle reste essentielle.

On remarquera que cette notion de variété essentielle est beaucoup plus restrictive que celle qui consiste seulement à demander que, via la dualité de Poincaré, la 1-homologie engendre la classe fondamentale. Dès que le groupe fondamental est égal à son commutateur, la 1-homologie est nulle et donc il n'y a même pas du tout de systole. Ceci peut arriver même pour des quotients hyperboliques compacts.

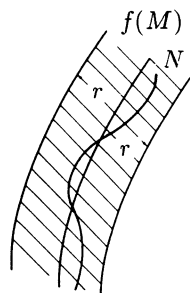
Voici brièvement les points clefs de la démonstration, dont la maîtrise totale est pour les happy few. On plonge  $(M, g)$  dans l'espace de Banach  $C^{born}(M) = \mathbf{C}(M)$ , formé par toutes les fonctions bornées sur  $M$  : à l'aide de la métrique par l'application  $f : m \rightarrow d(m, \cdot)$  où  $d$  est la fonction distance sur  $(M, g)$ . La propriété essentielle de cette application est

d'être une *isométrie*, non pas comme au sens commun du plongement des variétés riemanniennes dans les  $\mathbf{R}^N$ , mais vraiment pour la métrique induite, c'est-à-dire que  $d_{(M,g)}(m, n) = d_{\mathbf{C}(M)}(f(m), f(n))$  pour tous les  $m, n$  dans  $(M, g)$ . C'est bien pour avoir une telle propriété qu'il faut aller en dimension infinie.

Cependant, on continue à voir les choses, pour aider l'intuition, comme si l'on était en dimension finie. On considère la sous-variété  $f(M)$  de  $\mathbf{C}(M)$ . L'idée centrale est d'introduire la notion de *rayon de remplissage*  $RR(f(M))$  (filling radius). C'est le nombre réel  $r$  le plus petit possible tel que  $f(M)$  soit un bord dans le sous-ensemble de  $\mathbf{C}(M)$  formé des points de  $f(M)$  qui sont à une distance de  $f(M)$  pas plus grande que  $r$ . On conjugue maintenant les deux résultats suivants.

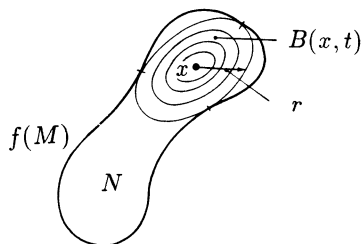
D'abord, pour toute variété  $M$  quelconque (essentielle ou non), on a toujours l'inégalité :

$$\text{Vol}(g) > * (d) (RR(f(M)))^d.$$



$B(f(M), r)$

ici  $f(M)$  n'est pas un bord dans  $B(f(M), r)$

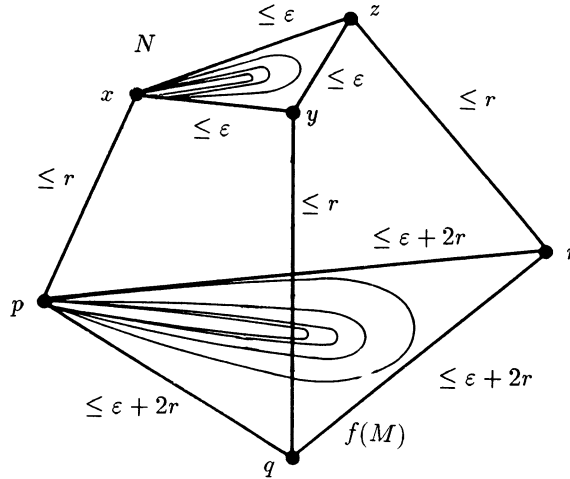


ici  $f(M)$  est un bord dans  $B(f(M), r)$

Il faut effectuer un certain travail technique, mais l'idée est de remplir, dans  $\mathbf{C}(M)$ , la sous-variété  $f(M)$  considérée comme un bord, par une sous-variété *minimale*  $N$ . Maintenant, d'abord il existe dans cette  $N$  un point  $x$  qui est à une distance de chaque point du bord  $f(M)$  au moins égale à  $r = RR(f(M))$  ; on peut donc remplir  $N$  par des sphères successives de rayons allant de 0 à au moins  $r$ . Puis, comme  $N$  est minimale, le volume de ces sphères croît suffisamment vite ; finalement, le volume total de  $N$  est au moins égal à celui de la boule de rayon  $r$  dans  $N$ , donc est supérieur ou égal à  $* (d) r^{d+1}$ . Mais maintenant  $\text{Vol}(g) = \text{Vol}(f(M)) \geq * (d) \text{Vol}^{d/d+1}(N)$  à cause de l'inégalité isopérimétrique pour les sous-variétés minima à bords.

