PAUL GAUDUCHON

Variétés riemanniennes autoduales [d'après C.H. Taubes et al.]

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki, exp. n° 767, p. 151-186

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__151_0>

Séminaire BOURBAKI Mars 1993
45ème année, 1992-93, n° 767

VARIÉTÉS RIEMANNIENNES AUTODUALES
[d'après C.H. Taubes et al.]

par Paul GAUDUCHON

1. INTRODUCTION.

1.1. Les particularités de la géométrie différentielle de la dimension 4 reposent de façon essentielle sur la non-simplicité du groupe (spécial) orthogonal SO(4) qui, localement, est isomorphe au produit Sp (1) $\times$ Sp (1), où Sp (1) désigne le groupe des quaternions de norme 1 (lui-même isomorphe au groupe spécial unitaire SU (2)). Cet isomorphisme implique une relation étroite entre géométrie conforme et géométrie complexe, illustrée par la *théorie des twisteurs* de R. Penrose, cf. en particulier [Pe1], [Pe2], [Pe-Ri]. La théorie *riemannienne* des twisteurs [A-H-S], que nous présentons au §3, se propose de substituer à une variété conforme orientée $(M,[g])$ de dimension 4 une variété complexe ZM de dimension 3, fibrée sur M, de telle sorte que les points de M soient figurés par des droites projectives (complexes) de ZM et que la géométrie conforme de M soit déterminée par la seule géométrie complexe relative de ces droites dans ZM. Le modèle (plat) de cette situation est la fibration naturelle (de Hopf) de l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^3$ sur la sphère S^4, directement déduite de la "correspondance de Klein" [Pe3], cf. 3.4.1. Ce modèle s'étend à toute variété conforme *autoduale*, i.e. dont le demi-tenseur de Weyl négatif W^- est identiquement nul, cf. 2.2.

1.2. La théorie des variétés autoduales, que nous présentons au §2, s'est développée parallèlement, dans le cadre twistoriel, à celle des *connexions autoduales*, définies sur un G-fibré principal P sur $(M,[g])$ où G est un groupe de Lie (compact). Le lien est établi par la "correspondance d'Atiyah-Ward" qui identifie la famille des connexions autoduales, ou *instantons*, de P à une famille de fibrés vectoriels holomorphes sur ZM. Cette correspondance a été largement exploitée, particulièrement dans le cas-modèle de S^4, cf. [A-H-S], [At], [Do-Ve]. Les premiers exemples d'instantons sur une variété conforme non-autoduale ont été obtenus par C.H. Taubes par "greffage" d'instantons de S^4, [Ta1]. À la suite des travaux de S.K. Donaldson, et grâce, notamment, aux théorèmes d'existence de C.H. Taubes (cf. [Ta1], [Ta2]), les espaces de modules de connexions autoduales constituent un puissant instrument d'analyse de la structure différentiable des variétés de dimension 4, cf. [Hi4], [Fr-Uh], [Lw], [Do-Kr] et références incluses. On peut espérer, à la suite du Théorème (1.1), que les espaces de modules de structures conformes autoduales puissent prochainement jouer un rôle semblable.

1.3. Les variétés riemanniennes autoduales dont le tenseur de Ricci est nul, sont étudiées activement depuis la fin des années 70, sous le nom de *gravitons* (non-linéaires), comme éléments constitutifs d'une théorie quantique (euclidienne) de la gravitation. De nombreux exemples (non-compacts) ont été construits par voie directe ou twistorielle depuis la fin des années 70, cf. §2.3.4.1.

1.4 Les variétés autoduales (ou anti-autoduales) *compactes* connues se sont longtemps limités aux variétés conformes plates (telles que la sphère S^4, les tores plats T^4, le produit $S^1 \times S^3$ etc...) et aux variétés kählériennes à courbure sectionnelle holomorphe constante (telles que le plan projectif complexe $\mathbb{C}P^2$). En 1977, la résolution par S.T. Yau [Ya2] de la fameuse "conjecture de Calabi" a permis d'ajouter à la liste les *surfaces* $K3$ munies d'une *métrique de Calabi-Yau* (qui sont anti-autoduales), dont la forme explicite reste inconnue. La théorie des variétés autoduales connait une nouvelle impulsion vers le milieu des années 80. En 1986, Y.S. Poon construit une famille de métriques autoduales sur la somme connexe $2\,\mathbb{C}P^2$ de deux copies de $\mathbb{C}P^2$ et montre que cette famille décrit la totalité des métriques autoduales à courbure scalaire positive de $2\,\mathbb{C}P^2$ [Po1]. Peu après, A. Floer montre par voie analytique l'existence de structures conformes autoduales sur $k\,\mathbb{C}P^2$ pour tout k [Fl]. Plus généralement, S. Donaldson et R. Friedman donnent un critère général d'existence de structures conformes autoduales sur une somme connexe $\#M_i$ de variétés autoduales (incluant le théorème de Floer), en utilisant le formalisme twistoriel, cf. [Do-Fr] et

§3.4. Des familles *explicites* de structures conformes autoduales ont été, récemment, construites par C. LeBrun sur $k\,\mathbb{C}\mathrm{P}^2$, pour tout k, [Le3], cf 2.3.4.2. Enfin, C.H. Taubes a montré le résultat général suivant, [Ta4] Théorème 1.1, cf. §4 :

(1.1) Théorème . *Pour toute variété M compacte orientée de dimension 4, il existe un entier k tel que la somme connexe $M \# k\,\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ admet une structure conforme autoduale.*

Un théorème d'existence de forme similaire, relatif aux surfaces kählériennes à courbure scalaire nulle (qui sont anti-autoduales, cf. §2.3), a été démontré récemment par C. LeBrun et M.A. Singer [Le-Si 1], cf. Théorème (2.3.4).

1.5. Le texte s'organise comme suit. La partie 2 est une revue des propriétés générales des variétés autoduales, incluant le cas des surfaces kählériennes (§2.3) ; une brève description du formalisme spinoriel propre à la dimension 4 (§2.4) ; le calcul de la variation première de W^- sous diverses formes, en particulier la forme "spinorielle" (2.5.12) utilisée dans [Ta4], cf. §4.3 (§2.5) ; le complexe elliptique associé à une structure conforme autoduale (§2.6) ; les contraintes topologiques attachées à l'autodualité dans le cas compact (§2.7). Outre les références explicitement données, la référence générale est [A-H-S], [Be1], [Be2] (et références incluses). La plupart des exemples explicitement connus, en dehors des structures conformes plates, sont mentionnés dans §2.3, y compris les *métriques de LeBrun* sur $k\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ qui ne sont pas kählériennes elles-mêmes mais construites à partir de métriques kählériennes. La partie 3 est consacrée à la théorie (riemannienne) des twisteurs, qui est à l'origine de l'intérêt porté aux variétés autoduales et en constitue encore un des aspects essentiels ; la référence générale pour cette partie est [A-H-S], [Be2] Ch. 13. La théorie de Donaldson-Friedman est (très brièvement) décrite dans §3.5. La partie 4 donne un schéma (simplifié à l'extrême) de la démonstration du Théorème (1.1) de Taubes figurant en [Ta4] (par commodité terminologique, nous avons substitué le "point de vue autodual" au point de vue "anti-autodual" adopté en [Ta4], motivé par la théorie des *connexions* anti-autoduales sur les variétés projectives, cf. [Do-Kr] Ch. 6).

Je remercie tous ceux qui m'ont aidé dans l'élaboration de ce texte, en particulier J.P. Bourguignon, F. Campana, C. Margerin et C.H. Taubes. Je remercie également C. François et C. Harmide, de l'Ecole Polytechnique, pour leur amicale et compétente assistance technique.

2. VARIÉTÉS AUTODUALES.

Dans toute la suite, M désigne une variété différentiable C^∞ connexe orientée de dimension 4.

2.1 Pour toute métrique riemannienne (définie positive) g sur M, la restriction de l'opérateur $*$ de Hodge au fibré $\Lambda^2 M$ des 2-formes (réelles) est une involution, explicitée par

$$(*\psi)(e_1, e_2) = \psi(e_3, e_4), \tag{2.1.1}$$

où $\{e_1, \cdots, e_4\}$ est un repère g-orthonormé positivement orienté (quelconque) au point considéré. Cette involution ne dépend que de la classe conforme $[g]$ de g. Un élément ψ de $\Lambda^2 M$ est *autodual*, resp. *anti-autodual*, si

$$*\psi = \psi \ , \text{ resp. } *\psi = -\psi \ . \tag{2.1.2}$$

Cette définition s'étend aux 2-formes à valeurs dans un fibré vectoriel E, i.e. aux éléments du produit tensoriel $\Lambda^2 M \otimes E$, en convenant que $*$ agit trivialement sur E.
Nous notons

$$\Lambda^2 M = \Lambda^+ M \oplus \Lambda^- M \ , \tag{2.1.3}$$

la décomposition en somme directe orthogonale déterminée par $*$, où $\Lambda^+ M$, resp. $\Lambda^- M$, désigne le sous-fibré des éléments autoduaux, resp. anti-autoduaux, de $\Lambda^2 M$. Lorsque $\Lambda^2 M$ est identifié, via la métrique g, au fibré AM des endomorphismes $[g]$-antisymétriques du fibré tangent TM, (2.1.3) est une décomposition en somme directe de fibrés en algèbres de Lie, cf. (2.4.3.). En particulier, les éléments de $\Lambda^+ M$ commutent aux éléments de $\Lambda^- M$, et l'application $\phi \otimes \psi \mapsto \phi \circ \psi$ (composé d'endomorphismes) détermine un *isomorphisme* de fibrés vectoriels

$$\Lambda^+ M \otimes \Lambda^- M \mapsto S^2_0 T^* M, \tag{2.1.4}$$

du produit tensoriel $\Lambda^+M \otimes \Lambda^-M$ sur le fibré $S_0^2T^*M$ des formes bilinéaires à trace nulle (relativement à g), identifié, via g, au fibré $\mathrm{End}_{S,0}M$ des endomorphismes $[g]$-symétriques à trace nulle de TM. Tout élément a de Λ^+M ou Λ^-M, vu comme un élément de AM, satisfait

$$a \circ a = -\frac{1}{2}\,|a|^2 \cdot I, \tag{2.1.5}$$

où I est l'identité de TM et $|a|^2 = -\frac{1}{2}$ trace $(a \circ a)$ est le carré de la norme de a. Inversement, tout élément a de AM satisfaisant (2.1.5) est autodual ou anti-autodual. Nous obtenons ainsi, en tout point x, une identification naturelle

$$Z_x^{\pm}M = S_{\sqrt{2}}(\Lambda_x^{\pm}M), \tag{2.1.6}$$

entre la variété $Z_x^{\pm}M$ des structures complexes $[g]$-orthogonales $\pm$-orientées de T_xM et la sphère des éléments de norme $\sqrt{2}$ de $\Lambda_x^{\pm}M$ (l'orientation induite par J est celle de toute base de la forme $\{e_1, \mathrm{J}e_1, e_3, \mathrm{J}e_3\}$). La réunion des Z_x^+M, resp. Z_x^-M, constitue l'*espace des* (demi-)*twisteurs* (projectifs) *positifs*, resp. *négatifs*, de la variété conforme $(M, [g])$, notés respectivement Z^+M et Z^-M, cf. §2, infra.

2.2 La courbure (riemannienne) R de g est définie par

$$R(X,Y) = -D^2_{X,Y} + D^2_{Y,X}\ , \quad \forall X, Y \in T_xM, \forall x \in M\ , \tag{2.2.1}$$

où D est la connexion de Levi-Civita de g, cf. [Be2] Ch. 1. Via la métrique g, la courbure riemannienne R peut être considérée comme une section de $\Lambda^2M \otimes \Lambda^2M$ et, comme telle, vérifie les deux conditions suivantes, qui équivalent à la "première identité de Bianchi" riemannienne : (a) R est une section symétrique de $\Lambda^2M \otimes \Lambda^2M$; (b) R appartient au noyau de l'homomorphisme de $\Lambda^2M \otimes \Lambda^2M$ dans Λ^4M induit par le produit extérieur. Nous notons $\mathcal{R}$ le sous-fibré de $\Lambda^2M \otimes \Lambda^2M$, déterminé par (a) et (b).

