ÉTIENNE GHYS

Dynamique des flots unipotents sur les espaces homogènes

Astérisque, tome 206 (1992), Séminaire Bourbaki, exp. n° 747, p. 93-136
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1991-1992__34__93_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 1991
44ème année, 1991/92, n° 747

DYNAMIQUE DES FLOTS UNIPOTENTS SUR LES ESPACES HOMOGÈNES

par Étienne GHYS

INTRODUCTION

Considérons le flot ϕ^t sur le tore $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ défini par : $\phi^t(x \bmod \mathbf{Z}^n) = (x+tw) \bmod \mathbf{Z}^n$, où $w = (w_1, \cdots, w_n)$ est un vecteur de $\mathbf{R}^n$. On sait depuis L. Kronecker que si les w_i sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$, toutes les orbites de ϕ^t sont denses dans le tore. En général, l'adhérence d'une orbite est un sous-tore de T^n, de dimension égale au rang de $\{w_i\}$ sur $\mathbf{Q}$.

Soit maintenant G un groupe de Lie connexe et Γ un réseau de G, c'est-à-dire un sous-groupe discret tel que le volume (de Haar) du quotient à gauche $\Gamma\backslash G$ soit fini. Un sous-groupe H de G opère naturellement à droite sur $\Gamma\backslash G$. Dans quelles conditions a-t-on un résultat analogue à celui de L. Kronecker garantissant l'homogénéité des adhérences d'orbites ?

Dans une série de quatre articles, M. Ratner vient d'obtenir une réponse très satisfaisante en résolvant une conjecture de M.S. Raghunathan [71-72-73-74]. Pour l'énoncer, convenons de dire qu'un élément g d'un groupe de Lie G est *unipotent* si l'automorphisme adjoint $\mathrm{Ad}(g)$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est unipotent, c'est-à-dire n'a que 1 comme valeur propre. Un sous-groupe H de G est unipotent si tous ses éléments sont unipotents.

THÉORÈME (M. Ratner, 1990).— *Soit H un sous-groupe unipotent d'un groupe de Lie G et Γ un réseau de G. Pour tout x de $\Gamma\backslash G$, il existe un sous-groupe fermé $H(x)$ de G tel que l'adhérence de l'orbite $x.H$ de x par H dans $\Gamma\backslash G$ coïncide avec l'orbite $x.H(x)$ de x par $H(x)$.*

Cet énoncé n'est pas le meilleur possible ; nous en donnerons d'autres versions plus loin.

Il n'est pas surprenant que ce résultat ait des conséquences concernant les approximations diophantiennes. Avant la preuve du théorème précédent, G.A. Margulis avait développé des méthodes qui lui permirent de démontrer en 1987 la conjecture de A. Oppenheim [50].

THÉORÈME (G.A. Margulis, 1987).— *Soit Q une forme quadratique indéfinie et non dégénérée sur $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 3$). On suppose que Q n'est pas un multiple d'une forme rationnelle. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un vecteur v de $\mathbf{Z}^n$ tel que $0 < Q(v) < \varepsilon$.*

Par la suite, S.G. Dani et G.A. Margulis ont amélioré significativement ce théorème comme nous le verrons plus loin.

Les preuves des théorèmes de S.G. Dani-G.A. Margulis et M. Ratner sont longues et difficiles ; il n'est pas possible de les décrire ici. Dans cet exposé élémentaire, nous nous sommes fixés un but très modeste. Nous nous proposons d'illustrer les méthodes employées dans le cas simple où le groupe G est $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$: il s'agit alors d'étudier le flot horicyclique d'une surface à courbure -1. Ce cas renferme déjà une bonne partie des difficultés. Nous espérons que son étude préliminaire permettra au lecteur d'aborder plus facilement les preuves complètes qui sont publiées ou en cours de publication. Signalons par ailleurs l'existence de l'article [27] de S.G. Dani et G.A. Margulis qui propose une introduction élémentaire à ces questions d'approximations diophantiennes.

Ce rapport est organisé de la façon suivante. Le premier paragraphe est consacré à des motivations : il retrace l'histoire du flot horicyclique et mène à des énoncés plus précis des théorèmes de M. Ratner. Le paragraphe 2 décrit quelques méthodes utilisées par S.G. Dani et G.A. Margulis pour approcher la conjecture de M.S. Raghunathan. Le paragraphe 3 donne quelques ingrédients de la preuve de M. Ratner, toujours illustrés dans le cas de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$. Enfin, dans le paragraphe 4, nous discutons trois applications : valeurs des formes quadratiques sur les points entiers, phénomènes de rigidité ergodique et existence de laminations géodésiques sur les variétés hyperboliques.

1. LE FLOT HORICYCLIQUE

1.1. Les flots géodésiques et horicycliques des surfaces à courbure négative sont des exemples très riches de systèmes dynamiques. Leur analyse de plus en plus approfondie s'est faite en parallèle avec le développement de la théorie ergodique. Bien que ces flots aient des comportements topologiques et ergodiques très différents, on ne peut envisager d'étudier l'un sans l'autre.

Rappelons d'abord les définitions. Soit H^2 le demi-plan de Poincaré $\{x + iy \in \mathbf{C} \mid y > 0\}$ muni de la métrique à courbure -1 donnée par $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$. Une géodésique de H^2 est une courbe $\gamma : \mathbf{R} \to H^2$ qui est un plongement isométrique. L'image d'une géodésique est un demi-cercle (ou une demi-droite) orthogonal à l'axe des x. Une géodésique est entièrement déterminée par son vecteur tangent en $t = 0$, élément du fibré unitaire tangent T_1H^2 à H^2. Bien sûr, si γ est une géodésique et si $s \in \mathbf{R}$, l'application $\gamma^s : t \in \mathbf{R} \mapsto \gamma(t + s) \in H^2$ est aussi une géodésique. Le groupe à un paramètre de transformations $\gamma \mapsto \gamma^s$ définit donc un flot sur l'espace des géodésiques, c'est-à-dire sur T_1H^2. C'est le *flot géodésique* de H^2.

Le groupe des isométries directes de H^2 est $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ opérant sur H^2 par $\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Ce groupe opère librement et transitivement à gauche sur T_1H^2 et commute évidemment avec le flot géodésique. Il en résulte que ce flot géodésique peut aussi être considéré comme un groupe à un paramètre g^s de translations à droite sur $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. On s'assure facilement que ce flot s'identifie à :

$$\begin{aligned} g^s : \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\in \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}) \\ \mapsto \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\begin{pmatrix} \exp(s/2) & 0 \\ 0 & \exp(-s/2) \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R}). \end{aligned}$$

Soit $v \in T_1H^2$ et $\gamma : \mathbf{R} \to H^2$ la géodésique issue de v. Lorsque T tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), le cercle de centre (non euclidien) $\gamma(T)$ et passant par $\gamma(0)$ "converge" vers l'*horicycle* positif (resp. négatif) déterminé par v (voir figure 1). Dans le modèle de Poincaré, c'est un cercle tangent à l'axe des x (privé de son point de tangence) ou une droite parallèle à l'axe des x. En termes intrinsèques, ce sont les courbes de courbure ± 1.

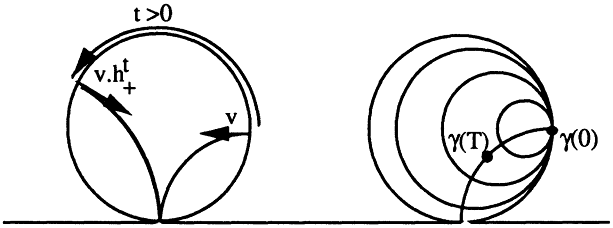

Figure 1

De même qu'avec les géodésiques, les horicycles permettent de définir un flot. Si v est un vecteur unitaire tangent à H^2 en un point z, et si t est un réel, on note $v.h_+^t$ le vecteur unitaire orthogonal à l'horicycle positif déterminé par v, en un point situé à une distance t de z le long de l'horicycle (voir la figure 1 pour les conventions d'orientation). Pour la même raison que précédemment, ce flot s'identifie à un groupe à un paramètre h_+^t de translations à droite de $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$.

On vérifie facilement qu'il s'agit de :

$$\pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.h_+^t = \pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant les horicycles négatifs, on construit de même un troisième flot h_-^t qui correspond bien sûr aux translations à droite par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$. Les deux flots h_+^t et h_-^{-t} sont conjugués par la symétrie envoyant un vecteur v de T_1H^2 sur son opposé. C'est pour cette raison que nous nous contenterons d'étudier h_+^t.

On notera que tous *ces flots préservent la mesure* de Haar (bi-invariante) de $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$. D'autre part, les champs de vecteurs invariants à gauche correspondant à g^s, h_+^t et h_-^t forment une base de l'algèbre de Lie de $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$.

Le rapport entre les flots géodésiques et horicycliques est contenu dans la formule suivante, fondamentale pour la suite :

$$(*) \qquad g^s\, h_\pm^t\, g^{-s} = h_\pm^{t\exp(\pm s)}.$$

Ceci est très facile à vérifier par un calcul matriciel. Le flot géodésique normalise donc les flots horicycliques. Il contracte les horicycles positifs et dilate les horicycles négatifs. Cette observation est à la source de la théorie des flots d'Anosov [1] (voir la figure 2) :

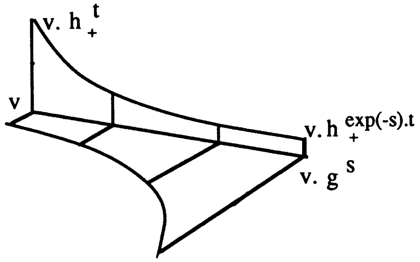

Figure 2

Soit maintenant Γ un sous-groupe discret de covolume fini de $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$. Lorsque l'action de Γ sur H^2 est libre, on obtient une surface $\Sigma = \Gamma\backslash H^2$ dont l'aire est finie et dont le fibré unitaire tangent s'identifie à $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$. En général, l'action de Γ sur H^2 peut ne pas être libre mais les stabilisateurs sont finis et le quotient $\Sigma = \Gamma\backslash H^2$ est une surface singulière qu'il vaut mieux considérer comme une "orbifold" (au sens de W. Thurston). Un exemple très important est celui de $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathbf{Z})$: on obtient l'orbifold modulaire dont l'étude est fondamentale en théorie des nombres.

Les flots $h_\pm^t$ et g^s passent bien sûr au quotient sur $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$: ce sont les flots horicycliques et géodésiques de la surface (resp. orbifold) $\Gamma\backslash H^2$. Ces flots n'ont pas de point fixes. Ils préservent une forme de volume, de masse totale finie, que l'on peut appeler au choix mesure de Haar ou mesure de Liouville suivant le point de vue adopté.

1.2. Pour illustrer le fait que ces flots géodésiques et horicycliques s'étudient en parallèle, nous allons commencer par quelques exemples simples et bien classiques.

PROPOSITION.— *Si* $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ *est compact, le flot horicyclique* $h_{\pm}^{t}$ *n'a pas d'orbite périodique.*

Preuve : La relation (*) montre que si γ est une orbite périodique de h_{+}^{t} de période T, alors l'image $\gamma.g^{s}$ est une autre orbite périodique, de période $\exp(-s).T$ tendant vers 0 lorsque s tend vers $+\infty$. La proposition résulte du fait qu'un flot sans point fixe sur une variété compacte ne peut avoir des orbites périodiques de périodes arbitrairement petites.•

Dans le cas où $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ est de volume fini mais non compact, la surface $\Sigma = \Gamma\backslash H^2$ (supposée non singulière pour simplifier) se décompose en une partie compacte et un nombre fini de *pointes* (cusps) (voir figure 3). Chacune de ces pointes est isométrique au quotient de $\{x+iy \in \mathbf{C}\,,\, y \geq y_0 > 0\}$ par les translations entières $z \mapsto z+n$. La courbe $y = y_0$ donne dans Σ un horicycle fermé, c'est-à-dire une orbite fermée γ pour h_{+}^{t}. Bien sûr, pour tout s réel, la courbe $\gamma.g^{s}$ est aussi une orbite périodique. Lorsque s tend vers $+\infty$, cette orbite $\gamma.g^{s}$ tend vers un bout de Σ (voir figure 3). Il n'est pas difficile de se convaincre que l'on obtient ainsi toutes les orbites périodiques de h_{+}^{t} qui constituent donc un nombre fini de familles paramétrées par $\mathbf{R}$. Lorsque s tend vers $-\infty$, il se trouve que les orbites $\gamma.g^{s}$ sont de plus en plus denses dans $T_1\Sigma$. On trouvera dans [19], [77], [85], une description de ce phénomène et une intéressante reformulation de l'hypothèse de Riemann en ces termes d'horicycles fermés.