On utilise maintenant le fait que  $M$  est essentielle pour voir que :

$$r \geq \frac{1}{6} \text{Sys}(g).$$



On procède par contradiction : pour toute  $M$  et si  $r < \frac{1}{6} \text{Sys}(g)$ , on peut d'abord rétracter  $N$  sur  $f(M)$  au niveau du 2-squelette comme suit : on prend une triangulation de  $N$  par des simplexes dont toutes les arêtes soient plus petites que  $\varepsilon = \frac{1}{6} (\text{Sys}(g) - r)$ . Pour tout triangle concerné  $(x, y, z)$  de  $N$ , on choisit des points  $(p, q, r)$  dans  $f(M)$  à distance  $\leq r$ . Puisque  $f(M)$  est vraiment isométrique à  $M$ , le périmètre de  $(p, q, r)$  sera inférieur à  $3(2\varepsilon + r) < \text{Sys}(g)$ . C'est dire, par définition de  $\text{Sys}(g)$ , que la courbe fermée que constitue le périmètre de  $(p, q, r)$  est contractible dans  $M$ . Cette contraction s'étend (on est dans un espace vectoriel) en une contraction du triangle  $(x, y, z)$ . Et comme  $M$  est essentielle, on en déduit que  $N$  se rétracte sur  $f(M)$ , contredisant ainsi la définition de  $r = \text{RR}(f(M))$ .

## B. Pot-pourri

On trouvera dans (Gromov 1983 ; Gromov 1992 b) différents résultats précisant le théorème précédent, en particulier des améliorations de la constante  $\ast(d)$  qui y figure lorsque l'on sait plus de choses sur  $M$ , par exemple sur ses nombres de Betti. Mais comme (aujourd'hui !) on sait seulement que  $\ast(d)$  est de l'ordre de "au moins"  $\frac{1}{d^2}$ , la plainte ci-dessous reste justifiée.

Mais il y a surtout la question de remplacer la systole homotopique par la systole homologique lorsque l'on sait que la 1-homologie engendre la classe fondamentale. Évidemment si  $H_1$  et  $\pi_1$  coïncident, c'est terminé, par exemple pour les tores. À notre connaissance, il n'existe aucun résultat actuellement pour de telles variétés lorsque  $\pi_1$  est différent de  $H_1$ .

## 5 $\frac{1}{2}$ . COMPLAINTÉ DES SYSTOLES

Voici la triple plainte des systoles :

*Pour les 1-systoles et les dimensions plus grandes que 2, on ne connaît aucune variété pour laquelle on aurait une réponse à Q 2 (puis Q 3). Ceci que ce soit pour la systole homotopique ou pour la systole homologique. C'est ainsi que, dès le tore  $T^3$  et le projectif réel  $\mathbf{RP}^3$ , on n'a pas la moindre idée si oui ou non la meilleure constante correspond, pour le tore, à la métrique plate la plus serrée, pour le projectif réel à la structure standard.*

*Comme dit plus haut, on n'a pas de résultat général pour la 1-systole homologique.*

*Pour les  $k$ -systoles, avec n'importe quel  $k > 1$  et quelles que soient les variétés considérées, il est probable (voir la section suivante) qu'il ne peut exister aucun résultat général (que ce soit de type Q 1 ou Q 4), c'est-à-dire valable pour toute métrique riemannienne sur une telle variété.*

Les seuls résultats partiels connus sont, à notre connaissance, d'abord un résultat sur  $\mathbf{CP}^2$  s'appliquant à toute  $g$  suffisamment voisine de la standard et qui dit que :

$$\frac{\text{Vol}(g)}{\text{Sys}_2(g)} \geq \frac{\pi^2}{\pi^2}$$

qui est la valeur pour la métrique standard ; en outre, cette valeur n'est atteinte, à l'intérieur des métriques spéciales considérées, que si ces métriques sont ce que Gromov appelle quasi-kählériennes : voir (Gromov 1992 b), section 4.A. La démonstration est très chère : elle n'utilise rien moins que la théorie de Hodge, celle des courbes pseudo-holomorphes de Gromov et enfin l'existence d'une transformation de Radon valable sur  $\mathbf{CP}^2$  pour toute métrique voisine assez de la standard