A toute paire $\{h, k\}$ de formes bilinéaires symétriques est associée une section de $\mathcal{R}$, notée $h \owedge k$, appelée le *produit de Kulkarni-Nomizu* de h et k

(symétrique en h et k), défini par [Be2] Ch. 1 :
(2.2.2)

$$(h \owedge k)(X_1, X_2, X_3, X_4) = h(X_1, X_3)\, k(X_2, X_4) - h(X_1, X_4)\, k(X_2, X_3) \\ - h(X_2, X_3)\, k(X_1, X_4) + h(X_2, X_4)\, k(X_1, X_3) \ .$$

La métrique g détermine une décomposition en somme directe orthogonale [S-T]

$$(2.2.3) \qquad \mathcal{R} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{Z} \oplus \mathcal{W},$$

où $\mathcal{U}$ est le fibré trivial de rang 1 engendré par $g \owedge g$, $\mathcal{Z}$ est le fibré de rang 9 formé des éléments de la forme $g \owedge h$, où h est à trace nulle relativement à g, et $\mathcal{W}$ est le sous-fibré de rang 10 orthogonal à $\mathcal{U} \oplus \mathcal{Z}$.
Le *tenseur de Weyl* W de g est la projection de R dans $\mathcal{W}$. Vu comme une 2-forme à valeurs dans AM, W ne dépend que de $[g]$. La composante B de R dans $\mathcal{Z}$ est égale à $\frac{1}{2}\, g \owedge \mathrm{Ric}_0$, où Ric_0 note la partie à trace nulle (relativement à g) du *tenseur de Ricci* Ric de g, défini par $\mathrm{Ric}(X_1, X_2) =$ trace $\{Y \mapsto R(X_1, Y)X_2\}$, et la composante U de R dans $\mathcal{U}$ est égale à $\frac{1}{24}$ Scal $g \owedge g$, où Scal note la *courbure scalaire* de g, égale à la trace (relativement à g) de Ric.
Considérées comme des endomorphismes symétriques de $\Lambda^2 M$, via g, les composantes B et W de la coubure R satisfont les relations :

$$(2.2.4) \qquad * \circ B = -B \circ * \ , \quad W \circ * = * \circ W \ .$$

En particulier, B échange $\Lambda^+ M$ et $\Lambda^- M$, et l'espace $\mathcal{W}$ se décompose en

$$(2.2.5) \qquad \mathcal{W} = \mathcal{W}^+ \oplus \mathcal{W}^-,$$

où $\mathcal{W}^+$ coïncide avec $\mathcal{R} \cap (\Lambda^+ M \otimes \Lambda^+ M)$ et $\mathcal{W}^-$ avec $\mathcal{R} \cap (\Lambda^- M \otimes \Lambda^- M)$. La projection orthogonale de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{W}^+$, resp. $\mathcal{W}^-$, sera notée Π^+, resp. Π^-. Le demi-tenseur de Weyl positif $W^+ = \Pi^+(R)$, resp. négatif $W^- = \Pi^-(R)$, agit trivialement sur $\Lambda^- M$, resp. $\Lambda^+ M$, et induit un endomorphisme (symétrique) à trace nulle sur $\Lambda^+ M$, resp. $\Lambda^- M$. Il est commode de figurer les faits précédents par l'expression "matricielle" suivante de R, relative à la décomposition (2.1.3) :

$$\begin{array}{lcc} & \Lambda^+M & \Lambda^-M \\ \Lambda^+M & \left(\begin{array}{c} W^+ + \frac{1}{12}\,\mathrm{Scal}\, I \\ B \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} B \\ W^- + \frac{1}{12}\,\mathrm{Scal}\, I \end{array}\right) \\ \Lambda^-M & & \end{array} \tag{2.2.6}$$

Définition : Une structure conforme riemannienne $[g]$ est *autoduale* si le demi-tenseur de Weyl négatif W^- est nul (définition similaire pour une structure conforme *anti-autoduale*).
Les structures conformes autoduales (ou anti-autoduales) constituent une extension naturelle, propre à la dimension 4, des *structures conformes plates* qui, en toute dimension supérieure à 3, sont caractérisées par l'annulation du tenseur de Weyl W.

Remarque : Une connexion linéaire ∇, sur un fibré vectoriel E, est *autoduale* si sa courbure R^∇ est autoduale en tant que 2-forme à valeurs dans le fibré End E, [A-H-S]. On lit directement sur (2.2.6) que la connexion de Levi-Civita D est autoduale si et seulement si la métrique g est autoduale *et* le tenseur de Ricci Ric est identiquement nul. De façon équivalente, D est autoduale si et seulement si la connexion induite sur Λ^-M, donc aussi sur Z^-M, est plate. Une section D-parallèle (locale) de Z^-M est une structure kählérienne (locale) sur M, relativement à la métrique g et l'orientation opposée. Ainsi, la connexion de Levi-Civita D est autoduale si et seulement si (M, g), munie de l'orientation opposée, est *localement hyper-kählérienne*, cf. [Hi5].

2.3 Le cas kählérien.

2.3.1 La variété orientée (M, g) est *kählérienne* s'il existe une section D-parallèle J de Z^+M. En particulier, la structure presque complexe J est intégrale et induit une structure complexe sur M qui fait de (M, g, J) une *surface* (complexe) *kählérienne*. L'involution $\psi(\cdot,\cdot) \mapsto \psi(\mathrm{J}\cdot, \mathrm{J}\cdot)$ de Λ^2M commute à $*$ et les sous-fibrés propres de cette involution relatifs à $+1$ et -1, notés resp. $\Lambda^{\mathrm{J},+}M$ et $\Lambda^{\mathrm{J},-}M$, sont liés à Λ^+M et Λ^-M par

$$\Lambda^+M = \mathbb{R}\cdot \mathrm{J} \oplus \Lambda^{\mathrm{J},-}M, \quad \Lambda^-M = \Lambda_0^{\mathrm{J},+}M, \tag{2.3.1}$$

où $\mathbb{R}\cdot\mathrm{J}$ note le sous-fibré de rang 1 de $\Lambda^{\mathrm{J},+}M$ engendré par J et $\Lambda_0^{\mathrm{J},+}$ son orthogonal dans $\Lambda^{\mathrm{J},+}M$ (la décomposition (2.3.1) est algébrique et vaut pour toute section J de Z^+M). Puisque J est D-parallèle, R agit trivialement sur $\Lambda^{\mathrm{J},-}M$, i.e. est une section du sous-fibré $\mathcal{R}^{\mathrm{J}} = \mathcal{R} \cap (\Lambda^{\mathrm{J},+}M \otimes \Lambda^{\mathrm{J},+}M)$ de $\mathcal{R}$. L'action de R sur Λ^+M est alors réduite à son action sur $\mathbb{R}\cdot\mathrm{J}$, décrite par : $R(\mathrm{J}) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Scal}\,\mathrm{J}$ (mod. Λ^-M) et le demi-tenseur de Weyl positif W^+ est figuré "matriciellement", relativement à la décomposition (2.3.1) de Λ^+M, par

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathbb{R}\cdot\mathrm{J} & \Lambda^{\mathrm{J},-}M \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbb{R}\cdot\mathrm{J} \\ \Lambda^{\mathrm{J},-}M \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\,\mathrm{Scal}\,I & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12}\,\mathrm{Scal}\,I \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.3.2}$$

Il en résulte directement le fait suivant :

(2.3.3) *Une surface kählérienne* (M, g, J) *est anti-autoduale si et seulement si la courbure scalaire de* g *est identiquement nulle.*

Remarque : Le fibré $\mathcal{R}^{\mathrm{J}}$ se décompose en la somme directe orthogonale $\mathcal{R}^{\mathrm{J}} = \mathcal{U}^{\mathrm{J}} \oplus \mathcal{Z} \oplus \mathcal{W}^-$, où $\mathcal{U}^{\mathrm{J}} = \mathbb{R}.C$ est engendré par l'élément C dont les projections sur $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}^+$ sont respectivement égales à I et à la "matrice" $\begin{pmatrix} 2I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$. La composante U^{J} de R sur $\mathcal{U}^{\mathrm{J}}$ est alors égale à $1/12$ Scal C.

Les surfaces kählériennes fournissent de nombreux exemples de métriques autoduales ou anti-autoduales. A cause de l'existence d'une orientation priviligiée, induite par J, le distinguo entre métriques autoduales et anti-autoduales est ici essentiel. Nous obtenons les trois catégories suivantes.

2.3.2. *Surfaces kählériennes dont la classe conforme est plate.* La courbure R est alors une section de $\mathcal{Z}$. Si R n'est pas identiquement nulle, (M, g) est localement isométrique au produit $S^2 \times \mathrm{H}^2$ de la sphère ronde S^2 de courbure k et de l'espace hyperbolique H^2 de courbure $-k$, cf. [La].

2.3.3. *Surfaces kählériennes autoduales (non anti-autoduales).* Cette famille contient les surfaces kählériennes à courbure sectionnelle holomorphe constante (non-nulle), dont la courbure est une section de $\mathcal{U}^{\mathrm{J}}$. Inversement, tout représentant compact de la famille est de ce type, [Sa] §7, [De]. L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^2$, muni d'une métrique de Fubini-Study g_{FS}, en est le seul représentant compact et simplement connexe.

2.3.4. *Surfaces kählériennes anti-autoduales.* Par (2.3.3), ce sont les surfaces kählériennes à courbure scalaire nulle. Nous distinguons les deux sous-familles suivantes.

2.3.4.1 *Surfaces kählériennes à tenseur de Ricci nul.* Cette famille est constitué des variétés localement hyper-kählériennes, cf. 2.1. Les représentants compacts et simplement-connexes sont les *surfaces* $K3$, munies d'une *métrique de Calabi-Yau*, cf. §1.4. De façon générale, ces variétés apparaissent en relativité, sous le nom d'*instantons gravitationnels*, ou *gravitons* (non-linéaires) [Pr], [E-G-H]. Les gravitons admettant un groupe de symétries égal à S^1 sont entièrement décrits, en [Gi-Ho], par une fonction harmonique positive définie sur un domaine de $\mathbb{R}^3$. Certains d'entre eux coïncident avec les gravitons construits par voie "twistorielle" en [Hi1] ; ces métriques sont *localement asymptotiquement plates* et ont un bord à l'infini difféomorphe au quotient S^3/Γ de la sphère S^3 par un groupe cyclique (fini) d'isométries. De telles variétés ont été construites en [Kr] pour tout groupe fini Γ d'isométries de S^3, par des techniques de quotients symplectiques. Une famille de dimension infinie, correspondant au cas où Γ est un groupe cyclique infini d'isométries, a été construite en [A-K-L].

2.3.4.2 *Surfaces kählériennes à courbure scalaire nulle et tenseur de Ricci non nul.* La méthode de [Gi-Ho] a été généralisée par C. LeBrun pour décrire la totalité des surfaces kählériennes à courbure scalaire nulle, admettant un groupe de symétries égal à S^1, [Le3] Prop. 1, cf. aussi [Le1], [Le2]. Un cas particulier de cette construction, obtenue à partir d'une fonction harmonique positive définie sur l'espace hyperbolique (réel) H^3 privé de k points (k quelconque), fournit une métrique kählérienne à courbure scalaire nulle, asymptotiquement plate, sur la variété obtenue en faisant éclater k points de $\mathbb{C}^2$ situés sur une même droite complexe. Par compactification, C. LeBrun obtient *une structure conforme autoduale (de type positif) sur la somme connexe* $k\,\mathbb{C}P^2$ *de* k *(quelconque) copies du plan projectif complexe* [Le3] (du point de vue différentiable, l'éclatement d'un point d'une surface complexe équivaut à l'adjonction, par somme connexe, d'une copie de $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$, muni de l'orientation opposée à l'orientation naturelle, cf. [Be1] Exp. IV).

