HENRI CARAYOL

Variétés de Drinfeld compactes

Astérisque, tome 206 (1992), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 756, p. 369-409
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1991-1992__34__369_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 1992
44ème année, 1991-92, n° 756

VARIÉTÉS DE DRINFELD COMPACTES,

d'après Laumon, Rapoport et Stuhler

par Henri Carayol

0. INTRODUCTION

0.1. Considérons une forme modulaire parabolique $f = \sum a_n q^n$ normalisée ($a_1 = 1$) de poids 2 pour le groupe $\Gamma_0(N)$, dont on suppose qu'elle est vecteur propre des opérateurs de Hecke. La théorie désormais classique d'Eichler-Shimura (généralisée par Deligne aux formes de poids > 2) associe alors à f des $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentations σ_ℓ de dimension 2 du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$; la représentation σ_ℓ est caractérisée par le fait d'être non ramifiée en les $p \nmid N\ell$ et de vérifier les relations :

$$\operatorname{tr} \sigma_\ell(\mathrm{Frob}_p) = a_p, \quad \det \sigma_\ell(\mathrm{Frob}_p) = p,$$

où Frob_p désigne un élément de Frobenius en p (on a implicitement choisi un plongement dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ du corps engendré par les a_p). On sait que les σ_ℓ s'obtiennent en décomposant la cohomologie ℓ-adique des *courbes modulaires* sous l'action des opérateurs de Hecke.

Une théorie plus générale, qui a connu ces dernières années des développements profonds (*cf.* [Ko]), consiste à faire de même pour la cohomologie des *variétés de Shimura* : on veut associer des représentations galoisiennes ℓ-adiques (en fait des motifs) à certaines représentations automorphes de groupes réductifs sur des corps de nombres. Ce programme, qui s'insère dans la "philosophie de Langlands" (voir [La], [Cl]), n'a pour l'instant abouti complètement que pour certains types de groupes, pour l'essentiel dans des cas où les variétés de Shimura associées sont *compactes.*

0.2. Vers 1973, Drinfeld a commencé à développer une théorie semblable pour les *corps de fonctions* d'une variable sur un corps fini : c'est-à-dire des corps $F = \mathbf{F}_q(X)$ de fonctions rationnelles de courbes algébriques $X/\mathbf{F}_q$. L'analogie entre ces corps de fonctions et les corps de nombres est bien connue des arithméticiens, qui ont baptisé *corps globaux* l'un et l'autre type de corps. La "philosophie" de Langlands, de même que la théorie du corps de classes qu'elle généralise, doit s'appliquer à tous les corps globaux.

0.3. La première notion inventée par Drinfeld est celle de "*module elliptique de rang d*". Cette notion dépend du choix d'une place, notée ∞, de F, et fait intervenir le sous-anneau A de F constitué des fonctions rationnelles qui n'admettent pas de pôle en dehors de ∞. Les objets considérés vérifient des propriétés formellement analogues à celles des courbes elliptiques. Munis de *structures de niveau* J convenables (pour J un idéal de A), ils sont classifiés par un *espace de modules* M_J^d, affine et lisse de dimension relative $(d-1)$ sur $A[J^{-1}]$. En particulier, pour $d = 2$, on obtient des courbes sur F qui constituent l'analogue des courbes modulaires sur $\mathbf{Q}$. Considérant la cohomologie de ces courbes (convenablement compactifiées), Drinfeld a su développer une théorie parallèle à celle d'Eichler-Shimura : le résultat est qu'on peut associer à toute *représentation automorphe parabolique* Π du groupe adélique $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_F)$, telle que la composante Π_∞ soit une représentation spéciale, des *représentations ℓ-adiques* de dimension 2 du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, où $\overline{F}$ désigne une clôture séparable de F (ces représentations sont caractérisées en termes de Π par des relations analogues à celles qui déterminent les σ_ℓ ci-dessus). Dans un travail ultérieur [Dr 2], Drinfeld a construit un système de revêtements étales des M_J^d, au moyen desquels (pour $d = 2$) il a pu associer des représentations galoisiennes aux représentations automorphes Π telles que Π_∞ soit cuspidale.

0.4. La définition d'un module elliptique est, ainsi qu'on le verra au cours de cet exposé, une définition algébrique élémentaire. Vers 1976, Drinfeld a introduit d'autres objets de nature plus géométrique, nommés "*faisceaux elliptiques*", qui consistent en certains diagrammes de fibrés vectoriels sur la courbe X. Il a prouvé que cette notion était équivalente à celle de module elliptique, et donc que les variétés de modules obtenues sont les mêmes. L'année suivante, c'est ce concept de faisceau elliptique qu'il généralisera pour obtenir des objets appelés "*Shtukas*" ou F-faisceaux, pour lesquels la place ∞ ne joue plus de rôle distinct. Utilisant ces derniers (en rang 2) et leurs variétés de modules, il parviendra à attacher une représentation galoisienne ℓ-adique à toute représentation automorphe parabolique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$.

0.5. Pour $d \geq 3$, les variétés de modules (ou faisceaux) elliptiques de rang d sont de dimension relative $(d-1)$, et jouent encore pour le groupe $\mathrm{GL}_{d,F}$ le rôle de variétés de Shimura (lesquelles n'existent d'ailleurs pas pour GL_d ($d \geq 3$) sur un corps de nombres). L'étude de la cohomologie de ces variétés devrait permettre d'associer des représentations galoisiennes ℓ-adiques de dimension d aux représentations automorphes paraboliques Π de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}_F)$ telles que Π_∞ soit spéciale. Mais cette étude est rendue extrêmement ardue par le fait que les variétés considérées ne sont pas propres, ce qui pose des problèmes difficiles tant du côté géométrique (questions de compactification, formule des traces de Lefschetz) que du côté automorphe (la formule des traces d'Arthur-Selberg n'a pas encore été établie pour les corps de fonctions). Signalons toutefois que Laumon [Lau 2] a su, en admettant certaines conjectures, calculer le module virtuel $\sum(-1)^i H_c^i(M_J^d \otimes_F \overline{F}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ où agissent $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ et les opérateurs de Hecke (les conjectures admises sont celle de Deligne, donnant une version simple de la formule de Lefschetz pour une correspondance tordue par une grande puissance de Frobenius, et la formule des traces d'Arthur-Selberg). Pour les Shtukas, ces problèmes liés à la non-compacité sont encore pires, et même déjà sérieux — bien que résolus — pour $d = 2$.

0.6. Afin de contourner ces difficultés, Deligne avait, dès la parution du premier article de Drinfeld, posé la question de savoir définir et étudier des analogues propres des variétés modulaires de Drinfeld : ces nouvelles variétés devaient être associées, non plus au groupe $\mathrm{GL}_{d,F}$, mais au groupe multiplicatif G d'un *corps gauche* D de centre F et de dimension d^2 sur F, qui se déploie au-dessus de la place ∞. C'est cette question qui vient d'être résolue dans l'article [L-R-S] et qui fait l'objet du présent exposé.

Un point essentiel était de trouver une bonne définition de l'analogue d'un module elliptique : il se trouve que c'est en partant de la notion de faisceau elliptique, et non pas de celle plus élémentaire de module elliptique, qu'on aboutit à la définition la plus viable : celle d'un "*$\mathcal{D}$-faisceau elliptique*". Cependant, ces objets peuvent aussi — si la base est le spectre d'un corps parfait — être interprétés comme certains "fibrés vectoriels sur la droite projective non commutative", un concept qui généralise plus directement celui de module elliptique, dans l'esprit du travail d'Anderson sur les "t-motifs" [An].

0.7. Laumon, Rapoport et Stuhler montrent que les $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques, munis de structures de niveau I convenables (où I est un sous-schéma fermé fini de $X - \{\infty\}$) admettent des schémas de modules $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$, propres et lisses de dimension relative $(d-1)$ sur $X-I-\mathcal{R}-\{\infty\}$ (où $\mathcal{R}$ désigne le lieu de ramification de D). Ils décomposent ensuite la cohomologie $H^{d-1}(\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I} \times_X \operatorname{Spec} \overline{F}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ sous l'action des opérateurs de Hecke, et prouvent que cette construction permet d'associer des représentations galoisiennes aux représentations automorphes Π de $G(\mathbb{A}_F)$ dont la composante Π_∞ est spéciale. Les représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ ainsi obtenues sont celles que l'on espère (en particulier de dimension d) lorsque la représentation Π intervient avec multiplicité 1 dans l'espace des formes automorphes, ce que l'on conjecture être toujours vrai : cela résulterait de l'existence d'une correspondance à la Jacquet-Langlands entre représentations automorphes de $G(\mathbb{A}_F)$ et de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}_F)$; malheureusement, aucune preuve complète de ce fait n'a été écrite pour les corps de fonctions (voir [De-Ka-Vi] et [Ro]) : il en résulte, outre la frustration que la multiplicité $m(\Pi)$ apparaisse dans l'énoncé du théorème principal de [L-R-S], de nombreuses complications techniques tout au long de l'article.

0.8. L'étude de la cohomologie $H^*(\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I} \times_X \operatorname{Spec} \overline{F}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et de sa décomposition se fait en utilisant l'arsenal familier aux spécialistes des variétés de Shimura : description de l'ensemble des points de la variété sur un corps fini, calcul d'intégrales orbitales, comparaison entre les formules des traces de Lefschetz et de Selberg... On utilise de plus, pour montrer que l'essentiel de la cohomologie se situe en degré $(d-1)$, des arguments fondés sur le théorème de Lefschetz difficile et sur le théorème de Deligne de pureté de la filtration de monodromie. Cette partie de la preuve se simplifierait notablement si l'on disposait de la correspondance de Jacquet-Langlands généralisée.

0.9. Finalement, on prouve dans [L-R-S] la *conjecture de Langlands locale pour* GL_d *sur un corps local d'égale caractéristique* : cela utilise la construction globale de représentations galoisiennes (appliquée à des Π de multiplicité 1), ainsi que plusieurs résultats dus à Henniart. Deligne, dans les années 70, avait obtenu ce résultat pour $d = 2$, en s'appuyant sur la théorie de Drinfeld.

0.10. Nous nous bornerons dans cet exposé à décrire la théorie des modules elliptiques, puis la théorie équivalente des faisceaux elliptiques, et à expliquer ensuite l'essentiel du contenu de [L-R-S]. Nous ne dirons rien des revêtements des M_J^d construits dans [Dr 2], ni des revêtements analogues des $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ définis dans [L-R-S], ni des Shtukas.

0.11. Notations. Dans tout ce qui suit, X désigne une courbe algébrique lisse, projective et géométriquement connexe sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ (avec q une puissance p^e d'un nombre premier p). On note $F = \mathbb{F}_q(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur X ; $\overline{F}$ désigne une clôture séparable de F.

Pour tout point fermé $x \in |X|$ (correspondant à une place de F), on désigne par $\mathcal{O}_x$ et F_x les complétés respectifs de $\mathcal{O}_{X,x}$ et F en x. Le corps résiduel de $\mathcal{O}_x$ est noté $\kappa(x)$, de cardinal $q_x = q^{\deg(x)}$.

La valuation $v_x : F_x \to \mathbb{Z}$ est telle que $v_x(\varpi_x) = 1$, pour ϖ_x une uniformisante de $\mathcal{O}_x$; la valeur absolue $|\ |_x$ est $q_x^{-v_x(\ )}$.

On fixe un tel point fermé ∞, et l'on dénote par $A = H^0(X - \{\infty\}, \mathcal{O}_X)$ le sous-anneau de F constitué des éléments qui sont entiers à toutes les places $x \neq \infty$. En un tel x, le complété $\widehat{A}_x$ s'identifie à $\mathcal{O}_x$.

Quelques simplifications, bien que mineures, apparaissent avec l'hypothèse que $\deg(\infty) = 1$; nous ferons cette hypothèse pour alléger l'exposé.

0.12. Dans l'analogie, qu'il est utile de garder à l'esprit, entre corps de fonctions et corps de nombres, F correspond au corps $\mathbb{Q}$, ∞ à la place réelle de $\mathbb{Q}$, et $|X| - \{\infty\}$ à l'ensemble des nombres premiers. L'analogue de A est l'anneau $\mathbb{Z}$. Les différents complétés $\mathcal{O}_x$ (resp. F_x), pour $x \neq \infty$, correspondent aux $\mathbb{Z}_p$ (resp. $\mathbb{Q}_p$), tandis que l'analogue de F_∞ est le corps $\mathbb{R}$.