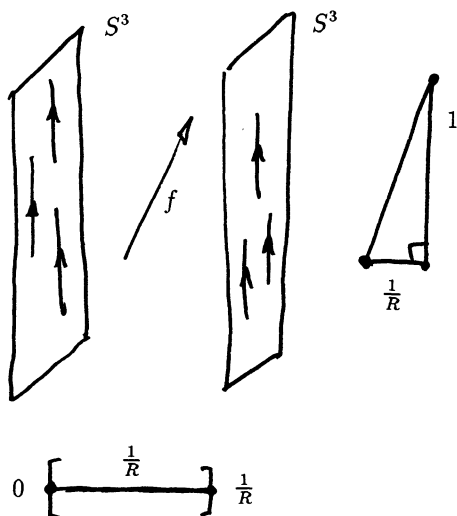
et portant sur la famille des courbes pseudo-holomorphes, famille qui généralise à de telles métriques la famille de toutes les droites projectives de  $\mathbf{CP}^2$ .

On verra ensuite dans 6.B que les systoles paires sont accessibles dans le cas restreint des métriques kälhériennes.

Voir aussi les systoles stables dans la dernière section.

## 6. LES CONTRE-EXEMPLES DE GROMOV

Gromov est actuellement en train de construire des contre-exemples (voir (Gromov 1993)) et il semble fort possible que, dès qu'une 2-au moins systole est en jeu, alors toute inégalité générale soit impossible, ceci quelle que soit la variété considérée. Nous présentons ici les premiers contre-exemples obtenus.



Le premier est  $S^1 \times S^3$ . Pour tout réel  $R$ , on considère la sphère  $S^3$  de rayon  $R$  et l'intervalle  $[0, \frac{1}{R}]$ . Sur  $S^3$ , on considère l'isométrie  $f$  consistant à faire tourner chaque fibre de Hopf d'une longueur égale à 1. Enfin on considère sur  $S^1 \times S^3$  la métrique  $g$  obtenue en recollant les deux extrémités de  $S^3 \times [0, \frac{1}{R}]$  à l'aide de l'isométrie  $f$ . Le théorème de Pythagore montre que la 1-systole vaut  $(1 + \frac{1}{R^2})^{\frac{1}{2}}$ . La valeur de la 3-systole est  $R^3$ , ceci est laissé au lecteur en exercice. Comme le volume total vaut  $R^3 \times R^{-1} = R^2$ , le rapport  $\text{Vol}(g)/\text{Sys}_1(g) \times \text{Sys}_3(g)$  tend vers



zéro quand  $R$  tend vers l'infini.

Cette méthode ne marche pas pour  $S^2 \times S^1$  parce que  $S^2$  ne possède pas d'isométries sans point fixe et homotope à l'identité. La question Q 4 est ouverte aujourd'hui pour  $S^2 \times S^1$ .

On reprend maintenant le contre-exemple ci-dessus pour  $S^3 \times S^1$  et on en fait le produit par la sphère  $S^2$  de rayon  $R^{-\frac{3}{2}}$ . On obtient ainsi sur  $S^3 \times S^1 \times S^2$  des métriques avec  $Sys_1 > 1$  et  $Sys_5 > 1$  tandis que le volume est aussi petit que l'on veut.

Puis sur l'exemple ci-dessus, on pratique le long d'une fibre  $S^1 \times S^2$  une chirurgie convenable pour en faire  $S^1 \times S^5$ . Si l'on est assez soigneux pour la métrique lors de la chirurgie, on trouve ainsi sur  $S^1 \times S^5$  des métriques à volume aussi petit que l'on veut avec toujours  $Sys_1 > 1$  et  $Sys_5 > 1$ .

Enfin on fait le produit de l'exemple précédent par la sphère  $S^4$  de rayon égal à 1. Une chirurgie métrique convenable le long d'une fibre  $S^5 \times S^1$  le transforme en une métrique sur  $S^5 \times S^5$  à volume aussi petit que l'on veut tandis que toujours  $Sys_5 > 1$ .