Les surfaces kählériennes *compactes* à courbure scalaire nulle (et tenseur de Ricci non-nul) restent peu connues. Il résulte de [Ya1] que la surface complexe (M, J) est obtenue par éclatement d'une surface réglée (fibrée, en droites projectives, au-dessus d'une surface de Riemann Σ_g de genre g). Inversement, nous avons le théorème suivant de C. LeBrun et M. Singer, que l'on peut considérer comme une version "kählérienne" du Théorème (1.1) :

(2.3.4) Théorème [Le-Si 1]. *Toute surface réglée de genre $g \geq 2$ admet, après éclatement d'un nombre suffisant de points, une métrique kählérienne à courbure scalaire nulle.*

La preuve repose sur les constructions évoquées précédemment, les techniques de déformations des espaces de twisteurs de surfaces kählériennes anti-autoduales et un théorème de M. Pontecorvo [Pn2] caractérisant ces espaces.
Ce résultat a été précisé récemment en [Ki-Po], cf. aussi [Le-Si 2].

2.4 Formalisme spinoriel.

Le groupe spinoriel Spin (4) est naturellement identifié au produit Sp (1) × Sp (1), où Sp (1) est le groupe des quaternions de norme 1. Les deux *représentations spinorielles* Σ_+ et Σ_- de Spin (4) sont obtenues en composant l'action naturelle de Sp (1) sur $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$ avec la projection sur le premier et le second facteur respectivement. Toute représentation linéaire (sur $\mathbb{C}$) de Spin (4) est une somme directe des représentations irréductibles $\Sigma_+^p \otimes \Sigma_-^q$, où Σ_+^p note la puissance tensorielle symétrique (complexe) d'ordre p de Σ_+ (convention similaire pour Σ_-^q), le jeu étant réglé par la formule de décomposition

$$(2.4.1) \qquad \Sigma_+^p \otimes \Sigma_+^q = \Sigma_+^{p+q} \oplus \Sigma^{p+q-2} \oplus \cdots \oplus \Sigma_+^{p-q}, \quad p \geq q \ ,$$

(formule similaire pour Σ_-).
Les espaces de (demi-) spineurs Σ_+ et Σ_- sont chacun munis d'une structure quaternionienne j et d'une structure symplectique (complexe) ω naturelles. La structure quaternionienne j induit une structure réelle sur

toute combinaison tensorielle d'ordre *pair* de Σ_+ et Σ_-. Nous conviendrons alors de noter identiquement la représentation complexe et la représentation réelle induite, qui, dans ce cas, se factorise par $SO(4)$. La structure symplectique ω identifie chaque espace Σ_+ et Σ_- à son dual complexe, et l'espace $\mathrm{End}_0\Sigma_+$ des endomorphismes à trace nulle de Σ_+ à Σ_+^2 en identifiant tout élément A de $\mathrm{End}_0\Sigma_+$ à la forme $\mathbb{C}$-bilinéaire (symétrique) $\omega(A\cdot,\cdot)$; la représentation Σ_+^2, resp. Σ_-^2, est ainsi identifiée à la *représentation adjointe* de $Sp(1)$ composée avec la projection de Spin (4) sur le premier facteur, resp. le second facteur.

L'action équivariante de $\mathbb{R}^4$, vu comme l'espace de représentation naturel de $SO(4)$, sur Σ_+ et Σ_-, explicitée par

$$(2.4.2) \qquad u(\xi) = u\xi, \quad u(\eta) = -\bar{u}\eta, \qquad u \in \mathbb{R}^4 = \mathbb{H},\ \xi \in \Sigma_+,\ \eta \in \Sigma_-$$

(où le produit est effectué dans $\mathbb{H}$), induit un isomorphisme équivariant de l'algèbre de Clifford $C\ell(\mathbb{R}^4)$ sur l'algèbre $\mathrm{End}_{\mathbb{H}}\Sigma$ des endomorphismes quaternioniens de $\Sigma = \Sigma_+ \oplus \Sigma_-$, pour lequel la partie paire $C\ell^0(\mathbb{R}^4)$ préserve chacun des facteurs Σ_+ et Σ_-. Nous obtenons de cette manière les identifications de représentations *(réelles)* :

$$(2.4.3) \qquad \Lambda^+\mathbb{R}^4 = \Sigma_+^2, \quad \Lambda^-\mathbb{R}^4 = \Sigma_-^2 \ .$$

Ces considérations algébriques ont une traduction géométrique immédiate lorsque M est munie d'une *structure spinorielle*, réalisée par un Spin (4)-fibré principal $\tilde{Q}$ sur M, revêtant le fibré des repères g-orthonormés positivement orientés de TM. En particulier, nous avons les identifications (fonctorielles) suivantes (de fibrés vectoriels réels) :

$$(2.4.3) \qquad TM = \Sigma_+M \otimes \Sigma_-M, \ \Lambda^+M = \Sigma_+^2 M \ , \ \Lambda^-M = \Sigma_-^2 M \ ,$$

où Σ_+M, Σ_-M, etc, sont les fibrés vectoriels (réels ou complexes suivant la parité de l'exposant) associés aux représentations correspondantes de Spin(4), via $\widetilde{Q}$.

De (2.4.3), (2.1.4) et (2.4.1), nous déduisons aisément les identifications suivantes des facteurs $\mathcal{Z}, \mathcal{W}^+$ et $\mathcal{W}^-$ du fibré $\mathcal{R}$ des tenseurs de courbures riemanniens :

$$(2.4.4) \qquad \mathcal{Z} = \Sigma_+^2 M \otimes \Sigma_-^2 M, \quad \mathcal{W}^+ = \Sigma_+^4 M, \quad \mathcal{W}^- = \Sigma_-^4 M \ .$$

On obtient également les identifications suivantes des fibrés de twisteurs :

$$(2.4.5) \qquad Z^+M = \mathbb{P}(\Sigma_+M), \quad Z^-M = \mathbb{P}(\Sigma_-M) \ ,$$

où $\mathbb{P}(\Sigma_+M)$ note le fibré en droites projectives complexes associé à Σ_+M et de même pour $\mathbb{P}(\Sigma_-M)$. L'identification se fait de la façon suivante : tout élément ξ non nul de la fibre $(\Sigma_+M)_x$ identifie l'espace tangent $T_xM = \mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\Sigma_+M, \Sigma_-M)$ à l'espace vectoriel *complexe* $(\Sigma_-M)_x$ et détermine ainsi une structure complexe J de T_xM, appartenant à Z_x^+M, ne dépendant que de la droite $\mathbb{C}\cdot\xi$ dans $(\Sigma_+M)_x$. Ces isomorphismes valent encore si M n'est pas spinorielle, modulo le choix d'une structure spinorielle locale. Les identifications (2.4.5) ne dépendent pas de ce choix.

Le produit de Kulkarni-Nomizu, défini par (2.2.2), détermine un homomorphisme, noté κ, de $S^2T^*M \otimes S^2T^*M$ dans $\mathcal{R}$. La restriction de κ à $S_0^2T^*M \otimes S_0^2T^*M$ s'insère dans le diagramme commutatif suivant :
(2.4.6)

$$\begin{array}{ccccc}
S_0^2T^*M \otimes S_0^2T^*M & \xrightarrow{\Pi^+\circ\kappa} & \mathcal{W}^+ & = & \Sigma_+^4M \\
\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \Pi^{\Sigma_+^4}} & & \\
\Lambda^+M\otimes\Lambda^-M\otimes\Lambda^+M\otimes\Lambda^-M & \xrightarrow{c} & \Lambda^+M\otimes\Lambda^+M & = & \Sigma_+^2M\otimes\Sigma_+^2M
\end{array}$$

où la flèche verticale descendante est déduite de (2.1.5), c est la contraction des deux facteurs Λ^-M (via la métrique), $\Pi^{\Sigma_+^4}$ est l'homomorphisme de symétrisation de $\Sigma_+^2M \otimes \Sigma_+^2$ dans Σ_+^4 qui, via les identifications faites, coïncide avec la projection naturelle de $\Lambda^+M \otimes \Lambda^+M$ sur le sous-espace des éléments symétriques à trace nulle (diagramme similaire pour Π^- en échangeant les rôles de Λ^+M et Λ^-M).

2.5 Variation du demi-tenseur de Weyl. (Nous considérons ici le demi-tenseur de Weyl négatif W^-. Le calcul de la variation de W^+ est formellement identique).
La correspondance $g \to W^- = W^-(g)$ est un opérateur différentiel (non-linéaire) opérant sur les formes bilinéaires définies positives à valeurs, suivant la variance choisie, dans $\mathcal{R}$ ou dans $\Lambda^2M \otimes$ End$M$ (fibré des endomorphismes de TM). L'opérateur linéarisé, en g, est défini par

$$(2.5.1) \qquad L_g^-(h) = \frac{d}{dt}W^-(g+th)_{|t=0} \ ,$$

où h est une section quelconque de S^2T^*M et t un paramètre réel (petit). L'opérateur L_g^- est invariant conforme si l'on convient qu'il opère sur les sections de $\mathrm{End}_{S,0}M$ et que $\mathcal{W}^-$ est un sous-fibré de $\Lambda^2 M \otimes AM$ (cf. Remarque suivante).

Remarque préliminaire. En raison de l'invariance, ou la covariance, conforme de W^-, nous désirons varier la seule classe conforme $[g]$, qui est entièrement déterminée par l'involution de Hodge $*$, [Do-Kr] Ch. 1. Un calcul simple montre que la variation première $\dot{*} = \frac{d}{dt} *_{t|t=0}$ de cette involution est donnée par

$$\text{(2.5.2)} \qquad \dot{*}(\phi) = -H_0(\phi), \ \dot{*}(\psi) = H_0(\psi), \ \phi \in \Lambda^+ M, \ \psi \in \Lambda^- M,$$

où H note l'endomorphisme $[g]$-symétrique associé à h, H_0 la partie à trace nulle de H, considérée comme un homomorphisme de $\Lambda^+ M$ dans $\Lambda^- M$ ou de $\Lambda^- M$ dans $\Lambda^+ M$ via l'isomorphisme (2.1.5). De cette manière, l'espace des variations premières de $[g]$ s'identifie canoniquement (sans recourir à une métrique dans $[g]$) à l'espace des sections du fibré $\mathrm{End}_{S,0}M$. Par commodité, nous adoptons dans la suite le point de vue métrique, mais nous supposerons que la variation première h de la métrique est à trace nulle, identifiée, via g, à la variation première $H = H_0$ de la structure conforme.