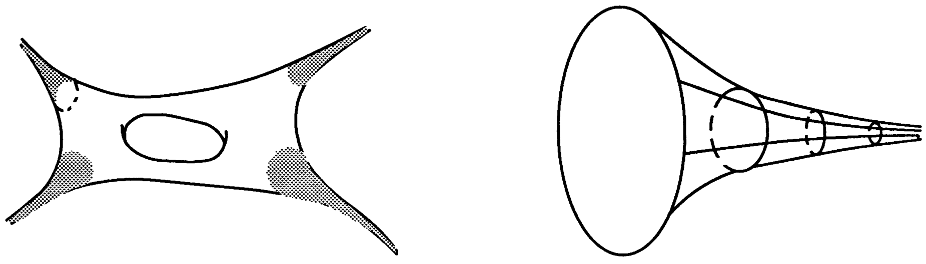

Figure 3

Voici un exemple où le flot horicyclique permet de comprendre le flot géodésique. C'est le fameux théorème de E. Hopf [41-42] :

THÉORÈME.— *Si* Γ *est un réseau de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$*, le flot géodésique sur* $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ *est ergodique par rapport à la mesure de Haar, i.e. une fonction mesurable constante sur les orbites du flot est constante presque partout.*

Preuve : C'est un exemple d'application du "phénomène de Mautner" (voir [55]). Soit λ la mesure de Haar sur $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ normalisée de façon à être une probabilité. Soit F une fonction de carré λ-intégrable sur $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ qui est invariante par le flot géodésique g^s. Nous allons montrer que F est aussi invariante (λ-presque partout) par le flot horicyclique h_+^t. En effet, l'utilisation de la formule (*) et le fait que g^s préserve λ montrent :

$$\begin{aligned}\int F(v)\,.\,F(v.h_+^t)\,d\lambda &= \int F(v.g^s)\,.\,F(v.g^s\,h_+^t)\,d\lambda \\ &= \int F(v)\,.\,F(v.h_+^{\exp(-s).t})\,d\lambda \underset{s\to+\infty}{\longrightarrow} \int F(v)\,d\lambda.\end{aligned}$$

Ainsi $F(v.h_+^t) = F(v)$ pour λ-presque tout v (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz). On procède de même avec h_-^t (en faisant tendre s vers $-\infty$). Par conséquent, F est invariante (λ-presque partout) par g^s, h_+^t et h_-^t et donc par l'action à droite de $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ qui est transitive. On a donc bien montré que F est constante λ-presque partout.•

Réciproquement, le flot géodésique va nous permettre de démontrer le résultat suivant, dû à G. Hedlund [39-40] :

THÉORÈME.— *Si* Γ *est un réseau de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$*, le flot horicyclique* h_+^t *sur* $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ *est ergodique par rapport à la mesure de Haar.*

Preuve : Nous allons donner quelques détails car l'idée de la preuve est à la base de beaucoup de techniques que nous verrons plus loin.

Le stabilisateur du point $(1,0)$ de $\mathbf{R}^2$ sous l'action linéaire de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ est $H = \{h_+^t\} = \left\{\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$. L'espace homogène $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})/H$ s'identifie donc à $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ et l'action à gauche de H sur $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})/H$ est bien sûr par transvections (voir figure 4) :

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+ty \\ y \end{pmatrix}.$$

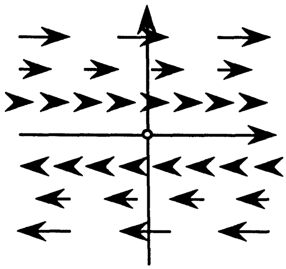

Figure 4

Il est bien clair qu'une fonction continue sur $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ invariante par ces transvections est une fonction de y. En particulier, une telle fonction est constante sur l'axe des x, et donc sur l'orbite de $(1,0)$ par $g^s = \begin{pmatrix} \exp(s/2) & 0 \\ 0 & \exp(-s/2) \end{pmatrix}$. Nous avons donc établi le lemme suivant. Si $\Phi : \mathrm{SL}(2,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est une fonction continue, constante sur les doubles classes par H, alors Φ est constante sur le sous-groupe à un paramètre g^s.

Avant d'appliquer ce fait à notre propos, remarquons qu'un espace homogène de $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ est aussi un espace homogène de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ de sorte que nous pouvons nous placer dans le cas d'un réseau Γ de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ (quitte à étendre Γ par $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$).

Considérons donc une fonction F de carré λ-intégrable sur $\Gamma\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$, invariante par le flot h_+^t. La fonction Φ définie sur $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ par :

$$\Phi(g) = \int F(v)\,.\,F(v.g)\,d\lambda$$

est continue et vérifie :

$$\Phi(g) = \Phi(h_+^t\,g) \text{ et } \Phi(g) = \Phi(g\,h_+^t)$$

car F est invariante par h_+^t et h_+^t préserve λ.

En appliquant l'observation précédente, on trouve :

$$\int F^2(v)\, d\lambda = \int F(v)\,.\,F(v.g^s)\, d\lambda.$$

Par conséquent, F est aussi invariante (λ-presque partout) par le flot géodésique g^s. Nous savons que ceci entraîne que F est constante λ-presque partout.●

Pour plus d'informations sur le flot géodésique, nous renvoyons à l'exposé de P. Pansu dans ce séminaire [62]. Notons cependant que cette dynamique est très complexe. À titre d'exemples :

i) La réunion des orbites périodiques est dense [1], [6].

ii) Certaines orbites ne sont pas récurrentes : une orbite peut spiraler par exemple sur une orbite périodique (figure 5) ou sur un ensemble limite plus compliqué.

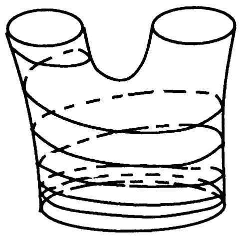

Figure 5

iii) Il existe des ensembles fermés invariants ne contenant aucune orbite périodique [56].

iv) Il existe une infinité non dénombrable de mesures de probabilités invariantes et ergodiques [81].

La situation est assez différente pour le flot horicyclique et, d'une certaine façon, bien plus simple. Le théorème suivant est dû à G. Hedlund [38] : il sera démontré au paragraphe 3 :

THÉORÈME.— *Si* $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ *est de volume fini, toute orbite du flot horicyclique* h_+^t *est périodique ou dense.*

Il est naturel d'essayer de décrire la répartition asymptotique des orbites dans $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$. Soit ϕ^t un flot sur une variété V préservant une mesure de probabilité μ. Un point v de V est *equiréparti par rapport à* μ si pour toute fonction continue à support compact $F : V \to \mathbf{R}$, on a :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(v.h_+^t)dt = \int_V F\,d\mu.$$

Le théorème ergodique de G. Birkhoff garantit que si μ est ergodique, μ-presque tout point v est équiréparti par rapport à μ.

Le théorème suivant est dû à S.G. Dani et J. Smillie [28] : il fait suite à de nombreux travaux (en particulier [7], [8], [32], [35], [37], [46], [84]). Nous esquisserons une preuve d'un résultat plus général au paragraphe 3.

THÉORÈME.— *Si* $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ *est de volume fini, tout point non périodique pour* h_+^t *est équiréparti par rapport à la mesure de Haar.*

1.3. Bien sûr, on ne s'est pas contenté longtemps de l'étude des flots géodésiques et horicycliques. Il est naturel d'étudier plus généralement l'action à droite d'un sous-groupe H d'un groupe de Lie G sur un quotient de volume fini $\Gamma\backslash G$ ([2], [9]). Les motivations sont multiples et nous en décrirons quelques-unes au paragraphe 4. Nous renvoyons à S.G. Dani pour un excellent survol de ces travaux [19]. Signalons tout particulièrement l'étude très complète du cas où G est nilpotent [63-64] par W. Parry (et plus récemment [44-45]), ainsi que l'étude des actions de groupes horisphériques par S.G. Dani [21]. C'est sur la base des résultats obtenus par ces auteurs que M.S. Raghunathan conjecture que si H est unipotent, l'adhérence d'une orbite dans $\Gamma\backslash G$ coïncide avec l'orbite d'un sous-groupe de Lie de G contenant H. Cette conjecture entraîne en particulier que ces adhérences d'orbites sont des sous-variétés : une situation bien différente de celle du flot géodésique...

Des progrès décisifs concernant la conjecture sont accomplis par G.A. Margulis et S.G. Dani qui la démontrent (génériquement) lorsque $G = \mathrm{SL}(3,\mathbf{R})$ [26]. Nous décrirons succinctement leurs méthodes au paragraphe 2. En fait, G.A. Margulis formule dans [50-52] une conjecture beaucoup plus générale que celle de M.S. Raghunathan qui est finalement démontrée par M. Ratner [74-75].

THÉORÈME.— *Soit H un sous-groupe d'un groupe de Lie connexe G, engendré par des éléments unipotents. Soit Γ un réseau de G. Alors, l'adhérence de toute orbite de H sur $\Gamma\backslash G$ coïncide avec l'orbite d'un sous-groupe de Lie de G contenant H.*

L'approche de M. Ratner consiste à étudier d'abord la nature des mesures invariantes par H et d'en déduire, par la suite, la structure des adhérences d'orbites.

Fixons toujours un réseau Γ du groupe de Lie connexe G et soit x un élément de $\Gamma\backslash G$. Considérons un sous-groupe fermé L de G ayant la propriété que $x.L$ est fermé dans $\Gamma\backslash G$. Supposons de plus que l'orbite $x.L \simeq L/x\Gamma x^{-1} \cap L$ soit de volume fini par rapport à la mesure de Haar de L. Comme $x.L$ est contenu dans $\Gamma\backslash G$, on obtient une mesure finie sur $\Gamma\backslash G$. Les mesures obtenues par ce procédé seront appelées *mesures homogènes* sur $\Gamma\backslash G$. Le résultat obtenu par M. Ratner est le suivant [70-71-72-73] :

THÉORÈME.— *Soit H un sous-groupe d'un groupe de Lie G, engendré par des éléments unipotents. Soit Γ un réseau de G. Toute mesure de masse totale finie sur $\Gamma\backslash G$ invariante et ergodique sous l'action de H est une mesure homogène.*

Lorsque H est un groupe à un paramètre ϕ^t, M. Ratner obtient une généralisation du théorème de S.G. Dani et J. Smillie.

THÉORÈME.— *Soit ϕ^t un sous-groupe unipotent à un paramètre du groupe de Lie connexe G et soit Γ un réseau de G. Alors, tout point de $\Gamma\backslash G$ est équidistribué par rapport à une certaine mesure homogène.*

Terminons ce paragraphe par trois remarques.

1. Les résultats de M. Ratner sont en fait plus généraux et couvrent certains cas où Γ n'est pas un réseau. Nous ne donnons pas ici d'énoncé mais nous citerons un exemple en 3.4.

2. La classe des groupes engendrés par des éléments unipotents est bien plus large que celle des sous-groupes unipotents. Par exemple, tout sous-groupe de Lie de $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ isomorphe à $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ est engendré par des éléments unipotents. Un exemple typique de groupe qui n'est pas engendré par des éléments unipotents est le sous-groupe résoluble H de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ formé des matrices triangulaires supérieures (au sens large) car les éléments unipotents de H sont triangulaires supérieurs au sens strict.

3. L'hypothèse "H est engendré par des éléments unipotents" est presque optimale. A.N. Starkov montre que si H n'est pas engendré par des éléments h tels que le spectre de $\mathrm{Ad}(h)$ est contenu dans le cercle unité, alors il existe des adhérences d'orbites dans $\Gamma\backslash G$ qui ne sont pas des sous-variétés. Par contre, si H est engendré par de tels éléments, il montre (en utilisant les résultats de M. Ratner) que toutes les adhérences d'orbites sont des sous-variétés (mais pas nécessairement orbites d'un sous-groupe de Lie L) [83].

2. DYNAMIQUE TOPOLOGIQUE DES FLOTS UNIPOTENTS

2.1. Dans ce paragraphe, nous proposons une introduction élémentaire aux méthodes développées par G.A. Margulis. Commençons par quelques remarques générales concernant la dynamique des flots unipotents. Fixons un groupe de Lie connexe G, un réseau Γ et un sous-groupe unipotent à un paramètre ϕ^t. Pour simplifier, nous supposerons momentanément que $\Gamma\backslash G$ est compact.

Les translations à gauche de G permettent d'identifier les espaces tangents aux divers points de G à l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ (des champs invariants à gauche). Le flot ϕ^t opère à droite sur $\Gamma\backslash G$ et sa différentielle, calculée dans $\mathcal{G}$, est donnée par l'application adjointe $\mathrm{Ad}(\phi^t)$. C'est là une propriété remarquable : la différentielle du flot, évaluée sur une trivialisation du fibré tangent, ne dépend pas du point où on la considère. On pourra comparer cette propriété à la notion d'"autonomie" dégagée par A. Zeghib [94].

Puisque ϕ^t est unipotent, $\mathrm{Ad}(\phi^t)$ est un polynôme en t. Si l'on fixe une structure euclidienne $\| \ \|$ sur $\mathcal{G}$ et si $\mathrm{w} \in \mathcal{G}$ est non nul, la fonction $t \mapsto \|\mathrm{Ad}(\phi^t)(\mathrm{w})\|^2$ est un polynôme qui ne prend que des valeurs strictement positives. En particulier :

$$\inf_{t \in \mathbf{R}} \|\mathrm{Ad}(\phi^t)(\mathrm{w})\| > 0.$$

C'est la *distalité infinitésimale* de ϕ^t. Cette propriété est à la source de la plupart des arguments concernant les flots unipotents : elle permet d'exclure l'existence de variétés stables et donc les phénomènes de spiralement. L'étude générale des flots infinitésimalement distaux a été entreprise dans [76] mais il reste beaucoup à faire. Cette propriété entraîne-t-elle par exemple que les adhérences des orbites sont des sous-variétés ?

Dégageons une propriété analogue mais non infinitésimale. Si x et y sont des points suffisamment proches de $\Gamma\backslash G$, il existe un unique petit élément $\mathrm{w}(x,y)$ de $\mathcal{G}$ tel que $y = x.\exp \mathrm{w}(x,y)$. On a bien sûr : $y.\phi^t = x.\phi^t.\phi^{-t}.\exp \mathrm{w}(x,y).\phi^t$ de sorte que si x et y sont tels que $x.\phi^t$ et $y.\phi^t$ restent proches pour $t \in [0,T]$, alors :

$$\mathrm{w}(x.\phi^t\,,\, y.\phi^t) = \mathrm{Ad}(\phi^t)\,\mathrm{w}(x,y).$$

On a ainsi une propriété de *divergence polynomiale* des orbites. Insistons sur le fait qu'un flot unipotent n'est pas nécessairement distal, c'est-à-dire que la distance entre $x.\phi^t$ et $y.\phi^t$ dans $\Gamma\backslash G$ peut ne pas être minorée par un nombre strictement positif [36]. Le flot horicyclique par exemple n'est pas distal.