Pour l'instant, et pour les  $S^k \times S^k$  avec  $k$  plus petit que 5, on devra se contenter des systoles stables, introduites plus bas dans la section 8.

## 7. LES SYSTOLES SE VENGEANT DE LEURS ÉCHECS

### A. Caractériser les jacobiennes parmi les tores plats

Parmi les tores plats, on en trouve de spéciaux, les jacobiennes des surfaces riemanniennes. Rappelons brièvement ce qu'elles sont. On part d'une surface compacte orientée  $M$  de genre  $\gamma$ , que l'on munit d'une métrique riemannienne  $g$ . En fait, la seule chose qui va être nécessaire pour définir sa *jacobienne*, notée  $J(M)$ , c'est la structure conforme de  $(M, g)$ , c'est-à-dire la seule donnée de la rotation de  $+\frac{\pi}{2}$ . Mais cette fois-ci, au lieu de considérer une seule forme  $\alpha$  à périodes entières, on les considère toutes ensemble. Comme elles ont une base de cardinal  $2\gamma$ , on voit que l'on arrive dans le tore  $T^{2\gamma} = (S^1)^{2\gamma}$ . Mais il faut préciser comment le faire de façon intrinsèque. Voici une façon : les applications  $f_\alpha$  dans 4.B sont linéaires en  $\alpha$ , donc on obtient une forme linéaire sur  $H^1(M; \mathbf{R})$  qui fournit, grâce à la dualité de Poincaré, un élément de  $H_1(M; \mathbf{R})$ . Finalement, l'application obtenue est dans

le tore plat égal au quotient  $\frac{H_1(M; \mathbf{R})}{H_1(M; \mathbf{Z})} = J(M)$ . Elle n'est évidemment définie qu'à une translation près.

Mais il faut maintenant aussi définir sur  $H_1(M; \mathbf{R})$  une structure euclidienne. Pour nous, en vue de 4.B, le plus simple est de l'identifier avec  $H^1(M; \mathbf{R})$  et d'identifier  $H^1(M; \mathbf{R})$  avec l'espace  $\mathcal{H}^1(M)$  des formes harmoniques sur  $M$  (ces formes harmoniques ne dépendent que de la structure conforme), espace où la norme euclidienne est celle notée  $N$  en 4.B. Et, dans cet espace vectoriel réel, on trouve le réseau  $\Lambda = \mathcal{H}^1(M; \mathbf{Z})$  des formes harmoniques à périodes entières. Rappelons encore une fois que ces réseaux sont toujours (pour les surfaces) de déterminant égal à 1.

En résumé, à chaque surface orientable  $M$ , de genre  $\gamma$  et munie d'une structure conforme, est associé un tore plat  $(T^{2\gamma}; \Lambda)$  et un plongement (canonique à une translation près)  $f : M \rightarrow T^{2\gamma}$ . Comme on le verra amplement bientôt, de tels réseaux  $\Lambda$  sont très particuliers. Les géomètres algébriques, entre autres, ont depuis longtemps recherché (et trouvé) des critères pour caractériser ces réseaux parmi l'ensemble de tous les réseaux de dimension  $2\gamma$ . Ces critères sont toujours de l'ordre de la géométrie algébrique ou, à la rigueur, de l'algèbre. Les systoles vont nous donner des réponses géométriques particulièrement simples.

Le premier résultat est (Buser and Sarnak 1992) :

**THÉORÈME.**— *Quelle que soit la surface de genre  $\gamma$  et quelle que soit sa structure conforme, la 1-systole de sa jacobienne vérifie toujours :*

$$Sys < *(\log(\gamma + 1))^{\frac{1}{2}}.$$

Comme on a vu en 2.A que, pour des réseaux de déterminant égal à 1, la 1-systole peut atteindre  $\sqrt{\gamma}$ , on voit ici un fort élément de distinction pour les jacobiniennes. La démonstration de Buser et Sarnak est une belle construction géométrique d'un collier convenable.

Dans (Gromov 1992 b), Gromov va beaucoup plus loin, puisqu'il réussit à donner une *caractérisation* complète des jacobiniennes par leurs  $(2; 2\gamma)$ -systoles (voir la définition en 2.B), à savoir :

**THÉORÈME.**— *Pour tout tore plat de dimension  $2\gamma$  et de déterminant égal à 1, on a  $Sys_{2;2\gamma} \geq \gamma$  et l'égalité si et seulement si ce tore plat est une jacobienne*

ou une limite de jacobiennes.