Nous conviendrons que la courbure R_t de g_t et ses composantes sont des sections de $\mathcal{R}$ (qui ne dépend d'aucune métrique). La projection de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{W}_t^-$ est notée Π_t^-. Les éléments relatifs à $g_0 = g$ ne sont pas indiciés. Plutôt que différentier directement $W_t^- = \Pi_t^-(R_t)$, nous considérons la racine positive $A_t := (I + tH)^{1/2}$ de $(I + tH)$ et nous substituons à R_t le tenseur $\tilde{R}_t := A_t(R_t)$ image de R_t par A_t, explicité par

$$\text{(2.5.3)} \qquad \tilde{R}_t(X_1, X_2, X_3, X_4) = R_t(A_t^{-1}X_1, A_t^{-1}X_2, A_t^{-1}X_3, A_t^{-1}X_4) \ .$$

Comme A_t est une isométrie de (TM, g_t) sur (TM, g), $A_t(W_t^-)$ est égal à $\Pi^-(\widetilde{R}_t)$ pour tout t, et on a, compte-tenu de $\frac{d}{dt}A_{t|t=0} = \frac{1}{2}H$,

$$\text{(2.5.4)} \qquad L_g^-(h) = \Pi^- \left(\frac{d}{dt}\tilde{R}_{t|t=0} \right) + \frac{1}{2} ad_H W^- \ ,$$

où, de façon générale, l'action adjointe de $\mathrm{End}_S E$ sur $\mathcal{R}$ est la différentielle de l'action décrite par (2.5.3), i.e. est définie par

$$(2.5.5) \qquad (\mathrm{ad}_H R)(X_1, \cdots, X_4) = -\sum_{i=1}^{4} R(X_1, \cdots, H(X_i), \cdots, X_4) \; .$$

Comme H est à trace nulle, le "terme additionnel" $\frac{1}{2}\,\mathrm{ad}_H W^-$ est une section du sous-fibré $\mathcal{Z}$. La variation première de R_t, donc aussi de $\tilde{R}_t$, est standard, cf. [Be2] 1.178. On a ainsi

$$(2.5.6) \qquad \frac{d}{dt}\tilde{R}_{t|t=0} = -\frac{1}{2}\kappa(D^2_S h) + \frac{1}{4}\,\mathrm{ad}_H R \; ,$$

où $D^2_S h$ est la dérivée covariante seconde symétrisée de h, vue comme une section de $S^2T^*M \otimes S^2_0T^*M$ et où κ est l'homomorphisme de Kulkarni-Nomizu déjà considéré (la substitution $R_t \mapsto \tilde{R}_t$ ne modifie que le terme d'ordre 0). Comme H est à trace nulle, seules contribuent de façon non triviale dans $\Pi^-(\frac{d}{dt}\tilde{R}_{t|t=0})$ la composante à trace nulle $D^2_{S,0}h$ de $D^2_S h$ et la composante B de R. Un calcul simple montre que l'on a :

$$(2.5.7) \qquad \Pi^-\,(\mathrm{ad}_H R) = \Pi^-\,(\mathrm{ad}_H B) = -\Pi^-(h \owedge \mathrm{Ric}_0) \; .$$

Compte-tenu de (2.4.6), nous obtenons finalement l'expression suivante de L^-_g :

$$(2.5.8) \qquad L^-_g(h) = -\frac{1}{2}(\Pi^{\Sigma^4_-} \circ c)(D^2_{S,0}h + \frac{1}{2}\, h \otimes \;\mathrm{Ric}_0) + \frac{1}{2} ad_H W^- \; .$$

En particulier, L^-_g prend ses valeurs dans $\mathcal{W}^-$ si et seulement si la métrique g est autoduale.

Remarque. Via (2.1.4), la forme h peut être considérée comme une 2-forme autoduale à valeurs dans le fibré vectoriel $\Lambda^- M$. On a alors l'identité

$$(2.5.9) \qquad c(D^2_{S,0}h) = d^D_- \delta^D h \; ,$$

où δ^D désigne la codifférentielle relative à D et d^D_- la partie anti-autoduale de la différentielle relative à D opérant sur les 1-formes à valeurs dans $\Lambda^- M$.

En effet, $d_-^D\delta^D h$ est obtenu en composant la dérivée covariante seconde D^2h de h avec l'opération algébrique décrite par le schéma suivant (où ϕ est un élément de Λ^+M, ψ un élément de $\Lambda^-M, \alpha, \beta$ deux éléments de T^*M en un point générique de M) :

$$(2.5.10) \qquad \alpha \otimes \beta \otimes \phi \otimes \psi \mapsto -(\alpha \wedge \phi(\beta))_- \otimes \psi \ ,$$

où $(\alpha \wedge \phi(\beta))_- = \frac{1}{2}(\alpha \wedge \phi(\beta) + \beta \wedge \phi(\alpha) - g(\alpha, \beta)\phi)$ désigne la composante anti-autoduale de $(\alpha \wedge \phi(\beta))$, tandis que $c(D^2_{S,0}h)$ est obtenu à partir de D^2h par l'opération :

$$(2.5.11) \qquad \alpha \otimes \beta \otimes \phi \otimes \psi \mapsto c((\alpha \otimes \beta)_{S,0} \otimes \phi) \otimes \psi \ ,$$

où $(\alpha \otimes \beta)_{S,0} = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha - \frac{1}{2}g(\alpha, \beta)g)$ désigne la composante symétrique à trace nulle de $\alpha \otimes \beta$. Un calcul simple montre que (2.5.10) et (2.5.11) coïncident. L'opérateur linéarisé L_g^- peut donc s'écrire sous la forme suivante [Fl], [Ta4] §5 :

$$(2.5.12) \qquad L_g^-(h) = -\frac{1}{2}\,\Pi^{\Sigma^4_-}(d_-^D\delta^D h + \frac{1}{2}\,c(h \otimes \mathrm{Ric}_0)) + \frac{1}{2}\,\mathrm{ad}_H W^- \ .$$

2.6 Le complexe elliptique attaché à une variété autoduale.

La courbure riemannienne R, de variance quelconque, est invariante sous l'action du groupe Diff M des difféomorphismes de M, en ce sens que : $\Phi^*R(g) = R(\Phi^*g)$ pour tout difféomorphisme Φ de M. Si Φ préserve l'orientation de M, on a aussi $\Phi^*W^-(g) = W^-(\Phi^*g)$, donc aussi par dérivation (en notant $\mathcal{L}_X$ la dérivée de Lie dans la direction de X) :

$$(2.6.1) \qquad \mathcal{L}_X W^- = L_g^-(\mathcal{L}_X g) \ ,$$

pour toute métrique g et tout champ de vecteurs X de M. En particulier, si g est autoduale, $\mathcal{L}_X g$ appartient au noyau de L_g^- quel que soit le champ de vecteurs X, et nous obtenons, dans ce cas, le complexe d'opérateurs suivant :

$$(2.6.2) \qquad C^\infty(TM) \xrightarrow{\delta_0^*} C^\infty\ (\mathrm{End}_{S_0}M) \xrightarrow{L_g^-} C^\infty(\mathcal{W}^-)$$

où $\delta_0^* X$ note la partie à trace nulle de $1/2\mathcal{L}_X g$ considérée comme une section de $\mathrm{End}_{S,0}E$, i.e. $\delta_0^* X$ est égal à la composante symétrique à trace nulle de DX. Comme tel, l'opérateur δ_0^* est invariant conforme. Pour tout α fixé non nul, dans $T_x^* M$, la suite correspondante des symboles principaux s'écrit, cf. (2.5.10),

(2.6.3)

$$X \in T_x M \mapsto (\alpha \otimes X)_{S,0} \in (\mathrm{End}_{S,0} M)_x,$$

$$\phi \otimes \psi \in (\mathrm{End}_{S,0} M)_x \mapsto -\Pi^{\Sigma^4_-}((\alpha \wedge \phi(\alpha))_- \otimes \psi) \in \mathcal{W}_x^- .$$

Un calcul simple montre que cette suite est exacte, i.e. que *le complexe* (2.6.2) *est elliptique.*

Remarque : La non-ellipticité de L_g^- est due à la présence du groupe de symétries Diff M qui implique la non-injectivité de son symbole principal. L'ellipticité est restaurée par l'adjonction de l'opérateur δ_0^* qui exprime l'action dérivée de Diff M. On retrouve une situation semblable pour l'équation d'autodualité des connexions, où le groupe de symétries est le *groupe de jauge*, i.e. le groupe des automorphismes du fibré principal considéré, et pour l'équation d'Einstein (riemannienne) où le groupe de symétries est encore Diff M, cf. [A-H-S], [Bo].

Les espaces de cohomologie du complexe (2.6.2) sont notés $H^0_{[g]}, H^1_{[g]}$ et $H^2_{[g]}$. L'espace $H^0_{[g]}$ est l'espace des champs de Killing conformes, i.e. des automorphismes infinitésimaux de la structure conforme $[g]$. Lorsque M est compacte, les dimensions $h^i_{[g]}$ de ces espaces sont finies. L'indice $i_{[g]} = h^0_{[g]} - h^1_{[g]} + h^2_{[g]}$ du complexe elliptique (2.6.2), calculée à l'aide de la formule d'Atiyah-Singer, est égale à $\frac{1}{2}(15\chi - 29\tau)$, où χ et τ désignent respectivement la caractéristique d'Euler-Poincaré et la signature de M (la détermination de (2.6.2) et le calcul de $i_{[g]}$ sont dus à I.M. Singer (non publié) ; un calcul détaillé de $i_{[g]}$ figure dans [Ki-Ko]).

Les éléments généraux d'une théorie des déformations des structures conformes autoduales, inspirée de la théorie de Kodaira-Spencer-Kuranishi à partir du complexe (2.6.2), se trouvent dans [Ki-Ko], [It1], [It2]. En particulier, dans le cas générique où $h^0_{[g]}$ et $h^2_{[g]}$ sont nuls, l'espace des modules $\mathcal{M}_{[g]}$ des structures autoduales sur M est, au voisinage de $[g]$, une variété

lisse de dimension $\frac{1}{2}(29\chi - 15\tau)$, où χ désigne la *caractéristique d'Euler-Poincaré* et τ la *signature* de M, [Ko-Ki].
Dans les deux exemples (non-génériques) suivants, l'espace des modules est réduit à un point (au voisinage de la structure standard).

Exemple 1. La sphère $(S^4, [g_S])$. On a

$$h^0_{[g_S]} = i_{[g_S]} = 15, \; h^1_{[g_S]} = h^2_{[g_S]} = 0 \; . \tag{2.6.4}$$

Exemple 2. *Le plan projectif complexe* $(\mathbb{C}\mathrm{P}^2, [g_{FS}])$. On a

$$h^0_{[g_{FS}]} = i_{[g_{FS}]} = 8, \; h^1_{[g_{FS}]} = h^2_{[g_{FS}]} = 0 \; . \tag{2.6.5}$$

Dans les deux cas, l'annulation de $h^2_{[g]}$, qui équivaut à la surjectivité de l'opérateur L^-_g, est un fait non trivial, qui joue un rôle décisif dans la démonstration du Théorème (1.1). Ce fait peut être montré, soit directement, par des techniques "à la Weitzenböck", [Ta4] Prop. 5.7, soit à partir de l'identification de $H^2_{[g]}$ à l'espace de cohomologie correspondant sur l'espace des twisteurs, [F1], [Do-Fr], cf. §3.2.2.

Remarque : Le complexe (2.6.2) est à comparer avec le complexe elliptique associé à une *connexion* autoduale ∇, définie sur un G-fibré principal P audessus de M, qui s'écrit :

$$\Omega^0(M, ad\ P) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(M, ad\ P) \xrightarrow{d^\nabla_-} \Omega^2(M, ad\ P) \; , \tag{2.6.6}$$

où d^∇_- est la composante anti-autoduale de la différentielle extérieure relative à ∇, opérant sur les 1-formes à valeurs dans le fibré adjoint $ad\ P$. On notera les deux différences importantes avec (2.6.2) : d^∇_- est un opérateur d'ordre 1, et les espaces $\Omega^i(M, \mathrm{ad}\ P)$ des i-formes à valeurs dans ad P sont indépendants de la connexion ∇, cf. [A-H-S].

2.7. Obstructions topologiques.

Lorsque M est compacte, les normes L^2 des composantes de la courbure riemannienne R sont liées par les relations suivantes :

$$\chi = \frac{1}{8\pi^2}\int_M (|U|^2 - |B|^2 + |W|^2)\, v_g \ , \tag{2.7.1}$$

$$\tau = \frac{1}{12\pi^2}\int_M (|W^+|^2 - |W^-|^2)\, v_g \ , \tag{2.7.2}$$

où v_g est la forme-volume définie par la métrique g et l'orientation. L'égalité (2.3.1) est la formule de Gauss-Bonnet-Chern en dimension 4 et (2.3.2) est dérivée directement de la formule de Hirzebruch

$$\tau = \frac{1}{3} < p_1(M), [M] > \tag{2.7.3}$$

(où $[M]$ désigne le générateur de $H_4(M, \mathbb{Z})$ déterminé par l'orientation), via l'expression de la classe de Pontryagin p_1 donnée par la théorie de Chern-Weil, cf. par ex. [Be1], [Be2] Ch. 6.