0.13. On désignera enfin par $\mathbb{A}_F$, ou plus simplement par $\mathbb{A}$, l'anneau des adèles de F (produit restreint des F_x). Pour S un ensemble fini de places, $\mathbb{A}^S$ désigne le produit restreint des F_x pour $x \notin S$. On aura souvent à considérer $\mathbb{A}^\infty = \mathbb{A}^{\{\infty\}}$.

1. MODULES ELLIPTIQUES

1.1. Définition d'un A-module elliptique sur un A-schéma S.

1.1.1. Commençons par examiner le cas particulier où S est le spectre d'un *corps* K, lequel est donc muni d'un homomorphisme $i : A \to K$.

Rappelons que, pour K un corps de caractéristique $p > 0$, le *groupe* *additif* $G_{a,K} = \operatorname{Spec} K[T]$ admet comme *endomorphismes*, outre les homothéties $\lambda : T \to \lambda T$ (pour $\lambda \in K$), l'homomorphisme $\tau : T \to T^p$ et ses puissances. Il est élémentaire de vérifier que tout endomorphisme f de $G_{a,K}$ peut s'exprimer, de façon unique, comme une somme :

$$f = \lambda_0 + \lambda_1 \tau + \cdots + \lambda_n \tau^n, \qquad \lambda_i \in K.$$

D'autre part, cet anneau d'endomorphismes est en général *non commutatif*, car on a la relation évidente :

$$\tau\lambda = \lambda^p \tau.$$

Drinfeld note $K\{\tau\}$ l'ensemble des expressions polynomiales en τ à coefficients dans K comme ci-dessus, muni de l'addition naturelle et du produit qui résulte de la relation de commutation précédente : cet anneau $K\{\tau\}$ peut ainsi être identifié à $\operatorname{End}(G_{a,K})$. Nous dirons que l'élément $f \in K\{\tau\}$ écrit ci-dessus est de *degré* p^n si λ_n est non nul. D'autre part, la dérivée (de l'endomorphisme correspondant) est donnée par : $f' = \lambda_0$.

1.1.2. DÉFINITION. — *Un A-module elliptique (rigidifié) sur K est un homomorphisme d'anneaux :* $\phi : A \to K\{\tau\} = \operatorname{End}(G_{a,K})$, *tel que l'on ait pour tout* $a \in A$: $(\phi(a))' = i(a)$.

On montre qu'il existe un entier $d \geq 0$, par définition le *rang* du A-module elliptique, tel que l'on ait pour tout $a \in A - \{0\}$: $\deg \phi(a) = |a|_\infty^d$. On exclut en général le cas trivial $d = 0$, qui correspond à : $\phi(a) = i(a)$.

Il est facile de voir que ϕ prend en fait ses valeurs dans le sous-anneau $K\{\tau^e\} \subset K\{\tau\}$ engendré par τ^e.

EXEMPLE. — Pour $X = \mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_q}$ et ∞ le "point à l'infini", A s'identifie à un anneau de polynômes $\mathbf{F}_q[Y]$. La donnée d'un A-module elliptique de rang d sur K revient à la donnée de $\phi(Y)$, qui doit être de la forme :

$$\phi(Y) = i(Y) + \mu_1 \tau^e + \mu_2 \tau^{2e} + \cdots + \mu_d \tau^{de} \qquad (\mu_i \in K,\ \mu_d \neq 0).$$

1.1.3. La définition qui précède se globalise naturellement au cas d'un A-schéma S : remarquons que si L est un fibré en droites sur S (i.e. un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang 1), muni d'une action de A sur le S-groupe sous-jacent à L, alors les fibres de L sont isomorphes à des groupes additifs (isomorphismes bien définis à des homothéties près), et on peut alors vérifier si ces fibres sont ou non des modules elliptiques de rang d.

DÉFINITION. — *Un A-module elliptique de rang d sur S est un fibré en droites L sur S, muni d'un homomorphisme $\phi : A \to \mathrm{End}_{S\text{-gr}}(L)$, tel que pour tout $a \in A$ la différentielle de $\phi(a)$ soit donnée par l'homomorphisme structural $A \to \mathcal{O}_S$, et tel que pour tout point $s : \mathrm{Spec}\, K \to S$ la fibre L_s soit un A-module elliptique de rang d au sens précédent.*

On définit de façon évidente la notion d'homomorphisme (resp. d'isomorphisme) entre modules elliptiques.

1.2. Exemple : description analytique des modules elliptiques au-dessus de F_∞.

Notons $\hat{\bar{F}}_\infty$ le complété d'une clôture séparable de F_∞, et donnons-nous un *réseau* Γ de dimension d dans $\hat{\bar{F}}_\infty$, c'est-à-dire un sous-A-module discret (projectif) de rang d. On considère alors le produit infini :

$$\eta_\Gamma(z) = z \prod_{\gamma \in \Gamma - \{0\}} (1 - z/\gamma),$$

et on vérifie qu'il converge pour tout $z \in \hat{\bar{F}}_\infty$. On obtient ainsi une application η_Γ de $\hat{\bar{F}}_\infty$ dans lui-même, qui se trouve être un endomorphisme additif, surjectif et de noyau Γ : d'où une bijection entre le quotient $\hat{\bar{F}}_\infty/\Gamma$ et $\hat{\bar{F}}_\infty$. Transportant alors par cette bijection l'action naturelle de A sur $\hat{\bar{F}}_\infty/\Gamma$, Drinfeld prouve qu'on obtient ainsi une structure de A-module elliptique de rang d, ϕ_Γ, sur $\hat{\bar{F}}_\infty$; par définition, on a donc, pour $a \in A$:

$$\phi_\Gamma(a)\big(\eta_\Gamma(z)\big) = \eta_\Gamma(az).$$

De plus, tout module elliptique sur $\widehat{\overline{F}}_\infty$ provient de cette façon d'un réseau Γ, lequel est bien déterminé à homothétie près. Pour $d = 2$ (resp. $d = 1$), cette description est analogue à la description analytique habituelle des courbes elliptiques (resp. du groupe multiplicatif) sur $\mathbf{C}$. Une différence essentielle réside en ceci : tandis qu'un $\mathbf{Z}$-réseau discret dans $\mathbf{C}$ ne peut être que de rang ≤ 2, ici le rang d peut être quelconque, car $\overline{F}_\infty$ est de degré infini sur F_∞.

1.3. Espaces de modules.

1.3.1. Comme dans le cas classique des courbes elliptiques, on commence par introduire la notion de *structure de niveau* J, où $\{0\} \neq J \subsetneq A$ est un idéal. Nous supposerons pour simplifier que (L, ϕ) est un module elliptique de rang d sur un $A[J^{-1}]$-schéma S. Notons alors L_J le sous-groupe de L défini par les équations $\phi(a)(x) = 0$, pour a décrivant J : on peut montrer que ce sous-groupe (qui est muni d'une action de A) est *étale* sur S à fibres isomorphes à $(J^{-1}/A)^d$. Par définition, une structure de niveau J sur (L, ϕ) consiste en la donnée d'un isomorphisme A-linéaire : $\psi : (J^{-1}/A)^d_S \xrightarrow{\sim} L_J$.

1.3.2. Théorème (Drinfeld). — *Soit $\{0\} \neq J \subsetneq A$ un idéal. Alors le foncteur qui à un $A[J^{-1}]$-schéma S associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de modules elliptiques de rang d sur S, munis de structures de niveau J, est représentable par un $A[J^{-1}]$-schéma affine M^d_J, lisse et purement de dimension relative $(d-1)$.*

1.3.3. Pour $d = 1$, Drinfeld montre que M^1_J est le spectre du normalisé de $A[J^{-1}]$ dans l'extension abélienne de F qui a pour conducteur J, qui est totalement décomposée en la place ∞, et qui est maximale pour ces propriétés (c'est là un résultat semblable au théorème de Kronecker-Weber).

Lorsque $d = 2$, les M^2_J constituent des analogues des courbes modulaires $Y(N)$. Cette analogie est rendue plus frappante par un résultat d'*uniformisation p-adique*, semblable à la description usuelle de $Y(N)_{\mathbf{C}}$

comme quotient du demi-plan de Poincaré : pour $d \geq 2$, notons Ω^d le sous-ensemble de $\mathbb{P}^{d-1}(\widehat{\overline{F}}_\infty)$ constitué des points qui n'appartiennent à aucun hyperplan défini sur F_∞ (par exemple, $\Omega^2 = \mathbb{P}^1(\widehat{\overline{F}}_\infty) - \mathbb{P}^1(F_\infty)$ est l'analogue du "double" demi-plan de Poincaré $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$). De la théorie analytique (1.2) des modules elliptiques, on peut déduire la description suivante de $M_J^d(\widehat{\overline{F}}_\infty)$:

$$M_J^d(\widehat{\overline{F}}_\infty) \simeq \mathrm{GL}_d(F) \setminus \left[\Omega^d \times (\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}^\infty)/U_J)\right],$$

où U_J désigne le sous-groupe de $\mathrm{GL}_d(\widehat{A}) = \prod_{x \neq \infty} \mathrm{GL}_d(A_x)$ formé des éléments qui sont congrus à 1 modulo J. On peut préciser cette description en définissant sur Ω^d une structure d'*espace analytique rigide* : la bijection ci-dessus est alors un isomorphisme d'espaces rigide-analytiques.

1.4. Cohomologie de l'espace de modules ($d = 2$).

1.4.1. Les courbes affines $M_{J,F}^2 = M_J^2 \otimes_A F$ sur F constituent, pour J variant, un *système projectif* : si $J \subset J'$, alors $((J')^{-1}/A)^2$ est inclus dans $(J^{-1}/A)^2$, et on obtient par restriction de la structure de niveau un morphisme (étale) de $M_{J,F}^2$ sur $M_{J',F}^2$. D'autre part, ces courbes admettent des compactifiées canoniques (des courbes projectives et lisses sur F), que nous notons $\overline{M}_{J,F}^2$, et qui constituent encore un système projectif.

Fixons un nombre premier $\ell \neq p$, et intéressons-nous à la limite inductive des groupes de cohomologie ℓ-adique :

$$H^1 = \varinjlim_J H^1(\overline{M}_{J,F}^2 \otimes_F \overline{F}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

Sur chacun de ces groupes, et donc sur la limite, on dispose d'une action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. D'autre part, le groupe $\mathrm{GL}_2(\widehat{A}) = \varprojlim \mathrm{GL}_2(A/J)$ agit à droite, par composition sur la structure de niveau, sur les $M_{J,F}^2$, et cette action s'étend aux compactifiées. D'une manière similaire à la façon dont on définit les correspondances de Hecke sur les courbes modulaires, on étend l'action de $\mathrm{GL}_2(\widehat{A})$ en une action du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty)$ tout entier sur le système projectif des $\overline{M}^2_{J,F}$ (mais non plus sur les $\overline{M}^2_{J,F}$ individuels) : voir [Dr 1] pour cette construction un peu fastidieuse, ou infra (4.2) pour l'analogue dans le cadre des $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques.

Ainsi, l'espace H^1 se trouve être une représentation du groupe produit $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty)$.

1.4.2. On renvoie par exemple à [Bo-Ja] pour la définition précise de ce qu'est une *représentation automorphe parabolique* du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$. Disons ici, de façon vague, qu'il s'agit d'une représentation admissible irréductible qui intervient comme sous-quotient de certains espaces de fonctions sur l'espace homogène $\mathrm{GL}_2(F) \setminus \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$. On considère d'habitude des représentations à valeurs complexes, mais la définition garde un sens, pour les corps de fonctions, sur tout corps algébriquement clos de caractéristique 0, par exemple $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ (variante : on peut aussi utiliser un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathbb{C}$).

Une telle représentation Π se décompose en produit tensoriel restreint, étendu à toutes les places x de F, de composantes locales Π_x (des représentations admissibles irréductibles des groupes $\mathrm{GL}_2(F_x)$). Nous noterons $\Pi = \Pi^\infty \otimes \Pi_\infty$, où Π^∞ désigne le produit tensoriel restreint des Π_x pour $x \neq \infty$.