Remarquer d'abord qu'il faut absolument prendre la  $(2; 2\gamma)$ -systole, parce que (déjà remarqué 2.B), pour caractériser une jacobienne en tant que tore plat, il faut y considérer des surfaces qui *s'étalent complètement dedans*.

Gromov donne deux démonstrations : la première utilisant de la géométrie algébrique ; la seconde est trop jolie pour être passée sous silence. On réalise la systole  $(2; 2\gamma)$  par une surface minima  $S$  du tore  $T^{2\gamma}$  considéré (on a vu, dans la section 1, que toute classe de 2-homologie est toujours réalisable par une surface). Sur  $S$ , les coordonnées "cycliques" du tore déterminent des fonctions harmoniques parce que  $S$  est minima ou encore, des 1-formes harmoniques, à savoir les différentielles de ces coordonnées. Comme ces mêmes formes harmoniques fournissent essentiellement l'application canonique de  $S$  dans sa jacobienne  $J(S)$ , on obtient finalement une application affine  $m : J(S) \rightarrow T^{2\gamma}$ .

Maintenant, ou  $S$  est de genre exactement  $\gamma$ , ou est de genre plus grand (elle ne peut pas être de genre plus petit de par la définition de la  $(2; 2\gamma)$ -systole en 2.B). Le cas de genre plus grand se traite à part et c'est lui qui fournit des limites de jacobiennes. Dans le cas de genre exactement  $\gamma$ , l'application  $m$  est un isomorphisme affine et on calcule la restriction à  $S$  de l'énergie de l'application affine obtenue  $m : J(S) \rightarrow T^{2\gamma}$  ; c'est  $\frac{1}{2} \text{trace}(m'^*m')$  où  $m'$  désigne la différentielle de  $m$ . Mais, dans notre situation, les déterminants sont égaux à 1 à la fois pour  $J(S)$  et pour  $T^{2\gamma}$ , ce qui force l'égalité  $\det(m') = 1$ . Enfin, l'aire de  $S$  est égale à l'énergie de  $m$  restreinte à  $S$  parce que, en dimension 2, énergie et aire coïncident pour les applications minima et conformes. L'inégalité de Newton implique donc l'inégalité demandée. Et s'il y a égalité, c'est que  $m'$  est l'identité, ce qu'il fallait démontrer.

En fait, il peut y avoir des singularités (*cf.* la section 1) mais ici, comme  $k = 2$ , les choses sont raisonnables, voir les remarques de la section 2.E de (Gromov 1992 b).

*Remarque.*— On trouvera dans (Gromov 1992 b) des considérations complémentaires sur les questions que soulèvent naturellement les deux résultats ci-dessus, en particulier les rapports avec le théorème de Matsusaka.

## B. Mesurer le défaut de kählérianité d'une métrique riemannienne

Dans l'espace de toutes les métriques riemanniennes sur une variété compacte donnée  $M$  et dans le cas où  $M$  admet au moins une métrique riemannienne kählérienne, comment mesurer de façon géométrique simple, par un invariant le plus robuste possible, *combien loin des métriques kählériennes* se trouve une métrique  $g$ ?

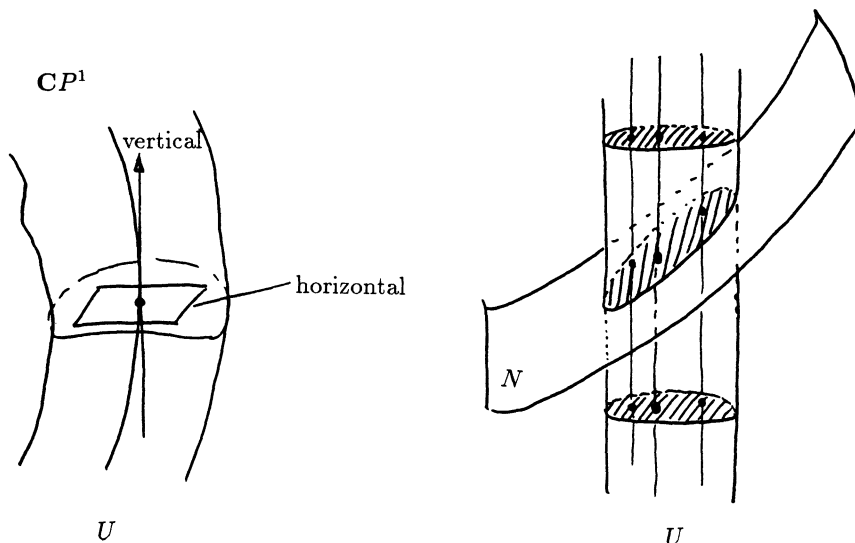
Dans (Gromov 1992 a ; Gromov 1992 b) on trouve une réponse à cette question, basée sur les systoles. Nous allons la donner dans le cas le plus simple, celui de  $\mathbf{CP}^3$ . Le cas général (mais l'idée de base est dans ce qui suit) et beaucoup d'autres choses sont à trouver dans ces deux références.

*Lemme.*— *Pour toute métrique kählérienne sur  $\mathbf{CP}^3$  :*

$$\frac{\text{Vol}^2}{\text{Sys}_4^3} = \frac{\left(\frac{\pi^3}{3!}\right)^2}{\left(\frac{\pi^2}{2!}\right)^3}.$$

On travaille comme en 2.C : le calcul qui y est fait reste valable pour toute métrique kählérienne  $g$  sur  $\mathbf{CP}^3$  parce que l'inégalité de Wirtinger est valable pour toute métrique kählérienne. Mais attention ! Il faudra, pour trouver toujours l'analogie d'une "droite projective complexe" dans cette métrique kählérienne "abstraite", utiliser le grand théorème de Hirzebruch-Kodaira-Yau qui dit que toutes les structures kählériennes sur  $\mathbf{CP}^n$  (pour tout  $n$ ) sont équivalentes au sens le plus fort : elles sont bi-holomorphes.

Et voici comment la 4-systole se venge maintenant (Gromov 1992 a ; Gromov 1992 b). On part de la métrique standard  $g$  sur  $\mathbf{CP}^3$  et on considère un voisinage tubulaire quelconque  $U$  d'une droite projective  $D$  (par exemple  $\mathbf{CP}^1$  si vous voulez). On modifie la métrique  $g$  en  $g_\varepsilon$  comme suit : sur  $U$  on peut écrire de façon naturelle  $g = g_{hor} \oplus g_{ver}$  où la partie verticale est celle tangente à  $D$ . On pose  $g_\varepsilon = \varepsilon^{-1} g_{hor} \oplus \varepsilon^2 g_{ver}$ , ce qui ne change rien au volume total.



Maintenant le fibré normal de  $D$  dans  $CP^3$  est trivial (et ceci est très général, voir encore les références (Gromov 1992 a) et (Thom 1954)). Considérons une sous-variété  $N$  de dimension 4 de  $CP^3$  qui soit non-homologue à zéro et donc de la classe de  $CP^2$ . Cela la force à rencontrer toute sous-variété homologue à  $CP^1$  et donc toutes les fibres du voisinage tubulaire  $U$ , puisque ce voisinage est un produit. Et comme une projection orthogonale ne peut que diminuer les volumes, on voit que le volume de  $N$  sera toujours supérieur au volume d'une section horizontale de  $U$ , soit une constante multipliée par  $\varepsilon^{-1}$ . En conclusion, pour ces  $g_\varepsilon$ , le rapport  $\text{Vol}^2(g_\varepsilon)/\text{Sys}_4^3(g_\varepsilon)$  peut être aussi petit que l'on veut. Ce rapport systolique est donc un scalaire qui mesure très bien le défaut de kählérianité.

On trouvera dans (Bourguignon and others 1993) une autre très belle estimation de la kählérianité : pour toute métrique kählérienne  $g$  sur  $CP^n$ , de volume total égal à celui de  $\frac{\pi^n}{n!}$  de la métrique standard, la première valeur propre non nulle du laplacien vérifie  $\lambda_1 \leq 4(n+1)$ , valeur qui est la valeur standard. Or (Colbois et Dodziuk 1993), on sait construire, sur toute variété compacte, des métriques de volume égal à 1 et de  $\lambda_1$  aussi grande que l'on veut. Bien noter que  $\lambda_1$  (à cause de sa caractérisation minimax) est un invariant  $C^0$ , donc idéalement robuste lui aussi.