De (2.7.2) résultent directement les faits suivants (M compacte) :

(i) *si τ est nulle, toute structure conforme $[g]$ autoduale ou anti-autoduale est plate ;*

(ii) *si τ est positive (resp. négative), il n'existe pas de structure conforme anti-autoduale (resp. autoduale) et toute structure conforme autoduale (resp. anti-autoduale) réalise le minimum absolu de la norme L^2 du tenseur de Weyl, égal à $12\pi^2\tau$ (resp. $-12\pi^2\tau$).*

Remarque. Les normes L^2 de chacune des composantes de R, considérées comme des 2-formes à valeurs dans AM, ne dépendent que de $[g]$.

Si M est compacte, la variété conforme $(M, [g])$ est *de type positif*, *de type négatif* ou *de type nul* suivant que $[g]$ contient une métrique à courbure scalaire positive, négative ou identiquement nulle. On a alors :

(2.7.4) *Si (M, g) est de type positif et autoduale, resp. anti-autoduale, la forme d'intersection de M est définie-positive, resp. définie négative.*

La preuve repose sur la "formule de Weitzenböck" suivante, [Be1] Exp. XVI :

$$(2.7.5) \qquad \Delta\psi = D^*D\psi + \frac{1}{3}\,\mathrm{Scal}\cdot\psi - 2W^{\pm}(\psi), \quad \forall\psi \in C^{\infty}(\Lambda^{\pm}M)\ ,$$

relative à une métrique g de $[g]$, où Δ est le laplacien riemannien et D^*D le "laplacien brut" associé à la connexion de Levi-Civita D. Si $(M,[g])$ est de type positif, g peut être choisie à courbure scalaire positive et le résultat se déduit directement de (2.7.5) par contraction avec ψ et intégration sur M.

3. CONSTRUCTIONS TWISTORIELLES.

3.1 L'espace des twisteurs d'une variété autoduale.

Dans ce qui suit, nous appellerons *espace de twisteurs* de (M,g), notée simplement ZM, l'espace des demi-twisteurs (projectifs) négatifs, noté précédemment Z^-M, cf. §2.1 (la théorie pour Z^+M est similaire). Un point générique de ZM est noté J, considéré comme un élément (de carré -I) de A^-_xM, où $x = \pi(\mathrm{J})$ est la projection de J dans M (mais nous nous souviendrons que J peut être aussi regardé comme une droite complexe, notée alors ℓ, de $(\Sigma_-)_x$, cf. 2.4). L'espace tangent vertical $T^V_{\mathrm{J}}(ZM)$, tangent en J à la fibre $\pi^{-1}(x)$, coïncide avec le sous-espace des éléments de A^-_xM qui anti-commutent à J.

Nous construisons une structure presque-complexe $\mathcal{J}$ sur ZM de la façon suivante. Soit g une métrique quelconque de la classe conforme, H^D le *sous-fibré horizontal* de $T(ZM)$ déterminé par la connexion de Levi-Civita D. Nous posons :

$$(3.1.1) \qquad \mathcal{J}a = \mathrm{J}\circ a\ , \qquad \forall a \in T^V_{\mathrm{J}}(ZM) = \Lambda^{\mathrm{J},-}_xM\ ;$$

$$(3.1.2) \qquad \mathcal{J}_{|H^D_{\mathrm{J}}} = \mathrm{J}\ ,$$

via l'identification de l'espace horizontal H^D_{J} en J avec T_xM induite par π. Les deux faits suivants sont facilement vérifiés [A-H-S], cf. aussi [DV], [Ga] App. A :

(3.1.3) *$\mathcal{J}$ ne dépend pas du choix de la métrique g.*

(3.1.4) *Le tenseur de Nijenhuis, ou torsion complexe, de $\mathcal{I}$ est "égal" au demi-tenseur de Weyl négatif W^-*, i.e. *$\mathcal{J}$ est intégrable si et seulement si $[g]$ est autoduale.*

Nous supposons désormais que $[g]$ est autoduale. L'espace des twisteurs ZM est alors une variété complexe de dimension 3, fibrée sur M, dont les fibres sont des droites projectives complexes plongées holomorphiquement dans ZM et (globalement) préservées par la structure réelle, sans point fixe, σ de ZM définie par : $\mathrm{J} \mapsto \sigma(\mathrm{J}) := \mathrm{J}$.

Pour tout point x de M, le fibré normal $N^{(x)}$ de la fibre Z_xM dans ZM est un fibré vectoriel complexe de rang 2 dont la fibre $N_{\mathrm{J}}^{(x)}$ en J, égale au quotient $T_{\mathrm{J}}(ZM)/T_{\mathrm{J}}^V(ZM)$, est naturellement identifiée, par (3.1.2), à l'espace vectoriel complexe (T_xM, J), lui-même identifié, cf 2.4, à l'espace des homomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires de la droite complexe ℓ de $(\Sigma_-M)_x$ (identifiée à J) dans $(\Sigma_+M)_x$. Nous obtenons ainsi, via (2.4.5), l'isomorphisme canonique suivant (pour tout x) :

$$N^{(x)} = \mathcal{O}(1) \otimes (\Sigma_+M)_x \ , \tag{3.1.5}$$

où, comme il est d'usage, $\mathcal{O}(1)$ note le dual du fibré tautologique de $Z_xM = \mathbf{P}((\Sigma_-M)_x)$. Cet isomorphisme est compatible avec la structure holomorphe de $N^{(x)}$ induite par $\mathcal{J}$.

De (3.1.5) et (2.4.3) découlent directement les identifications :

$$H^0(Z_xM, N^{(x)}) = (\Sigma_-M)_x \otimes (\Sigma_+M)_x = T_x^{\mathbb{C}}M \ , \tag{3.1.6}$$

où $T_x^{\mathbb{C}}M := T_xM \otimes \mathbb{C}$ est le complexifié de T_xM, et où $H^0(Z_xM, N^{(x)})$ désigne l'espace des sections holomorphes de $N^{(x)}$. En tout point J de la fibre Z_xM, le sous-espace de $H^0(Z_xM, N^{(x)})$ des sections qui s'annulent en J est alors identifié au sous-espace $T_x^{0,1}M$ des éléments de type $(0,1)$ de $T_x^{\mathbb{C}}M$ relativement à J. Ainsi, la structure conforme de T_xM est "codée" par la géométrie complexe relative de Z_xM dans ZM de la façon suivante :

(3.1.7) *Le cône des éléments $[g]$-isotropes de $T_x^{\mathbb{C}}M$ coïncide, via* (3.1.6), *avec le cône des éléments de $H^0(Z_xM, N^{(x)})$ qui s'annulent en un point* (unique) *de Z_xM.*

Remarque. Le fibré tangent vertical $T^V(ZM)$, considéré comme un fibré vectoriel complexe de rang 1, n'est jamais un sous-fibré holomorphe de TZ mais possède une structure holomorphe, déterminée à isomorphisme près, pour laquelle $T^V(ZM)$ est isomorphe à une racine $K^{-1/2}$ du fibré anti-canonique K^{-1} de ZM. L'étude de ZM, en particulier (3.3.1) et (3.4.6), repose pour une large part sur les propriétés du système linéaire associé à $T^V(ZM)$, cf. en particulier [Hi3], [Fr-Ku], [Po1], [Do-Fr] §7.

3.2 La construction twistorielle admet la "réciproque" suivante, [Pe1], [Be2] Thm. 13.69, [Do-F1] §III (i).

(3.2.1) Théorème . *Une variété complexe de dimension 3, munie d'une structure réelle sans point fixe σ et contenant une sous-variété complexe F σ-invariante, isomorphe à la droite projective $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, dont le fibré normal dans Z est isomorphe à $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$, est, au voisinage de F, isomorphe à l'espace des twisteurs d'une variété conforme autoduale $(M, [g])$.*

L'argument repose sur la théorie des déformations relatives d'une variété complexe compacte dans une variété complexe fixée, [Ko] [Do-Fr] §II. Le fait que l'espace $H^1(F, N^F) = H^1(\mathbb{C}\mathrm{P}^1, \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1))$ soit réduit à $\{0\}$ implique que F appartient à une famille analytique à quatre paramètres complexes $M^{\mathbb{C}}$, lisse au voisinage de F, telle que l'espace tangent $T_F M^{\mathbb{C}}$ soit naturellement isomorphe à $H^0(F, N^F)$. La variété M est alors définie comme la variété des éléments réels, i.e. σ-invariants de $M^{\mathbb{C}}$, et la structure conforme $[g]$ est définie par (3.1.7). On peut montrer que ZM est fibrée sur M (au voisinage de F) et que ZM est alors identifié à l'espace des twisteurs de $(M, [g])$.

Le théorème (3.2.1) constitue un procédé effectif de construction de métriques autoduales, cf. par ex. [Hi1], [Be2] Ch. 13, [Po1], [Le3], [Kr-Ku].

Conséquence de (3.2.1) : *le fait, pour une variété complexe compacte dimension 3, d'être l'espace des twisteurs d'une variété riemannienne conforme est stable par déformation, dans la catégorie des variétés complexes admettant une structure réelle sans point fixe*, [Do-Fr], [Le-Si] Thm. 1.15.

Au niveau infinitésimal, la *correspondance de Penrose* identifie la cohomologie du complexe elliptique (2.6.2) à la partie réelle $H^i_\sigma(ZM, \Theta)$ de la cohomologie sur ZM à valeurs dans le faisceau Θ des germes de sections holomorphes de $T(ZM)$, i.e. on a les identifications :

$$\begin{gathered} H^0_\sigma(ZM,\Theta)=H^0_{[g]},\ H^1_\sigma(ZM,\Theta)=H^1_{[g]},\ H^2_\sigma(ZM,\Theta)=H^2_{[g]}, \\ H^3_\sigma(ZM,\Theta)=\{0\}\ , \end{gathered} \tag{3.2.2}$$

[Ki-Ko] Thm. (4.1), [Fl], [Do-Fr] Prop. (3.18), [Ea-Le] §6. Cf. [E-P-W], [Ba-Ea] pour un aperçu général de la transformation de Penrose, et, dans le cadre riemannien, [At], [Hi2], [Sa].

Remarque. La démonstration de (3.2.1) montre que toute variété autoduale $(M,[g])$ admet, localement, une complexification conforme $M^{\mathbb{C}}$, en particulier est analytique.

3.3. Dans ce paragraphe, M est supposée compacte. Dans ce cas, nous notons $M^{\mathbb{C}}$ la composante connexe d'une fibre F de ZM dans *l'espace des cycles* de ZM (au sens de D. Barlet, cf. [Ca]). On a alors le résultat suivant [Ca] :

(3.2.2) *$M^{\mathbb{C}}$ est compacte si et seulement si ZM est une variété de Moishezon.*

Rappelons qu'une variété complexe (compacte) Z est *de Moishezon* si sa dimension algébrique $a(Z)$ est maximale, ici égale à 3 ; de façon équivalente, Z est dominée par une variété projective. Un espace de twisteurs (compact) ZM est de Moishezon si et seulement s'il appartient à *la classe $\mathcal{C}$ de Fujiki*, i.e. est dominé par une variété kählérienne, [Ca].

De façon générale, le type algébrique de ZM est étroitement lié au type de $(M,[g])$ défini en 2.7. En particulier, si $(M,[g])$ est de type négatif, $a(ZM)$ est égal à 0 ; de façon précise, ZM n'admet alors aucun diviseur non-trivial [Vi], [Ga]. Si $(M,[g])$ est de type zéro, $a(ZM)$ est égal à 0 ou 1, [Pn2]. Dans le cas opposé, où $a(ZM)$ est égal à 3 - $(M,[g])$ est alors de type positif, [Po2] - on a le résultat bien connu suivant de N. Hitchin [Hi3], cf. aussi [Fr-Ku] :

$$\begin{aligned} ZM \text{ est une variété projective} &\Leftrightarrow (M,[g])=(S^4,[g_S]) \text{ ou } (\mathbf{C}P^2,[g_{FS}]) \\ &\Leftrightarrow ZM \text{ est kählérienne}\ . \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

L'argument repose sur l'étude du système linéaire de $T^V(ZM)$, cf. §2.1 Remarque.