2.2. Densité des horicycles dans le cas cocompact

Nous allons démontrer le théorème de G. Hedlund concernant les adhérences d'orbites avec une preuve inspirée de [50-52-54], elle-même réminiscente de [6] ou [65].

Soit $G = \mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$. Notons $H = \{h_+^t\} = \{\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ et B le sous-groupe des matrices $\begin{pmatrix} \exp(s) & t \\ 0 & \exp(-s) \end{pmatrix}$, normalisant H dans G. Soit Γ un réseau de G. Commençons par le fait très classique suivant :

PROPOSITION.— *Toutes les orbites de B dans $\Gamma\backslash G$ sont denses.*

Preuve : Il s'agit de montrer que toutes les doubles classes $\Gamma.x.B$ sont denses dans G ou, de manière équivalente, que toutes les orbites de Γ dans G/B sont denses. Nous supposerons pour simplifier que Γ contient $-\mathrm{id}$, de sorte qu'il suffit de montrer la densité des orbites de Γ dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})/B$, c'est-à-dire sur le bord $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ du demi-plan de Poincaré. (La preuve est analogue si $-\mathrm{id} \notin \Gamma$.) Par l'absurde, considérons une orbite de Γ qui n'est pas dense et soit I une composante connexe du complémentaire de son adhérence (voir figure 6). La géodésique de H^2 joignant les extrémités de I détermine avec I un demi-espace Π dans H^2. Le stabilisateur Γ_Π de Π est au plus cyclique et le quotient $\Gamma_\Pi \backslash \Pi$ est donc d'aire infinie. Ceci contredit le fait que Σ est d'aire finie.•

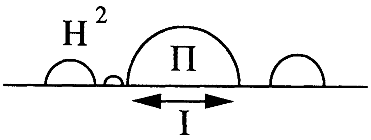

Figure 6

Supposons maintenant Γ cocompact, *i.e.* $\Gamma\backslash G$ compact. Une partie $\mathcal{M}$ de $\Gamma\backslash G$ est un *ensemble minimal* si c'est un fermé non vide invariant par H et minimal pour ces propriétés. Un tel ensemble minimal existe grâce au lemme de Zorn et à la compacité de $\Gamma\backslash G$. Toute orbite par H d'un point de $\mathcal{M}$ est dense dans $\mathcal{M}$. Nous allons montrer que $\mathcal{M} = \Gamma\backslash G$, c'est-à-dire que toute orbite du flot horicyclique est dense.

Utilisons l'action à droite de G sur $\Gamma\backslash G$ pour définir :

$$M = \{g \in G \,|\, \mathcal{M}.g \cap \mathcal{M} \neq \emptyset\}.$$

Il est clair que :

i) *M est fermé et contient l'élément neutre* id.

ii) *M est une réunion de doubles classes de $\Gamma\backslash G/H$ car $\mathcal{M}$ est invariant par H.*

Soit x un point de $\mathcal{M}$. Nous savons que l'orbite de x par H n'est pas périodique et qu'elle est dense dans $\mathcal{M}$. Il existe donc une suite g_n d'éléments de G tendant vers l'identité telle que $g_n \notin H$ et $x.g_n \in \mathcal{M}$. En particulier :

iii) id *est adhérent à $M - H$.*

Soit $g \in M \cap B$. Comme les éléments de B normalisent H, l'image $\mathcal{M}.g$ est un fermé non vide, invariant par H et intersectant $\mathcal{M}$ non trivialement ; c'est donc que $\mathcal{M}.g = \mathcal{M}$. Ainsi :

iv) $M \cap B$ *est un sous-groupe fermé formé d'éléments préservant* $\mathcal{M}$.

Nous avons déjà étudié l'espace $H\backslash G/H$ en 1.2. La projection M' de M dans $G/H \simeq \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ est un fermé s'accumulant sur $(1,0)$, invariant par les transvections $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit immédiatement que M' contient une suite de points du type $(\exp(s_n), 0)$ avec $s_n \neq 0$ convergeant vers 0.

Un réel s est tel que $(\exp(s), 0)$ appartient à M' si et seulement si $\begin{pmatrix} \exp(s) & t \\ 0 & \exp(-s) \end{pmatrix}$ est dans M (pour une valeur quelconque de t). La remarque iv) montre donc que l'ensemble de ces réels s est un sous-groupe additif fermé de $\mathbf{R}$, non discret d'après ce qui précède. Il en résulte que M contient B. Toujours grâce à iv), on déduit que le groupe B tout entier préserve $\mathcal{M}$. Comme nous savons que les orbites de B sont denses dans $\Gamma\backslash G$, nous avons montré que $\mathcal{M} = \Gamma\backslash G$. Ceci achève la preuve du théorème de G. Hedlund dans le cas où $\Gamma\backslash G$ est compact.

2.3. Le cas des réseaux non cocompacts : la non-divergence à l'infini

Plaçons-nous maintenant dans le cas où $\Gamma\backslash G$ est de volume fini mais non compact. Dans la démonstration précédente, la compacité permettait de garantir l'existence d'un ensemble minimal. Une orbite périodique est bien sûr un ensemble minimal mais il n'est plus clair, dans notre cas où $\Gamma\backslash G$ est de volume fini, que tout fermé non vide invariant contient un ensemble minimal. C'est la première propriété à vérifier.

PROPOSITION.— *Tout fermé non vide de $\Gamma\backslash G$ invariant par le flot horicyclique contient une orbite périodique.*

Avant de démontrer la proposition, nous devons énoncer deux lemmes.

Nous avons déjà vu que la surface (orbifold) $\Sigma = \Gamma\backslash H^2$ peut être décomposée en une partie compacte K et un nombre fini de pointes, isométriques au quotient de $\{x+iy \in \mathbf{C} \mid y > y_0 > 0\}$ par les translations entières $z \mapsto z+n$.

Lemme.— *Soit $\gamma : \mathbf{R} \to \Sigma$ un horicycle non périodique de Σ. Alors les ensembles $\{t \geq 0 \mid \gamma(t) \in K\}$ et $\{t \leq 0 \mid \gamma(t) \in K\}$ ne sont pas bornés.*

Preuve.— Il suffit de constater qu'un demi-horicycle de H^2 contenu dans $\{x+iy \,|\, y > y_0\}$ est une demi-droite horizontale et produit donc un horicycle périodique dans Σ.•

Puisque tout fermé non vide de $\Gamma\backslash G$ invariant par H et ne contenant pas d'orbite périodique rencontre le *compact* $\overline{K}$ des vecteurs unitaires tangents à Σ aux points de K, le lemme de Zorn s'applique. Il en résulte que tout fermé non vide invariant contient un ensemble minimal. Le lemme suivant, dont nous laissons la démonstration (facile) au lecteur, montre que tout ensemble minimal est nécessairement compact. (Voir [53] pour des énoncés plus généraux.)

Lemme.— Soit ϕ^t un flot sur un espace localement compact X. On suppose qu'il existe une partie compacte $\overline{K}$ de X telle que, pour tout x, les parties $\{t \geq 0 \,|\, x.\phi^t \in \overline{K}\}$ et $\{t \leq 0 \,|\, x.\phi^t \in \overline{K}\}$ de $\mathbf{R}$ ne sont pas bornées. Alors X est compact.

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition. Nous avons vu que tout fermé non vide invariant contient un ensemble minimal compact $\mathcal{M}$. Si cet ensemble $\mathcal{M}$ n'était pas réduit à une orbite périodique, l'argument du paragraphe 2.2 s'appliquerait sans modification et on aurait $\mathcal{M} = \Gamma\backslash G$ ce qui est absurde puisque nous avons supposé que $\Gamma\backslash G$ n'est pas compact.•

La proposition que nous venons de montrer est bien sûr plus faible que le théorème de G. Hedlund selon lequel une orbite non périodique est dense. Pour le démontrer, nous pouvons maintenant utiliser la même méthode qu'en 2.2. Soit x un point non périodique de $\Gamma\backslash G$ et F l'adhérence de l'orbite de x dans $\Gamma\backslash G$. Nous savons que F contient un point périodique y, de période $T > 0$. Posons :

$$M = \{g \in G \,|\, y.g \in F\}.$$

Alors, M est fermé, réunion de classes à droite de G/H, invariant par l'action à gauche de h_+^T, et contient une suite g_n de $G - H$ convergeant vers id. Le fermé M' correspondant dans $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ est invariant par $\begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et s'accumule sur $(1,0)$. Nous savons que les points $y.g$ avec $g \in B$

sont périodiques pour le flot horicyclique et que, d'autre part, l'orbite non périodique de x s'accumule sur y. Il en résulte que $(1,0)$ est la limite d'une suite de points de M' situés hors de $\mathbf{R} \times \{0\}$.

Toutes ces propriétés montrent que M' contient $\mathbf{R}^* \times \{0\}$. Autrement dit, pour tout g de B, on a $y.g \in F$. Comme toutes les orbites de B sont denses dans $\Gamma\backslash G$, nous avons bien établi que $F = \Gamma\backslash G$, c'est-à-dire que l'orbite non périodique de x est dense dans $\Gamma\backslash G$.•

2.4. Quelques indications sur le cas général

La plupart des techniques présentées en 2.2 et 2.3 s'étendent au cas d'un sous-groupe unipotent d'un groupe de Lie autre que $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$. C'est une élaboration de ces idées qui a permis à S.G. Dani et G.A. Margulis de démontrer la conjecture de M.S. Raghunathan dans le cas où $G = \mathrm{SL}(3,\mathbf{R})$, $\Gamma = \mathrm{SL}(3,\mathbf{Z})$ et ϕ^t est un groupe unipotentà un paramètre générique (*i.e.* tel que $\phi^t - \mathrm{id}$ est de rang 2 pour tout $t \neq 0$). Nous n'entrerons pas dans les détails de la preuve car [27] permet une excellente introduction élémentaire.

Dans la démonstration que nous avons donnée du théorème de G. Hedlund, il importait de constater qu'un horicycle non périodique ne peut séjourner qu'un temps fini dans une pointe sans en sortir. Un énoncé analogue est valable en toute généralité mais sa preuve est considérablement plus difficile. Voici deux résultats dans cette direction.

THÉORÈME.— *Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe et Γ un réseau. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de $\Gamma\backslash G$ tel que, pour tout point x de $\Gamma\backslash G$, et tout sous-groupe unipotent à un paramètre ϕ^t, on ait deux possibilités :*

i) *il existe un sous-groupe fermé propre L de G contenant ϕ^t tel que l'orbite $x.L$ est fermée et de mesure finie (pour la mesure de Haar de L) ;*

ii) *pour T assez grand, on a : $m(\{t \in [0,T] \mid x.\phi^t \in K\}) \geq (1-\varepsilon)T$ où m désigne la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{R}$.*

THÉORÈME.— *Soit G un groupe de Lie connexe, Γ un réseau, ϕ^t un sous-groupe unipotent à un paramètre, x un point de $\Gamma\backslash G$ et $\varepsilon > 0$. Il existe*

un compact K de $\Gamma\backslash G$ tel que, pour T assez grand :
$m(\{t \in [0,T] \,|\, x.\phi^t \in K\}) \geq (1-\varepsilon)T$.

Une première version de ces résultats est due à G.A. Margulis qui montre qu'une orbite d'un flot unipotent dans $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})\backslash\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$ ne tend pas vers l'infini [48]. Ce résultat a été amélioré par S.G. Dani sous la forme du premier des deux théorèmes cités ci-dessus [13-14-16-18-22]. La preuve de S.G. Dani sépare les cas où le $\mathbf{R}$-rang de G est supérieur ou égal à 2 (où il utilise le théorème d'arithméticité de G.A. Margulis) et où ce rang est égal à 1 (pour lequel la preuve est différente et plus simple). La formulation du second théorème cité est extraite de [74]. Pour une introduction aux méthodes de démonstration, nous renvoyons à l'appendice de [27]. Il serait d'ailleurs agréable de trouver une approche unifiée de cette "non divergence à l'infini", indépendante par exemple des difficiles théorèmes d'arithméticité.

3. COMPORTEMENT ERGODIQUE DES FLOTS UNIPOTENTS

Nous décrivons dans ce paragraphe quelques-unes des méthodes employées par M. Ratner.

3.1. La dérive dans la direction du centralisateur

L'algèbre de Lie $sl(2,\mathbf{R})$ de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ est constituée des matrices (2×2) de trace nulle. Une base est :

$$\mathrm{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{h}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{h}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(h_+^t) \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a-tb & t^2b+2at+c \\ b & -a+tb \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Munissons $sl(2,\mathbf{R})$ de la norme $\sup(|a|,|b|,|c|)$ et fixons $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ (très petit par rapport à C). Soit $\mathrm{w} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix} \in sl(2,\mathbf{R})$ de norme

$\rho < C$. Alors $\mathrm{Ad}(h_+^t)(\mathrm{w})$ tend vers l'infini sauf si $a = b = 0$, c'est-à-dire si w pointe dans la direction de h_+. Soit t_0 le premier instant positif tel que $\|\mathrm{Ad}(h_+^{t_0})(\mathrm{w})\| = C$. Un petit exercice montre que si ρ est assez petit, c'est le polynôme du second degré qui atteint le premier la valeur $\pm C$, *i.e.* $|-t_0^2 b + 2at_0 + c| = C$ et, de plus, $|-a + t_0 b|$ (et $|b|$) sont inférieurs à ε. Autrement dit, $\|\mathrm{Ad}(h_+^t)(\mathrm{w}) \pm C\, h_+\| < \varepsilon$ pour $t = t_0$. On peut même supposer, toujours quitte à prendre ρ inférieur à un réel ρ_0 (ne dépendant que de ε et C) que cette dernière inégalité subsiste pour $t \in [t_0, (1+\alpha)t_0]$ où $\alpha > 0$ ne dépend que de ε et C.