## 8. POURQUOI LES SYSTOLES À $k > 1$ SONT INACCESSIBLES : LES SYSTOLES STABLES

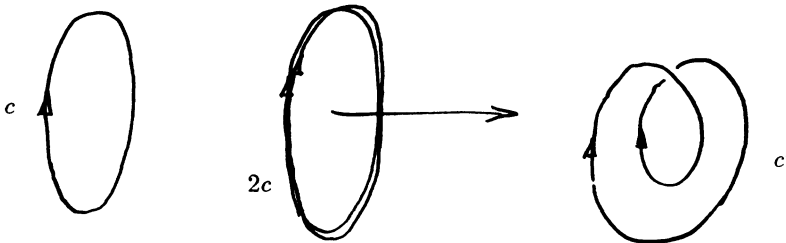
Pour les courbes et les 1-systoles, nous avons utilisé la représentation conforme, mais aussi dans 4.B (même si ce fut un échec) les 1-formes différentielles fermées, le théorème de Stokes et le théorème de de Rham, etc. C'est aussi le cas pour les métriques kählériennes. Bref on a pu *calculer*. Mais de tels calculs sont systématiquement voués à l'échec dès que  $k$  est plus grand que 1 parce qu'une  $k$ -forme alternée n'est pas, en général, décomposable.

On peut en échange utiliser les formes différentielles de degré quelconque, le théorème de Stokes et le théorème de de Rham mais il faut alors affaiblir la notion de systole en celle de *systole stable*. Voici, expliqué très vite, ce que l'on fait et qui figure en détail dans (Gromov and others 1981), chapitre 4.

Dans tout ce qui suit, on est comme toujours dans une variété riemannienne compacte  $(M; g)$ .

Une autre raison pour la difficulté qu'il y a à utiliser les formes différentielles est que celles-ci vivent plutôt dans la cohomologie réelle  $H^k(M; \mathbf{R})$  que dans la cohomologie entière. Considérons l'accouplement  $\int_a \omega$  entre une classe  $a \in H_k(M; \mathbf{Z})$  et  $\omega \in \eta \in H^k(M; \mathbf{R})$  et définissons une norme  $\|a\|_{\mathbf{Z}} = \inf \{ \text{Vol}_k(N) : N \in a \}$ . Le drame, découvert par Morse dès 1924, est que, en général :

$$\frac{1}{2} \|2N\|_{\mathbf{Z}} < \|N\|_{\mathbf{Z}}, \text{ etc.}$$



$c'$  a une longueur inférieure au double de la longueur de  $c$

Ce phénomène commence dès la dimension 1 : dans une variété riemannienne où  $d > 2$ , lorsque l'on prend une géodésique périodique  $c$ , il peut arriver que

la géodésique  $c$  parcourue deux fois admette des courbes voisines qui soient de longueur strictement plus petites que le double de la longueur de  $c$ . Et ainsi de suite : voir un exemple dû à Almgren dans (Federer 1974). On trouvera même dans (Lawson 1975) des exemples de classes d'homologie "non stables" pour les tores plats.

Si donc l'on définit, de façon évidente, la norme réelle  $\|a\|_{\mathbf{R}}$  pour la classe  $a$  considérée comme un élément de  $H_k(M; \mathbf{R})$ , Federer a montré le fait essentiel (voir (Federer 1974) ou (Gromov and others 1981)) :

$$\|a\|_{\mathbf{R}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \|ma\|_{\mathbf{Z}} \quad (m \text{ entier positif}).$$

On est donc conduit à définir la  $k$ -systole stable  $Stb Sys_k$  comme la plus petite des normes  $\|a\|_{\mathbf{R}}$  des éléments non nuls de  $H_k(M; \mathbf{R})$ . Gromov démontre alors, grâce aux théorèmes précédents et en utilisant des inégalités "à la Wirtinger" ainsi que le calcul différentiel classique, un résultat général de la forme :

**THÉORÈME.**— *Dès que la classe duale de la classe fondamentale est un cup-produit convenable de classes de cohomologie de degrés inférieurs, alors il existe une inégalité systolique universelle pour le volume et les systoles stables correspondantes.*

Comme les cohomologies de  $CP^n$  sont toutes de dimension égale à 1, le résultat est particulièrement simple pour  $CP^n$  car on obtient alors les mêmes constantes que dans le cas kählérien. Prenons-en seulement un exemple : pour toute  $g$  sur  $CP^n$ , on a toujours :

$$\frac{\text{Vol}(g)}{Stb Sys_2^n(g)} \geq \frac{1}{n!}.$$

Un autre exemple plaisant : pour toute  $g$  sur le produit de  $n$  sphères  $S^k \times \dots \times S^k$ , on a toujours :

$$\frac{\text{Vol}(g)}{Stb Sys_k^n(g)} \geq *(k, n).$$

La constante en  $k$  et  $n$  obtenue correspond à des résultats de dualité en théorie des convexes. Il s'agit de minorer le produit du volume d'un convexe symétrique

par rapport à l'origine par le volume de son dual (appelé souvent aussi polaire). La meilleure valeur n'est pas connue dès que  $k \geq 2$  et  $n \geq 2$  ; c'est un problème très difficile de la théorie des convexes, ouvert en partie. Voir par exemple le résultat récent de (Bourgain and Milman 1987).

### BIBLIOGRAPHIE

- R. ACCOLA - *Differential and extremal lengths on Riemann surfaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **46** (1960), 540-543.
- K. BALL - *A lower bound for the optimal density of lattice packings*, Duke Math. Journal **68** (1992), 217-222 in Research Notices.
- C. BAVARD - *Inégalités isosystoliques conformes pour la bouteille de Klein*, Geometriae Dedicata (1988), 146-166.
- R. BENEDETTI and C. PETRONIO - *Lectures on hyperbolic geometry*, Universitext, Springer, 1992.
- M. BERGER - *Lecture on geodesics in Riemannian Geometry*, Tata Institute of Fundamental Research, 1965.
- M. BERGER - "Du côté de chez Pu", Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **5** (1972), 1-44.
- M. BERGER, P. GAUDUCHON et E. MAZET - *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1971.
- A. BESSE - *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Springer, 1978.
- C. BLATTER - *Über Extremallänge auf geschlossenen Flächen*, Comment. Math. Helvetici **35** (1961), 153-168.
- J. BOURGAIN and V. MILMAN - *New volume ratio properties for convex symmetric bodies in  $\mathbf{R}^n$* , Inventiones Math. **88** (1987), 319-340.
- J.-P. BOURGUIGNON, P. LI and S.T. YAU - *Upper bound of the first eigenvalue for algebraic submanifolds*, à paraître (1993).
- R. BRYANT - *On extremal graphs with specified Lagrangians* in Recent advances in differential geometry, Symposia Mathematica, INDAM (Roma), 1994.
- P. BUSER and P. SARNAK - *On the period matrix of a Riemann surface of large genus*, 1992.



- E. CALABI - *Extremal isosystolic metrics for compact surfaces*, à paraître, 1993.
- B. COLBOIS and J. DODZIUK - *Riemannian metrics with large  $\lambda_1$* , à paraître (1993).
- J.H. CONWAY and N.J.A. SLOANE - *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer, 1988.
- H. FEDERER - *Real flat chains, cochains and variational problems*, Indiana Univ. Math. J. **24**, 1974, 351-407.
- M. GROMOV - *Filling Riemannian manifolds*, J. of Diff. Geometry **18** (1983), 1-147.
- M. GROMOV - *Metric invariants of Kähler manifolds*, preprint IHES (1992a).
- M. GROMOV - *Systoles and intersystolic inequalities* (1992 b).
- M. GROMOV - À paraître (1993).
- M. GROMOV, J. LAFONTAINE et P. PANSU - *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Cedric-Nathan, 1981.
- P. GRUBER and C. LEKERKERKER - *Geometry of numbers*, North-Holland, 1987.
- J. HEBDA - *Some lower bounds for the area of surfaces*, Invent. Math. **65** (1982), 485-491.
- G. KABAJANSKI and V. LEVENSTEIN - *Bounds for packings on a sphere and in space*, Problems of Information Transmission **14** (1978), 1-17.
- B. LAWSON - *The stable homology of a flat torus*, Math. Scand. **36** (1975), 49-73.
- J. OESTERLÉ - *Empilements de sphères*, Astérisque, Séminaire Bourbaki **189-190** (1990), 375-398.
- P. PU - *Some inequalities in certain nonorientable manifolds*, Pacific J. Math. **2** (1952), 55-71.
- R. THOM - *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comment. Math. Helv. **28** (1954), 17-86.

Marcel BERGER  
I.H.E.S.  
35, route de Chartres  
F-91440 BURES-sur-YVETTE