Nous avons aussi le résultat suivant de F. Campana [Ca] :

ZM est une variété de Moishezon $\Rightarrow$ *M est homéomorphe à* $\tau\,\mathbb{C}P^2$,

(3.3.2) *(difféomorphe, si* $\tau \leq 3$, [Po1]) .

Démonstration : On peut déduire de (3.2.2) que M est simplement-connexe [Ca]. Comme $[g]$ est de type positif, la forme d'intersection de M est définie-positive par (2.7.4). Le résultat est alors une conséquence de [Do] et [Fr].

Remarque. On déduit aisément de (3.3.1) que (S^4, g_S) et $(\mathbb{C}P^2, g_{FS})$ sont les seules variétés riemanniennes compactes autoduales, d'Einstein (i.e. $\mathrm{Ric}_0 \equiv 0$) à courbure scalaire positive, cf. [Be2] Th. 13.13.

3.4. Exemples

3.4.1. *Le cas plat (conforme)* : Considérons un espace vectoriel complexe T de dimension 4 (*l'espace des twisteurs vectoriels*) muni d'une structure quaternionienne j. Soit $\tilde{G} = G(2,T)$ la grassmannienne des 2-plans complexes de T, munie de la structure réelle induite par j. La sphère S^4 est réalisée comme la variété des éléments réels de $\tilde{G}$, i.e. comme la droite projective quaternionienne $\mathbb{H}P(T,j)$ constituées des droites quaternioniennes, ou 2-plans j-invariants de T. Pour chaque élément x de S^4, l'espace tangent T_xM est identifié à l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(x, T/x)$ des homomorphismes $\mathbb{H}$-linéaires de x dans T/x et la structure conforme standard de S^4 se déduit directement de cette identification. En outre, les droites quaternioniennes x et T/x s'identifient respectivement aux fibres en x des fibrés de spineurs $\Sigma_- S^4$ et $\Sigma_+ S^4$ (si l'orientation de S^4 est convenablement choisie). L'espace des twisteurs $Z(S^4)$ est ainsi identifié à l'espace projectif complexe $\mathbb{P}(T)$, la projection twistorielle associant à toute droite complexe ξ de T la droite quaternionienne $\pi(\xi)$ engendrée par ξ et $\xi j := \sigma(\xi)$. La grassmannienne $\tilde{G}$, vue comme la variété des droites projectives complexes de $\mathbb{P}(T)$, coïncide avec la variété $(S^4)^{\mathbb{C}}$ évoquée en 3.3 (modèle de Klein).

Le modèle plat ainsi esquissé est à l'origine de la théorie de R. Penrose, cf. [Pe1] : chaque point de l'univers complexifié $\tilde{G}$ est figuré par une droite projective dans l'espace des twisteurs $\mathbb{P}(T)$ et la géométrie conforme (holomorphe) de $\widetilde{G}$ est remplacée par la géométrie d'incidence dans $\mathbb{P}(T)$, en ce sens que deux points de $\tilde{G}$ appartiennent à une même géodésique nulle si et seulement si les droites projectives correspondantes se rencontrent dans $\mathbb{P}(T)$.

3.4.2. Le plan euclidien conforme $\mathbb{R}^4$ se déduit de S^4 en choisisant dans S^4 un "point à l'infini" x_∞ et un "point-origine" x_0. L'espace des twisteurs $Z(\mathbb{R}^4)$ est alors égal à $\mathbb{P}(T) - \mathbb{P}(x_\infty)$ et, comme tel, est naturellement identifié, comme variété complexe, à l'espace total du fibré $\mathcal{O}(1) \otimes x_\infty$ sur la droite projective complexe $\mathbb{P}(x_0)$, la projection (holomorphe) p de $Z(\mathbb{R}^4)$ sur $\mathbb{P}(x_0)$ étant induite par la projection de T sur x_0 parallèlement à x_∞. La variété $(\mathbb{R}^4)^{\mathbb{C}}$ est l'espace des sections holomorphes de p.

3.4.3. On déduit de même une identification naturelle de $Z(\mathbb{R}^4 - \{0\})$ avec l'espace total, privé de la section nulle, du fibré $\mathcal{O}(1,-1)$ sur la surface complexe $\mathbb{P}(x_0) \otimes \mathbb{P}(x_\infty)$, où $\mathcal{O}(1,-1)$ note le produit tensoriel externe de $\mathcal{O}(1)$ et $\mathcal{O}(-1)$ définis respectivement sur $\mathbb{P}(x_0)$ et $\mathbb{P}(x_\infty)$. L'espace $\mathcal{O}(1,-1)$ lui-même s'identifie alors à la variété obtenue à partir de $Z(\mathbb{R}^4)$ en *éclatant* la fibre $\mathbb{P}(x_0)$ en l'origine.

3.4.4. *Variétés dont la connexion de Levi-Civita est autoduale.* L'espace des twisteurs de ces variétés admet, au voisinage de chaque fibre F de la fibration twistorielle, une projection holomorphe p sur F, induite par le transport parallèle suivant D (qui est plate sur $\Lambda^- M$, cf. 2.1). Les fibres de p sont alors les variétés intégrales de la distribution horizontale H^D sur ZM, et, pour tout élément J de $F = Z^-_{x_0}M, p^{-1}(\mathrm{J})$ est (localement) une copie de M, munie de la structure kählérienne déduite de J par transport parallèle.

Cette description vaut pour $\mathbb{R}^4$, cf. 3.4.2, pour les tores plats T^4, pour les surfaces $K3$ (munie de l'orientation opposée), cf. §2.3 (cf. [To] pour une preuve "twistorielle" de l'existence des métriques de Calabi - Yau sur une surface $K3$).

3.4.5. *Le plan projectif complexe.* Soit E un espace vectoriel complexe hermitien de dimension 3. Pour tout point x du plan projectif complexe $\mathbb{P}(E)$, l'espace tangent $T_x\mathbb{P}(E)$ est naturellement identifié à l'espace Hom $(x, x^\perp)$ des homomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires de la droite complexe x dans le 2-plan orthogonal $x^\perp$. Toute droite complexe ℓ de $x^\perp$ détermine une droite complexe Hom (x, ℓ) dans $T_x\mathbb{P}(E)$, donc une structure complexe orthogonale de $T_x\mathbb{P}(E)$ négativement-orientée. Nous identifions ainsi l'espace des twisteurs $Z(\mathbb{P}(E))$ avec la variété des drapeaux $\mathbb{D}(E)$ de E, dont les points sont les paires (x, ℓ) constituées d'une droite complexe de E et d'un plan complexe de E contenant x, muni de sa structure complexe ordinaire ; la projection twistorielle associe à (x, ℓ) la droite complexe $\pi((x, \ell)) = \ell \cap x^\perp$. Les éléments "à distance finie" de $(\mathbb{P}(E))^{\mathbb{C}} = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(E^*)$ sont les paires (y, ξ) telles que la droite y n'est pas contenue dans le 2-plan ξ : la droite projective correspondante dans $\mathbb{D}(E)$ est constituée des drapeaux (x, ℓ) tels que x est contenu dans ξ et ℓ contient y. Les éléments "à l'infini" sont les paires (y, ξ) où y est contenue dans ξ : le cycle correspondant est la somme des deux droites projectives suivantes de $\mathbb{D}(E)$: l'ensemble des drapeaux (x, ℓ) tels que x est contenu dans ξ, resp. ℓ contient y.

3.4.6. *Sommes connexes* $k\,\mathbb{C}\mathrm{P}^2$. Les structures conformes autoduales de type positif sur $2\,\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ ont été construites en [Po1] à partir de leurs espaces de twisteurs, obtenus par "petites déformations" de l'intersection (singulière) de deux quadriques dans l'espace projectif complexe $\mathbb{C}\mathrm{P}^5$, cf. aussi [Hu]. Les métriques construites en [Le3] sur $k\,\mathbb{C}\mathrm{P}P^2$, $\forall k \geq 0$, cf. 2.3.4.2, peuvent être également obtenus par voie "twistorielle", de façon similaire, [Le3] §7, cf. aussi [Kr-Ku].

Tous les espaces de twisteurs ainsi construits sont des variétés de Moishezon. Toutefois, les espaces de twisteurs des structures conformes autoduales sur $k\,\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ sont, à partir de $k = 5$, génériquement de dimension algébrique égale à 0, [Do-Fr], cf. aussi [Po2] pour une étude approfondie des cas $k = 3, 4$.

3.5. Sommes connexes de variétés auto-duales (d'après [Do-Fr]).

Il résulte aisément de §4.1, infra, que la somme connexe de deux variétés conformes plates admet une structure conforme plate. Dans [Do-Fr], S. Donaldson et R. Friedman donnent des conditions suffisantes pour l'existence de métriques autoduales sur la somme connexe de deux variétés (compactes) autoduales (M_1, g_1) et (M_2, g_2). Soit $M_1 \# M_2$ la somme connexe en les points x_1 et x_2 ; la première étape de [Do-Fr] consiste à fabriquer un "espace des twisteurs" singulier Z obtenu en faisant éclater les fibres twistorielles $Z_{x_1}M_1$ et $Z_{x_2}M_2$ dans $Z(M_1)$ et $Z(M_2)$ et en identifiant les quadriques ainsi obtenues (cf. (3.4.3)) au moyen de I_λ, cf. infra §4.1 pour les notations.

Une *déformation standard* (de dimension 1) de Z est une variété complexe $\mathcal{X}$, munie d'une structure réelle sans point fixe σ, et une application holomorphe propre réelle p de $\mathcal{X}$ sur un voisinage ouvert S de 0 dans $\mathbb{C}$ telles que : (i) $p^{-1}(0) = Z$ et la restriction de σ à Z coïncide avec la structure réelle de Z ; (ii) au voisinage de tout point de $Z, \mathcal{X}$ admet un système de coordonnées complexes pour lequel p s'écrit $(z_1, z_2, z_3, z_4) \to z_1 z_2$, [Do-Fr] Def. (4.4). On a alors :

(3.5.1) Théorème *([Do-Fr] Th. 4.5). Si $p : \mathcal{X} \to S$ est une déformation standard de Z, pour tout s suffisamment proche de 0 dans S, $p^{-1}(s)$ est l'espace des twisteurs d'une structure conforme autoduale sur la somme connexe $M_1 \# M_2$.*

Une telle déformation standard existe, en particulier, lorsque les espaces $H^2_{g_1}$ et $H^2_{g_2}$ sont réduits à $\{0\}$, [Do-Fr] Thm. (6.6). On retrouve ainsi, par (2.6.5), le théorème de Floer montrant l'existence de métriques autoduales sur $k\,\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ pour tout k, cf. Introduction. On peut aussi déduire de (3.5.1) l'existence de métriques autoduales sur les sommes connexes $n\underline{K3}\#(2n+1)\mathbb{C}\mathrm{P}^2$, pour tout n, où $\underline{K3}$ désigne une surface $K3$ munie de l'orientation opposée, [Do-Fr] Th. (6.25).

4. LE THÉORÈME DE TAUBES

La démonstration du Théorème (1.1) donnée en [Ta4] est d'une grande complexité, dont nous ne pouvons rendre compte dans ces Notes. Nous nous bornons à en donner quelques idées générales, déjà partiellement présentes en [Ta3], en commençant par une description précise de l'opération *somme connexe* (telle qu'elle figure en [Ta4] §3), sur laquelle repose la démonstration entière.