Supposons maintenant que Γ soit un réseau cocompact dans $G = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. La norme choisie sur $sl(2, \mathbf{R})$ munit $\Gamma\backslash G$ d'une distance. Les considérations précédentes montrent que, pour C assez petit, on a :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\rho_0 > 0$ et $\alpha > 0$ tels que si deux points x, y de $\Gamma\backslash G$ sont à distance inférieure à ρ_0 et ne vérifient pas $y = x.h_+^t$ avec $|t| < 2\rho_0$, alors il existe $t_0 > 0$ tel que la distance entre $x.h_+^t$ et $y.h_+^{t+C}$, ou entre $x.h^t$ et $y.h_+^{t-C}$, est inférieure à ε pour tout t de $[t_0, (1+\alpha)t_0]$ (voir figure 7).

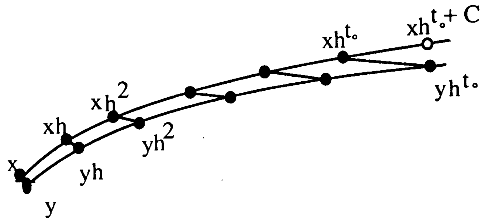

Figure 7

Le lecteur se doutera qu'il s'agit d'un phénomène général pour les flots unipotents ϕ^t. Si w est un petit vecteur et si t_0 désigne le premier instant où $\mathrm{w}_t = \mathrm{Ad}(h_+^t)(\mathrm{w})$ atteint une norme appréciable C, alors w_{t_0} est très proche du *centralisateur* de ϕ^t dans $\mathcal{G}$ et le reste dans tout un intervalle de temps $[t_0, (1+\alpha)t_0]$. Cette propriété est introduite par M. Ratner sous le nom de propriété H [66-67-68]. Pour montrer son utilité, nous allons décrire la classification par M. Ratner des quotients du flot horicyclique.

Soit ψ^t un flot *mesurable* préservant une probabilité μ sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ (isomorphe à la tribu des boréliens d'un espace métrique séparable). On dit que ψ^t est un *quotient mesurable* du flot horicyclique de $\Gamma\backslash G$ s'il existe une application mesurable $F : \Gamma\backslash G \to E$ envoyant la mesure de Haar λ (normalisée pour être une probabilité) sur μ et telle que $F(x.h_+^t) = F(x).\psi^t$ pour λ-presque tout x et presque tout t. Nous supposerons toujours que F est non trivial, c'est-à-dire que F n'est pas constante presque partout.

Soient $\Gamma \subset \Gamma'$ deux réseaux emboîtés de $G = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. Il est clair qu'alors Γ est d'indice fini dans Γ' et le revêtement fini $\Gamma\backslash G \to \Gamma'\backslash G$ montre que le flot horicyclique de $\Gamma'\backslash G$ est un quotient de celui de $\Gamma\backslash G$. Insistons sur le fait que pour un réseau Γ "générique", il n'existe pas de Γ' contenant strictement Γ.

THÉORÈME.— *Si (E, ψ^t) est un quotient mesurable du flot horicyclique de $\Gamma\backslash G$, alors (E, ψ^t) est isomorphe au flot horicyclique de $\Gamma'\backslash G$ avec $\Gamma \subset \Gamma'$.*

Esquisse de preuve : L'essentiel du théorème consiste à montrer que si $F : \Gamma\backslash G \to E$ est un quotient mesurable, presque toutes les fibres de F sont finies (et donc de même cardinal par ergodicité). Observons que les fibres de F partitionnent $\Gamma\backslash G$ et sont permutées par h_+^t. Une fibre qui est globalement préservée par h_+^τ produit une orbite périodique de ψ^t, de période τ. Le flot h_+^t étant ergodique, il en est de même pour ψ^t. Par conséquent, la réunion des orbites périodiques de ψ^t est de μ-mesure nulle, à moins que μ ne soit concentrée sur une seule orbite périodique (qui n'est pas un point fixe car F n'est pas constante). Dans les deux cas, on peut affirmer que, pour λ-presque tout x de $\Gamma\backslash G$, les points $F(x)$ et $F(x.h_+^t)$ sont différents pour t assez petit.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où $\Gamma\backslash G$ est compact, où E est un espace métrique et où $F : \Gamma\backslash G \to E$ est continue.

Si une fibre $F^{-1}(e)$ est infinie, elle contient deux points distincts x, y arbitrairement proches. On peut alors leur appliquer la propriété H, car nous venons précisément de voir que y n'est pas de la forme $x.h_+^t$ avec t petit. Il existe donc $t_0 > 0$ tel que si $t \in [t_0, (1 + \alpha)t_0]$, les points

$x.h_+^t$ et $y.h_+^{t\pm C}$ sont très proches. Il en résulte alors, par continuité de F, que les points $F(x.h_+^t) = e.\psi^t$ et $F(y.h_+^{t\pm C}) = e.\psi^{t\pm C}$ sont voisins pour $t \in [t_0, (1+\alpha)t_0]$. En prenant dans $F^{-1}(e)$ des paires de points distincts x, y de plus en plus proches, on trouve donc des morceaux de l'orbite de e du type $\{e.\psi^t \mid t \in [t_0, (1+\alpha)t_0]\}$ avec t_0 de plus en plus grand, formés de points de plus en plus fixes par $\psi^{\pm C}$.

Choisissons C de telle sorte que la μ-mesure de l'ensemble des points fixes de $\psi^{\pm C}$ soit nulle. La μ-mesure de l'ensemble des points presque fixes de $\psi^{\pm C}$ est donc petite. Le théorème ergodique montre alors que, pour μ-presque tout e, le morceau d'orbite $\{e.\psi^t \mid t \in [0, T]\}$ avec T grand ne contient qu'une faible densité de points presque fixes par $\psi^{\pm C}$. Par conséquent, pour μ-presque tout e, la fibre $F^{-1}(e)$ ne peut être infinie et ceci établit le théorème.

Lorsque $F : \Gamma\backslash G \to E$ n'est plus supposé continu, on utilise le théorème de Lusin qui permet de trouver un compact K de $\Gamma\backslash G$ de grande mesure sur lequel F est continu. Le théorème ergodique montre qu'une orbite générique de h_+^t passe une large proportion de temps dans K et ceci permet d'adapter la preuve.

Lorsque $\Gamma\backslash G$ n'est plus supposé compact, on utilise le théorème cité en 2.4 selon lequel une orbite de h_+^t "passe la majorité de son temps" dans un compact de $\Gamma\backslash G$. Ceci permet d'adapter la propriété H et de généraliser la preuve précédente.•

Dans le cas général d'un flot unipotent ϕ^t sur $\Gamma\backslash G$ où G est un groupe de Lie connexe quelconque, les quotients mesurables ont été classés par D. Witte [92] en utilisant les résultats et méthodes de M. Ratner. Le résultat est le suivant : les quotients sont isomorphes à l'action de ϕ^t sur $L_1\backslash G/L_2$ où L_1 est un sous-groupe fermé contenant Γ et L_2 un sous-groupe fermé d'applications affines de $L_1\backslash G$ commutant avec ϕ^t.

3.2. La dérive dans la direction du normalisateur

Fixons un sous-groupe discret Γ de $G = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. Pour la première fois dans cet exposé, nous ne supposons pas que Γ est un réseau. Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié la séparation entre les points $x.h_+^t$ et $y.h_+^t$. Nous étudions maintenant la séparation entre deux orbites dans la direction transverse. Notons $\mathrm{h}_+^\perp$ le sous-espace de $sl(2,\mathbf{R})$ engendré par h_- et g et $p_\perp : sl(2,\mathbf{R}) \to \mathrm{h}_+^\perp$ la projection parallèlement à h_+. Munissons toujours $sl(2,\mathbf{R})$ de la norme sup par rapport à la base h_+, h_-, g. Il existe une constante $C_0 > 0$ ayant la propriété suivante. Soient x et $y = x.\exp \mathrm{w}$ avec $\|\mathrm{w}\| < C_0\mathrm{n}$; on suppose que $\|p_\perp Ad(h_+^t)(\mathrm{w})\| < C_0$ pour tout $t \in [0,T]$. Alors il existe une fonction $\tau\colon [0,2T] \to \mathbf{R}$ avec $\tau(0) \leq 2C_0$ et $0,99 \leq \frac{d\tau}{dt} \leq 1,01$ et une courbe $t \in [0,2T] \mapsto \mathrm{w}_t \in \mathrm{h}_+^\perp$ avec $\|\mathrm{w}_0\| < 2C_0$ telles que $y.h_+^t = x.h_+^{\tau(t)} \exp \mathrm{w}_t$. Si $\exp \mathrm{w} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, un calcul élémentaire montre que $\exp \mathrm{w}_t = \begin{pmatrix} (bt+d)^{-1} & 0 \\ b & bt+d \end{pmatrix}$. Si $\|\mathrm{w}\|$ est petit, c'est-à-dire si $|b|$ et $|d-1|$ sont petits, w_t est donc très proche de $b\mathrm{h}_- - (bt + (d-1))\mathrm{g}$. On choisit C_0 assez petit de sorte que si v_1 et v_2 sont deux vecteurs de $\mathrm{h}_+^\perp$ de norme inférieure à $2C_0$, et si $\exp \mathrm{v}_i = \begin{pmatrix} a_i & c_i \\ b_i & d_i \end{pmatrix}$ $(i = 1,2)$, alors $0,99\|\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2\| \leq \mathrm{Sup}(|a_1 - a_2|, |b_1 - b_2|, |c_1 - c_2|, |d_1 - d_2|) \leq 1,01\|\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2\|$.

Fixons une constante $C < C_0$ et un vecteur w avec $\|\mathrm{w}\| = \rho$ petit devant C. La formule donnant w_t montre d'abord que w_t est constant si $b = 0$. Ce n'est pas une surprise et correspond une fois de plus au fait que le flot géodésique g^s normalise h_+^t. Rappelons que nous notons B le sous-groupe de G engendré par h_+^t et g^s. Si $b \neq 0$, soit t_0 le premier instant positif tel que $\|\mathrm{w}_{t_0}\| = C$. Ce temps t_0 est de l'ordre de $\frac{C}{|b|}$ et $\mathrm{w}_{t_0} - C\mathrm{g}$ ou $\mathrm{w}_{t_0} + C\mathrm{g}$ est de norme inférieure à 2ρ. De plus, $\|\mathrm{w}_t - \mathrm{w}_{t_0}\| \leq 2\eta.C$ si $t \in [(1-\eta)t_0, (1+\eta)t_0]$.

En termes plus vagues, on a établi la propriété suivante. Si deux points x, y sont très proches et ne satisfont pas $y = x.g$ avec g petit élément de B, leurs orbites doivent se séparer transversalement. Dans ce cas, lorsque au temps t_0, cette séparation w_{t_0} atteint une norme appréciable C, le point $y.h_+^{t_0}$ est très proche d'un point du type $z = (x.h_+^\tau).g^{\pm C}$. Enfin les orbites des points $y.h_+^{t_0}$ et z restent à une distance de l'ordre de C pendant un temps linéaire en t_0.

Ici encore, ce type d'énoncé se généralise à tout flot unipotent. La "dérive transverse" entre deux orbites se fait alors dans la direction du *normalisateur* du flot. C'est la *propriété R*, l'une des idées fondamentales des travaux de M. Ratner. Nous allons illustrer son usage dans un théorème que nous préciserons d'ailleurs plus loin, et dont la preuve n'est qu'un cas particulier de [71].

THÉORÈME.— *Soit* Γ *un sous-groupe discret de* $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ *(qui n'est pas nécessairement un réseau). Soit* μ *une mesure de probabilité sur* $\Gamma\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ *invariante et ergodique pour le flot* h_+^t. *Si* μ *n'est pas concentrée sur une orbite périodique, alors* μ *est aussi invariante par le flot géodésique* g^s.

Preuve : Soit $C > 0$ petit et supposons que g^C ne préserve pas μ. Comme g^C normalise le flot h_+^t, la probabilité $g_*^C\,\mu$ est aussi invariante par h_+^t, différente de μ et ergodique. Il en résulte que μ et $g_*^C\,\mu$ sont étrangères, c'est-à-dire qu'il existe un borélien X tel que $\mu(X) = 1$ et $X.g^C \cap X = \emptyset$. Soit $K \subset X$ un compact de μ-mesure supérieure à $1-\varepsilon$ (avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit). Les deux compacts K et $K.g^C$ sont disjoints et il existe donc $\delta > 0$ tel que si $x = y.\exp \mathrm{w}$ avec $\|\mathrm{w} \pm C\mathrm{g}\| \leq \delta$, on ne peut avoir simultanément $x \in K$ et $y \in K$. Choisissons η suffisamment petit pour que $2\eta C \leq \frac{\delta}{2}$.

Pour μ-presque tout x, l'orbite de x passe une proportion de temps supérieure à $1-\varepsilon$ dans K. On peut alors trouver $A_1 \subset \Gamma\backslash G$ de μ-mesure supérieure à $1-\frac{\eta}{10}$ et $T_1 > 0$ tels que si $x \in A_1$ et $T > T_1$, on a

$$\frac{1}{T}\, m(\{t \in [0,T]\,|\, x.h_+^t \in K\}) \geq 1 - 2\varepsilon$$

(où m désigne toujours la mesure de Lebesgue).

On peut ensuite trouver $A \subset \Gamma\backslash G$ de mesure arbitrairement proche de 1 et $T_2 > 0$ tels que si $x \in A$ et $T > T_2$, on a :

$$\frac{1}{T}\, m(\{t \in [0,T]\,|\, x.h_+^t \in A_1\}) \geq 1 - \frac{\eta}{5}.$$

Considérons maintenant deux points x et $y = x.\exp \mathrm{w}$ de A avec $\|r - \mathrm{w}\| = \rho$. Nous allons d'abord montrer que, si ρ est assez petit, $\exp r - \mathrm{w}$ est dans B, c'est-à-dire que $y = x.h_+^t\, g^s$ avec s et t petits. Supposons le contraire et soit t_0 le premier instant positif où $\|\mathrm{w}_{t_0}\| = C$. On a $t_0 \geq 2T_1$ et $t_0 \geq 2\,\frac{T_2}{\eta}$ si ρ est assez petit.