Rappelons aussi que la *représentation spéciale* (ou *de Steinberg*) St_∞ du groupe $\mathrm{GL}_2(F_\infty)$ (voir [Ca 2]) peut se réaliser comme le quotient de l'espace des fonctions localement constantes sur $\mathbb{P}^1(F_\infty)$ — espace où $\mathrm{GL}_2(F_\infty)$ opère par translation à droite — par le sous-espace des fonctions constantes.

Enfin, presque toutes les composantes Π_x d'une représentation automorphe parabolique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ sont dans la *série principale non ramifiée*, i.e. proviennent, par induction unitaire à partir du sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, de deux quasi-caractères non ramifiés μ_x et μ'_x de F_x^*.

1.4.3. Le théorème principal de [Dr 1] décrit complètement la représentation H^1 du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty)$.

THÉORÈME (Drinfeld). — *La représentation H^1 définie ci-dessus est isomorphe à une somme directe : $\bigoplus \Pi^\infty \otimes \sigma(\Pi^\infty)$, étendue aux (classes d'équivalence de) $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations admissibles irréductibles Π^∞ du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty)$ telles que $\Pi = \Pi^\infty \otimes St_\infty$ soit automorphe parabolique. Alors $\sigma(\Pi^\infty)$ est une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation de degré 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, caractérisée en fonction de Π^∞ par la propriété suivante : en toute place x de F telle que Π_x soit principale non ramifiée, associée à deux quasi-caractères μ_x et μ'_x de F_x^*, la représentation $\sigma(\Pi^\infty)$ est non ramifiée ; sa restriction à un groupe de décomposition en x est la somme des deux quasi-caractères non ramifiés qui envoient un élément de Frobenius (géométrique) respectivement sur $\mu(\varpi_x)^{-1}q^{1/2}$ et $\mu'(\varpi_x)^{-1}q^{1/2}$.*

Ce théorème constitue l'exact analogue des résultats d'Eichler-Shimura ; la preuve qu'en donne Drinfeld est proche de cette théorie classique : calcul analytique (rigide) de la cohomologie — dans l'esprit de "l'isomorphisme de Shimura" — et utilisation d'une "relation de congruence".

2. FAISCEAUX ELLIPTIQUES

Rappelons que nous avons supposé pour simplifier que $\deg(\infty) = 1$. Afin d'alléger les notations dans ce qui suit, pour S et T deux $\mathbb{F}_q$-schémas, nous noterons simplement $S \times T$ leur produit $S \times_{\mathbb{F}_q} T$.

2.1. DÉFINITION. — *Soit S un $\mathbb{F}_q$-schéma. Un faisceau elliptique de rang* *d (et de pôle ∞) sur S consiste en la donnée d'un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{F}_{i-1} \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{F}_i \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{F}_{i+1} \arrow[r, hook, "j"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, hook, "{}^\tau j"] \arrow[ur, "t"] & {}^\tau\mathcal{F}_{i-1} \arrow[r, hook, "{}^\tau j"] \arrow[ur, "t"] & {}^\tau\mathcal{F}_i \arrow[r, hook, "{}^\tau j"] \arrow[ur, "t"] & {}^\tau\mathcal{F}_{i+1} \arrow[r, hook, "{}^\tau j"] \arrow[ur, "t"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

où pour chaque $i \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}_i$ est un $\mathcal{O}_{X\times S}$-module localement libre (= un fibré vectoriel) de rang d, où

$${}^\tau\mathcal{F}_i = (\mathrm{id}_X \times \mathrm{Frob}_{S/\mathbf{F}_q})^*\mathcal{F}_i$$

(pull-back par le Frobenius de S), et où les j et t sont des injections $\mathcal{O}_{X\times S}$-linéaires. Ces données sont astreintes à satisfaire aux conditions suivantes :

(i) *[Périodicité] : $\mathcal{F}_{i+d} = \mathcal{F}_i(\{\infty\} \times S)$, le composé de d morphismes j consécutifs étant l'injection naturelle (induite par $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_X(\infty)$).*

(ii) *[Pôle] : $\mathcal{F}_i/j(\mathcal{F}_{i-1})$ est l'image directe $(\Gamma_\infty)_*\mathcal{A}_i$ d'un $\mathcal{O}_S$-module inversible $\mathcal{A}_i$ par la section ∞ :*

$$\Gamma_\infty : S \to X \times S, \quad s \mapsto (\infty, s).$$

(iii) *[Zéro] : $\mathcal{F}_i/t({}^\tau\mathcal{F}_{i-1})$ est l'image directe $(\Gamma_z)_*\mathcal{B}_i$ d'un $\mathcal{O}_S$-module inversible $\mathcal{B}_i$ par une section $\Gamma_z : S \to X \times S$, graphe d'un morphisme de $\mathbf{F}_q$-schémas $z : S \to X - \{\infty\}$.*

(iv) *[Normalisation] : Pour tout point géométrique s de S, la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\mathcal{F}_{0|X\times s})$ est nulle.*

2.2. Remarques.

2.2.1. En vertu des conditions (ii) ou (iii), le passage de $\mathcal{F}_i$ à $\mathcal{F}_{i+1}$ fait croître de 1 la caractéristique d'Euler-Poincaré. D'où, pour $i \in \mathbb{Z}$: $\chi(\mathcal{F}_{i|X\times s}) = i$.

2.2.2. Le morphisme z de (iii) est uniquement déterminé. On associe ainsi à tout faisceau elliptique sur S un S-point de $X - \{\infty\}$, qu'on appelle son *zéro.*

2.3. Structures de niveau. Donnons-nous un sous-schéma fini non vide $I \subset X - \{\infty\}$. Soit d'autre part $(\mathcal{F}_i, j, t)$ un faisceau elliptique sur S tel que *I soit disjoint de l'image du morphisme z (zéro) associé.* Dans ces conditions, la restriction $\mathcal{F}_{i|I\times S}$ est indépendante (via j) de i : notons la $\mathcal{F}_I$; on voit que t induit un isomorphisme ${}^{\tau}\mathcal{F}_I \simeq \mathcal{F}_I$. Définissons alors une *structure de niveau I* comme la donnée d'un isomorphisme $\mathcal{O}_{I\times S}$-linéaire $\iota : \mathcal{O}^d_{I\times S} \simeq \mathcal{F}_I$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & {}^{\tau}\mathcal{F}_I \arrow[dd, "t"] \\ \mathcal{O}^d_{I\times S} \arrow[ur, "{}^{\tau}\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & \\ & \mathcal{F}_I \end{tikzcd}$$

2.4. L'équivalence.

Drinfeld a montré, dans le bref mais profond article [DR 3], que les notions de faisceau elliptique et de module elliptique étaient équivalentes. Il s'inspirait d'idées provenant du travail de Krichever [Kr] sur les équations différentielles, mettant ainsi en évidence une connexion troublante entre deux sujets éloignés en apparence. Voir aussi l'article [Mu].

Soit $\{0\} \neq J \subsetneq A$ l'idéal de A qui correspond au fermé I de $X - \{\infty\} = \mathrm{Spec}(A)$. Le résultat de Drinfeld peut s'énoncer comme suit :

THÉORÈME. — *Soit* $S \xrightarrow{z} \mathrm{Spec}(A) - I$ *un* $A[J^{-1}]$*-schéma. Alors il existe une bijection, fonctorielle en* S, *entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de* A*-modules elliptiques de rang* d *sur* S, *munis d'une structure de niveau* J, *et l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux elliptiques de rang* d *sur* S, *de zéro* z, *et munis d'une structure de niveau* I.

Le foncteur qui à S associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux elliptiques de rang d sur S, munis de structures de niveau I, est donc relativement représentable par un $A[J^{-1}]$-schéma isomorphe à M_J^d.

2.5. Nous allons maintenant donner une idée de la construction de Drinfeld dans un sens, en supposant pour simplifier que S est le spectre d'un corps K.

2.5.1. Partons d'un faisceau elliptique $(\mathcal{F}_i, j, t)$ sur $\mathrm{Spec}\, K$, de zéro donné par $z : A \to K$. Considérons alors les K-vectoriels $M_i \overset{\text{déf}}{=} H^0(X \otimes K, \mathcal{F}_i)$, lesquels constituent (via j) une suite croissante. Leur réunion M s'identifie pour tout i à $H^0((X - \{\infty\}) \otimes K, \mathcal{F}_i)$ (noter que j est un isomorphisme sur $X - \{\infty\}$). Cette réunion est de façon évidente un $(A \otimes_{\mathbf{F}_q} K)$-module.

On dispose de plus d'une application $t : M \to M$ induite par $t : {}^\tau\mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_{i+1}$. Cette application envoie M_i dans M_{i+1} ; elle est A-linéaire et K-semi-linéaire :

$$t(am) = at(m) \quad \text{pour} \quad a \in A,$$
$$t(\lambda m) = \lambda^q(m) \quad \text{pour} \quad \lambda \in K.$$

2.5.2. Utilisant les notations de (1.1), la semi-linéarité de t fait qu'on peut voir M comme un $K\{\tau^e\}$-module à gauche, où τ^e opère par t (on oublie pour le moment l'action de A). Montrons que ce $K\{\tau^e\}$ module est *libre de rang* 1 :

(a) Le fait que le zéro et le pôle soient disjoints entraîne que t induit pour chaque i une injection (isomorphisme si K est parfait) :

$t : {}^{\tau}(\mathcal{F}_i/j(\mathcal{F}_{i-1})) \to \mathcal{F}_{i+1}/j(\mathcal{F}_i)$, d'où il résulte que $t : M_i/M_{i-1} \to M_{i+1}/M_i$ est injectif.

(b) On a : $M_0 = \{0\}$. Dans le cas contraire en effet, il existerait $i \leq 0$ et un élément $x \in M_i - M_{i-1}$. Utilisant (a), on aurait alors pour tout $m \geq 0 : t^m x \in M_{i+m} - M_{i+m-1}$, d'où le fait que $\dim_K M_{i+m} \geq m+1$ (car $x, tx, \ldots, t^m x$ sont linéairement indépendants). Mais pour m grand, cela contredirait (2.2.1), car on a alors

$$\dim_K M_{i+m} = \chi(\mathcal{F}_{i+m}) = i + m.$$

(c) Essentiellement le même argument qu'en (b) prouve que, pour $i \geq 0$, les M_{i+1}/M_i sont de dimension 1 sur K. On voit alors par récurrence que, si μ est une base de M_1, alors $\{\mu, t\mu, \ldots, t^{n-1}\mu\}$ constituent une base de M_n sur K. D'où il résulte bien que M est libre de rang 1 sur $K\{\tau^e\} \simeq K\{t\}$, de base μ.

2.5.3. Fixons donc une telle base, d'où un isomorphisme $M \simeq K\{t\}$ (on identifie t et τ^e). Regardons maintenant l'action de A sur M : le fait que cette action commute à celle de $K\{t\}$ définit un homomorphisme :

$$\phi : A \to \mathrm{End}_{K\{t\}}(K\{t\}) = K\{t\}^{\mathrm{opp}},$$

qui est aussi un homomorphisme $A \to K\{t\} = K\{\tau^e\}$ car A est commutatif. La dérivée $(\phi(a))'$ se calcule en considérant l'action de A sur $M/K \cdot t(M) \simeq M_1$: cet espace est naturellement inclus dans la fibre au-dessus du point zéro du faisceau $\mathcal{F}_1$, d'où : $(\phi(a))' = z(a)$.

Finalement, on a pour $a \in A - \{0\}$

$$aM_i \subset H^0(X \otimes K, \mathcal{F}_i(-v_\infty(a)) = M_{i-dv_\infty(a)},$$

avec $(-dv_\infty(a))$ le plus petit entier tel que cette inclusion soit toujours valide. Il en résulte que le degré de $\phi(a)$ est égal à : $p^{e(-dv_\infty(a))} = (q^{-v_\infty(a)})^d = |a|_\infty^d$.

On a donc bien obtenu un module elliptique de rang d.

2.5.4. Continuons à identifier M et $K\{t\}$. La donnée d'une structure de niveau I sur le faisceau elliptique est la donnée d'un isomorphisme $(A \otimes K)$-linéaire :

$$\iota : (A/J)^d \otimes_{\mathbf{F}_q} K \xrightarrow{\sim} M/MJ,$$

tel que l'action du Frobenius sur le membre de gauche corresponde à droite à l'action de t.

Si $\lambda \in [(A/J)^d]^*$ est un élément du $\mathbf{F}_q$-dual de $(A/J)^d$, on obtient par composition avec ι^{-1} un homomorphisme K-linéaire h_λ de $M/MJ = K\{t\}/K\{t\} \cdot \phi(J)$ dans K, qui vérifie : $h_\lambda(tm) = h_\lambda(m)^q$.

Un tel homomorphisme est déterminé par $\psi_\lambda = h_\lambda(1) \in K$ (d'où $h_\lambda(t^m) = \psi_\lambda^{q^m}$). Cet élément ψ_λ doit satisfaire, pour tout $a \in J$ avec $\phi(a) = u_0 + u_1 t + \ldots + u_n t^n$, l'équation :

$$\phi(a)(\psi_\lambda) = u_0 \psi_\lambda + u_1 \psi_\lambda^q + \ldots + u_n \psi_\lambda^{q^n} = h_\lambda\big(\phi(a)\big) = 0.$$

Autrement dit, ψ_λ doit être un point de J-torsion du module elliptique ϕ. L'application $\lambda \to \psi_\lambda$ est ainsi une injection (donc en fait une bijection) A-linéaire :

$$\psi : \left[(A/J)^d\right]^* \xrightarrow{\sim} (\phi)_{J\text{-tors}}.$$

D'où une structure de niveau J sur ϕ (cela dépend du choix d'un isomorphisme $(A/J)^* \simeq J^{-1}/A$).

On vérifie sans mal que les constructions précédentes sont, à un isomorphisme près, indépendantes du choix de μ.

3. $\mathcal{D}$-FAISCEAUX ELLIPTIQUES

3.1. Fixons-nous désormais une algèbre centrale simple D de dimension d^2 sur son centre F, *déployée à l'infini*, c'est-à-dire que $D \otimes_F F_\infty \simeq M_d(F_\infty)$. Choisissons d'autre part un faisceau cohérent $\mathcal{D}$ localement libre en $\mathcal{O}_X$-algèbres, de fibre générique D, tel qu'en tout point fermé x de X, $\mathcal{D}_x = \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_x$ soit un *ordre maximal* de $D_x = D \otimes_F F_x$: le choix de $\mathcal{D}$ revient à celui de chacun des $\mathcal{D}_x$, choix qui doit être cohérent en ce sens que, pour presque tout x, $\mathcal{D}_x$ doit être engendré sur $\mathcal{O}_x$ par une base fixée de D sur F.

On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des mauvaises places, où l'algèbre D_x n'est pas déployée : pour $x \notin \mathcal{R}$, le couple $(D_x, \mathcal{D}_x)$ est donc isomorphe à $(M_d(F_x), M_d(\mathcal{O}_x))$.

Nous continuons à nous placer sous l'hypothèse simplificatrice que $\deg(\infty) = 1$. La définition que donnent Laumon, Rapoport et Stuhler d'un $\mathcal{D}$-module elliptique est alors la suivante (nous notons toujours $S \times T$ le produit sur $\mathbf{F}_q$) :

3.1.1. DÉFINITION. — *Soit S un $\mathbf{F}_q$-schéma. Un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique (de pôle ∞) sur S consiste en la donnée d'un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{E}_{i-1} \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{E}_i \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{E}_{i+1} \arrow[r, hook, "j"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, hook, "{}^\tau j"] \arrow[ur, "t"] & {}^\tau\mathcal{E}_{i-1} \arrow[r, hook, "{}^\tau j"] \arrow[ur, "t"] & {}^\tau\mathcal{E}_i \arrow[r, hook, "j"] \arrow[ur, "t"] & {}^\tau\mathcal{E}_{i+1} \arrow[r, hook, "{}^\tau j"] \arrow[ur, "t"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

où pour chaque $i \in \mathbf{Z}$, $\mathcal{E}_i$ est un $\mathcal{O}_{X \times S}$-module localement libre de rang d^2, muni d'une action à droite de $\mathcal{D}$ compatible à l'action de $\mathcal{O}_X$, où ${}^\tau\mathcal{E}_i$ a la même signification qu'au paragraphe précédent, et où les j et t sont des injections $\mathcal{O}_{X \times S}$-linéaires compatibles à l'action de $\mathcal{D}$. Ces données sont astreintes à satisfaire aux conditions suivantes :

(i) [*Périodicité*] : $\mathcal{E}_{i+d} = \mathcal{E}_i(\{\infty\} \times S)$, *le composé de d morphismes j consécutifs étant l'injection naturelle.*

(ii) [*Pôle*] : $\mathcal{E}_i/j(\mathcal{E}_{i-1})$ *est isomorphe comme* $\mathcal{O}_{X\times S}$*-module à l'image directe* $(\Gamma_\infty)_*\mathcal{A}_i$, *par la section* ∞, *d'un* $\mathcal{O}_S$*-module* $\mathcal{A}_i$ *localement libre de rang d.*

(iii) [*Zéro*] : $\mathcal{E}_i/t({}^\tau\mathcal{E}_{i-1})$ *est isomorphe comme* $\mathcal{O}_{X\times S}$*-module à l'image directe* $(\Gamma_z)\mathcal{B}_i$ *d'un* $\mathcal{O}_S$*-module* $\mathcal{B}_i$ *localement libre de rang d par une section* $\Gamma_z : S \to X \times S$, *graphe d'un morphisme de* $\mathbb{F}_q$*-schémas* $z : S \to X - \{\infty\} - \mathcal{R}$.

3.1.2. *Normalisation.* Les conditions (ii) ou (iii) ci-dessus entraînent que les caractéristiques d'Euler-Poincaré des faisceaux $\mathcal{E}_i$ en un point géométrique s de S augmentent de d lorsqu'on passe de $\mathcal{E}_i$ à $\mathcal{E}_{i+1}$. On peut imposer une condition de normalisation analogue à (2.1) (iv), par exemple la suivante : $\chi(\mathcal{E}_{0|X\times s}) \in [0, d[$; dans la suite de cet exposé, nous supposerons les $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques ainsi normalisés.

Dans l'article [L-R-S] au contraire, aucune condition de normalisation n'est imposée : on y considère l'action naturelle (par décalage) de $\mathbb{Z}$ sur le champ classifiant les $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques, puis on passe au quotient, ce qui revient au même.

3.1.3. De même que pour les faisceaux elliptiques, le morphisme z ("zéro") est bien déterminé : à tout $\mathcal{D}$-faisceau elliptique sur S correspond donc un S-point de $X - \{\infty\} - \mathcal{R}$.

3.1.4. *Exemple : cas où l'algèbre D est déployée.* Suposons que $D = M_d(F)$ et que $\mathcal{D} = M_d(\mathcal{O}_X)$. A tout faisceau elliptique $(\mathcal{F}_i, j, t)$ on peut associer le triple $(\mathcal{F}_i \boxtimes \mathcal{O}_X^d, j \boxtimes \mathrm{id}, t \boxtimes \mathrm{id})$: c'est un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j', t')$ où, pour chaque i, $\mathcal{E}_i$ est la somme directe de d copies de $\mathcal{F}_i$, sur laquelle $\mathcal{D}$ opère à droite par multiplication matricielle. Réciproquement, il n'est pas difficile de vérifier, en décomposant un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique sous l'action des idempotents diagonaux de $\mathcal{D}$, que tout $\mathcal{D}$-faisceau elliptique normalisé est ainsi obtenu (équivalence de Morita).

Dans le cas déployé, on n'obtient donc rien de nouveau.

3.2. Structures de niveau.

Soit $I \neq \emptyset$ un sous-schéma fermé fini de $X - \{\infty\}$; soit d'autre part $(\mathcal{E}_i, j, t)$ un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique sur un schéma S, tel que *l'image* $z(S)$ *du morphisme zéro associé soit disjointe de* I. Dans ces conditions, la restriction $\mathcal{E}_I = \mathcal{E}_{i|I \times S}$ est indépendante (via j) de i, et t induit un isomorphisme ${}^\tau\mathcal{E}_I \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_I$.

On définit alors une *structure de niveau* I sur $(\mathcal{E}_i, j, t)$ comme la donnée d'un isomorphisme $\mathcal{O}_{I \times S}$-linéaire $\iota : \mathcal{D}_I \boxtimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_I$, compatible à l'action à droite de $\mathcal{D}_I$ sur les deux membres, et rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & {}^\tau\mathcal{E}_I \arrow[dd, "t"] \\ \mathcal{D}_I \boxtimes \mathcal{O}_S \arrow[ur, "{}^\tau\iota"] \arrow[dr, "\iota"'] & \\ & \mathcal{E}_I \end{tikzcd}$$

3.3. Espace de modules.

Fixons un sous-schéma fini non vide I de $X - \{\infty\}$. Pour $z : S \to X - \{\infty\} - I - \mathcal{R}$ un schéma au-dessus de $X - \{\infty\} - I - \mathcal{R}$, notons $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}(S)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques sur S, de zéro z, munis d'une structure de niveau J, et normalisés (3.1.2).

Le premier résultat essentiel démontré dans [L-R-S] est le :

3.3.1 THÉORÈME. — *Le foncteur* $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ *est représentable par un schéma quasi-projectif sur* $X - \{\infty\} - I - \mathcal{R}$:

$$\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I} \xrightarrow{\text{zéro}} X - \{\infty\} - I - \mathcal{R}.$$

Ce schéma est lisse et purement de dimension relative $(d-1)$ *au-dessus de* $X - \{\infty\} - I - \mathcal{R}$. *Lorsque* D *est une algèbre à division, c'est un* $(X - \{\infty\} - I - \mathcal{R})$*-schéma projectif.*

Par exemple, lorsque D est déployée, on voit, compte tenu de (3.1.4) et du dictionnaire (2.4), que l'on retrouve les schémas de modules de modules elliptiques : $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ est isomorphe à M_J^d pour J l'idéal de A correspondant à I.

3.4. Donnons quelques indications succintes sur la façon dont ce théorème de représentabilité est établi.

3.4.1. Parmi les ingrédients essentiels de la preuve, on démontre dans [L-R-S] un résultat de (presque) stabilité pour les fibrés $\mathcal{E}_i$ qui interviennent : à savoir, qu'il existe une constante C telle que, pour tout $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j, t)$ sur un corps, et tout sous-fibré vectoriel non nul $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_0$, on ait :

$$\frac{\deg \mathcal{F} - C}{\operatorname{rg} \mathcal{F}} < \frac{\deg \mathcal{E}_0 - C}{\operatorname{rg} \mathcal{E}_0}$$

(où deg désigne le degré et rg le rang). On utilise pour cela les propriétés de la filtration canonique de Harder-Narasimhan-Quillen [Ha-Na].

3.4.2. Lorsque I est de degré $\geq C$ (ce que l'on peut toujours supposer, quitte à passer ensuite au quotient par un groupe fini), et que $(\mathcal{E}_i, j, t)$ est muni d'une structure de niveau I, l'inégalité ci-dessus signifie que $\mathcal{E}_0$ est stable en tant que fibré muni d'une structure de niveau. Or il existe un schéma sur $\mathbf{F}_q$ (quasi-projectif et lisse) classifiant de tels objets. On montre alors qu'il existe un $\mathbf{F}_q$-schéma $\mathrm{Vect}^\bullet_{X,\mathcal{D},I}$ classifiant les suites :

$$\cdots \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}_{-1} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}_0 \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}_1 \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{E}_2 \overset{j}{\hookrightarrow} \cdots$$

de fibrés vectoriels de rang d^2 sur $X \times S$, munis d'actions compatibles de $\mathcal{D}$ et de structures de niveau I (compatibles) $\mathcal{D}_I \boxtimes \mathcal{O}_S \simeq \mathcal{E}_I$, telles que : les conditions (i) et (ii) de (3.1.1) soient satisfaites, $\mathcal{E}_0$ soit stable (en tant que fibré à structure de niveau) et normalisé comme en (3.1.2).

D'autre part, il existe aussi un $\mathbf{F}_q$-schéma $\mathrm{Hecke}_{X,\mathcal{D},I}$ classifiant les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{E}_{i-1} \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{E}_i \arrow[r, hook, "j"] & \mathcal{E}_{i+1} \arrow[r, hook, "j"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[ur] & \mathcal{E}'_{i-1} \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[ur, "t"] & \mathcal{E}'_i \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[ur, "t"] & \mathcal{E}'_{i+1} \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[ur, "t"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

dont les deux rangs sont des suites de $\mathrm{Vect}^{\bullet}_{X,\mathcal{D},I}$, et tels que les t soient des injections $\mathcal{O}_{X\times S}$-linéaires compatibles aux actions de $\mathcal{D}$ et aux structures de niveau, et qui vérifient la condition (3.1.1) (iii).

3.4.3. On prouve que le schéma $\mathrm{Vect}^{\bullet}_{X,\mathcal{D},I}$ est lisse et quasi-projectif sur $\mathbf{F}_q$, et que le morphisme :

$$\mathrm{Hecke}_{X,\mathcal{D},I} \xrightarrow{(z,r_1)} \left(X - \{\infty\} - I - \mathcal{R}\right) \times \mathrm{Vect}^{\bullet}_{X,\mathcal{D},I},$$

donné par le zéro et le premier rang, est lisse de dimension relative $(d-1)$.

On conclut alors à la représentabilité de $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$ par un schéma quasi-projectif lisse de dimension relative $(d-1)$ en remarquant que c'est le produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I} \arrow[r, "r_1"] \arrow[d] & \mathrm{Vect}^{\bullet}_{X,\mathcal{D},I} \arrow[d, "(\mathrm{id},\mathrm{Frob})"] \\
\mathrm{Hecke}_{X,\mathcal{D},I} \arrow[r, "(r_1,r_2)"] \arrow[d, "z"] & \mathrm{Vect}^{\bullet}_{X,\mathcal{D},I} \times \mathrm{Vect}^{\bullet}_{X,\mathcal{D},I} \\
X - \{\infty\} - I - \mathcal{R} &
\end{tikzcd}$$

3.4.4. La projectivité dans le cas où D est une algèbre à division s'obtient en vérifiant le critère valuatif de propreté : on fait usage pour cela d'un *théorème de réduction semi-stable* développé par Drinfeld dans un travail sur la compactification des espaces de modules de Shtukas [Dr 6].

4. COHOMOLOGIE DE L'ESPACE DE MODULES : LE THÉORÈME FONDAMENTAL

Nous supposons désormais que D est une *algèbre à division.* Pour allèger les notations, nous notons simplement $\mathcal{E}\ell\ell_I$ les schémas $\mathcal{E}\ell\ell_{X,\mathcal{D},I}$, et $\mathcal{E}\ell\ell_{I,F} = \mathcal{E}\ell\ell_I \times_X \operatorname{Spec} F$.

4.1. Les variétés $\mathcal{E}\ell\ell_{I,F}$ sont projectives et lisses de dimension $(d-1)$ sur F. Pour $I' \supset I$, la restriction de la structure de niveau définit une projection (finie étale) de $\mathcal{E}\ell\ell_{I',F}$ sur $\mathcal{E}\ell\ell_{I,F}$. On s'intéresse aux espaces de cohomologie ℓ-adique (pour $\ell \neq p$ un nombre premier fixé, et $0 \leq n \leq 2d-2$) :

$$H_I^n = H^n(\mathcal{E}\ell\ell_{I,F} \otimes_F \overline{F}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

ainsi qu'à leur limite inductive $H^n = \varinjlim_I H_I^n$. Sur chacun de ces espaces, on dispose d'une action du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$.

4.2.1. Désignons par G le groupe algébrique sur F défini par : $G(B) = (D \otimes_F B)^*$, pour B une F-algèbre : en particulier, $G(F) = D^*$. Nous notons $G(\mathbb{A})$ (resp. $G(\mathbb{A}^\infty)$) le groupe de ses points adéliques (resp. à valeurs dans les adèles "finies"). On définit une *action à droite* de $G(\mathbb{A}^\infty)$ sur le système projectif des $\mathcal{E}\ell\ell_{I,F}$, d'où il résulte une action à gauche (commutant à celle de Galois) sur l'espace H^n. Pour décrire cette action, il suffit de dire comment agissent les éléments "entiers" $g \in G(\mathbb{A}^\infty) \cap \mathcal{D}_{\widehat{A}}$, avec $\widehat{A} = \prod_{x \neq \infty} \mathcal{O}_x$ et $\mathcal{D}_{\widehat{A}} = \mathcal{D} \otimes_A \widehat{A} = \varprojlim \mathcal{D}_I = \prod_{x \neq \infty} \mathcal{D}_x$.

4.2.2. Pour $I = \mathrm{Spec}(A/J)$ un fermé, notons U_I le sous-groupe de $\mathcal{D}^*_{\widehat{A}}$ constitué des éléments congrus à 1 modulo J. Donnons-nous g entier, et I et I' tels que $gU_Ig^{-1} \subset U_{I'}$.

La donnée d'une structure de niveau I sur un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\mathcal{E}_i, j, t)$, défini sur un corps séparablement clos K extension de F, revient à la donnée d'une classe modulo U_I de structures de niveau $\iota : \mathcal{D}_{\widehat{A}} \otimes K \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_i \otimes_{A \otimes K} (\widehat{A} \otimes K)$.

L'élément g définit un endomorphisme de $\mathcal{D}_{\widehat{A}}$, et donc (via ι) de $\mathcal{E}_i \otimes_{A \otimes K} (\widehat{A} \otimes K)$.

A ces données, on associe alors le $\mathcal{D}$-faisceau elliptique $(\mathcal{E}'_i, j', t')$ qui s'insère dans des diagrammes cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}'_i \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E}_i \otimes_{A \otimes K} (\widehat{A} \otimes K) \arrow[d, "g"] \\
\mathcal{E}_i \arrow[r] & \mathcal{E}_i \otimes_{A \otimes K} (\widehat{A} \otimes K).
\end{tikzcd}$$

En termes plus concrets, les sections locales de $\mathcal{E}'_i$ sont les sections locales de $\mathcal{E}_i$ qui vérifient certaines conditions (être dans l'image de g) en les x où g_x n'est pas bijectif.

On munit $(\mathcal{E}'_i, j', t')$ de la structure de niveau ι' (bien définie modulo $U_{I'}$) qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_{\widehat{A}} \otimes K \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d, "g"] & \mathcal{E}'_i \otimes_{A \otimes K} (\widehat{A} \otimes K) \arrow[d] \\
\mathcal{D}_{\widehat{A}} \otimes K \arrow[r, "\iota"] & \mathcal{E}_i \otimes_{A \otimes K} (\widehat{A} \otimes K).
\end{tikzcd}$$

On peut alors vérifier que l'application $(\mathcal{E}_i, j, t, \iota) \to (\mathcal{E}'_i, j', t', \iota') \bmod \mathbb{Z}$ (i.e. au décalage près pour lequel la condition de normalisation (3.1.2) est satisfaite) provient d'un morphisme $g : \mathcal{E}\ell\ell_{I,F} \to \mathcal{E}\ell\ell_{I',F}$.

4.2.3. La construction qui précède définit l'action de $G(\mathbb{A}^{\infty})$ sur le système projectif, ou si l'on préfère sur la limite projective $\mathcal{E}\ell\ell_F$ des

$\mathcal{E}\ell\ell_{I,F}$. On peut aussi parler de *correspondances de Hecke* : un élément $g \in G(\mathbb{A}^\infty)$ — ou plutôt sa double classe modulo U_I — induit sur $\mathcal{E}\ell\ell_{I,F}$ la correspondance :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{E}\ell\ell_F/(U_I \cap g^{-1}U_I g) \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ \mathcal{E}\ell\ell_F/U_I & & \mathcal{E}\ell\ell_F/U_I \arrow[ll, dashed] \end{tikzcd}$$

avec α le morphisme qui provient de l'inclusion de $U_I \cap g^{-1}U_I g$ dans U_I, tandis que β provient de l'action de g^{-1} sur $\mathcal{E}\ell\ell_F$ et de l'injection $u \to gug^{-1}$ de $U_I \cap g^{-1}U_I g$ dans U_I.

Pour $x \neq \infty$ une place telle que la composante g_x soit triviale, on peut vérifier que cette correspondance s'étend en une correspondance sur $\mathcal{E}ll_I \times_X \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$, avec des morphismes α et β étales finis.

4.3.1. Considérons l'espace $L^2 = L^2(G(F) \setminus G(\mathbb{A})/\varpi_\infty^{\mathbb{Z}})$ des fonctions de carré intégrable sur l'espace (compact) $G(F) \setminus G(\mathbb{A})/\varpi_\infty^{\mathbb{Z}}$. Cet espace L^2, où le groupe $G(\mathbb{A})$ opère par la représentation régulière, se décompose discrètement comme une somme hilbertienne :

$$L^2 = \widehat{\bigoplus}_\Pi m(\Pi)\Pi,$$

avec des multiplicités $m(\Pi)$ finies. Les représentations (irréductibles) Π qui interviennent dans cette somme sont par définition les *représentations automorphes* (de caractère central trivial sur ϖ_∞) du groupe $G(\mathbb{A})$. On peut donner un sens plus algébrique à cette notion en considérant, plutôt que l'espace L^2, l'espace des fonctions localement constantes, dont on regarde tous les sous-quotients irréductibles (*cf.* [Bo-Ja]). Cela garde un sens lorsque le corps $\mathbb{C}$ est remplacé par un quelconque corps algébriquement clos de caractéristique 0, par exemple $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. C'est de ce point de vue algébrique que nous nous placerons dans la suite.

Toute représentation automorphe Π se décompose en un produit tensoriel (restreint) $\bigotimes \Pi_x$ de représentations (admissibles irréductibles) des groupes $G(F_x)$. Nous noterons encore, comme en (1.4.2), $\Pi = \Pi^\infty \otimes \Pi_\infty$.

4.3.2. Parmi les représentations automorphes de $G(\mathbb{A})$, notons les *caractères* $\chi \circ \mathrm{Nr}$, factorisés via la norme réduite $\mathrm{Nr} : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{A}^*$ en un caractère de Hecke χ de $\mathbb{A}^*$: ils interviennent avec multiplicité 1. Toutes les autres représentations automorphes sont de dimension infinie (mieux : leurs composantes Π_x aux places $x \notin \mathcal{R}$ sont de dimension infinie).

4.3.3. Pour $x \notin \mathcal{R}$, une représentation (admissible irréductible) Π_x du groupe $G(F_x) \simeq \mathrm{GL}_d(F_x)$ est *non ramifiée* si elle admet un vecteur fixe sous le sous-groupe compact maximal $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_x)$ (voir [Ca 1]). Elle intervient alors comme constituant d'une induite $\mathrm{Ind}(\mu_1, \dots, \mu_d)$ (induction unitaire) de d quasi-caractères non ramifiés de F_x^*. Les $z_i = \mu_i(\varpi_x)$ sont bien déterminés à l'ordre près : ce sont les *valeurs propres de Hecke* de Π_x.

4.3.4. Enfin, la *représentation de Steinberg* St_∞ de $G(F_\infty) \simeq \mathrm{GL}_d(F_\infty)$ est l'unique quotient irréductible de l'induite

$$\mathrm{Ind}(|\ |_\infty^{-\frac{d-1}{2}}, |\ |_\infty^{-\frac{d-3}{2}}, \dots, |\ |_\infty^{\frac{d-3}{2}}, |\ |_\infty^{\frac{d-1}{2}})$$

(induction unitaire à partir du groupe des matrices triangulaires supérieures). C'est une représentation de la série discrète.

4.4.1. Considérons les semi-simplifiées $(H^n)^{ss}$ des H^n. Ces représentations du produit $G(\mathbb{A}^\infty) \times \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ se décomposent en composantes isotypiques suivant les (classes d'équivalence de) représentations admissibles irréductibles Π^∞ de $G(\mathbb{A}^\infty)$

$$(H^n)^{ss} = \bigoplus_{\Pi^\infty} \Pi^\infty \otimes V^n_{\Pi^\infty},$$

où les $V^n_{\Pi^\infty}$ sont des représentations de dimension finie de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Le résultat central de [L-R-S] décrit ces décompositions : il affirme en bref que seules interviennent non trivialement dans les sommes ci-dessus des Π^∞ qui sont la composante "finie" de représentations automorphes Π qui sont ou bien des caractères, ou bien telles que $\Pi_\infty \simeq \mathrm{St}_\infty$. Celles du premier type sont associées à des caractères galoisiens (intervenant en les degrés pairs de cohomologie) tandis que celles du second type produisent des représentations galoisiennes plus intéressantes, liées aux conjectures globales de Langlands ; ces dernières représentations interviennent en degré médian $(d-1)$.

4.4.2 THÉORÈME.

(i) *Seules peuvent intervenir non trivialement, dans les décompositions isotypiques des* $(H^n)^{ss}$, *des représentations* Π^∞ *telles que, ou bien* $\Pi^\infty \otimes \mathbf{1}$, *ou bien* $\Pi^\infty \otimes \mathrm{St}_\infty$, *soit automorphe. Dans le premier cas,* Π^∞ *se factorise sous la forme* $\chi^\infty \circ \mathrm{Nr}$, *où* χ^∞ *est un caractère de* $(\mathbb{A}^\infty)^*$ *tel que* $\chi = \chi^\infty \otimes 1$ *soit un caractère de Hecke de* $\mathbb{A}^*$.

(ii) *Dans le premier cas* ($\Pi^\infty = \chi^\infty \circ \mathrm{Nr}$), $V^0_{\Pi^\infty}$ *est le caractère galoisien qui correspond à* χ *par la théorie du corps de classes (normalisation "géométrique") ; on a, pour* $0 \leq i \leq d-1$: $V^{2i}_{\Pi^\infty} = V^0_{\Pi^\infty}(-i)$ *(twist à la Tate), tandis que les* $V^{2i+1}_{\Pi^\infty}$ *sont nuls.*

(iii) *Dans le second cas (où* $\Pi = \Pi^\infty \otimes \mathrm{St}_\infty$ *est automorphe), les* $V^n_{\Pi^\infty}$ *sont nuls pour* $n \neq d-1$, *tandis que* $V^{d-1}_{\Pi^\infty}$ *est une représentation semi-simple de dimension* $m(\Pi)d$ *de* $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, *caractérisée par la propriété suivante : pour toute place* $x \notin \mathcal{R} \cup \{\infty\}$ *telle que la composante* Π_x *soit non ramifiée, alors* $V^{d-1}_{\Pi^\infty}$ *est non ramifiée en* x, *et l'on a :*

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_x^r; V^{d-1}_{\Pi^\infty}) = m(\Pi)\, q_x^{r(d-1)/2}\big(z_1(\Pi_x)^r + \cdots + z_d(\Pi_x)^r\big),$$

où Frob_x *désigne un élément de Frobenius (géométrique) et où les* $z_i(\Pi_x)$ *sont les valeurs propres de Hecke de* Π_x.

(iv) *De plus — toujours dans le second cas — la* Frob_∞*-semisimplifiée* (*cf.* [De]) *de* $V_{\Pi^\infty}^{d-1}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F}_\infty/F_\infty)}$ *est isomorphe à la somme de* $m(\Pi)$ *copies de* $\mathrm{Sp}_\infty(-d+1)$, *i.e. de la représentation spéciale tordue à la Tate.*

4.4.3. Comme corollaire de (iii) — et de l'ex-conjecture de Weil — on obtient une *preuve de la conjecture de Ramanujan-Petersson* pour les représentations automorphes Π de $G(\mathbb{A})$ telles que $\Pi_\infty \simeq \mathrm{St}_\infty$: c'est-à-dire que *les valeurs propres de Hecke de* Π_x (en une place où Π_x est non ramifiée) *sont de valeur absolue* 1 pour tout plongement complexe.

4.4.4. *Commentaire.* On conjecture que la multiplicité $m(\Pi)$ qui intervient dans l'énoncé du théorème est toujours égale à 1 ; cela doit résulter de la théorie de la correspondance de Jacquet-Langlands généralisée, entre représentations automorphes de $G(\mathbb{A})$ et certaines représentations automorphes de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A})$: *cf.* [De-Ka-Vi] et [Ro]. Cette théorie n'est pas encore au point pour les corps de fonctions (sauf pour $d = 2$ ou 3). Lorsque $m(\Pi) = 1$, la représentation $V_{\Pi^\infty}^{d-1}$ est (à torsion près par un quasi-caractère) celle que les conjectures de Langlands associent à Π.

5. INDICATIONS SUR LA PREUVE DU THÉORÈME PRINCIPAL

Les différentes étapes de cette preuve couvrent une grande partie de l'article [L-R-S] ; nous n'en donnerons ici qu'une idée schématique. Le principe en est de calculer d'abord, au moyen de formules des traces — et c'est la tâche la plus longue — les représentations virtuelles $H_I^* = \sum(-1)^n H_I^n$, et ensuite d'en extraire, par des arguments géométriques, les H_I^n individuels.

5.1. Fixons un point fermé $x \in |X| - \{\infty\} - \mathcal{R}$, et soit I un sous-schéma fermé de $X - \{\infty, x\}$. Considérons alors l'*algèbre de Hecke* $\mathcal{H}_I^{x,\infty}$ des fonctions localement constantes (à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$) à support compact sur $G(\mathbb{A}^{x,\infty})$, bi-invariantes par U_I (défini en (4.2.2)). Cette algèbre opère sur H_I^n : pour $g^{x,\infty} \in G(\mathbb{A}^{x,\infty})$, la fonction caractéristique de la double classe $U_I g^{x,\infty} U_I$ opère via la correspondance de Hecke (4.2.3) associée à $g^{x,\infty}$ (auquel on a ajouté la composante 1 en x).

Or la cohomologie H_I^n de $\mathcal{E}\ell\ell_I \times_X \operatorname{Spec} \overline{F}$ s'identifie à la cohomologie de la fibre spéciale $\mathcal{E}\ell\ell_I \times_X \operatorname{Spec} \overline{\kappa(x)}$, car le schéma considéré est propre et lisse sur $\mathcal{O}_{X,x}$. De plus, comme on l'a vu plus haut (4.2.3), les correspondances de Hecke ont "bonne réduction" en x. On peut donc faire usage de la *formule des traces de Lefschetz*, appliquée à la fibre spéciale en x, afin de calculer, pour $f^{x,\infty} \in \mathcal{H}_I^{x,\infty}$ et $r > 0$:

$$\mathrm{Lef}_r(f^{r,\infty}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_x^r \times f^{x,\infty}; H_I^*).$$

Ce calcul est possible à partir du moment où l'on dispose d'une description précise de l'ensemble des points de la fibre spéciale, ainsi que de l'action du Frobenius et des correspondances de Hecke.

5.2. La description des points de la fibre spéciale se fait en deux temps, de façon similaire à celle dont on décrit des ensembles de variétés abéliennes sur un corps fini : on commence par partitionner l'ensemble considéré en *classes d'isogénie* (à la Honda-Tate), puis on paramétrise chaque classe d'isogénie.

Si $(\mathcal{E}_i, j, t)$ est un $\mathcal{D}$-faisceau elliptique sur $k = \overline{\kappa(x)}$ (de zéro $z = x$: $\operatorname{Spec} k \to X$), sa *fibre générique* V est la fibre de $\mathcal{E}_0$ au point générique $\operatorname{Spec}(F \otimes_{\mathbf{F}_q} k)$ de $X \otimes_{\mathbf{F}_q} k$: c'est donc un $(F \otimes k)$-espace vectoriel muni d'une action de D; d'autre part, on peut voir V (via j) comme la fibre générique de chacun des $\mathcal{E}_i$, et t induit alors un isomorphisme semi-linéaire $\varphi : V \to V$: suivant une terminologie due à Drinfeld, on dit que V est un *φ-espace*, muni d'une action de D. Deux $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques sont *isogènes* si leurs fibres génériques sont isomorphes.

Utilisant une classification, due à Drinfeld, des φ-espaces, on montre dans [L-R-S] que les classes d'isogénie de $\mathcal{D}$-faisceaux elliptiques sont en bijection avec les classes d'isomorphisme de "(D, x, ∞)-*types*", qui sont des couples $(\widetilde{F}, \widetilde{\pi})$, avec $\widetilde{F}$ une extension finie séparable de F et $\widetilde{\pi} \in \widetilde{F}^* \otimes \mathbf{Q}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- Pour $\widetilde{F}' \subsetneqq \widetilde{F}$ un sous-corps, $\tilde{\pi} \notin (\widetilde{F}')^* \otimes \mathbf{Q}$.
- $[\widetilde{F} : F]$ divise d.
- $\widetilde{F}$ n'a qu'une place $\widetilde{\infty}$ divisant ∞; on a :

$$\deg(\widetilde{\infty}) \cdot v_{\widetilde{\infty}}(\tilde{\pi}) = -[\widetilde{F} : F]/d.$$

- Il n'existe qu'une place $\tilde{x} \neq \widetilde{\infty}$ de $\widetilde{F}$ où $v_{\tilde{x}}(\tilde{\pi}) \neq 0$; cette place divise x.
- Pour toute place $\tilde{y}$ de $\widetilde{F}$ divisant une place y de F, on a :

$$\left(d[\widetilde{F}_{\tilde{y}} : F_y]/[\widetilde{F} : F]\right) \operatorname{inv}_y(D) \in \mathbf{Z}$$

(on a noté $v_{\widetilde{\infty}}$ (resp. $v_{\tilde{x}}$) la valuation de F qui étend v_∞ (resp. v_x)).

Ensuite, on donne une description combinatoire de la classe d'isogénie (munie de l'action de Frobenius et des correspondances de Hecke) associée à un tel (D, x, ∞)-type.

5.3. L'étape suivante consiste à appliquer la formule des traces de Lefschetz, c'est-à-dire à dénombrer des points fixes. Après un travail combinatoire qui repose sur la description des points esquissée ci-dessus, on parvient à une expression de $\operatorname{Lef}_r(f^{x,\infty})$ $(r > 0)$ du type suivant :
(5.3.1)

$$\operatorname{Lef}_r(f^{x,\infty}) = \sum_{\gamma} \operatorname{vol}\left(G_\gamma(F)\backslash G_\gamma(\mathbf{A})/\varpi_\infty^{\mathbf{Z}}\right) \cdot \frac{\varepsilon_\infty(\gamma)}{\operatorname{vol}\left(\overline{D}^*_{\infty,\gamma}/\varpi_\infty^{\mathbf{Z}}\right)} \cdot O_\gamma(f_x^{(r)} f^{x,\infty})$$

où la somme est étendue aux classes de conjugaison γ de $G(F) = D^*$ qui sont elliptiques à la place ∞. On a noté G_γ le centralisateur de γ. Par définition, $\varepsilon_\infty(\gamma) = (-1)^{d'-1}$, avec $d' = d/[F_\infty(\gamma) : F_\infty]$, et $\overline{D}_{\infty,\gamma}$ est le corps gauche de centre $F_\infty(\gamma)$ et d'invariant $1/d'$ (de sorte que $\overline{D}^*_{\infty,\gamma}$ est une forme intérieure de $G_\gamma(F_\infty) \simeq \mathrm{GL}_{d'}(F_\infty(\gamma))$). Comme d'habitude, pour f^∞ une fonction localement constante à support compact sur

$G(\mathbb{A}^\infty)$, $O_\gamma(f^\infty)$ désigne l'*intégrale orbitale* :

$$O_\gamma(f^\infty) = \int_{G_\gamma(\mathbb{A}^\infty)\backslash G(\mathbb{A}^\infty)} f^\infty\big((h^\infty)^{-1}\gamma h^\infty\big)\frac{\mathrm{d}h^\infty}{\mathrm{d}h^\infty_\gamma}$$

(la formule (5.3.1) dépend d'un choix compatible, que nous ne préciserons pas ici, des différentes mesures de Haar qui interviennent).

Finalement, $f_x^{(r)} \in \mathcal{C}_c^\infty(D_x^*//\mathcal{D}_x^*) \simeq \mathcal{C}_c^\infty(\mathrm{GL}_d(F_x)//\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_x))$ est la fonction localement constante à support compact sur D_x^*, bi-invariante par $\mathcal{D}_x^*$, de *transformée de Satake* (*cf.* [Ca 1]) :

$$(f_x^{(r)})^\vee(z_1,\dots,z_d) = q_x^{r(d-1)/2}(z_1^r+\cdots+z_d^r).$$

Cette fonction est telle que, pour Π_x une représentation admissible irréductible de $G(F_x)$, on ait :

(5.3.2)

$$\operatorname{tr}\Pi_x\big(f_x^{(r)}\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Pi_x \text{ est ramifiée,} \\ q_x^{r(d-1)/2}(z_1^r+\cdots+z_d^r) & \text{si } \Pi_x \text{ est non ramifiée, de} \\ & \text{valeurs propres de Hecke } z_1,\dots,z_d \end{cases}$$

(pour la mesure qui donne le volume 1 à $\mathcal{D}_x^*$).

Dans des travaux antérieurs, Drinfeld avait donné une expression explicite pour $f_x^{(r)}$, et calculé ses intégrales orbitales, résultats qui jouent un rôle crucial dans la preuve de (5.3.1).

5.4. Soit $f = \bigotimes f_v$ une fonction localement constante à support compact sur $G(\mathbb{A})/\varpi_\infty^{\mathbb{Z}}$, produit de fonctions f_v sur les $G(F_v)$, presque partout égales à la fonction caractéristique de $\mathcal{D}_v^*$. La *formule des traces de Selberg* exprime la trace de l'opérateur induit par f sur l'espace $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/\varpi_\infty^{\mathbb{Z}})$, c'est-à-dire (*cf.* (4.3.1)) la somme $\sum m(\Pi)\operatorname{tr}\Pi(f)$ pour toutes les représentations automorphes de caractère central trivial sur ϖ_∞. Cette formule est simple car on travaille ici sur un quotient compact ; elle s'écrit

$$(5.4.1) \qquad \sum_\Pi m(\Pi)\operatorname{tr}\Pi(f) = \sum_\gamma \operatorname{vol}\big(G_\gamma(F)\setminus G_\gamma(\mathbb{A})/\varpi_\infty^{\mathbb{Z}}\big)O_\gamma(f),$$

où la somme du membre de droite est étendue à toutes les classes de conjugaison γ de $G(F)$, et où O_γ désigne l'intégrale orbitale

$$O_\gamma(f) = \int_{G_\gamma(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} f(h^{-1}\gamma h)\ \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}h_\gamma}.$$

5.5. Il existe une "*fonction d'Euler-Poincaré*" f_∞, localement constante sur le groupe $G(F_\infty)$, a support compact modulo le centre, et dont on peut donner une expression explicite comme combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de parahoriques [Lau 2], qui vérifie les propriétés suivantes :

5.5.1. Ses intégrales orbitales $O_\gamma(f_\infty) = \int_{G_\gamma(F_\infty)\backslash G(F_\infty)} f_\infty(h_\infty^{-1}\gamma h_\infty)\ \dfrac{\mathrm{d}h_\infty}{\mathrm{d}h_{\gamma,\infty}}$ sont données par :

$$O_\gamma(f_\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma \text{ n'est pas elliptique dans } G(F_\infty), \\ \dfrac{\varepsilon_\infty(\gamma)}{\mathrm{vol}(\overline{D}^*_{\infty,\gamma}/\varpi_\infty^{\mathbb{Z}})} & \text{si } \gamma \text{ est elliptique dans } G(F_\infty). \end{cases}$$

5.5.2. Si Π_∞ est une représentation admissible irréductible unitarisable de $G(F_\infty)/\varpi_\infty^{\mathbb{Z}}$, on a :

$$\mathrm{tr}\,\Pi_\infty(f_\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Pi_\infty \not\simeq \mathbf{1}, \mathrm{St}_\infty, \\ 1 & \text{si } \Pi_\infty \simeq \mathbf{1}, \\ (-1)^{d-1} & \text{si } \Pi_\infty \simeq \mathrm{St}_\infty \end{cases}$$

(autrement dit, f_∞ "isole" $\mathbf{1}$ et St_∞ dans le dual unitaire).

5.6. Replaçant les formules (5.5.1) ci-dessus dans l'expression (5.3.1) de Lef_r, on obtient :

$$\mathrm{Lef}_r(f^{x,\infty}) = \sum_\gamma \mathrm{vol}\big(G_\gamma(F) \setminus G_\gamma(\mathbb{A})/\varpi_\infty^{\mathbb{Z}}\big)\, O_\gamma\big(f_x^{(r)} f_\infty f^{x,\infty}\big)$$

où la somme est étendue à toutes les classes de conjugaison γ de $G(F)$. Cette somme s'interprète au moyen de la formule de Selberg : compte tenu de (5.5.2), on arrive à :

$$\mathrm{Lef}_r(f^{x,\infty}) = \sum_{\Pi_\infty \simeq 1} m(\Pi)\,\mathrm{tr}\,\Pi^\infty(f^\infty) + (-1)^{d-1} \sum_{\Pi_\infty \simeq \mathrm{St}_\infty} m(\Pi)\,\mathrm{tr}\,\Pi^\infty(f^\infty)$$

(avec $f^\infty = f_x^{(r)} f^{x,\infty}$). Utilisons maintenant la formule (5.3.2) qui donne $\mathrm{tr}\,\Pi_x(f_x^{(r)})$, le fait que $m(\Pi) = 1$ pour Π un caractère, ainsi que le suivant : pour Π_x un caractère non ramifié de $G(F_x)$, ses valeurs propres de Hecke sont les $\Pi_x(\varpi_x) q_x^{(1-d)/2+i}$ pour $0 \leq i \leq d-1$. On trouve finalement :

$$(5.6.1)\quad \mathrm{Lef}_r(f^{x,\infty}) = \sum_{\substack{\Pi \text{ caractère,} \\ \Pi_\infty \simeq 1,\ \Pi_x \text{ non ramifié}}} \Pi^{x,\infty}(f^{x,\infty}) \cdot \Pi_x(\varpi_x)^r \cdot (1 + q_x^r + \cdots + q_x^{r(d-1)})$$

$$+ (-1)^{d-1} \sum_{\substack{\Pi_\infty \simeq \mathrm{St}_\infty \\ \Pi_x \text{ non ramifiée}}} \mathrm{tr}\,\Pi^{x,\infty}(f^{x,\infty}) \cdot m(\Pi) \cdot q_x^{r(d-1)/2} \cdot (z_1(\Pi_x)^r + \cdots + z_d(\Pi_x)^r).$$

5.7. La formule que l'on vient d'obtenir signifie que la représentation virtuelle $H^* = \sum(-1)^n H^n$ admet la trace que prédit le théorème (4.4.2). Il est aisé d'en déduire les parties (i) et (ii) du théorème : pour (ii), on utilise la "conjecture" de Weil, qui force les différentes valeurs propres $\Pi_x(\varpi_x) q_x^i$ à provenir des espaces de cohomologie de degré $2i$. Un argument facile analogue marcherait aussi pour la partie (iii) si l'on disposait déjà de la conjecture de Ramanujan-Petersson ; il suffirait même de disposer d'un renseignement beaucoup plus faible, à savoir que la composante Π_x est *générique* (i.e. admet un modèle de Whittaker), ce que l'on conjecture être toujours vrai : cela résulterait de la correspondance de Jacquet-Langlands généralisée. En effet, on sait [Ja-Sh] que les valeurs propres de Hecke d'une représentation générique non ramifiée unitaire vérifient : $|z_i(\Pi_x)| < q_x^{1/2}$.

Comme on ne sait pas encore à l'heure actuelle prouver la généricité de Π_x, Laumon, Rapoport et Stuhler utilisent un argument plus complexe, de nature géométrique, pour prouver les parties (iii) et (iv) du théorème.

Cet argument (où on étudie la représentation galoisienne restreinte à $\mathrm{Gal}(\overline{F}_\infty/F_\infty)$) repose sur le théorème de Lefschetz difficile, sur le théorème (de Deligne) de pureté de la filtration de monodromie, et utilise aussi les propriétés des fonctions L.

6. LA CONJECTURE DE LANGLANDS LOCALE POUR LES CORPS D'ÉGALE CARACTÉRISTIQUE

6.1. Soit K un corps local non archimédien et $d \geq 1$ un entier. Désignons par $\mathcal{A}_K(d)$ l'ensemble des (classes d'équivalence de) représentations complexes admissibles irréductibles du groupe $\mathrm{GL}_d(K)$, et par $\mathcal{G}_K(d)$ l'ensemble des (classes d'équivalence de) représentations continues complexes ϕ-semi-simples de dimension d du groupe de Weil-Deligne W'_K. La *conjecture de Langlands locale* (*cf.* [He 1]) prédit l'existence pour chaque d d'une bijection entre $\mathcal{A}_K(d)$ et $\mathcal{G}_K(d)$, ces bijections étant astreintes à vérifier de nombreuses propriétés (préservation des facteurs L et ε qu'on sait définir de chaque côté pour les paires de représentations, compatibilité à la torsion, au passage à la contragrédiente...). Ces bijections doivent se restreindre en des bijections entre $\mathcal{A}^0_K(d)$, ensemble des représentations *cuspidales* irréductibles à caractère central d'ordre fini, et $\mathcal{G}^0_K(d)$, ensemble des représentations *irréductibles* de degré d de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

Réciproquement, si on dispose pour tout d de bijections convenables entre $\mathcal{A}^0_K(d)$ et $\mathcal{G}^0_K(d)$, il existe une façon canonique de les étendre en des bijections entre $\mathcal{A}_K(d)$ et $\mathcal{G}_K(d)$ (*cf.* [He 1], [He 4]).

Kutzko, pour $d = 2$, puis Henniart, pour $d = 3$, avaient prouvé cette conjecture locale. Le dernier résultat fondamental de [L-R-S] est une preuve de la conjecture de Langlands locale (pour tout d) pour K *un corps local d'égale caractéristique* p (autrement dit les corps $K \simeq \mathbb{F}_q((T))$).

6.2. THÉORÈME. — *Soit K un corps local d'égale caractéristique p. Il existe une famille de bijections :*

$$\mathcal{A}^0_K(d) \to \mathcal{G}^0_K(d)\ , \quad \pi \mapsto \sigma_\pi,$$

telles que les propriétés suivantes soient satisfaites :

(i) *Pour chaque* $\pi \in \mathcal{A}_K^0(d)$, $\pi' \in \mathcal{A}_K^0(d')$, *on a :*

$$L(\sigma_\pi \otimes \sigma_{\pi'}, s) = L(\pi \times \pi', s), \quad \varepsilon(\sigma_\pi \otimes \sigma_{\pi'}, s) = \varepsilon(\pi \times \pi', s).$$

(ii) *Pour chaque* $\pi \in \mathcal{A}_K^0(d)$: $\sigma_{\check{\pi}} = \check{\sigma}_\pi$ *(contragrédiente).*

(iii) *Le déterminant de* σ_π *correspond par la théorie locale du corps de classes (normalisation "géométrique") au caractère central de* π.

(iv) *Si* $\pi \in \mathcal{A}_K^0(d)$ *et si* χ *est un caractère d'ordre fini de* K^* *(d'où un caractère, noté aussi* χ, *de* $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$*), on a :*

$$\sigma_{(\pi\otimes\chi)} = \sigma_\pi \otimes \chi \qquad (\textit{compatibilité à la torsion}).$$

Henniart prouve dans l'appendice [He 3] à [L-R-S] que les propriétés ci-dessus *caractérisent* la famille des bijections obtenues. Voir aussi [He 4] pour l'extension en des bijections $\mathcal{A}_K(d) \to \mathcal{G}_K(d)$.

6.3. A vrai dire, le théorème précédent est démontré dans [L-R-S] non pas pour des représentations à valeurs complexes, mais pour des représentations ℓ-adiques, i.e. à valeurs dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$. Cela revient au même : tant du côté automorphe que galoisien, les objets considérés admettent des définitions purement algébriques, et on peut transporter la bijection au moyen d'un isomorphisme $\overline{\mathbf{Q}}_\ell \simeq \mathbf{C}$ de sorte que les facteurs L et ε se correspondent (*cf.* [He 4]). Changeant légèrement de notations, nous fixons donc un nombre premier $\ell \neq p$, et nous notons désormais $\mathcal{A}_K^0(d)$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentations cuspidales irréductibles de $\mathrm{GL}_d(K)$, à caractère central d'ordre fini, et $\mathcal{G}_K^0(d)$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentations irréductibles de dimension d de $Gal(\overline{K}/K)$, à déterminant d'ordre fini. Nous allons maintenant décrire dans ce cadre les principales étapes de la preuve du théorème (6.2).

6.4. L'idée de la construction des applications $\pi \to \sigma_\pi$ est de procéder par *voie globale* en faisant usage du théorème (4.4.2). Choisissons pour cela un corps global F de caractéristique p ainsi qu'une place x_0 de F tels que le complété F_{x_0} soit isomorphe à K (nous fixons un tel isomorphisme). Choisissons ensuite deux autres places ∞ et x_1 (distinctes et distinctes de x_0). Pour tout entier $d \geq 1$, notons D_d l'algèbre à division de centre F, de dimension d^2, et d'invariants :

$$\mathrm{inv}_x(D_d) = \begin{cases} 1/d & \text{si } x = x_0, \\ -1/d & \text{si } x = x_1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le lemme suivant, démontré dans [L-R-S] au moyen d'une formule des traces de Selberg simplifiée, permet de voir toute $\pi \in \mathcal{A}_K^0(d)$ comme composante en x_0 d'une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}_F)$:

6.4.1. LEMME. — *Donnons-nous $\pi \in \mathcal{A}_K^0(d)$ et une place $x_2 \notin \{x_0, x_1, \infty\}$ de F. Il existe alors une représentation automorphe parabolique $\Pi = \bigotimes \Pi_v$ de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A}_F)$ telle que $\Pi_\infty \simeq \mathrm{St}_\infty$, $\Pi_{x_0} \simeq \pi$, et que Π_{x_1} et Π_{x_2} soient cuspidales.*

Puis un lemme de Henniart permet de transférer Π au groupe $G_d(\mathbb{A}_F) = (D_d \otimes \mathbb{A}_F)^*$; c'est un cas particulier de cette correspondance de Jacquet-Langlands généralisée, qu'on aimerait bien faire marcher en général. Noter que l'on a $G_d(F_y) \simeq \mathrm{GL}_d(F_y)$ pour tout $y \notin \{x_0, x_1\}$.

6.4.2. LEMME. — *Soit Π comme dans le lemme précédent. Il existe alors une (unique) représentation automorphe $\widetilde{\Pi}$ de $G_d(\mathbb{A}_F)$ telle que, pour tout $y \notin \{x_0, x_1\}$, on ait : $\widetilde{\Pi}_y \simeq \Pi_y$. De plus la multiplicité $m(\widetilde{\Pi})$ vaut 1.*

6.5. On applique maintenant le théorème (4.4.2) : il correspond à $\widetilde{\Pi}$ une représentation $V^{d-1}_{\widetilde{\Pi}^\infty}$ de dimension d du groupe $Gal(\overline{F}/F)$. Notons $\Sigma(\widetilde{\Pi})_{x_0}$ la restriction de cette représentation à un groupe de décomposition en x_0, tordue par le quasi-caractère non ramifié qui envoie Frob_{x_0} sur $q_{x_0}^{(1-d)/2}$ (cette opération rend le déterminant d'ordre fini) : on obtient ainsi une représentation du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

Notre construction dépend de choix (celui de x_2, celui de Π) et il n'est pas clair a priori que $\Sigma(\widetilde{\Pi})_{x_0}$ n'en dépend pas. Nous notons provisoirement $\Sigma(\pi)$ l'ensemble des représentations $\Sigma(\widetilde{\Pi})_{x_0}$ (à équivalence près) obtenues pour tous les choix possibles. Un raisonnement qui utilise la théorie des fonctions L globales (lesquelles admettent des équations fonctionnelles, dont on sait, tant du côté automorphe que galoisien, exprimer les constantes comme produits de constantes locales) permet de déduire de (4.4.2) le :

6.5.1. LEMME.

(i) *Soient* $\pi \in \mathcal{A}_K^0(d)$ *et* $\sigma \in \Sigma(\pi)$. *Alors* $\det \sigma$ *correspond au caractère central de* π.

(ii) *Si* $\pi \in \mathcal{A}_K^0(d)$ *et* $\sigma \in \Sigma(\pi)$, *alors* $\check{\sigma} \in \Sigma(\check{\pi})$.

(iii) *Pour* $\pi \in \mathcal{A}_K^0(d)$, $\sigma \in \Sigma(\pi)$, *et pour un caractère* χ *d'ordre fini de* K^*, *on a* : $\sigma \otimes \chi \in \Sigma(\pi \otimes \chi)$.

(iv) *Pour* $\pi \in \mathcal{A}_K^0(d)$, $\pi' \in \mathcal{A}_K^0(d')$, $\sigma \in \Sigma(\pi)$, $\sigma' \in \Sigma(\pi')$, *on a* :

$$\begin{cases} L(\sigma \otimes \sigma', s) = L(\pi \times \pi', s), \\ \varepsilon(\sigma \otimes \sigma', s) = \varepsilon(\pi \times \pi', s). \end{cases}$$

6.6. Le lemme suivant permet alors de conclure que les ensembles $\Sigma(\pi)$ se réduisent à un élément σ_π :

LEMME. — *Soit* $\pi \to \Sigma(\pi)$ *une application qui à tout* $\pi \in \mathcal{A}_K^0(d)$ *(d fixé) associe un ensemble non vide* $\Sigma(\pi)$ *de classes d'équivalence de représentations de dimension d de* $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, *à déterminant d'ordre fini. Supposons que soient satisfaites les propriétés suivantes* :

(i) $\forall \pi, \pi' \in \mathcal{A}_K^0(d)$, $\forall \sigma \in \Sigma(\pi)$, $\forall \sigma' \in \Sigma(\pi')$: $L(\sigma \otimes \sigma', s) = L(\pi \times \pi', s)$.

(ii) $\sigma \in \Sigma(\pi) \Rightarrow \check{\sigma} \in \Sigma(\check{\pi})$.

Alors pour tout $\pi \in \mathcal{A}_K^0(d)$, $\Sigma(\pi)$ *est réduit à un élément* $\sigma_\pi \in \mathcal{G}_K^0(d)$. *De plus, l'application* $\pi \to \sigma_\pi$ *est injective.*

6.7. On a donc obtenu à ce stade des *injections* $\pi \to \sigma_\pi$ qui satisfont à toutes les propriétés énoncées dans le théorème (6.2). Pour conclure, il nous reste à faire appel à la *conjecture de Langlands locale numérique*, prouvée par Henniart :

THÉORÈME [He 2]. — *Toute application injective* $\mathcal{A}_K^0(d) \to \mathcal{G}_K^0(d)$ *qui préserve les conducteurs et qui est compatible à la torsion par les caractères non ramifiés est une bijection.*

RÉFÉRENCES

[An] ANDERSON, G. — *t-motives*, Duke Math. Journal 53 (1986), 457–502.

[Bo-Ja] BOREL, A. et JACQUET, H. — *Automorphic forms and automorphic Representations*, dans : Automorphic forms, Representations and L-functions, Proc. Symp. Pure Math., Vol 33, Tome 1, A.M.S., Providence (1979), 189–202.

[Ca 1] CARTIER, P. — *Representations of p-adic groups : a survey*, dans Automorphic forms, Representations and L-functions, Proc. Symp. Pure Math., Vol 33, Tome 1, A.M.S., Providence (1979), 111–156.

[Ca 2] CARTIER, P. — *La conjecture locale de Langlands pour* GL(2) *et la démonstration de Ph. Kutzko*, Sém. Bourbaki, Fev 1980, exp. 550, Lecture Notes in Math. 842, Springer-Verlag (1981), 112–138.

[Cl] CLOZEL, L. — *Motifs et formes automorphes : applications du principe de fonctorialité*, dans : Automorphic Forms, Shimura Varieties and L-functions, Proceedings of the Ann Arbor Conference, Academic Press (1990), T.1, 77–159.

[De] DELIGNE, P. — *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*, Modular functions of one variable II, Lecture Notes in Math. 349, Springer-Verlag (1973), 501–597.

[De-Hu] DELIGNE, P. et HUSEMÖLLER, D. — *Survey of Drinfeld modules*, dans : Current Trends in Arithmetical Algebraic Geometry, Contemporary Mathematics 67, A.M.S. (1987), 25–91.

[De-Ka-Vi] DELIGNE, P., KAZHDAN, D., VIGNÉRAS, M.-F. — *Représentations des algèbres centrales simples p-adiques*, dans Représentations des groupes réductifs sur un corps local (Bernstein, Deligne, Kazhdan, Vignéras), Hermann (1984), 33–118.

[Dr 1] DRINFELD, V.G. — *Elliptic modules,* Math. USSR Sbornik 23 (1974), 561–592.

[Dr 2] DRINFELD, V.G. — *Elliptic modules II*, Math. USSR Sbornik 31 (1977), 159–170.

[Dr 3] DRINFELD, V.G. — *Commutative subrings of certain non commutative rings*, Funct. Anal. and Appl. 10 (1976), 107–115.

[Dr 4] DRINFELD, V.G. — *Varieties of modules of F-sheaves*, Funct. Anal. and Appl. 21 (1987), 107–122.

[Dr 5] DRINFELD, V.G. — *The proof of Petersson's conjecture for* GL(2) *over a global field of characteristic p*, Funct. Anal. and Appl. 22 (1988), 28–43.

[Dr 6] DRINFELD, V.G. — *Cohomology of compactified manifolds of modules of F-sheaves of rank 2*, Journal of Soviet math. 46, n° 1 (1989), 1789–1821.

[Ha-Na] HARDER, G. et NARASIMHAN, M.S. — *On the cohomology of moduli spaces of vector bundles on curves*, Math. Annalen 212 (1975), 215–248.

[He 1] HENNIART, G. — *Le point sur la conjecture de Langlands pour* GL(n) *sur un corps local*, Séminaire de théorie des nombres, Paris 1983–1984, Progress in Math, Birkhäuser (1985), 115–131.

[He 2] HENNIART, G. — *La conjecture de Langlands locale numérique pour* GL(n), Ann. Sci. E.N.S. (IV), 21 (1988), 145–203.

[He 3] HENNIART, G. — *Caractérisation de la correspondance de Langlands locale par les facteurs ε de paires*, appendice à [L-R-S].

[He 4] HENNIART, G. — *La correspondance de Langlands locale : caractérisation et propriétés fonctorielles* (en préparation).

[Ja-Sh] JACQUET, H. et SHALIKA, J. — *On Euler products and the classification of automorphic representations, I*, Amer. J. of Math. 103 (1981) 499–558, II, Amer. J. of Math. 103 (1981), 777–815.

[Ko] KOTTWITZ, R. — *On the λ-adic representations associated to some simple Shimura varieties*, preprint (1989).

[Kr] KRICHEVER, I.M. — *Algebro-geometric constructions of the Zakharov-Shabat equations and their periodic solutions,* Dokl. Akad. Nauk SSSR 227, n° 2 (1976), 291–294.

[La] LANGLANDS, R.P. — *Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Märchen.* dans : Automorphic Forms, Representations, and L-functions, Proc. Symp. Pure Math., Vol 33, Tome 2, A.M.S. Providence (1979), 205–246.

[Lau 1] LAUMON, G. — *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil,* Publ. Math. I.H.E.S. 65 (1987), 131–210.

[Lau 2] LAUMON, G. — *Cohomology with compact support of Drinfeld modular varieties*, part. I et II, prépublications de l'Université de Paris-Sud, 91–01 et 92–12.

[L-R-S] LAUMON, G., RAPOPORT, M., STUHLER, U. — $\mathcal{D}$-elliptic sheaves and the Langlands correspondence, prépublication (1991).

[Mu] MUMFORD, D. — *An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equations, Korteweg – de Vries equation and related non-linear equations,* Internat. Symp. on Algebraic geometry (Kyoto 1977), Kinokuniya, Tokyo 1977, 115–153.

[Ro] ROGAWSKI, J. — *Representations of* GL(n) *and division algebras over a p-adic field,* Duke Math. J. 50 (1983), 161–196.

Henri CARAYOL
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
7, rue René-Descartes
67084 Strasbourg Cedex