4.1. Sommes connexes.

Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés riemanniennes connexes orientées de dimension 4. La construction de la somme connexe $M_1 \# M_2$ requiert les données suivantes [Ta4] §3 : (a) un point x_1 de M_1, un repère g_1-orthonormé, positivement orienté, e_1 de $T_{x_1}M_1$, déterminant une *carte exponentielle* $\phi_1 : V_1 \subset \mathbb{R}^4 \to M_1$ centrée en x_1, où V_1 est une boule ouverte de $\mathbb{R}^4$ (données similaires pour M_2) ; (b) trois paramètres réel positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \lambda$, $\lambda > \frac{3}{2}\varepsilon_1\varepsilon_2$, tels que les anneaux $A_1 = \{u \in \mathbb{R}^4 | \varepsilon_1 < |u| < \lambda/\varepsilon_2\}$ et $A_2 = \{v \in \mathbb{R}^4 | \varepsilon_2 < |v| < \lambda/\varepsilon_1\}$ soient contenus respectivement dans V_1 et V_2. La variété (orientée) $M_1 \# M_2$ est obtenue en enlevant de M_1 la boule (fermée) $\widetilde{B}(x_1; \varepsilon_1)$ et de M_2 la boule $\widetilde{B}(x_2; \varepsilon_2)$, et en identifiant l'anneau $\widetilde{A}_1 = \phi_1(A_1)$ à l'anneau $\widetilde{A}_2 = \phi_2(A_2)$ par le difféomorphisme $\psi_\lambda = \phi_2 \circ I_\lambda \circ \phi_1^{-1}$, où I_λ est l'inversion-symétrie définie par $I_\lambda(u) = \lambda/u$ (où $u \neq 0$ est considéré comme un quaternion). La construction d'une structure conforme $[g]$ sur $M_1 \# M_2$ dépend, en outre, du choix (fixé une fois pour toutes) d'une fonction de troncature β de $[0, \infty)$ sur $[0, 1]$, telle que β est nulle sur le segment $[0, 6/5]$ et égale à 1 sur la demi-droite $[4/3, \infty]$ (par exemple). La structure conforme g est alors définie comme suit :

(i) sur $M_1 - \widetilde{B}(x_1; \lambda/\varepsilon_2)$, $[g]$ est représentée par g_1 et, sur $M_2 - \widetilde{B}(x_2; \lambda/\varepsilon_1)$ par g_2 ;

(ii) sur $\widetilde{A}_1$ et $\widetilde{A}_2$, identifiés par ψ_λ, $[g]$ est représentée respectivement par les métriques $\hat{g}_1$ et $\hat{g}_2$, conformes entre elles via ψ_λ, définies (dans les cartes ϕ_1 et ϕ_2) par

$$(4.1.1) \qquad \hat{g}_1 = g_E + \beta(|u|/\varepsilon_1)\, m_{g_1} + \frac{|u|^4}{\lambda^2} I_\lambda^*(\beta(\lambda/|u|\varepsilon_2)\, m_{g_2}) ,$$

$$(4.1.2) \qquad \hat{g}_2 = g_E + \frac{|v|^4}{\lambda^2} I_\lambda^*(\beta(\lambda/\varepsilon_1|v|)\, m_{g_1}) + \beta(|v|/\varepsilon_2) m_{g_2} \ ,$$

où g_E est la métrique plate de $\mathbb{R}^4$ et $g_1 = g_E + m_{g_1}$, resp. $g_2 = g_E + m_{g_2}$, dans la carte ϕ_1, resp. ϕ_2.

La structure conforme $[g]$ peut être décrite, de façon alternative (en brisant la symétrie entre M_1 et M_2) en considérant les deux ouverts U_1 et U_2 de $M_1 \# M_2$ définis comme suit (pour λ/ε_1 petit) : $U_2 = M_2 - \widetilde{B}(x_2; 16\lambda/\varepsilon_1)$ et U_1 est le complémentaire, dans $M_1 \# M_2$, de $M_2 - \widetilde{B}(x_2; 32\lambda/\varepsilon_1)$, identifié, par ψ_λ, à $M_1 - \widetilde{B}(x_1; \varepsilon_1/32)$. La structure conforme $[g]$ est alors représentée, sur U_2, par la métrique g_2 et, sur $U_1 = M_1 - \widetilde{B}(x_1; \varepsilon_1/32)$, par la métrique égale à g_1 sur $M_1 - \widetilde{B}(x_1; \lambda/\varepsilon_2)$ et, sur $\widetilde{B}(x_1; \lambda/\varepsilon_2) - \widetilde{B}(x_1; \varepsilon_1/32)$, à la métrique $\hat{g}_1'$ définie, dans la carte ϕ_1, par :

$$(4.1.3) \quad \hat{g}_1' = g_E + \beta(|u|/\varepsilon_1)\, m_{g_1} + \beta(256|u|/\varepsilon_1) \frac{|u|^4}{\lambda^2} I_\lambda^*(\beta(\lambda/|u|\varepsilon_2)\, m_{g_2}) \ .$$

Cette description de $[g]$ convient particulièrement à la situation considérée par Taubes, où (M_1, g_1) est une variété riemannienne compacte (orientée, de dimension 4) quelconque, à laquelle on ajoute, par somme connexe, k copies de $(\mathbb{C}\mathrm{P}^2, g_{FS})$ en k points distincts de M_1 (les paramètres sont choisis de telle sorte que $\lambda/\varepsilon_2 := \varepsilon$ soit le même pour tous les points et les points sont distants les uns des autres d'au moins 2ε). La structure conforme $[g]$ est alors décrite par les données locales $\{(U_0, \hat{g}_0), (U_i, \hat{g}_i)\}, 1 \leq i \leq k$, où $\{U_0, U_i\}$ constitue un recouvrement ouvert de $M_1 \# \mathbb{C}\mathrm{P}^2 \# \cdots \# \mathbb{C}\mathrm{P}^2$, chaque $(U_i, \hat{g}_i)$ est un ouvert de $(\mathbb{C}\mathrm{P}^2, g_{FS}), U_0$ est identifié à un ouvert de M_1, la métrique $\hat{g}_0$ est égale à g_1 sur $M_1 - \widetilde{B}(x_i; \varepsilon)$ et est définie par (4.3) sur chaque boule $\widetilde{B}(x_i; \varepsilon)$; en particulier, $\hat{g}_0$ est conforme à $\hat{g}_i = g_{FS}$ sur $U_0 \cap U_i$ (et les U_i sont mutuellement disjoints), cf. [Ta4] §6.

4.2. Soit x_1 un point de M_1 où le demi-tenseur de Weyl négatif $W^-[g_1]$ n'est pas nul. La construction de [Ta4] repose sur le fait qu'on peut "diminuer" W^- par somme connexe en x_1 avec $(\mathbb{C}\mathrm{P}^2, g_{FS})$. De façon plus précise, cf. [Ta4] Prop.3.5, il existe une constante universelle $\delta, 0 < \delta < 1$, telle que, si les paramètres $(e_1, e_2, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de la somme connexe sont convenablement choisis, on a l'inégalité

$$||W^-[g]|| < (1-\delta)||W^-[g_1]|| \ , \tag{4.2.1}$$

où $||.||$ est une norme appropriée sur la boule $B = B(x_1; \varepsilon = \lambda/\varepsilon_2)$ (notations de 4.1). Le fait essentiel, à ce stade de la construction, est que le *même* δ vaut pour tout ε assez petit.
On montre ensuite, [Ta4] Prop.3.7, que (4.2.1) peut être "globalisé" (avec une constante δ différente, mais encore universelle) en opérant la somme connexe (avec des paramètres convenablement choisis) en un nombre de points suffisamment grand de M_1.

4.3. L'opération précédente, répétée un nombre suffisant de fois, permet de réduire l'équation : $W^-[g+h] = 0$ à une perturbation de l'équation linéaire $\widetilde{L}_g^-(h) := \Pi_g^- \circ L_g^-(h)$, où g note une métrique de $M_N = M\#N\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ (N grand) et h une section de $S^2T^*M_N$, cf. §2.5.
Une difficulté du problème linéaire est la non-ellipticité de l'opérateur différentiel L_g^-.
Cette difficulté est résolue en [Ta4] §5 par la construction suivante, fondée sur la forme (2.5.12) de L_g^-. Considérons l'opérateur différentiel elliptique du premier ordre $P \ : \ C^\infty(\Lambda^+ M_N \otimes \Lambda^- M_N) \oplus C^\infty(\Lambda^- M_N) \to C^\infty(T^*M_N \otimes \Lambda^- M_N)$ défini par :

$$P((\xi, \psi)) = \delta^D \xi + D\psi \ , \tag{4.3.1}$$

où ξ est vu comme une 2-forme (autoduale) à valeurs dans $\Lambda^- M$. Soit w une section de $\mathcal{W}^-$, solution de l'équation :

$$\Pi^{\Sigma^4_-}[d_-^D \delta^D w + \frac{1}{2} c(h \otimes \ \mathrm{Ric}_0) - d_-^D v - d_-^D D\psi] = Q \ , \tag{4.3.2}$$

où $\delta^D w = v + \delta^D h + D\psi$ est la décomposition de Hodge de $\delta^D w$ relative à P (v est un élément du noyau de l'adjoint P^* dans $C^\infty(T^*M_N \otimes \Lambda^- M_N)$).

Alors, h satisfait clairement l'équation $\widetilde{L}_g^-(h) = Q$. Celle-ci a été ainsi remplacée par l'équation elliptique (4.3.2) en w, où v, h, ψ sont considérées comme des fonctions de w déterminées par la décomposition de Hodge, [Ta4] §5 (d).
Une seconde difficulté, qui n'est surmontée qu'au prix d'un affinement substantiel de la théorie elliptique (linéaire) [Ta4] §4, est la nécessité d'obtenir des estimés a priori concernant la norme C^0 de h ($g+h$ doit être une métrique).

4.4. Une structure conforme peut être cherchée sous la forme d'une famille de métriques locales, comme est donnée $[g]$ elle-même sur M_N, cf. §4.1. Cette liberté permet de substituer à la seule équation $\widetilde{L}_g^-(h) = Q$, où g est une métrique (globale) dans $[g]$, une *famille* d'équations locales :

$$\widetilde{L}_{\tilde{g}_0}^-(h_0) = Q_0,\ \widetilde{L}_{\tilde{g}_i}^-(h_i) = Q_i,\ i = 1, \cdots, N\ , \tag{4.4.1}$$

(notations de 4.1), où les Q_0, Q_i sont des données locales conformément liées entre elles (ainsi que les h_0, h_i). La réussite de cette stratégie, cf. aussi [Do-Kr] Ch. 7.2, repose sur la possibilité de "globaliser" chacune des équations locales de (4.4.1) en une équation définie sur M, pour la première, et sur $\mathbf{C}P^2$ pour les N autres, sous la forme suivante :

$$\widetilde{L}_{g_M}^-(\hat{h}_0) = \hat{Q}_0,\ L_{g_{FS}}^-(\hat{h}_i) = \hat{Q}_i,\ i = 1, \cdots, N\ , \tag{4.4.2}$$

où $g_M = g_1$ est la métrique initiale de $M = M_1$ et où les $\hat{Q}_0, \hat{Q}_i$ sont explicitement liés aux Q_0, Q_i, (ainsi qu'aux $\hat{h}_0, \hat{h}_i$) et les h_0, h_i aux solutions $\hat{h}_0, \hat{h}_i$, [Ta4] §6.
Du fait de la surjectivité de $L_{g_{FS}}^-$, cf. (2.6.5), les N équations $L_{g_{FS}}^-(\hat{h}_i) = \hat{Q}_i$ sont résolubles pour tout $\hat{Q}_i$, et les normes des solutions sont contrôlée par la théorie générale développée en [Ta4] §§4,5. L'opérateur $\widetilde{L}_{g_M}^-$ n'est pas surjectif en général, mais l'équation $\Pi_E(L_{g_M}^-(\hat{h}_0) - \hat{Q}_0) = 0$ est résoluble (pour tout $\hat{Q}_0$) pour E assez grand, où Π_E note la projection L^2-orthogonale sur la somme des espaces propres du laplacien D^*D (relatif à g_M) associés aux valeurs propres supérieures à E, [Ta4] §§2,6 (avec contrôle similaire sur les normes). L'équations résiduelle $(1 - \Pi_E)(L_{g_M}(\hat{h}_0) - \hat{Q}_0) = 0$, portant

sur un nombre fini d'inconnues, est résolue par une ultime adjonction de copies de $\mathbb{C}P^2$ ("cokernel step"), [Ta4] §§2,9.