Par définition de A, l'intervalle $[0, t_0]$ contient une proportion supérieure à $\left(1 - \frac{\eta}{5}\right)$ de réels t tels que $x.h_+^t \in A_1$. Soit τ la fonction déjà introduite telle que $y.h_+^t = x.h_+^{\tau(t)} \exp \mathrm{w}_t$. Comme $0,99 \leq \frac{d\tau}{dt} \leq 1,01$, l'intervalle $[0, t_0]$ contient une proportion supérieure à $1 - 1,01\,\frac{\eta}{5} \geq 1 - \frac{\eta}{4}$ de réels t tels que $x.h_+^{\tau(t)} \in A_1$. Il existe donc $t_1 \in [(1-\eta)t_0, t_0]$ tel que l'on ait simultanément $x.h_+^{t_1} \in A_1$ et $y.h_+^{\tau(t_1)} \in A_1$.

À son tour, la définition de A_1 montre qu'il existe $t_2 \in [(1-\eta)t_0, (1+\eta)t_0]$ tel que $\overline{x} = x.h_+^{t_2}$ et $\overline{y} = y.h_+^{\tau(t_2)}$ sont tous les deux dans K. Par ailleurs, nous savons que si $t \in [(1-\eta)t_0, (1+\eta)t_0]$, on a $\|\mathrm{w}_t - \mathrm{w}_{t_0}\| \leq 2\eta C \leq \frac{\delta}{2}$ et $\|\mathrm{w}_{t_0} \pm C\mathrm{g}\| \leq 2\rho$. Si $\rho < \frac{\delta}{4}$, on a donc $\|\mathrm{w}_{t_2} \pm C\mathrm{g}\| \leq \delta$.

Mais ceci contredit la définition de δ selon laquelle si $\overline{x}$ et $\overline{y} = \exp \mathrm{w}_{t_2}$ sont dans K, on a $\|\mathrm{w}_{t_2} \pm C\mathrm{g}\| > \delta$. Nous avons donc bien établi que deux points x et y proches dans A sont du type $y = x.\exp \mathrm{w}$ avec $\exp \mathrm{w} \in B$ proche de l'identité. En particulier, l'une des orbites de B est de μ-mesure non nulle et l'ergodicité montre en fait que μ est concentrée sur une orbite de B dans $\Gamma\backslash G$.

Il reste à montrer que μ est concentrée sur une orbite périodique de h_+^t. Une orbite $x.B$ est du type B/Λ où Λ est un sous-groupe discret de B. Ces sous-groupes discrets de B sont aisés à décrire. Trois cas sont possibles :

i) Λ est trivial. Le flot h_+^t opérant sur B ne peut préserver de probabilité car toutes les orbites de h_+^t tendent vers l'infini dans B.

ii) Λ est engendré par $\begin{pmatrix} \exp(s_0) & t_0 \\ 0 & \exp(s_0) \end{pmatrix}$ avec $s_0 \neq 0$. L'espace homogène B/Λ est un cylindre hyperbolique. Là encore, toutes les orbites de h_+^t dans B/Λ tendent vers l'infini et il n'y a donc aucune probabilité invariante.

iii) Λ est engendré par $\begin{pmatrix} 1 & t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $t_0 \neq 0$. L'espace homogène B/Λ est une pointe où toutes les orbites de h_+^t sont périodiques. Une probabilité invariante et ergodique est donc concentrée sur une orbite périodique.

Ceci achève la preuve du théorème.•

3.3. Classification des probabilités invariantes : cas des réseaux

Le théorème qui suit est dû à S.G. Dani [13-16-17] mais la preuve que nous en présentons s'inspire d'un résultat plus général de M. Ratner [71].

THÉORÈME.— *Soit Γ un réseau de $G = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. La mesure de Haar sur $\Gamma\backslash G$ et les mesures concentrées sur les orbites périodiques sont (à un facteur près) les seules mesures finies sur $\Gamma\backslash G$ invariantes et ergodiques pour le flot horicyclique.*

Esquisse de preuve : Supposons d'abord $\Gamma\backslash G$ compact. Soit μ une mesure de probabilité sur $\Gamma\backslash G$ invariante et ergodique pour h_+^t. Soit λ la mesure de Haar, normalisée pour être une probabilité sur $\Gamma\backslash G$. Si τ_+, τ_- et σ sont trois réels positifs, nous noterons $Q_{\tau_+,\tau_-,\sigma} = \{h_+^{t_+}\, h_-^{t_-}\, g^s \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{R}) \,|\, |t_+| \leq \tau_+, |t_-| \leq \tau_-, |s| \leq \sigma\}$. La compacité de $\Gamma\backslash G$ permet de garantir l'existence de

$\rho > 0$ tel que si τ_+, τ_- et σ sont inférieurs à ρ, la boîte $x.Q_{\tau_+,\tau_-,\sigma}$ est injectivement plongée dans $\Gamma\backslash G$ pour tout x de $\Gamma\backslash G$. Pour simplifier les notations, nous supposerons que $\rho = 2$ convient de sorte que tout arc d'orbite $\{x.h_+^t \,|\, t \in [0,1]\}$ est contenu dans l'intérieur d'une boîte $x.Q_{2,2,2}$.

Soit $Q_0 = x_0.Q_{\tau_+,\tau_-,\sigma}$ l'une de ces boîtes (τ_+, τ_- et $\sigma \leq 2$). Nous allons montrer que $\mu(Q_0) = \lambda(Q_0)$, ce qui établira que $\lambda = \mu$.

Comme h_+^t est ergodique pour λ, on a pour λ-presque tout x :

$$\lim \frac{1}{T} m(\{t \in [0,T] \,|\, x.h_+^t \in Q_0\}) = \lambda(Q_0).$$

Cette convergence est uniforme sur un ensemble de mesure presque totale. Il existe donc $X \subset \Gamma\backslash G$ avec $\lambda(X) \geq 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ étant arbitraire) et T_0 tels que si $x \in X$ et $T > T_0$, on a :

$$(1-\varepsilon)\,\lambda(Q_0) \leq \frac{1}{T} m(\{t \in [0,T] \,|\, x.h_+^t \in Q_0\}) \leq (1+\varepsilon)\lambda(Q_0).$$

Considérons maintenant un point y générique pour *l'autre* mesure μ, c'est-à-dire tel que :

$$\lim \frac{1}{T} m(\{t \in [0,T] \,|\, y.h_+^t \in Q_0\}) = \mu(Q_0).$$

Pour analyser les passages de h_+^t dans Q_0, prenons l'image par le flot géodésique $g^{\mathrm{Log}\,T}$ pour T grand et posons $y_T = y.g^{\mathrm{Log}\,T}$. Ceci a pour effet de compresser l'arc $\{y.h_+^t \mid t \in [0,T]\}$ sur l'arc de longueur 1 $\{y_T.h_+^t \mid t \in [0,1]\}$ et d'envoyer la boîte Q_0 sur $\{x_0.g^s\, h_-^{t_-}\, h_+^{t_+} \mid |s| \leq \sigma\,,\ |t_-| \leq T.\tau_-\,,\ |t_+| \leq \frac{\tau_+}{T}\}$. (Voir la figure 8.)

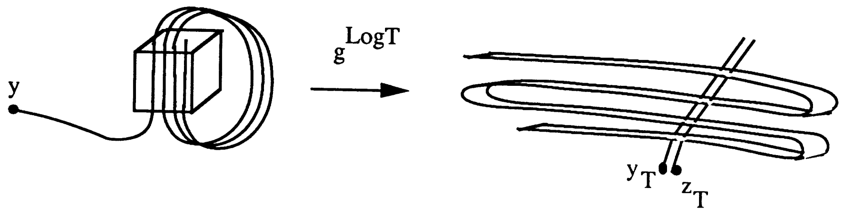

Figure 8

Le flot géodésique préserve λ et on a donc $\lambda(X.g^{\mathrm{Log}\,T}) \geq 1 - \varepsilon$. Par conséquent, si ε est assez petit, une petite boule centrée sur y_T ne peut éviter $X.g^{\mathrm{Log}\,T}$. Soit donc $z \in X$ tel que $z_T = z.g^{\mathrm{Log}\,T}$ et y_T sont voisins. Les segments d'orbites $\{y_T.h_+^t \mid t \in [0,1]\}$ et $\{z_T.h_+^t \mid t \in [0,1]\}$ sont donc très proches et contenus dans une même boîte $y_T.Q_{2,2,2}$. La figure 8 montre que les proportions de temps passés par ces deux morceaux d'orbites dans $Q_0.g^{\mathrm{Log}\,T}$ sont presque égales (et ce n'est pas difficile à justifier). Par définition de z et y, la première de ces deux proportions est proche de $\lambda(Q_0)$ et la seconde de $\mu(Q_0)$. En faisant tendre T vers $+\infty$ et ε vers 0, on établit que $\lambda(Q_0) = \mu(Q_0)$. Ceci termine la preuve lorsque $\Gamma\backslash G$ est compact.

Lorsque $\Gamma\backslash G$ est de volume fini mais non compact, l'existence de $\rho(= 2!)$ n'est plus garantie. La démonstration s'adapte cependant s'il existe une suite T_n tendant vers l'infini telle que y_{T_n} reste dans un compact de $\Gamma\backslash G$. Dans le cas contraire, $y_T = y.g^{\mathrm{Log}\,T}$ quitte tout compact, c'est-à-dire que la géodésique correspondante tend vers une pointe. Nous avons vu que ce phénomène se produit précisément lorsque l'horicycle $y.h_+^t$ est périodique, c'est-à-dire si μ est concentrée sur une orbite périodique.•

3.4. Classification des probabilités invariantes : le cas de covolume infini

Comme nous l'avons déjà indiqué, M. Ratner obtient des résultats valables pour les sous-groupes discrets généraux [72], dont voici un cas particulier.

THÉORÈME.— *Soit Γ un sous-groupe discret de $G = \mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ de covolume infini. Toute mesure de probabilité sur $\Gamma\backslash G$ invariante et ergodique pour le flot horicyclique est concentrée sur une orbite périodique.*

Preuve : Supposons qu'il existe une mesure de probabilité μ invariante et ergodique pour h_+^t sur $\Gamma\backslash G$, non concentrée sur une orbite périodique. Nous allons montrer que ceci est contradictoire avec le fait que le volume de $\Gamma\backslash G$ est infini.

Nous avons vu en 3.2 que μ est aussi invariante par le flot géodésique g^s. Nous affirmons d'abord que μ est aussi ergodique pour g^s. C'est une conséquence du phénomène de Mautner décrit en 1.2 : toute fonction de carré μ-intégrable qui est invariante par g^s est aussi invariante par h_+^t et donc constante μ-presque partout.

L'invariance de μ par le groupe de Lie B entraîne le fait suivant. Si $X \subset \Gamma\backslash G$ est de μ-mesure totale, alors pour μ-presque tout x, la mesure de Haar (de B) de l'ensemble $\{g \in B \,|\, x.g \in X\}$ est totale.

Fixons maintenant une fonction $F : \Gamma\backslash G \to \mathbf{R}$, continue à support compact, positive, d'intégrale 1 par rapport à μ. Posons pour $x \in \Gamma\backslash G$:

$$\overline{F}(x) = \liminf_{S\to\infty} \frac{1}{S} \int_0^S F(x.g^{-s})\, ds.$$

D'après le théorème ergodique, nous savons que $\overline{F}(x) = \int F\, d\mu = 1$ pour x dans un ensemble X de μ-mesure 1. Par ailleurs, il est évident que $\overline{F}$ est constante sur les orbites du flot horicyclique *négatif* h_-^t. Il résulte de l'observation précédente que la réunion des parties $X.h_-^t$ avec $t \in \mathbf{R}$ est de λ-mesure de Haar totale dans $\Gamma\backslash G$. Ainsi $\overline{F}$ est λ-presque partout constante, égale à 1. Le lemme de Fatou donne alors :

$$\lambda(\Gamma\backslash G) = \int_{\Gamma\backslash G} 1\,d\lambda \leq \liminf \int_{\Gamma\backslash G} \left(\frac{1}{S}\int_0^S F(x.g^{-s})\,ds\right) d\lambda(g)$$
$$= \int F\,d\lambda < \infty.$$

C'est la contradiction cherchée qui achève la preuve du théorème.•

3.5. Équirépartition des orbites

Le théorème suivant se réduit au théorème de S.G. Dani et J. Smillie dans le cas des réseaux.

THÉORÈME.— *Soit Γ un sous-groupe discret de $G = \mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$, x un point non périodique pour le flot horicyclique h_+^t et $F : \Gamma\backslash G \to \mathbf{R}$ une fonction continue à support compact. Si T tend vers $+\infty$, la moyenne $\frac{1}{T}\int_0^T F(x.h_+^t)\,dt$ converge :*

i) *vers $\int_{\Gamma\backslash G} F\,d\lambda$ si $\Gamma\backslash G$ est de volume fini (où λ désigne toujours la mesure de Haar normalisée pour être une probabilité)*

ii) *vers 0 si $\Gamma\backslash G$ est de volume infini.*

Esquisse de preuve : Soit $\widehat{V} = V \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandrov de $\Gamma\backslash G$ et $\widehat{h}_+^t$ l'extension de h_+^t à $\widehat{V}$. Soit μ_T la probabilité sur $\widehat{V}$ définie par : $\int F\,d\mu_T = \frac{1}{T}\int_0^T F(x.\widehat{h}_+^t)\,dt$. Par compacité de l'espace des probabilités sur $\widehat{V}$, il existe une limite faible ν d'une suite μ_{T_n} (avec T_n tendant vers $+\infty$).

Plaçons-nous d'abord dans le cas où Γ est un réseau. Il s'agit alors de démontrer que $\nu = \lambda$ car ceci entraîne que μ_T converge faiblement vers λ. Nous affirmons d'abord que $\nu(\{\infty\}) = 0$. Ceci résulte du théorème (cité en 2.4) selon lequel un horicycle passe une faible proportion de temps hors d'un compact. Ainsi, ν est concentrée sur $\Gamma\backslash G$ et c'est, bien sûr, une probabilité invariante par h_+^t.

Nous avons classé les probabilités ergodiques invariantes en 3.3. Pour terminer la preuve, dans le cas des réseaux, il s'agit donc de montrer que la ν-mesure de la réunion des orbites périodiques est nulle. Nous ne ferons qu'esquisser cette preuve qui utilise, une fois de plus, les propriétés des transvections. Soit γ une orbite périodique, $A_{\alpha,\beta}$ l'anneau réunion des orbites $\gamma.g^s$ avec $\alpha \leq s \leq \beta$, $B^{\tau}_{\alpha,\beta}$ l'épaississement $\{y.h^t_- \mid y \in A_{\alpha,\beta}, |t| \leq \tau\}$ et enfin $S^{\tau}_{\alpha,\beta} = \{y_0.g^s h^t_-, \alpha \leq s \leq \beta, |t| \leq \tau\}$ où y_0 est l'un des points de γ. L'application de premier retour de h^t_+ sur la transversale $S^{\tau}_{\alpha,\beta}$ est une transvection. Soient $[\alpha_1, \beta_1]$ et $[\alpha_2, \beta_2]$ deux intervalles disjoints de même longueur contenus dans $[\alpha, \beta]$. Il est clair que si τ est petit, un long morceau d'orbite passe à peu près le même temps dans $B^{\tau}_{\alpha_1,\beta_1}$ et $B^{\tau}_{\alpha_2,\beta_2}$ (voir figure 9). Faisant tendre τ vers 0, on obtient que $\nu(A_{\alpha_1,\beta_1}) = \nu(A_{\alpha_2,\beta_2})$. Par conséquent, tous les anneaux $A_{n,n+1}$ ($n \in \mathbf{Z}$) ont même ν-mesure et sont disjoints deux à deux. Puisque ν est de masse totale finie, nous avons bien établi que la ν-mesure de la réunion des orbites périodiques de h^t_+ est nulle.

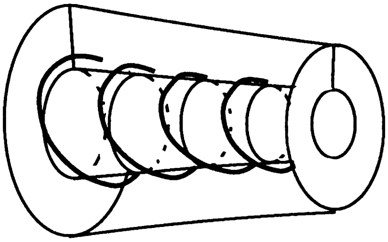

Figure 9

Lorsque le volume de $\Gamma\backslash G$ est infini, il s'agit au contraire de montrer que $\nu(\{\infty\}) = 1$. La preuve précédente montre encore que la ν-mesure de la réunion des orbites périodiques est nulle. La classification des probabilités invariantes faite en 3.4 montre donc bien que ν ne peut que se concentrer sur le point ∞.●

3.6. Quelques indications sur le cas général

La classification des mesures invariantes μ par un groupe unipotent H sur un espace homogène de volume fini $\Gamma\backslash G$ utilise toutes les méthodes décrites ci-dessus. Comme indiqué dans l'introduction, nous ne pouvons pas ici donner de détails sur le tour de force que représente cette preuve.

Nous nous contenterons de quelques observations.

L'ensemble des éléments g de G dont l'action à droite préserve μ est un sous-groupe fermé Λ de G et il s'agit de démontrer que μ est concentrée sur une orbite de Λ.

Si G est résoluble, $\Lambda \cap [G, G]$ est unipotent. C'est en appliquant une propriété R adaptée à ce sous-groupe que M. Ratner démontre son théorème dans le cas résoluble [71].

Si G est semi-simple et si ϕ^t est un sous-groupe unipotent à un paramètre, il se trouve qu'il est possible de plonger une copie de $sl(2, \mathbf{R})$ dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ en envoyant le flot horicyclique sur ϕ^t. On dispose donc d'un "flot géodésique" g^s dans G qui permet une généralisation de la plupart des techniques décrites plus haut. Bien sûr, la situation est compliquée par le fait que g^s n'est pas de type Anosov car il peut posséder un centralisateur non trivial [72-73].

Pour déduire son résultat sur l'équirépartition et les adhérences des orbites, M. Ratner utilise une méthode dans l'esprit de 3.5 bien que beaucoup plus élaborée [74].

4. TROIS APPLICATIONS

Dans ce paragraphe, nous avons choisi trois exemples d'utilisation des résultats de M. Ratner.

4.1. Rigidité des translations unipotentes

Soit ϕ^t un sous-groupe unipotent à un paramètre d'un groupe de Lie simple G et Γ un réseau de G. Les invariants ergodiques classiques du flot ϕ^t sur $\Gamma\backslash G$ (équipé de la mesure de Haar) ne sont pas très intéressants : entropie nulle et spectre de Lebesgue dénombrable. Il est remarquable que les théorèmes de M. Ratner permettent de classer tous les isomorphismes mesurables entre ces flots. Le théorème suivant est dû à D. Witte [89] ; il fait suite au cas particulier de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$, dû à M. Ratner [67-68]. Pour simplifier, nous nous limiterons au cas des groupes de Lie simples mais on consultera [89] et [73] pour les énoncés généraux.

THÉORÈME.— *Soit* ϕ_i^t *un sous-groupe unipotent à un paramètre d'un groupe de Lie simplement connexe* G_i $(i = 1, 2)$ *et* Γ_i *un réseau de* G_i. *Soit* $F : \Gamma_1 \backslash G_1 \to \Gamma_2 \backslash G_2$ *une conjugaison mesurable entre* ϕ_1^t *et* ϕ_2^t *envoyant la mesure de Haar* λ_1 *sur* λ_2. *Alors, il existe un isomorphisme* α *de* G_1 *sur* G_2 *envoyant* Γ_1 *sur* Γ_2 *et* ϕ_1^t *sur* ϕ_2^t *tel que* $F(\Gamma_1.g_1) = \Gamma_2.\alpha(g_2)$ *pour* λ_1*-presque tout* g_1.

On peut en fait dire beaucoup plus. Un *lien* (joining) entre ϕ_1^t et ϕ_2^t est, par définition, une mesure de probabilité μ sur le produit $\Gamma_1 \backslash G_1 \times \Gamma_2 \backslash G_2$ invariante par le flot diagonal $(\phi_1^t \times \phi_2^t)$ et telle que $\mu(\pi_i^{-1}(X)) = \lambda_i(X)$ où π_i est la projection sur le $i^{\text{ième}}$ facteur et où X est un borélien de $\Gamma_i \backslash G_i$ $(i = 1, 2)$. La mesure produit des deux mesures de Haar $\lambda_1 \otimes \lambda_2$ est appelée le lien trivial. Si $F : \Gamma_1 \backslash G_1 \to \Gamma_2 \backslash G_2$ est une conjugaison mesurable entre ϕ_1^t et ϕ_2^t envoyant λ_1 sur λ_2, il est clair que l'image de λ_1 par $\mathrm{id} \times F : \Gamma_2 \backslash G_1 \to \Gamma_1 \backslash G_1 \times \Gamma_2 \backslash G_2$ est un lien non trivial. Il n'est pas difficile d'en déduire que le théorème précédent n'est qu'un cas particulier du suivant (où nous nous limitons au cas des groupes simples).

THÉORÈME.— *On garde les notations du théorème précédent. Soit* μ *un lien ergodique non trivial entre* ϕ_1^t *et* ϕ_2^t. *Alors, il existe un isomorphisme* $\alpha : G_1 \to G_2$ *et un réseau* Γ *de* G_1 *contenu (avec indice fini) dans* Γ_1 *et* $\alpha^{-1}(\Gamma_2)$ *tels que* μ *soit l'image de la mesure de Haar de* $\Gamma \backslash G_1$ *par l'application* $\mathrm{id} \times \alpha : \Gamma \backslash G_1 \to \Gamma_1 \backslash G_1 \times \Gamma_2 \backslash G_2$.

Preuve : D'après le théorème de M. Ratner, un lien ergodique est une mesure homogène sur $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \backslash G_1 \times G_2$, provenant de la mesure de Haar d'un sous-groupe fermé H de $G_1 \times G_2$. Puisqu'il s'agit d'un lien, la projection de H sur chaque facteur G_1 et G_2 est surjective. Par simplicité de G_1 et G_2, on peut affirmer que H est le graphe d'un isomorphisme entre G_1 et G_2, à moins que $H = G_1 \times G_2$. Ce dernier cas est bien sûr exclu si μ est non trivial.•

Signalons deux généralisations de ces théorèmes. Tout d'abord, les conjugaisons mesurables entre flots horicycliques en courbure négative variable sont classés dans [33] (que l'on complétera par [61]). D'autre part, [47] (complété par [61]) étudie les cas d'équivalences topologiques entre flots horicycliques, c'est-à-dire d'homéomorphismes envoyant orbites sur orbites sans en respecter les paramétrages. Pour des résultats analogues en dimension supérieure, on consultera [34] et [91].

4.2. Valeurs des formes quadratiques sur les points entiers

Le théorème d'approximation diophantienne cité dans l'introduction a été conjecturé par A. Oppenheim en 1929 pour $n \geq 5$ [57-58], puis par H. Davenport pour $n \geq 3$ en 1946 [29]. Il a été démontré pour $n \geq 21$ par B.J. Birch, H. Davenport et H. Ridout. On trouvera dans [3], [29], [43], [58-59], [87-88] d'autres résultats préliminaires, tous obtenus par des méthodes différentes de celles que nous allons décrire. Nous allons montrer ici comment les résultats de M. Ratner permettent d'obtenir un énoncé beaucoup plus fort. La déduction de cette forme forte à partir de la conjecture de M.S. Raghunathan est due à S.G. Dani et G.A. Margulis. Ces derniers démontrent d'ailleurs dans [24-25-26] le cas particulier $n = 3$ du théorème suivant. Il semble aussi que la conjecture de A. Oppenheim ait été l'une des motivations qui ont conduit M.S. Raghunathan à sa conjecture.

THÉORÈME.— *Soit Q une forme quadratique non dégénérée et indéfinie sur $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 3)$ et $f(x,y) = \frac{1}{4}(Q(x+y) - Q(x-y))$ la forme bilinéaire associée. On suppose que Q n'est pas multiple d'une forme rationnelle. Soit a_{ij}, $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq n-1$ des réels choisis de telle sorte qu'il existe des vecteurs $w_1, w_2, \cdots, w_{n-1}$ de $\mathbf{R}^n$ avec $a_{ij} = f(w_i, w_j)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $v_1, \cdots, v_{n-1}$ de $\mathbf{Z}^n$ tels que, pour tout i,j : $|f(v_i,v_j) - a_{ij}| < \varepsilon$. On peut de plus supposer que le $(n-1)$-uplet $(v_1, \cdots, v_{n-1})$ est primitif dans le sens où il peut être complété en une base de $\mathbf{Z}^n$.*

Commençons par exprimer ces problèmes diophantiens en termes de dynamique sur les espaces homogènes.

Fixons deux entiers positifs p, q tels que $p + q = n$ et notons $\Phi_{p,q}$ l'ensemble des formes quadratiques sur $\mathbf{R}^n$ de signature (p,q). Soit Q_0 la forme $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2$ et $O(p,q)$ son groupe orthogonal. Pour simplifier les notations, nous supposerons n impair de sorte que toute forme non dégénérée est multiple d'une unique forme de discriminant $+1$. Le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ opère transitivement à droite sur $\Phi_{p,q}$ par $Q.g(w) =$

$Q(g^{-1}(w))$ et $\Phi_{p,q}$ s'identifie donc à $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})/O(p,q)$.

Deux formes Q et Q' de $\Phi_{p,q}$ sont *équivalentes* s'il existe $c \in \mathbf{R}$ et $g \in \mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})$ tels que, pour tout w de $\mathbf{R}^n$, on a : $Q'(w) = c^2 Q(g(w))$. Il est clair que Q et Q' prennent alors, à un facteur multiplicatif près, les mêmes valeurs sur $\mathbf{Z}^n$.

Nous obtenons alors une bijection naturelle entre :

i) les *classes d'équivalence de formes* de $\Phi_{p,q}$ et,

ii) les *doubles classes* de $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})\backslash\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})/\mathrm{SO}(p,q)$ ou, de manière équivalente, les *orbites* de $\mathrm{SO}(p,q)$ sur $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})\backslash\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$.

Le théorème de M. Ratner va permettre de décrire les adhérences des orbites de $\mathrm{SO}(p,q)$. Il suffira alors de traduire ces résultats en termes de formes quadratiques.

Si $n \geq 3$ et $p,q \geq 1$, $\mathrm{SO}(p,q)$ contient $\mathrm{SO}(2,1)$, localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$, et donc des éléments unipotents. Ces éléments unipotents engendrent la composante neutre $\mathrm{SO}_0(p,q)$ de $\mathrm{SO}(p,q)$, et on peut donc appliquer le théorème de M. Ratner à $\mathrm{SO}_0(p,q)$. Comme $\mathrm{SO}_0(p,q)$ est d'indice 2 dans $\mathrm{SO}(p,q)$, on en déduit facilement que les adhérences des orbites de $\mathrm{SO}(p,q)$ dans $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})\backslash\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$ sont les orbites par un sous-groupe fermé intermédiaire entre $\mathrm{SO}(p,q)$ et $\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$. Le lemme suivant est laissé en exercice au lecteur. Pour des énoncés analogues, mais beaucoup plus généraux, on peut consulter [30-31].

Lemme.— Il n'existe aucun sous-groupe fermé strictement compris entre $\mathrm{SO}(p,q)$ *et* $\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$.

On obtient donc immédiatement :

PROPOSITION.— *Une orbite de* $\mathrm{SO}(p,q)$ *dans* $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})\backslash\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$ *est fermée ou dense.*

Il s'agit maintenant d'interpréter en termes de formes quadratiques la densité ou la fermeture des orbites correspondantes. C'est le but des deux propositions qui suivent et qui achèvent la preuve du théorème.

PROPOSITION.— *Soit Q une forme quadratique dont l'orbite associée est dense. Alors Q satisfait à la conclusion du théorème précédent.*

Preuve : La densité de l'orbite revient à la densité de $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z}).\mathrm{SO}(Q)$ dans $\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$ (où, bien sûr, $\mathrm{SO}(Q)$ désigne le groupe spécial orthogonal de Q). Soit $(e_1,\cdots,e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et g un élément de $\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$ tel que $g(e_i)=w_i$ pour $i=1,\cdots,n-1$. Soit $h_\alpha\in\mathrm{SO}(Q)$ et $\gamma_\alpha\in\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})$ deux suites telles que $\gamma_\alpha.h_\alpha$ converge, lorsque α tend vers $+\infty$, vers g^{-1}. Soit $v_i^\alpha=\gamma_\alpha^{-1}(e_i)$ $(i=1,\cdots,n-1)$. Il est clair que $(v_1^\alpha,\cdots,v_{n-1}^\alpha)$ est un $(n-1)$-uplet primitif de $\mathbf{Z}^n$ et que :

$$f(v_i^\alpha\,,\,v_j^\alpha)=f\big(h_\alpha^{-1}\,\gamma_\alpha^{-1}(e_i)\,,\,h_\alpha^{-1}\,\gamma_\alpha^{-1}(e_j)\underset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} f(g(e_i)\,,\,g(e_j))=a_{ij}.\ \bullet$$

La seconde proposition affirme plus que nécessaire. Nous supposons toujours que p et q sont non nuls.

PROPOSITION.— *Une orbite de* $\mathrm{SO}(p,q)$ *est fermée si et seulement si la (classe d'équivalence de) forme quadratique correspondante est multiple d'une forme rationnelle ; elle est compacte si et seulement si elle est multiple d'une forme rationnelle ne représentant pas zéro (dans* $\mathbf{Q}^n$*).*

Preuve : L'une des directions (celle que nous n'utilisons pas) est un cas particulier d'un théorème classique de A. Borel et Harish-Chandra [4]. Si Q est une forme rationnelle, $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})\backslash\mathrm{SO}(Q)$ est fermé dans $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})\backslash\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$ et compact si Q ne représente pas zéro.

Soit Q tel que $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z}).\mathrm{SO}(Q)$ est fermé dans $\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$. Nous allons montrer que Q est multiple d'une forme rationnelle en suivant [27] où une partie de la preuve est attribuée à A. Borel. Soit $\Gamma=\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})\cap\mathrm{SO}(Q)$. La méthode consiste à prouver que Q et ses multiples sont les seules formes dont le groupe orthogonal contient Γ. Ceci montrera que la droite engendrée par Q dans l'espace des formes quadratiques a l'équation entière $\{Q'\mid Q'.\gamma=Q'$ pour tout γ de $\Gamma\}$ et donc que Q est multiple d'une forme rationnelle. Fixons donc une forme Q' telle que $\Gamma\subset\mathrm{SO}(Q')$. Soit ϕ^t un sous-groupe unipotent à un paramètre de $\mathrm{SO}_0(Q)$ (où $\mathrm{SO}_0(Q)$ est la composante neutre de $\mathrm{SO}(Q)$). Si nous montrons que ϕ^t est constitué d'isométries de Q', nous en déduirons que $\mathrm{SO}_0(Q)\subset\mathrm{SO}(Q')$, car ces sous-groupes engendrent $\mathrm{SO}_0(Q)$. Il sera alors immédiat que $\mathrm{SO}(Q)=\mathrm{SO}(Q')$ et que Q et Q' sont proportionnelles.

Soit $w \in \mathbf{R}^n$. La fonction $F : g \in \mathrm{SO}(Q) \mapsto Q'(g(w)) \in \mathbf{R}$ passe au quotient en $F : \Gamma\backslash\mathrm{SO}(Q) \to \mathbf{R}$. Nous avons déjà cité le théorème de G.A. Margulis suivant lequel une orbite de ϕ^t ne peut tendre vers l'infini dans $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})\backslash\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$. Il existe donc une suite t_n tendant vers l'infini telle que $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z}).\phi^{t_n}$ reste dans un compact K de $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})\backslash\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$. Puisque nous faisons l'hypothèse que l'orbite de Q, isomorphe à $\Gamma\backslash\mathrm{SO}(Q)$ est fermée dans $\mathrm{SL}(n,\mathbf{Z})\backslash\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$, elle intersecte le compact K sur un compact. La fonction $t \mapsto F(\phi^t) = Q'(\phi^t(w))$ prend donc des valeurs bornées sur cette suite t_n. Puisque, par ailleurs, cette fonction est polynomiale, elle est constante. Ainsi, on a $Q'(\phi^t(w)) = Q'(w)$ pour tout t, c'est-à-dire que ϕ^t est contenu dans $\mathrm{SO}(Q')$ comme nous l'avions annoncé. Ceci achève la preuve de la proposition et donc du théorème •.

Lorsque $n = 2$, le théorème ne s'applique pas car $\mathrm{SO}(1,1) \subset \mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ ne contient que des éléments semi-simples. La dynamique de $\mathrm{SO}(1,1)$ sur $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ est celle du flot géodésique de l'orbifold modulaire pour laquelle nous avons déjà dit qu'il existe des orbites qui ne sont ni périodiques ni denses. Concrètement, soit θ un nombre de type constant, c'est-à-dire vérifiant les inégalités suivantes, pour un certain $C > 0$:

$$\left|\theta - \frac{y}{x}\right| \geq C\, x^{-2} \text{ pour tout } (x,y) \in \mathbf{Z}^2 - (0,0).$$

Par exemple, les nombres irrationnels quadratiques sur $\mathbf{Q}$ sont de type constant. La forme quadratique indéfinie et non dégénérée Q définie sur $\mathbf{R}^2$ par $Q(x,y) = y^2 - \theta^2 x^2$ n'est pas multiple d'une forme rationnelle si θ^2 est irrationnel. Il est clair cependant que $Q(x,y) = x^2\left(\frac{y}{x} - \theta\right)\left(\frac{y}{x} + \theta\right)$ ne peut être arbitrairement petit si x et y sont entiers non nuls.

Nous suivons maintenant [54] pour décrire plus précisément les valeurs des formes quadratiques indéfinies et non dégénérées Q sur les points entiers $\mathbf{Z}^n$. Pour une telle forme, notons $\nu(Q) = \inf\left\{|Q(v)| \,|\, v \in \mathbf{Z}^n - \{0\}\right\}$, $\mathrm{disc}(Q)$ le discriminant de Q et $M(Q) = \nu(Q)|\,|\mathrm{disc}(Q)|^{-\frac{1}{n}}$, de sorte que $M(Q)$ est invariant par équivalence de formes. Soit M_n l'ensemble des valeurs prises par $M(Q)$ lorsque Q parcourt les formes non dégénérées et indéfinies de $\mathbf{R}^n$. Pour tout $n \geq 2$, c'est un compact de $\mathbf{R}$.

L'étude de M_2 est fascinante. Voir en particulier [79] et le chapitre de [10] consacré à l'intersection de M_2 avec $]\frac{4}{9}, \frac{4}{5}]$. On sait aussi que M_2 contient un intervalle $[0, \varepsilon]$ ([10], [78]).

Il résulte du théorème de G.A. Margulis que si Q n'est pas multiple d'une forme rationnelle, on a $M(Q) = 0$. Si Q est rationnelle et si $n \geq 5$, le fameux théorème de Meyer affirme que Q représente zéro non trivialement et donc que $M(Q) = 0$ [11]. Ainsi, $M_n = \{0\}$ si $n \geq 5$. Le théorème suivant a été démontré par J.W.S. Cassels et H.P.F. Swinnerton-Dyer conditionnellement à la conjecture de A. Oppenheim [12] et, sous une forme plus forte par L. Vulakh [86]. Nous en présentons ici une preuve légèrement différente de celle de G.A. Margulis [54].

THÉORÈME.— *Si $n = 3$ ou 4 et $\varepsilon > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de classes d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées et indéfinies Q sur $\mathbf{R}^n$ telles que $M(Q) \geq \varepsilon$.*

Esquisse de preuve : Nous savons qu'une forme indéfinie Q telle que $M(Q) > 0$ est multiple d'une forme rationnelle ne représentant pas zéro et correspond donc à une orbite compacte pour l'action de $\mathrm{SO}(p,q)$ sur $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})\backslash\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$. Supposons donc par l'absurde qu'il existe une infinité de formes Q_i non équivalentes deux à deux, de même signature (p, q), telles que $M(Q_i) \geq \varepsilon$. On obtient ainsi une infinité d'orbites compactes connexes O_i pour l'action de la composante neutre $\mathrm{SO}_0(p,q)$ de $\mathrm{SO}(p,q)$ (qui est d'indice 2). On vérifie (critère de Mahler) que la condition $M(Q_i) \geq \varepsilon$ signifie que tous les compacts O_i sont contenus dans un même compact de $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z})\backslash\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$. Soit O_∞ une limite (au sens de Hausdorff) des compacts O_i. Il est clair que O_∞ est un compact connexe, réunion d'orbites de $\mathrm{SO}_0(p, q)$. Comme chaque orbite est dense ou fermée, O_∞ est nécessairement une réunion d'orbites compactes, en nombre dénombrable car il n'existe qu'un nombre dénombrable de formes rationnelles. Il est alors facile de se convaincre que la connexité de O_∞ montre que O_∞ se réduit à une seule orbite compacte. Nous devons donc montrer qu'une suite d'orbites compactes différentes ne peut converger vers une orbite compacte O_∞.

Soit $\mathcal{N}$ un supplémentaire de l'algèbre de Lie $so(p, q)$ dans $sl(n, \mathbf{R})$ invariant par la représentation adjointe de $SO_0(p,q)$. Ceci détermine une trivialisation $SO_0(p,q)$-équivariante de fibré normal aux orbites de $SO_0(p,q)$. Si i est assez grand, O_i reste dans un voisinage tubulaire de O_∞ et il existe donc une petite fonction $u : O_i \to \mathcal{N}$ telle que $O_\infty = \{x.\exp\, u(x) \mid x \in O_i\}$. Soit $t \in [0,1]$. Alors, il est clair que $O^t_\infty = \{x.\exp\, tu(x) \mid x \in O_i\}$ est aussi une orbite compacte de $SO_0(p,q)$. Ceci contredit la dénombrabilité de l'ensemble des orbites compactes et achève la preuve. •

4.3. Laminations géodésiques

Soit H^n l'espace hyperbolique de dimension $n \geq 2$. Il est bien connu que les sous-variétés totalement géodésiques et complètes sont isométriques à H^p pour $0 \leq p \leq n$. Soit Rep(H^n) le fibré des repères orthonormés directs de fibré tangent à H^n ; c'est un espace principal homogène sous l'action du groupe des isométries directes de H^n, isomorphe à $SO_0(n,1)$.

Soit maintenant V une variété riemannienne complète, à courbure -1, et de volume fini. Alors V est isométrique au quotient de H^n par un réseau Γ de $SO_0(n,1)$. Le quotient $\Gamma\backslash SO_0(n,1)$ est alors identifié au fibré Rep(V) des repères de V. L'action de $SO_0(p,1)\times SO(n-p) \subset SO_0(n,1)$ sur $\Gamma\backslash SO_0(n,1) \simeq$ Rep(V) a pour orbites des sous-variétés dont les projections dans V sont précisément les images des immersions isométriques de H^p dans V. Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème de M. Ratner dès que $p > 1$. Nous ne donnerons que le résultat obtenu par N. Shah avec cette méthode [80] :

THÉORÈME.— *Soit V une variété riemannienne complète de dimension n, de volume fini et à courbure -1. Soit $i : H^p \to V$ une immersion isométrique avec $p > 1$. Alors l'adhérence de $i(H^p)$ dans V est une sous-variété W de V totalement géodésique, de dimension $\geq p$. De plus, les p-repères orthonormés tangents à $i(H^p)$ sont denses dans les p-repères orthonormés de V tangents à W.*

Rappelons qu'une *lamination géodésique* $\mathcal{L}$ de dimension p de V est un fermé qui est une réunion disjointe de sous-variétés de dimension p, injectivement immergées dans V, complètes, et totalement géodésiques, appelées feuilles. On suppose aussi que les p-repères tangents aux feuilles de $\mathcal{L}$ forment un fermé dans le fibré des p-repères de V. Une lamination est triviale si toutes ses feuilles sont fermées (elles sont alors en nombre fini). Le rôle fondamental des laminations géodésiques de dimension 1 des surfaces a été révélé par W. Thurston. Il contraste avec le corollaire suivant :

COROLLAIRE.— *Toute lamination géodésique de dimension $p \geq 2$ d'une variété hyperbolique V de volume fini est triviale. En particulier, il n'existe pas, pour $1 < p <$ dim V, de feuilletage de classe C^0 dont toutes les feuilles sont totalement géodésiques.*

On consultera [93] pour des généralisations partielles au cas de la courbure variable. La question de l'existence de feuilletages de dimension 1 et de classe C^0 dont les feuilles sont des géodésiques de V est ouverte bien que l'on sache qu'un tel feuilletage ne peut être de classe C^1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.V. ANOSOV - *Geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature*, Trudy Mat. Inst. Steklova, **90** (1967).

[2] L. AUSLANDER, L. GREEN and F. HAHN - *Flows on homogeneous spaces*, Ann. of Math. Studies, Princeton **53** (1963).

[3] R.C. BAKER, H.P. SCHLICKEWEY - *Indefinite quadratic forms*, Proc. London Math. Soc. **54** (1987).

[4] A. BOREL - *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann, Paris (1969).

[5] A. BOREL et G. PRASAD - *Valeurs de formes quadratiques aux points entiers*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I **307** (1988), 217-220.

[6] R. BOWEN - *Periodic orbits for hyperbolic flows*, Amer. J. Math (1972), 1-30.

[7] R. BOWEN - *Weak mixing and unique ergodicity on homogeneous spaces*, Israel J. Math **23** (1976), 267-273.

[8] R. BOWEN and B. MARCUS - *Unique ergodicity of horospherical foliations*, Israel J. Math **26** (1977), 43-67.

[9] J. BREZIN and C. MOORE - *Flows on homogeneous spaces : a new*

look, Amer. J. Math. **103** (1981), 571-613.

[10] J.W.S. CASSELS - *An introduction to diophantine approximations*, Cambridge University Press (1957).

[11] J.W.S. CASSELS - *Rational quadratic forms*, Academic Press, London-New York (1978).

[12] J.W.S. CASSELS and H.P.F. SWINNERTON-DYER - *On the product of three homogeneous linear forms and indefinite ternary quadratic forms*, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, **248** (1955), 73-96.

[13] S.G. DANI - *Invariant measures of horospherical flows on non compact homogeneous spaces*, Invent. Math. **47** (1978), 101-138.

[14] S.G. DANI - *On invariant measures, minimal sets and a lemma of Margulis*, Invent. Math. **51** (1979), 239-260.

[15] S.G. DANI - *Dynamics of the horocycle flow*, bullet. A.M.S. **3** (1980), 1037-1039.

[16] S.G. DANI - *Invariant measures and minimal sets of horospherical flows*, Invent. Math. **64** (1981), 357-385.

[17] S.G. DANI - *On uniformly distributed orbits of certain horocyclic flows*, Ergodic theory and dynamical systems **2** (1982), 139-158.

[18] S.G. DANI - *On orbits of unipotent flows on homogeneous spaces*, Ergodic theory and dynamical systems **4** (1984), 25-34.

[19] S.G. DANI - *Dynamics of flows on homogeneous spaces : a survey*, Proceed. of Colloquio de sistemas dinamicos (Guanajuato, 1983), Aportaciones Mat. **1** (1985), 1-30.

[20] S.G. DANI - *Divergent trajectories of flows on homogeneous spaces and diophantine approximation*, J. Reine Angew. Math. **359** (1985), 55-89.

[21] S.G. DANI - *Orbits of horospherical flows*, Duke Math. Journal **53** (1986), 177-188.

[22] S.G. DANI - *On orbits of unipotent flows on homogeneous spaces* II, Ergodic theory and dynamical systems **6** (1986), 167-182.

[23] S.G. DANI - *Dense orbits of horospherical flows*, dynamical systems and ergodic theory, Banach center publications, volume **23**, Polish Scientific Publishers, Warsaw (1989).

[24] S.G. DANI and G.A. MARGULIS - *Values of quadratic forms at primitive integral points*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, **308** (1989), 199-203.

[25] S.G. DANI and G.A. MARGULIS - *Values of quadratic forms at primitive integral points*, Invent. Math. **98** (1989), 405-424.

[26] S.G. DANI and G.A. MARGULIS - *Orbit closures of generic unipotent flows on homogeneous spaces of* $\mathrm{SL}(3,\mathbf{R})$, Math. Ann. **286** (1990), 101-128.

[27] S.G. DANI and G.A. MARGULIS - *Values of quadratic forms at integral points : an elementary approach,* L'enseignement mathématique **36** (1990), 143-174.

[28] S.G. DANI and J. SMILLIE - *Uniform distribution of horocyclic orbits for Fuchsian groups*, Duke Math. Journal **51** (1984), 185-194.

[29] H. DAVENPORT and H. HEILBRONN - *On indefinite quadratic in five variables*, J. London Math. Soc. **21** (1946),, 185-193.

[30] E.B. DYNKIN - *Semi-simple subalgebras of semi-simple Lie algebras*, A.M.S. Transl. (Series 2) **6** (1957), 111-244

[31] E.B. DYNKIN - *Maximal subgroups of the classical groups*, A.M.S. Transl. (Series 2) **6** (1957), 245-378.

[32] R. ELLIS and W. PERRIZO - *Unique ergodicity of flows on homogeneous spaces*, Israel J. Math. **29** (1978), 276-284.

[33] J. FELDMAN and D. ORNSTEIN - *Semirigidity of horocycle flows over compact surfaces of variable negative curvature*, Ergodic theory and dynamical systems **7** (1987), 49-72.

[34] L. FLAMINO - *An extension of Ratner's rigidity theorem to n-dimensional hyperbolic space*, Ergodic theory and dynamical systems **7** (1987), 73-92.

[35] H. FURSTENBERG - *Strict ergodicity and transformations of the torus*, Amer. J. Math. **83** (1961), 573-601.

[36] H. FURSTENBERG - *The structure of distal flows*, Amer. J. Math. **85** (1963), 477-515.

[37] H. FURSTENBERG - *The unique ergodicity of the horocyclic flow*, in Recent Advances in Topical Dynamics, 95-115, Springer (1972).

[38] G. HEDLUND - *Fuchsian groups and transitive horocycles*, Duke Math. Journal **2** (1936), 530-542.

[39] G. HEDLUND - *Dynamics of geodesic flows*, bullet. of the A.M.S. **45** (1939), 241-260.

[40] G. HEDLUND - *Fuchsian groups and mixtures*, Ann. of Math. **40** (1939), 370-383.

[41] E. HOPF - *Fuchsian groups and ergodic theory*, Trans. A.M.S. **39** (1936), 299-314.

[42] E. HOPF - *Statistik der Geodätische Linien Manigfaltigkeiten Negativer Krümmung*, Ber. Voch. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig **91** (1939), 261-304.

[43] H. IWANIEC - *On indefinite quadratic forms in four variables*, Acta Arith. **33** (1977), 209-229.

[44] E. LESIGNE - *Théorèmes ergodiques pour une translation sur une nil-variété*, Ergodic theory and dynamical systems **9** (1989), 115-126.

[45] E. LESIGNE - *Sur une nil-variété, les parties minimales associées à une translation sont uniquement ergodiques*, Ergodic theory and dynamical systems **11** (1991), 379-391.

[46] B. MARCUS - *Unique ergodicity of the horocyclic flow : variable curvature case*, Israel J. of Math. **21** (1975), 133-144.

[47] B. MARCUS - *Topological conjugacy of horocycle flows*, Amer. J. Math. **105** (1983), 623-632.

[48] G.A. MARGULIS - *On the action of unipotent groups in the space of lattices*, Proc. of the summer school on group representations, Bolyai Janos Math. Soc., Budapest (1971), 365-370.

[49] G.A. MARGULIS - *Lie groups and ergodic theory*, in Avramov, L.L. (eds) Algebra, some current trends, Proceed. Varna 1986, Springer Lecture Notes in Math. **1352**, 130-146.

[50] G.A. MARGULIS - *Formes quadratiques indéfinies et flots unipotents sur les espaces homogènes*, C.R. Acad. Sci., Série I, **304** (1987), 249-253.

[51] G.A. MARGULIS - *Indefinite quadratic forms and unipotent flows on homogeneous spaces*, Banach center publications, volume **23**, Polish Scientific Publishers, Warsaw (1989).

[52] G.A. MARGULIS - *Discrete subgroups and ergodic theory*, Symposium in honour of A. Selberg, Number theory, trace formulas and discrete

groups, Academic Press (1989), 377-398.

[53] G.A. MARGULIS - *Compactnes of minimal closed invariant sets of actions of unipotent groups*, Geometria Dedicata **37** (1991), 1-9.

[54] G.A. MARGULIS - *Orbits of group actions and values of quadratic forms at integral points*, Preprint IHES.

[55] C. MOORE - *The Mautner phenomenon for general unitary representations*, Pacific J. Math. **86** (1980), 155-169.

[56] M. MORSE - *Recurrent geodesics on a surface of negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **22** (1921), 84-100

[57] A. OPPENHEIM - *The minima of indefinite quaternary quadratic forms of signature 0*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **15** (1929), 724-727.

[58] A. OPPENHEIM - *The minima of indefinite quaternary quadratic forms*, Ann. of Math. **32** (1931), 271-298.

[59] A. OPPENHEIM - *Values of quadratic forms*, I, II, Quart. J. Math., Oxford Ser. (2) **4** (1953), 54-59, 60-66.

[60] A. OPPENHEIM - *Values of quadratic forms*, III, Monatsh. Math. Phys. **57** (1953), 97-101.

[61] J.-P. OTAL - *Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative*, Ann. of Math. **131** (1990), 151-162.

[62] P. PANSU - *Le flot géodésique des variétés riemanniennes à courbure négative*, Séminaire Bourbaki, exposé n° 738, février 1991.

[63] W. PARRY - *Ergodic properties of affine transformations and flows on nilmanifolds*, Amer. J. Math. **91** (1969), 757-771.

[64] W. PARRY - *Metric classification of ergodic nilflows*, Amer. J. Math. **93** (1971), 819-828.

[65] J. PLANTE - *Anosov flows*, Amer. J. Math. (1972), 729-754.

[66] M. RATNER - *Factors of horocyclic flows*, Ergodic theory and dynamical systems **2** (1982), 465-489.

[67] M. RATNER - *Rigidity of horocycle flows*, Ann. of Math. **115** (1982), 597-614.

[68] M. RATNER - *Horocyclic flows : joinings and rigidity of products*, Ann. of Math. **118** (1983), 277-313.

[69] M. RATNER - *Ergodic theory in hyperbolic space*, Contemp. Math. **26** (1984), 309-334.

[70] M. RATNER - *Invariant measures for unipotent translations on homogeneous spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **87** (1990), 4309-4311.

[71] M. RATNER - *Strict measure rigidity for unipotent subgroups of solvable groups*, Invent. Math. **101** (1990), 449-482.

[72] M. RATNER - *On measure rigidity of unipotent subgroups of semisimple groups*, Acta Mathematica **165** (1990), 229-309.

[73] M. RATNER - *On Raghunathan's measure conjecture*, à paraître dans Ann. of Maths.

[74] M. RATNER - *Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows*, Duke Math. J, **63** (1991), 235-280.

[75] M. RATNER - *Distribution rigidity for unipotent actions on homogeneous spaces*, bulletetin A.M.S. **24** (1991), 321-325.

[76] M. REES - *Tangentially distal flows*, Israel J. of Math. **15** (1980), 9-31.

[77] P. SARNAK - *Asymptotic behaviour of periodic orbits of the horocycle flow and Eisenstein series*, Comm. on Pure and Applied Math. **34** (1981), 719-739.

[78] W.M. SCHMIDT - *Diophantine approximations*, Lecture Notes in Math. **785**, Springer-Verlag.

[79] C. SERIES - *The geometry of Markov numbers*, Math. Intelligencer **7** (1985), 20-29.

[80] N.A. SHAH - *Closures of totally geodesic immersions in manifolds of constant negative curvature* in : Proceed. Group theory from a geometrical viewpoint, Trieste 1990, ed. É. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky, World Scientific (1991).

[81] K. SIGMUND - *On the space of invariant measures for hyperbolic flows*, Amer. J. Math. **94** (1972), 31-37.

[82] J.-C. SIKORAV- *Valeurs des formes quadratiques indéfinies irrationnelles (d'après G.A. Margulis)*, Séminaire de théorie des nombres, Paris, 86-87, Ed. C Goldstein, Progress in Math. 81, 307-315, Birkhauser.

[83] A.N. STARKOV - *Structure of orbits of homogeneous flows and the Raghunathan conjecture*, Russian Math. Surveys **45** (1990), 227-228.

[84] W. VEECH - *Unique ergodicity of horospherical flows*, Amer. J. Math. **99** (1977), 827-859.

[85] A. VERJOVSKY - *Arithmetic, geometry and dynamics in the unit tangent bundle of the modular orbifold*, preprint I.C.T.P.

[86] L.Ya. VULAKH - *On minima of rational indefinite quadratic forms*, J. Number Theory **21** (1985), 275-285.

[87] G.L. WATSON - *On indefinite quadratic forms in five variables*, Proc. London Math. Soc. (3) **3** (1953), 170-181.

[88] G.L. WATSON - *On indefinite quadratic forms in three or four variables*, J. London Math. Soc. **28** (1953), 239-242.

[89] D. WITTE - *Rigidity of some translations on homogeneous spaces*, Invent. Math. **81** (1985), 1-27.

[90] D. WITTE - *Zero entropy affine maps on homogeneous spaces*, Amer. J. Math. **109** (1987), 927-961.

[91] D. WITTE - *Rigidity of horospherical foliations*, Ergodic theory and dynamical systems **9** (1989), 191-205.

[92] D. WITTE - *Measurable quotients of unipotent translations on homogeneous spaces*, à paraître.

[93] A. ZEGHIB - *Laminations et hypersurfaces géodésiques des variétés hyperboliques*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **24** (1991), 171-188.

[94] A. ZEGHIB - *Systèmes dynamiques autonomes. Partie* I : *Ensembles invariants des flots d'Anosov algébriques*, Prépublication E.N.S. Lyon n° 47 (1991).

Étienne GHYS

École Normale Supérieure de Lyon
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
U.M.R. 128 du C.N.R.S.
46, allée d'Italie
F-69364 LYON CEDEX 07