4.5. Le théorème (1.1) se déduit de la "théorie linéaire" esquissée en 4.3, 4.4 par un argument de point fixe, [Ta4] §§8,9.

4.6. Une conséquence immédiate de (1.1) est le résultat suivant :

(4.6.1) Corollaire *Tout groupe Γ de présentation finie peut être réalisé comme le groupe fondamental d'une variété complexe compacte de dimension 3.*

Démonstration. Le groupe Γ peut être réalisé comme le groupe fondamental d'une variété M (réelle) compacte, orientée, de dimension 4. Le groupe fondamental de M est égal à celui de $M\#k\mathbb{C}P^2$, pour tout k, et celui de $M\#k\mathbb{C}P^2$ est égal à celui de son espace des twisteurs, qui est un fibré en sphères S^2. □

4.7. Remarque. Comme il est bien connu, il existe, au contraire, des groupes de présentation finie qui ne peuvent pas être réalisés comme le groupe fondamental d'une variété compacte *kählérienne* de dimension 3, cf. par exemple [Si] et références incluses.

4.8. Note. Le fait que tout groupe de représentation finie est réalisable comme le groupe fondamental d'une variété compacte orientée de dimension 4 est "folklorique". L'argument suivant m'a été communiqué par J. Lannes. La classe des groupes de présentation finie est la plus petite classe T des groupes vérifiant les trois propriétés suivantes :

(T1) le groupe Z appartient à T ;

(T2) le coproduit de deux groupes appartenant à T appartient à T ;

(T3) pour tout groupe G appartenant à T et tout élément r de G, le quotient de G par le sous-groupe normal engendré par r appartient à T.

On vérifie aisément que la classe des groupes fondamentaux des variétés compactes, orientées, de dimension 4 satisfait (T1), (T2) (sommes connexes), et (T3) (chirurgie autour d'un représentant de r). □

Références

[A-K-L] M. Anderson, P.B. Kronheimer, C. LeBrun. *Complete Ricci-flat Kähler manifolds of infinite topological type.* Comm. Math. Phys. 125 (1989), 643-660.

[At] M.F. Atiyah. *The geometry of Yang-Mills fields.* Lezioni Fermiane. Scuola Superiore Pisa. 1979.

[A-H-S] M.F. Atiyah, N.J. Hitchin, I.M. Singer. *Self-duality in four-dimensional Riemannian Geometry.* Proc. R. Soc. Lond. A362 (1978), 425-461.

[Ba-Ea] R.J. Baston, M.G. Eastwood. *The Penrose Transform. Its Interaction with Representation Theory.* Clarendon Press. Oxford. 1989.

[Be1] A.L. Besse. *Géométrie riemannienne en dimension 4* (1981). Cedic-F. Nathan.

[Be2] A.L. Besse. *Einstein manifolds.* Ergebnisse der Math. 10, 1987, Springer.

[Bo] J.P. Bourguignon. *Stabilité par déformation non-linéaire de la métrique de Minkowski.* Séminaire Bourbaki n°740 Juin 1991 Astérisque 201-202-209.

[Ca] F. Campana. *On twistor spaces of the class $\mathcal{C}$.* J. Diff. Geom. 33 (1991), 541-549.

[De] A. Derdzinski. *Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four.* Comp. Math. 49 (1983), 405-433.

[Do] S.K. Donaldson. *An application of gauge theory to four-dimensional topology.* J. Diff. Geom. 18 (1983), 279-315.

[Do-Kr] S.K. Donaldson, P.B. Kronheimer. *The Geometry of Four-Manifolds.* Clarendon Press. Oxford. 1990.

[Do-Ve] A. Douady - J.L. Verdier. *Les équations de Yang-Mills* Séminaire ENS 77-78, Astérisque 71-72.

[DV] M. Dubois-Violette. *Structures complexes au-dessus des variétés, applications.* dans : "Mathématiques et physique" Séminaire de l'E.N.S. 79-82, Ed. L. Boutet de Monvel, A. Douady, J.L. Verdier. Prog. in Math. 37 (1983) Birkhäuser. (1981).

[Do-Fr] S.K. Donaldson, R. Friedman. *Connected sum of self-dual manifolds and deformations of singular spaces.* Nonlinearity 2 (1989), 197-239.

[Ea-Le] M.G. Eastwood - C. LeBrun. *Fattening complex manifolds : curvature and Kodaira-Spencer maps.* J. Geom. Phys.8 (1992), 123-146.

[E-P-W] M.G. Eastwood, R. Penrose, R.O. Wells, Jr. *Cohomology and massless fields.* Comm. Math. Phys. 78 (1981), 305-351.

[E-G-H] T. Eguchi, P.B. Gilkey, A.J. Hanson. *Gravitation, Gauge theories and Differential Geometry.* Phys. Reports 66 (1980), 215-397.

[Fl] A. Floer. *Self-dual conformal structures on* $\ell\mathbb{C}\mathrm{P}^2$. J. Diff. Geom. 33 (1991), 551-573.

[Fr] M.H. Freedman. *The topology of four-dimensional manifolds.* J. Diff. Geom. 17 (1992), 357-454.

[Fr-Ku] T. Friedrich - H. Kurke. *Compact four-dimensional self-dual Einstein manifolds with positive scalar curvature.* MathNachr. 106 (1982), 271-299.

[Fr-Uh] D.S. Fried - K.K. Uhlenbeck. *Instantons and four-manifolds* MSRI Publ. Vol. 1 (1984). Springer.

[Ga] P. Gauduchon. *Structures de Weyl et théorèmes d'annulation sur une variété conforme autoduale.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa XVIII (1991), 563-629.

[Gi-Ha] G.W. Gibbons - S.W. Hawking. *Gravitational multi-instantons.* Phys. Lett. B. 78 (1978), 430-432.

[Hi1] N.J. Hitchin. *Polygons and Gravitons.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 83, (1979), 465-476.

[Hi2] N.J. Hitchin. *Linear field equations on self-dual spaces.* Proc. R. Soc. Lond. A370 (1980), 173-191.

[Hi3] N.J. Hitchin. *Kählerian Twistor Spaces* Proc. R. Soc. Lond. 43 (1981), 133-150.

[Hi4] N.J. Hitchin. *The Yang-Mills equation and the topology of four-manifolds* [d'après S.K. Donaldson], Séminaire Bourbaki n° 606, fév. 1983 Astérique 105-106.

[Hi5] N.J. Hitchin. *Hyperkähler manifolds.* Séminaire Bourbaki n°748 nov. 1991.

[Hu] J. Hurtubise. *The intersection of two quadrics in* $\mathbb{P}_5(\mathbb{C})$ *as a twistor space.* Ann. Glob. Analysis Geom. Vol. 3 (1985), 185-195.

[It1] M. Itoh. *Half-conformally Flat Structures and the Deformation Obstruction Space.* A paraître dans Math. J. Tsukuba.

[It2] M. Itoh. *Moduli of Half Conformally Flat Structures.* A paraître aux Math. Ann..

[Ko] K. Kodaira. *A theorem of completness of characteristic systems for analytic families of compact submanifolds of a complex manifold.* Ann. of Math. 75 (1962), 146-162.

[Ki-Ko] A.D. King - D. Kotschick. *The deformation theory of anti-self-dual conformal structures.* Math. Ann. 294 (1992), 591-609.

[Ki-Po] J. Kim - M. Pontecorvo. *A new method of constructing scalar-flat Kähler metrics* (1993). Preprint.

[Kr-Ku] B. Kreussler - H. Kurke. *Twistor spaces over the connected sum of 3 projective planes.* Comp. Math. 82 (1992), 25-55.

[Ku] H. Kurke. *Classification of twistor spaces with a pencil of surfaces of degree 1*, I. A paraître aux Math. Nachr.

[La] J. Lafontaine. *Remarques sur les variétés conformément plates.* Math. Ann. 259 (1982), 313-319.

[Le1] C. LeBrun. *Scalar-flat Kähler matrics.* J. reine angew. Math. 420 (1991), 161-172.

[Le2] C. LeBrun. *Explicit self-dual metrics on* $\mathbb{C}\mathrm{P}^2\#\cdots\#\mathbb{C}\mathrm{P}^2$. J. Diff. Geom. 34 (1991), 233-253.

[Le3] C. LeBrun. *Asymptotically-Flat Scalar Kähler Surfaces.* Preprint.

[Le-Si 1] C. LeBrun - M.A. Singer. *Existence and Deformation Theory for Scalar-Flat Kähler Metrics on Compact Complex Surfaces.* Inv. Math. 112 (1993), 273-313.

[Le-Si 2] C. LeBrun - M.A. Singer. *A Kummer-type construction of self-dual 4-manifolds (1993).* Preprint.

[Lw] H. Blaine Lawson, Jr. *The theory of gauge fields in four dimensions.* CBMS 58 (1985).

[Pe1] R. Penrose. *Non-linear gravitons and curved twistor theory.* Gen. Relativity Grav. 7 (1976), 31-52.

[Pe2] R. Penrose. *The complex Geometry of the Natural Word.* Proc. Intern. Congress Math. Helsinki, (1978).

[Pe3] R. Penrose. *On the origin of twistor theory.* in : Gravitation and Geometry, in honour of I. Robinson, ed. W. Rindler and A. Trautman. Bibliopolis, Naples (1987).

[Pe-Ri] R. Penrose - W. Rindler. *Spinors and Space-time 1,2.* Cambridge U. Press (1984-1986).

[Po1] Y.S. Poon. *Compact self-dual manifolds with positive scalar curvature.* J. Diff. Geom. 24 (1986), 97-132.

[Po2] Y.S. Poon. *Algebraic dimension of twistor spaces.* Math. Ann. 282 (1988), 621-627.

[Pn1] M. Pontecorvo. *Algebraic dimension of twistor spaces and scalar curvature of anti-self-dual metrics.* Math. Ann. 291 (1991), 113-122.

[Pn2] M. Pontecorvo. *Twistor spaces of anti-self-dual Hermitian surfaces.* Trans. Am. Math. Soc. 331 (1992), 653-661.

[Pr] M.J. Perry. *Gravitational instantons,* in : Seminar on Differential Geometry, Ed. S.T. Yau (1982), Princeton U. Press 102.

[Sa] S. Salamon. *Topics in four-dimensional Riemannian Geometry.* Geometry Seminar "Luigi Bianchi" (1982). Ed.E. Vesentini. LNM 1022. Springer.

[Si] C.T. Simpson. *Higgs bundles and local systems.* Publ. math. IHES n°75 (1992), 5-95.

[Si-Th] I.M. Singer - J.A. Thorpe. *The curvature of 4-dimensional Einstein spaces.* Global Analysis. Papers in honour of K. Kodaira. Ed. D.C. Spencer and S.I. Iyanaga (1969) Princeton Math. Series 29.

[Ta1] C.H. Taubes. *Self-dual Yang-Mills connections on non-self-dual 4-manifolds.* J. Diff. Geom. 17 (1982), 139-170.

[Ta2] C.H. Taubes. *Self-dual connections on 4-manifolds with indefinite intersection metrics.* J. Diff. Geom. 19 (1984), 517-560.

[Ta3] C.H. Taubes. *The stable topology of self-dual moduli spaces.* J. Diff. Geom. 29 (1989), 163-230.

[Ta4] C.H. Taubes. *The existence of anti-self-dual conformal structures.* J. Diff. Geom. 36 (1992), 163-253.

[TN] Twistor Newsletter (périodique). Mathematical Institute. Oxford.

[To] P. Topiwalla. *A new proof of the existence of Kähler-Einstein metrics on $K3$,* I, II. Inv. Math. 89 (1987), 425-454.

[Vi] M. Ville. *Twistor examples of algebraic dimension zero threefolds.* Inv. Math. 10 (1991), 537-546.

[Ya1] S.T. Yau. *On the Curvature of Compact Hermitian Manifolds.* Inv. Math. 25 (1974), 213-239.

[Ya2] S.T. Yau. *Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA 74 (1977), 1798-1799.

Paul GAUDUCHON
Centre de Mathématiques
U.R.A. 169 du C.N.R.S.
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex