Astérisque

JEAN-MARC FONTAINE

Valeurs spéciales des fonctions L des motifs

Astérisque, tome 206 (1992), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 751, p. 205-249
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1991-1992__34__205_0>

© Société mathématique de France, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
44ème année, 1991-92, n° 751

Février 1992

VALEURS SPÉCIALES DES FONCTIONS L DES MOTIFS

par **Jean–Marc FONTAINE**

Il y a tout juste sept ans que Soulé a exposé dans un séminaire Bourbaki [So85] les conjectures de Deligne et Beilinson[1] donnant, entre autres, une formule pour $L(H^m(X), r)$, où X est une variété projective lisse sur F et où $r \in \mathbb{Z}$, **à multiplication par un nombre rationnel près**. Les conjectures de Bloch et Kato ([BK90]), qui sont l'objet central de ce rapport, prédisent ce que devrait être ce nombre rationnel.

J'ai fait le choix discutable de privilégier les conjectures aux dépens des résultats. Ces derniers sont encore très partiels (voir à ce sujet les rapports de B. Perrin–Riou [Pe89], Gross [Gr91] et Rubin [Ru91] sur la conjecture de Birch et Swinnerton–Dyer ; le livre [RSS88] et les rapports de Ramakrishnan [Ra89] et de Deninger et Scholl [DS91] sur les conjectures de Deligne et Beilinson) mais suffisamment encourageants pour que l'on puisse penser que la situation devrait évoluer rapidement.

§ 1. — Introduction

Dans tout ce qui suit E et F sont deux extensions finies de $\mathbb{Q}$. On peut espérer avoir un jour une bonne définition de la catégorie $\mathcal{MM}_F(E)$ des **motifs mixtes sur F à coefficients dans E.** A un tel motif M, on est sensé savoir associer **une fonction** $L(M, s)$ holomorphe pour $Re(s) \gg 0$ à valeurs dans $\mathbb{C} \otimes E$. On s'attend à ce que cette fonction admette un prolongement méromorphe dans tout le plan complexe et on voudrait donner une interprétation, au moins conjecturale, de ses valeurs aux entiers naturels ; autrement dit on voudrait généraliser les conjectures de Birch et Swinnerton–Dyer qui correspondent à $L(M, 0)$ lorsque M est le motif pur de poids -1 associé à une variété abélienne définie sur F (avec $E = \mathbb{Q}$). Citons comme exemples de fonctions L que l'on rencontre dans ce cadre les fonctions L d'Artin associées aux représentations finies de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ à coefficients dans

[1] voir aussi les articles originaux de Bloch [Bl84], Deligne [De79] et Beilinson [Be85].

E, celles que l'on associe aux formes modulaires "nouvelles", les fonctions $L(H^m(X), s)$, où X est une variété projective non singulière sur F et $m \in \mathbb{N}$.

En remplaçant M par son "tordu à la Tate" $M(i)$, on se ramène à étudier la valeur en $s = 0$. Soit r_M l'unique entier tel que $s^{-r_M} L(M, s)$ tende vers une limite finie non nulle $L^*(M, 0)$ lorsque $s \longmapsto 0$.

Notons $\mathbb{1}_{F,E}$ "l'objet unité" de $\mathcal{MM}_F(E)$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$, posons

$$H^i(F, M) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{MM}_F(E)}(\mathbb{1}_{F,E}, M) .$$

On peut définir (cf. § 6 ci–dessous) le sous–E–espace vectoriel $H^1_f(F, M)$ de $H^1(F, M)$ classifiant les extensions de $\mathbb{1}_{F,E}$ par M ayant "bonne réduction en toutes les places finies de F".

"CONJECTURE" $C_r(M)$[2]. — *Si $M^*(1)$ est le "dual tordu à la Tate de M", alors*

$$r_M = \dim_E H^1_f(F, M^*(1)) - \dim_E H^0(F, M(1)) .$$

On dispose de la **réalisation de Rham** M_{dR} de M, qui est un $E \otimes_{\mathbb{Q}} F$–module de type fini, muni d'une filtration décroissante $(Fil^i M_{dR})_{i \in \mathbb{Z}}$ par des sous–$E \otimes F$–modules, **la filtration de Hodge**. On note t_M et on appelle **espace tangent de** M le quotient $M_{dR}/Fil^0 M_{dR}$. Pour tout $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$, ensemble des places infinies de F, on dispose de la **réalisation Betti** $M_{B,\mathfrak{p}}$ de M qui est un E–espace vectoriel de dimension finie muni d'une action de la conjugaison complexe c si $\mathfrak{p}$ est réelle. On pose $M^+_{B,\mathfrak{p}} = (M_{B,\mathfrak{p}})^c$ si $\mathfrak{p}$ est réelle et $M_{B,\mathfrak{p}}$ sinon.

Pour tout corps K et tout K–espace vectoriel V de dimension finie, notons $\det_K V = \Lambda_K^{\dim V} V$ le déterminant de V et $\det^*_K V$ le dual de $\det_K V$. Posons

$$\begin{aligned} L_f(M) &= \det_E H^0(F, M) \otimes \det^*_E H^1_f(F, M), \\ L_f(M^*(1)) &= \det_E H^0(F, M^*(1)) \otimes \det^*_E H^1_f(F, M^*(1)) \end{aligned}$$

et introduisons enfin **la droite fondamentale de** M

$$\Delta_f(M) = L_f(M) \otimes L_f(M^*(1)) \otimes \det^*_E(\oplus_{\mathfrak{p} \in S_\infty(F)} M^+_{B,\mathfrak{p}}) \otimes \det_E t_M .$$

On va voir que l'on peut, modulo certaines propriétés "conjecturales" de $\mathcal{MM}_F(E)$,

[2] Comme, dans la pratique, on ne sait pas toujours que la fonction L admet un prolongement analytique dans $\mathbb{C}$, il faut comprendre cette conjecture comme disant que la fonction $L(M, s)$, définie pour $Re(s) \gg 0$, admet un prolongement méromorphe dans un ouvert connexe contenant 0 et que son ordre en $s = 0$ est donné par cette formule.

(a) définir un isomorphisme canonique

$$\iota_M : \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \Delta_f(M) \longrightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} E \ ;$$

(b) pour toute place finie λ de E, utilisant la **réalisation λ–adique** M_λ de M, munir $E_\lambda \otimes_E \Delta_f(M)$ d'une norme canonique $|\ |_{\lambda,EP}$.

"CONJECTURE" $C_{DB}(M)$. — *Il existe une base b de $\Delta_f(M)$ (nécessairement unique) telle que*

$$\iota_M(1 \otimes b).L^*(M,0) = 1 \ .$$

"CONJECTURE" $C_{BK}(M)$. — *$C_{DB}(M)$ est vraie et pour toute place finie λ de E,*

$$|1 \otimes b|_{\lambda,EP} = 1 \ .$$

Bien sûr $C_{DB}(M)$ (resp. $C_{BK}(M)$) détermine $L^*(M,0)$ à multiplication par un élément de E^* (resp. $\mathcal{O}_E^*$ près). Lorsque $E = \mathbb{Q}$, $C_{BK}(M)$ détermine donc le nombre réel $L^*(M,0)$ au signe près (celui–ci est "facile" à déterminer : on s'attend à ce que les zéros et les pôles de $L(M,s)$ sur la droite réelle soient tous entiers ; on a $r_{M(i)} = 0$ pour $i \gg 0$ et le signe devrait être égal à la parité de $\sum_{i>0} r_{M(i)}$).

J'ai mis ces conjectures entre guillemets car elles concernent des objets de la catégorie $\mathcal{MM}_F(E)$ dont je ne connais pas de définition précise. Toutefois, on connaît beaucoup d'objets de cette catégorie.

Soit M un "motif connu". Dans deux cas au moins, on peut obtenir une "vraie" conjecture

– celui où M est f–**clos**, i.e. tel que $H^1_f(F,M) = H^1_f(F,M^*(1)) = 0$[3] (lorsque M est pur de poids $\neq -1$, cela revient à dire que M est **critique**) ;

– celui où M est le motif pur de poids -1 associé à une variété abélienne A sur F, munie d'un plongement de E dans $\mathbb{Q} \otimes \mathrm{End}(A)$. La théorie des 1–**motifs** de Deligne fournit alors une sous–catégorie pleine parfaitement bien définie de $\mathcal{MM}_F(E)$ qui est suffisamment grosse pour tous les calculs que l'on veut faire (cf. § 8).

Sinon, et c'est le point de vue "classique" de Beilinson, on essaie de s'en sortir en utilisant la **"cohomologie motivique"**, i.e. en introduisant des E–espaces vectoriels, définis via la K–théorie algébrique, dont on conjecture qu'ils s'identifient à $H^1_f(F,M)$ et $H^1_f(F,M^*(1))$. On a en outre besoin de

[3] Si le formalisme conjectural qui sous–tend la catégorie $\mathcal{MM}_F(E)$ est vraie, il existe une recette universelle pour associer à tout motif M un motif f–clos N et les conjectures sont vraies pour M si et seulement si elles le sont pour N.

connaître certaines applications E–linéaires qui ont pour origine l'un de ces deux espaces vectoriels, ce qui conduit à construire des **"régulateurs"** et, dans certains cas, l'analogue de la **hauteur** de Néron–Tate des variétés abéliennes. Le cas le plus important est celui où $M = H^m(X)(r)$, avec X variété projective lisse sur F, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}$ (et $E = \mathbb{Q}$) (cf. § 9).

Après avoir fixé quelques notations et conventions (§ 2), on attaque la **première partie**, consacrée au **formalisme général**, en faisant quelques "rappels" sur les représentations galoisiennes à coefficients dans E_λ (§ 3); puis on explique (§ 4) comment définir la norme canonique $|\ |_{\lambda,EP}$ à partir de la réalisation λ–adique; ce sont plus ou moins les structures de Hodge mixtes qui jouent le rôle de la réalisation λ–adique aux places archimédiennes et on en discute au § 5; puis on décrit (§ 6) les propriétés formelles que devrait satisfaire la catégorie $\mathcal{MM}_F(E)$, on définit $H^1_f(F, M)$ et on construit l'application ι_M utilisée dans la conjecture $C_{BD}(M)$; on discute au § 7 comment ces conjectures se simplifient lorsque l'on fait certaines restrictions sur les poids de M ou bien lorsque l'on suppose $H^1_f(F, M) = H^1_f(F, M^*(1)) = 0$.

Dans la **deuxième partie**, on discute des **cas particuliers** : 1–motifs (§ 8), motifs de la forme $H^m(X)$, avec X projective lisse sur F (§ 9), motifs mixtes de Tate, motifs d'Artin tordus, $\cdots$ (§ 10).

La **troisième partie** contient divers compléments : au § 11, on explique comment, pour calculer les nombres qui interviennent dans $C_{BK}(M)$, on est conduit à introduire des groupes de Safarevic et des nombres de Tamagawa. Ceci conduit à une autre formulation de $C_{BK}(M)$ qui est (essentiellement) celle de Birch et Swinnerton–Dyer dans le cas des variétés abéliennes et la conjecture originale de Bloch et Kato ([BK90]) dans les cas qu'ils considèrent. Au § 12 enfin, on discute de la notion de E_λ–représentations et de motifs **semi–stables** (on s'attend à ce que tout motif sur F devienne semi–stable sur une extension finie de F). C'est pour les motifs semi–stables que l'on peut espérer développer des techniques permettant de faire progresser de façon significative cette théorie. C'est aussi dans ce contexte que l'on peut interpréter les valeurs de fonctions L incomplètes, comprendre pourquoi les conjectures discutées ici se comportent bien par suite exacte courte, sont compatibles avec l'équation fonctionnelle et comment elles suggèrent certaines propriétés de la catégorie des motifs mixtes (dimension cohomologique 1, F–semi–simplicité,$\cdots$).

Ces "conjectures" et/ou leur différentes traductions sont le résultat (si l'on ose dire) des efforts de beaucoup. Après le travail initial de Birch et Swinnerton–Dyer ([BS63], [BS65]) étendu par Tate [Ta66], les contributions les plus importantes sont sans doute celles de Bloch [Bl84], de Beilinson [Be85] et Deligne [De79] pour $C_{BD}(M)$ et de Bloch et Kato [BK90] pour $C_{BK}(M)$. Dans le point de vue développé ici certaines idées de Bloch [Bl80], Deligne [De85], Jannsen ([Ja88], [Ja89], [Ja90]), Kato [Ka91], Lichtenbaum [Li72], Perrin–Riou [FP91] et Scholl [Sc91] ont également joué un grand rôle[4].

Je voudrais enfin remercier Bernadette Perrin–Riou à qui cet exposé doit beaucoup : cela fait longtemps que nous discutons ensemble de ce sujet et non seulement j'ai bénéficé de ses conseils mais je me suis largement inspiré de nos rédactions communes.

§ 2. — Conventions et notations

Si G est un groupe profini et λ une place finie de E, **une représentation λ–adique de G** est un E_λ-espace vectoriel V de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de G. On a $H^0(G,V) = V^G$ tandis que $H^1(G,V)$ classifie les extensions de la représentation triviale E_λ par V. Lorsque $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ où $\overline{K}$ est une clôture séparable d'un corps K, on écrit aussi $H^i(K,V)$ au lieu de $H^i(G,V)$.

Pour tout corps de nombres K, on note $S(K)$ l'ensemble des places de K. On identifie $S(\mathbb{Q})$ à {nombres premiers} $\cup$ $\{\infty\}$. Pour tout $p \in S(\mathbb{Q})$, on note $S_p(K)$ l'ensemble des places de K au–dessus de p.

Pour fixer les idées, on choisit une clôture algébrique $\overline{F}$ de F et, pour chaque $\mathfrak{p} \in S(F)$, une clôture algébrique $\overline{F}_\mathfrak{p}$ du complété $F_\mathfrak{p}$ et un plongement de $\overline{F}$ dans $\overline{F}_\mathfrak{p}$. On pose $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, $G_\mathfrak{p} = \mathrm{Gal}(\overline{F}_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{p})$ $(\subset G_F)$. Si $\mathfrak{p}$ est infinie, on choisit une identification de $\overline{F}_\mathfrak{p}$ à $\mathbb{C}$. Si $\mathfrak{p}$ est une place finie au–dessus du nombre premier p, on note $I_\mathfrak{p}$ le sous–groupe d'inertie de $G_\mathfrak{p}$; pour toute extension L de $F_\mathfrak{p}$ contenue dans $\overline{F}_\mathfrak{p}$, on note L_0 l'extension maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans L; le corps résiduel $\overline{k}_\mathfrak{p}$ de $\overline{F}_\mathfrak{p}$ est le même que celui de $(\overline{F}_\mathfrak{p})_0$ et est une clôture algébrique du corps résiduel $k_\mathfrak{p}$ de $F_\mathfrak{p}$; on note $\sigma_\mathfrak{p} : \overline{k}_p \longrightarrow \overline{k}_\mathfrak{p}$ l'application $x \longmapsto x^p$ ainsi que l'automorphisme continu de $(\overline{F}_\mathfrak{p})_0$ qui le relève; le groupe $G_\mathfrak{p}/I_\mathfrak{p}$ s'identifie à $\mathrm{Gal}(\overline{F}_\mathfrak{p})_0/(F_\mathfrak{p})_0) = \mathrm{Gal}(\overline{k}_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p})$ et est topologiquement engendré par le Frobenius géométrique $f_\mathfrak{p} = \sigma_\mathfrak{p}^{-r_\cdot}$ où $r_\mathfrak{p} = [k_\mathfrak{p} : \mathbb{F}_p]$.

[4] L'exposition s'inspire largement de [FP91], [FP92] et de Kato [Ka91]. Le point de vue original de Bloch et Kato est expliqué au § 11. Les conjectures originales concernaient des situations moins générales et le rapporteur revendique la responsabilité de toutes les absurdités qui pourraient résulter d'un changement de point de vue ou de généralisations intempestives.

A – Le formalisme général

§ 3. — La fonction L et la droite fondamentale d'une représentation λ-adique de G_F.

Dans ce paragraphe et dans le suivant, λ est une place finie de E au-dessus du nombre premier ℓ.

3.1. — Soit $\mathfrak{p}$ une place finie de F au-dessus du nombre premier p. On renvoie à [FI90], [Il90] ou [Bures] pour la définition du corps $B_{dR,\mathfrak{p}}$ des périodes p-adiques et de son sous-anneau $B_{cris,\mathfrak{p}}$ correspondant à l'extension $\overline{F}_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{p}$. Le corps $B_{dR,\mathfrak{p}}$ est une $\overline{F}_\mathfrak{p}$-algèbre munie d'une filtration décroissante $(Fil^i B_{dR,\mathfrak{p}})_{i\in\mathbb{Z}}$ et d'une action de $G_\mathfrak{p}$. L'anneau $B_{cris,\mathfrak{p}}$ est une sous-$(\overline{F}_\mathfrak{p})_0$-algèbre de $B_{dR,\mathfrak{p}}$ stable par $G_\mathfrak{p}$ et munie d'un endomorphisme φ commutant à l'action de $G_\mathfrak{p}$ et $\sigma_\mathfrak{p}$-semi-linéaire. On a $(B_{dR,\mathfrak{p}})^{G_\mathfrak{p}} = F_\mathfrak{p}$, tandis que $(B_{cris,\mathfrak{p}})^{G_\mathfrak{p}} = (F_\mathfrak{p})_0$.

3.2. — On pose $E_{\lambda,\mathfrak{p}} = E_\lambda$ si $\ell \neq p$ et $= (F_\mathfrak{p})_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_\lambda$ sinon.

Soit V une représentation λ-adique de $G_\mathfrak{p}$ de dimension $b(V)$. Posons

$$\underline{D}_\mathfrak{p}(V) = V^{I_\mathfrak{p}} \text{ si } \ell \neq p \text{ et } \underline{D}_\mathfrak{p}(V) = (B_{cris,\mathfrak{p}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_\mathfrak{p}} \text{ si } \ell = p\ .$$

C'est un $E_{\lambda,\mathfrak{p}}$-module libre de rang fini $b_\mathfrak{p}(V) \leq b(V)$ muni d'une action **linéaire** de $f_\mathfrak{p}$: si $\ell \neq p$, cette action vient de ce que $f_\mathfrak{p}$ appartient à $G_\mathfrak{p}/I_\mathfrak{p}$ qui agit sur $\underline{D}_\mathfrak{p}(V)$; si $\ell = p$, φ agit sur $B_{cris,\mathfrak{p}} \otimes V$ via $b \otimes v \longmapsto \varphi b \otimes v$, $\underline{D}_\mathfrak{p}(V)$ est stable par φ et on fait agir $f_\mathfrak{p}$ via $\varphi^{r_\mathfrak{p}}$[5].

On dit que V **a bonne réduction** si $b_\mathfrak{p}(V) = b(V)$. Si $\ell \neq p$, cela signifie que V est non ramifiée, tandis que, si $\ell = p$, cela signifie que V est cristalline. On note $H^1_f(F_\mathfrak{p}, V)$ le sous-E_λ-espace vectoriel de $H^1(F_\mathfrak{p}, V)$ formé des classes d'extensions W de E_λ par V telles que l'application naturelle $\underline{D}_\mathfrak{p}(W) \longrightarrow \underline{D}_\mathfrak{p}(E_\lambda) = E_{\lambda,\mathfrak{p}}$ soit surjective; lorsque V a bonne réduction, cela revient à demander que W aussi.

En outre, si $\ell = p$, on pose $\underline{D}_{dR,\mathfrak{p}}(V) = (B_{dR,\mathfrak{p}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_\mathfrak{p}}$. C'est un $(F_\mathfrak{p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_\lambda)$-module muni d'une filtration décroissante, indexée par $\mathbb{Z}$, par les sous-$F_\mathfrak{p} \otimes E_\lambda$-modules $Fil^i \underline{D}_{dR,\mathfrak{p}}(V) = (Fil^i B_{dR,\mathfrak{p}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_\mathfrak{p}}$. La dimension de $\underline{D}_{dR,\mathfrak{p}}(V)$ comme $F_\mathfrak{p}$-espace vectoriel est $\leq [E_\lambda : \mathbb{Q}_p] \cdot b(V)$. On dit que V **est de de Rham** si l'on a l'égalité, auquel cas $\underline{D}_{dR,\mathfrak{p}}(V)$ est libre de rang $b(V)$ sur $F_\mathfrak{p} \otimes E_\lambda$ et l'application naturelle

$$B_{dR,\mathfrak{p}} \otimes_{F_\mathfrak{p}} \underline{D}_{dR,\mathfrak{p}}(V) \longrightarrow B_{dR,\mathfrak{p}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

est un isomorphisme.

[5] sic, i.e. il faut prendre $f_\mathfrak{p} = \varphi^{r_\mathfrak{p}}$ et non son inverse!

Enfin, toujours si $\ell = p$, on appelle **espace tangent de** V le $F_{\mathfrak{p}} \otimes E_\lambda$–module $t_{V,\mathfrak{p}} = ((B_{dR,\mathfrak{p}}/Fil^0 B_{dR,\mathfrak{p}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_{\mathfrak{p}}}$. Lorsque V est de de Rham, $t_{V,\mathfrak{p}}$ s'identifie à $\underline{D}_{dR,\mathfrak{p}}(V)/Fil^0 \underline{D}_{dR,\mathfrak{p}}(V)$.

3.3. — Soit maintenant V une représentation λ–adique de G_F. Pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de F, on pose

$$P_{\mathfrak{p}}(V,t) = \det_{E_{\lambda,\mathfrak{p}}}(1 - f_{\mathfrak{p}} t \mid \underline{D}_{\mathfrak{p}}(V))) \ ;$$

c'est un polynôme à coefficients dans E_λ (y compris lorsque $\ell = p$); on a $d^o P_{\mathfrak{p}} \leq b(V)$ avec l'égalité si et seulement si V a bonne réduction en $\mathfrak{p}$.

On va avoir besoin des trois définitions suivantes :

i) Soit S un ensemble fini de places de F contenant $S_\infty(F)$. On dit que V **admet une fonction** L_S **sur** E si, pour tout $\mathfrak{p} \notin S$, $P_{\mathfrak{p}}(V,t) \in E[t]$ et si le produit infini

$$L_S(V,s) = \prod_{\mathfrak{p} \notin S} P_{\mathfrak{p}}(V, N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

converge dans $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} E$ pour $Re(s) \gg 0$. Si $S = S_\infty(F)$, on dit que V admet une fonction L sur E et on pose $L(V,s) = L_{S_\infty(F)}(V,s)$.

ii) On dit que V est **pseudo–géométrique** si elle est non ramifiée en dehors d'un nombre fini de places finies de F et de Rham en toutes les places divisant ℓ.

iii) **On note** $H^1_f(F,V)$ le sous–E_λ–espace vectoriel de $H^1(F,V)$ formé des éléments tels que, pour tout $\mathfrak{p}$, l'image dans $H^1(F_{\mathfrak{p}},V)$ appartient en fait à $H^1_f(F_{\mathfrak{p}},V)$. C'est un E_λ–espace vectoriel de dimension finie.

La représentation triviale E_λ est pseudo–géométrique, admet une fonction L sur E, c'est la fonction ζ de Riemann usuelle, et on a $H^1_f(F,E_\lambda) = 0$. Le fait d'être pseudo–géométrique est stable par sous–objet, quotient, somme directe, produit tensoriel, dual. Si V est pseudo–géométrique, pour tout $r \in \mathbb{Z}$, $V(r)$[6] l'est aussi et $L(V(r),s) = L(V, r+s)$.

3.4. — Pour toute représentation λ–adique pseudo–géométrique V de G_F, on pose $L_f(V) = \det_{E_\lambda} H^0(F,V) \otimes \det^*_{E_\lambda} H^1_f(F,V)$, $V^+ = \oplus_{\mathfrak{p} \in S_\infty(F)} H^0(G_{\mathfrak{p}},V)$ et $t_V = \oplus_{\mathfrak{p} \in S_\ell(F)} t_{V,\mathfrak{p}}$. On introduit **la droite fondamentale de** V,

$$\Delta_f(V) = L_f(V) \otimes L_f(V^*(1)) \otimes \det{}^*_{E_\lambda} V^+ \otimes \det{}_{E_\lambda} t_V \ .$$

[6] Comme d'habitude $\mathbb{Z}_\ell(1) = \varprojlim_{\mu_{\ell^n}}(\overline{\mathbb{Q}})$, si $r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_\ell(r) = Sym^r_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell(1)$ et $\mathbb{Z}_\ell(-r)$ est son dual; enfin $V(r) = V \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell(r)$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$.

L'objectif du paragraphe suivant est de munir cette droite d'une norme canonique.

§ 4. — La norme d'Euler–Poincaré pour une représentation λ–adique pseudo–géométrique[7]

4.1. — Soit $\mathcal{O}_\lambda$ l'anneau des entiers de E_λ. On note $D_{par}(\mathcal{O}_\lambda)$ (resp. $D_{par}(E_\lambda)$ la catégorie dérivée de la catégorie des complexes parfaits de $\mathcal{O}_\lambda$–modules (resp. E_λ–espaces vectoriels).

Si $d \in \mathbf{N}$, $i \in \mathbf{Z}$ et M est un $\mathcal{O}_\lambda$–module libre de rang d ou un E_λ–espace vectoriel de dimension d, on note $\det^i_\lambda M$ la puissance extérieure d–ième de M si i est pair et son dual si i est impair. Si

$$C : \cdots \longrightarrow C^{i-1} \longrightarrow C^i \longrightarrow C^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

est un complexe parfait de $\mathcal{O}_\lambda$–modules (resp. E_λ–espaces vectoriels), on pose $\det_\lambda C = \otimes_{i\in\mathbf{Z}} \det^i_\lambda C^i$ et on l'appelle le déterminant de C. Tout quasi–isomorphisme induit un isomorphisme des déterminants, ce qui permet de parler du **déterminant** d'un objet de $D_{par}(\mathcal{O}_\lambda)$ (ou de $D_{par}(E_\lambda)$). En particulier, on peut parler du déterminant d'un $\mathcal{O}_\lambda$–module de type fini (si $M = M_0/M_{-1}$, avec M_{-1} et M_0 libres de type fini, $\det_\lambda M = \det^0_\lambda M_0 \otimes \det^{-1}_\lambda M_{-1}$). Si

$$C' \longrightarrow C \longrightarrow C''$$

est un triangle distingué de $D_{par}(\mathcal{O}_\lambda)$ (ou de $D_{par}(E_\lambda)$), on peut identifier $\det_\lambda C$ à $\det_\lambda C' \otimes \det_\lambda C''$[8]. Enfin, l'extension des scalaires définit un foncteur de $D_{par}(\mathcal{O}_\lambda)$ dans $D_{par}(E_\lambda)$ et, pour tout C dans $D_{par}(\mathcal{O}_\lambda)$, $\det_\lambda(E_\lambda \otimes C)$ s'identifie à $E_\lambda \otimes \det_\lambda C$, ce qui permet d'identifier $\det_\lambda C$ à un réseau de $\det_\lambda(E_\lambda \otimes C)$.

4.2. — Dans ce qui suit, S est un ensemble fini de places de F contenant toutes les places infinies et toutes les places divisant ℓ. On note S_f l'ensemble des places finies de S, $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F et U_S l'ouvert de Spec $\mathcal{O}_F$ qui est le complémentaire de S_f. L'expression “faisceau” (resp. “$\mathcal{O}_\lambda$–faisceau”,

---

[7] Voir [FP91], note I, ou [Ka91], § 3 pour une présentation plus élémentaire en termes de cohomologie galoisienne. Je dois à Deligne le point de vue décrit ici qui me paraît à la fois plus simple et plus naturel.

[8] Dans ces histoires de déterminants, il y a des problèmes de signes (si $V = \oplus_{i\in I} V_i$ est une somme directe finie, l'identification de $\det_\lambda V$ au produit tensoriel des $\det_\lambda V_i$ dépend, par un signe, de l'ordre dans lequel on écrit les V_i) qui sont sans importance pour ce que nous avons en vue et que nous négligerons.

"E_λ-faisceau") signifie faisceau (resp. $\mathcal{O}_\lambda$-faisceau, E_λ-faisceau) constructible pour la topologie étale[9].

Pour tout $\mathcal{O}_\lambda$-faisceau (resp. E_λ-faisceau) T sur U_S, $R\Gamma_{ét}(U_S,T)$ est un objet de $D^+(\mathcal{O}_\lambda)$[10] (resp. $D_{par}(E_\lambda)$)[11]. Pour tout $\mathfrak{p} \in S_f$, il en est de même de $R\Gamma(F_\mathfrak{p},T)$ (défini comme $R\Gamma_{ét}(\mathrm{Spec}(F_\mathfrak{p}),\nu_\mathfrak{p}^* j_* T)$, où $\nu_\mathfrak{p} : \mathrm{Spec}(F_\mathfrak{p}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$ et $j : U_S \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$ sont les morphismes naturels). La cohomologie relative $R\Gamma_c(U_S,T)$ est $C[-1]$ où C est le cône de $R\Gamma_{ét}(U_S,T) \longrightarrow \oplus_{\mathfrak{p}\in S} R\Gamma(F_\mathfrak{p},T)$. On a $H^i_c(U_S,T)=0$ si $i \neq 1,2,3$ et $R\Gamma_c(U_S,T)$ est un objet de $D_{par}(\mathcal{O}_\lambda)$ (resp. $D_{par}(E_\lambda)$).

On peut donc définir la **droite d'Euler–Poincaré** de T,

$$\Delta_{\lambda,EP}(T) = \det{}_\lambda R\Gamma_c(U_S,T) \ .$$

Il n'est pas difficile de voir que ce déterminant ne dépend que de la fibre générique de T. Si T est de torsion, on a $\Pi_i \# H^i_c(U_S,T)^{(-1)^i} = 1$ et, par conséquent, $\Delta_{\lambda,EP}(T) = \mathcal{O}_\lambda$. On en déduit que, si V est un E_λ-faisceau sur U_S, si l'on choisit un $\mathcal{O}_\lambda$-faisceau T tel que $E_\lambda \otimes T = V$, le réseau $\Delta_{\lambda,EP}(T)$ de $\Delta_{\lambda,EP}(V)$ obtenu est indépendant du choix de T. On note $|\ |_{\lambda,EP}$ l'unique **norme sur** $\Delta_{\lambda,EP}(V)$ telle que, si δ est une base de $\Delta_{\lambda,EP}(T)$, alors $|\delta|_{\lambda,EP}=1$.

Il n'est pas non plus difficile de voir que, si S' est un ensemble fini de places de F contenant S et si V' est un E_λ-faisceau sur $U_{S'}$ qui a la même fibre générale que V, alors $\Delta_{\lambda,EP}(V')$ **s'identifie à** $\Delta_{\lambda,EP}(V)$ **en tant que** E_λ**–droite normée**. Ceci permet en particulier de définir la E_λ-droite normée $\Delta_{\lambda,EP}(V)$ pour n'importe quelle représentation λ-adique de G_F non ramifiée en dehors d'un nombre fini de places : il suffit de choisir un ensemble S comme ci-dessus et un E_λ-faisceau sur U_S de fibre générique V ; le résultat obtenu est indépendant de ces choix.

4.4. — Soit maintenant $\mathfrak{p}$ une place finie de F divisant le nombre premier p et soit V une représentation λ-adique de $G_\mathfrak{p}$. On "coupe" le complexe $R\Gamma(F_\mathfrak{p},V)$

---

9 Voir [SGA4], exp. IV, [SGA5], appendice à l'exp. I, exp. V et VI et [SGA4$\frac{1}{2}$] pour les généralités sur les faisceaux de torsion, $\mathcal{O}_\lambda$-faisceaux et E_λ-faisceaux constructibles.

10 et même de $D_{par}(\mathcal{O}_\lambda)$ si $\ell \neq 2$.

11 Appelons $\mathcal{O}_\lambda$-représentation d'un groupe profini G tout $\mathcal{O}_\lambda$-module de type fini muni d'une action linéaire et continue de G. Soit G_S le groupe de Galois de l'extension galoisienne maximale de F contenue dans $\overline{F}$ non ramifiée en dehors de S. Si T est un $\mathcal{O}_\lambda$-faisceau (resp. un E_λ-faisceau), la fibre générique de T est une $\mathcal{O}_\lambda$-représentation (resp. une représentation λ-adique) de G_S. Inversement toute $\mathcal{O}_\lambda$-représentation (resp. représentation λ-adique) T de G_S est la fibre générique d'un unique $\mathcal{O}_\lambda$-faisceau (resp. E_λ-faisceau) localement constant que nous notons encore T et $R\Gamma_{ét}(U_S,T)$ s'identifie au complexe calculant la cohomologie galoisienne continue $H^*_{cont}(G_S,T)$.

en deux pour obtenir un triangle distingué

$$R\Gamma_f(F_{\mathfrak{p}},V) \longrightarrow R\Gamma(F_{\mathfrak{p}},V) \longrightarrow R\Gamma_{/f}(F_{\mathfrak{p}},V)$$

caractérisé par le fait que $H^1(R\Gamma_f(F_{\mathfrak{p}},V))$ est le sous-E_λ-espace vectoriel $H^1_f(F_{\mathfrak{p}},V)$ de $H^1(F_{\mathfrak{p}},V)$ défini au n° 3.2, que $H^0(R\Gamma_f(F_{\mathfrak{p}},V)) = H^0(F_{\mathfrak{p}},V)$ et que
$H^i(R\Gamma_f(F_{\mathfrak{p}},V)) = 0$ si $i \neq 0,1$.

Soient $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ l'anneau des entiers de $F_{\mathfrak{p}}$, $j_{\mathfrak{p}}$: $\operatorname{Spec} F_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ et $i_{\mathfrak{p}}$: $\operatorname{Spec} k_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ les morphismes naturels. Si $\ell \neq p$, $R\Gamma_f(F_{\mathfrak{p}},V) = R\Gamma(k_{\mathfrak{p}}, i^*_{\mathfrak{p}} j_{\mathfrak{p}*}V) = R\Gamma(k_{\mathfrak{p}}, \underline{D}_{\mathfrak{p}}(V))$. On voit aussi que ce complexe s'identifie au complexe concentré en degrés 0 et 1

$$\underline{D}_{\mathfrak{p}}(V) \longrightarrow \underline{D}_{\mathfrak{p}}(V)$$

(l'application étant $d \longmapsto (f_{\mathfrak{p}}-1)(d)$). En particulier, $\det_\lambda R\Gamma_f(F_{\mathfrak{p}},V) = E_\lambda$.

Si $\ell = p$, et si π désigne la projection de $B_{cris,\mathfrak{p}} \subset B_{dR,\mathfrak{p}}$ sur $B_{dR,\mathfrak{p}}/Fil^0 B_{dR,\mathfrak{p}}$, on peut montrer (cf. par exemple, [BK90], prop. 1.7) que la suite

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow B_{cris,\mathfrak{p}} \longrightarrow B_{cris,\mathfrak{p}} \oplus (B_{dR,\mathfrak{p}}/Fil^0 B_{dR,\mathfrak{p}}) \longrightarrow 0$$

(où $\mathbb{Q}_p \longrightarrow B_{cris,\mathfrak{p}}$ est l'inclusion, tandis que l'application suivante est $b \longmapsto ((\varphi-1)b, \pi b))$ est exacte. Si l'on tensorise avec V et que l'on prend les invariants par $G_{\mathfrak{p}}$, on trouve[12] une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(F_{\mathfrak{p}},V) \longrightarrow \underline{D}_{\mathfrak{p}}(V) \longrightarrow \underline{D}_{\mathfrak{p}}(V) \oplus t_{V,\mathfrak{p}} \longrightarrow H^1_f(F_{\mathfrak{p}},V) \longrightarrow 0$$

qui nous permet d'identifier $R\Gamma_f(F_{\mathfrak{p}},V)$ au complexe concentré en degrés 0 et 1

$$\underline{D}_{\mathfrak{p}}(V) \longrightarrow \underline{D}_{\mathfrak{p}}(V) \oplus t_{V,\mathfrak{p}}\ .$$

En particulier, $\det_\lambda R\Gamma_f(F_{\mathfrak{p}},V)$ s'identifie à $\det^1_\lambda t_{V,\mathfrak{p}}$.

4.5. — Considérons de nouveau un E_λ-faisceau V sur U_S. Définissons la f-**cohomologie de** V comme étant $C[-1]$ où C est le cône $R\Gamma_f(U_S,V)$ du morphisme composé

$$R\Gamma_{\acute{e}t}(U_S,V) \longrightarrow \oplus_{\mathfrak{p}\in S_f} R\Gamma(F_{\mathfrak{p}},V) \longrightarrow \oplus_{\mathfrak{p}\in S_f} R\Gamma_{/f}(F_{\mathfrak{p}},V)\ .$$

[12] Comme $B_{cris,\mathfrak{p}}$ et $B_{dR,\mathfrak{p}}$ ne sont pas des $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie, il faut soit prouver que la suite (*) est scindée en tant que suite de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels topologiques, soit remarquer que l'on peut remplacer $B_{cris,\mathfrak{p}}$ et $B_{dR,\mathfrak{p}}$ par l'union de leurs sous-$\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie stables par $G_{\mathfrak{p}}$.

Les deux triangles distingués

$$R\Gamma_c(U_S,V) \longrightarrow R\Gamma_{ét}(U_S,V) \longrightarrow \oplus_{\mathfrak{p}\in S} R\Gamma(F_{\mathfrak{p}},V)$$

et

$$R\Gamma_f(U_S,V) \longrightarrow R\Gamma_{ét}(U_S,V) \longrightarrow \oplus_{\mathfrak{p}\in S_f} R\Gamma_{/f}(F_{\mathfrak{p}},V)$$

donnent naissance à un troisième

$$R\Gamma_c(U_S,V) \to R\Gamma_f(U_S,V) \to (\oplus_{\mathfrak{p}\in S_f} R\Gamma_f(F_{\mathfrak{p}},V)) \oplus (\oplus_{\mathfrak{p}\in S_\infty(F)} R\Gamma(F_{\mathfrak{p}},V)) \ .$$

De celui–ci, on déduit un isomorphisme

$$(a) \qquad \det_\lambda R\Gamma_f(U_S,V) = \Delta_{\lambda,EP}(V) \otimes \det_\lambda^1 t_V \otimes \det_\lambda V^+ \ .$$

Par ailleurs, le calcul des $H^i_f(U_S,V) := H^i(R\Gamma_f(U_S,V))$ est facile : on trouve que ceux–ci sont nuls, si $i \neq 0,1,2,3$. **On a** $H^0_f(U_S,V) = H^0(F,V)$ **et** $H^1_f(U_S,V) = H^1_f(F,V)$. On voit aussi que $H^3_f(U_S,V)$ **s'identifie au dual de** $H^0(F,V^*(1))$; pour cela, on commence par observer que ce sont tous deux, de façon naturelle, des quotients de $\oplus_{\mathfrak{p}\in S_f} H^2(F_{\mathfrak{p}},V)$ (le premier par définition; le second parce que la dualité locale (cf. par exemple, [Mi86], chap. I, § 2) identifiant chaque $H^2(F_{\mathfrak{p}},V)$ au dual de $H^0(F_{\mathfrak{p}},V^*(1))$ on peut utiliser la transposée de l'injection naturelle $H^0(F,V^*(1)) \longrightarrow \oplus_{\mathfrak{p}\in S_f} H^0(F_{\mathfrak{p}},V^*(1)))$ et on vérifie que ces deux quotients sont les mêmes.

Enfin, si $H^2_0(U_S,V)$ désigne le noyau de l'application naturelle

$$H^2(U_S,V) \longrightarrow \oplus_{\mathfrak{p}\in S_f} H^2(F_{\mathfrak{p}},V) \ ,$$

$H^2_f(U_S,V)$ est la somme directe de $H^2_0(U_S,V)$ et du conoyau $\widetilde{H}^2_f(U_S,V)$ de l'application naturelle

$$H^1(U_S,V) \oplus (\oplus_{\mathfrak{p}\in S_f} H^1_f(F_{\mathfrak{p}},V)) \longrightarrow \oplus_{\mathfrak{p}\in S_f} H^1(F_{\mathfrak{p}},V) \ .$$

La dualité locale (*loc. cit.*) identifie chaque $H^1(F_{\mathfrak{p}},V)$ au dual de $H^1(F_{\mathfrak{p}},V^*(1))$, d'où une application de $\oplus_{\mathfrak{p}\in S_f} H^1(F_{\mathfrak{p}},V)$ dans $H^1_f(U_S,V^*(1))^*$ et les théorèmes de dualité globale de Poitou–Tate (cf. par exemple, [Mi86], chap. II, § 1) identifient son conoyau au dual de $H^2_0(U_S,V)$. Lorsque V **est pseudo–géométrique**, on vérifie que la suite

$$H^1(U_S,V) \oplus (\oplus_{\mathfrak{p}\in S_f} H^1_f(F_{\mathfrak{p}},V)) \to \oplus_{\mathfrak{p}\in S_f} H^1(F_{\mathfrak{p}},V) \to$$
$$\to H^1_f(U_S,V^*(1))^* \to H^2_0(U_S,V) \to 0$$

est exacte. On a donc une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}^2_f(U_S,V) \longrightarrow H^1_f(U_S,V^*(1))^* \longrightarrow H^2_0(U_S,V) \longrightarrow 0\ .$$

Comme $H^2_f(U_S,V) = \widetilde{H}^2_f(U_S,V) \oplus H^2_0(U_S,V)$, $\det^1_\lambda H^1_f(U_S,V^*(1))$ s'identifie alors à $\det_\lambda H^2_f(U_S,V)$. Finalement, on obtient un isomorphisme canonique

$$\det_\lambda R\Gamma_f(U_S,V) = L_f(V) \otimes L_f(V^*(1))\ ;$$

joint à l'isomorphisme (a) cela fournit un isomorphisme canonique entre $\Delta_f(V)$ et $\Delta_{\lambda,EP}(V)$. On s'en sert pour identifier ces deux droites et $\Delta_f(V)$ hérite de la norme $|\ |_{\lambda,EP}$ définie sur $\Delta_{\lambda,EP}(V)$.

§ 5. — Structures de Hodge mixtes

5.1. — Lorsque $\ell \neq \infty$, ce sont les structures de Hodge mixtes qui jouent le rôle des représentations ℓ-adiques.

Si V est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, posons $V_{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} V$ et notons $\tau : V_{\mathbf{C}} \to V_{\mathbf{C}}$ l'application qui envoie $z \otimes v$ sur $\overline{z} \otimes v$. Rappelons (cf. [De71]) qu'**une $\mathbf{R}$-structure de Hodge mixte sur $\mathbf{C}$** est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel V de dimension finie, muni d'une filtration croissante (**la filtration par le poids**) $(W_m V)_{m\in\mathbf{Z}}$ par des sous-$\mathbf{R}$-espaces vectoriels, avec $W_i V = 0$ si $i \ll 0$ et $= V$ si $i \gg 0$, et d'une filtration décroissante (**la filtration de Hodge**), $(Fil^i V_{\mathbf{C}})_{i\in\mathbf{Z}}$, de $V_{\mathbf{C}}$ par des sous-$\mathbf{C}$-espaces vectoriels, telles que, si $\overline{Fil}^{\cdot}$ désigne la filtration conjuguée de $Fil^{\cdot}$ (i.e. la filtration de $V_{\mathbf{C}}$ définie par $\overline{Fil}^i V_{\mathbf{C}} = \tau(Fil^i V_{\mathbf{C}})$) alors $W_\cdot$, $Fil^{\cdot}$ et $\overline{Fil}^{\cdot}$ soient opposées (i.e. telles que, pour tout $m \in \mathbf{Z}$, si l'on note encore Fil et $\overline{Fil}$ les filtrations induites sur $gr^W_m V_{\mathbf{C}}$, alors l'application naturelle

$$Fil^r gr^W_m V_{\mathbf{C}} \oplus \overline{Fil}^{m+1-r} gr^W_m V_{\mathbf{C}} \longrightarrow gr^W_m V_{\mathbf{C}}$$

soit un isomorphisme pour tout $r \in \mathbf{Z}$).

Rappelons que les entiers m tels que $gr^W_m V_{\mathbf{C}} \neq 0$ sont **les poids de** V et que V est **pure** si elle a un et un seul poids.

Les $\mathbf{R}$-structures de Hodge mixtes sur $\mathbf{C}$ forment, de manière évidente, une catégorie abélienne $\mathbf{R}$-linéaire $\underline{SH}_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$. On note $\underline{SH}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C})$ la catégorie des **$\mathbf{C}$-structures de Hodge mixtes sur $\mathbf{C}$**, i.e. la catégorie $\mathbf{C}$-linéaire déduite de $\underline{SH}_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ par extension des scalaires. Un objet V de cette catégorie est donc une $\mathbf{R}$-structure de Hodge mixte sur $\mathbf{C}$ munie d'un $\mathbf{R}$-plongement de $\mathbf{C}$ dans l'anneau de ses endomorphismes (attention que, bien que l'espace vectoriel réel sous-jacent à V soit muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, c'est seulement sur $V_{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} V$ qu'est définie la filtration de Hodge).

5.2. — **Une $\mathbf{R}$–structure de Hodge mixte sur $\mathbf{R}$** peut être définie comme étant une $\mathbf{R}$–structure de Hodge mixte sur $\mathbf{C}$ munie d'une action de $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$. Cela revient donc à se donner une décomposition de V en somme directe

$$V = V^+ \oplus V^-$$

compatible avec la filtration par le poids et telle que la filtration de Hodge provienne, par extension des scalaires, d'une filtration définie sur $V_{dR} = (V_{\mathbf{C}})^{\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})} = V^+ \oplus i.V^-$. On obtient encore une catégorie abélienne $\underline{SH}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$ et on note aussi $\underline{SH}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C})$ la catégorie des $\mathbf{C}$–structures de Hoge mixtes sur $\mathbf{R}$, i.e. la catégorie déduite de $\underline{SH}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$ par l'extension des scalaires $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$.

5.3. — Dans la suite de ce paragraphe, K, $L \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$, $\overline{K} = \mathbf{C}$, $G_K = \mathrm{Gal}(\mathbf{C}/K)$ et V est une L–structure de Hodge mixte sur K[13].

Si $K = \mathbf{C}$, on pose $V^+ = V$ et $V_{dR} = V_{\mathbf{C}}$. Dans tous les cas, on a donc $V^+ = V^{G_K}$ et $V_{dR} = (V_{\mathbf{C}})^{G_K}$.

On note $\mathbb{1}_{K,L}$ l'objet–unité de la catégorie $\underline{SH}_K(L)$, i.e. l'unique objet pur de poids 0 vérifiant $\mathbb{1}_{K,L} = (\mathbb{1}_{K,L})^+ = L$. On laisse au lecteur le soin de définir le produit tensoriel de deux objets et le dual d'un objet[14]. L'objet de Tate $\mathbb{1}_{K,L}(1)$ est l'unique objet pur de poids -2 tel que $\mathbb{1}_{K,L}(1) = L \cdot (2\pi i)$, avec $\mathbb{1}_{K,L}(1)^- = \mathbb{1}_{K,L}(1)$ si $K = \mathbf{R}$. On note $V^*(1)$ le produit tensoriel du dual de V par $\mathbb{1}_{K,L}(1)$.

On pose $t_V = V_{dR}/Fil^0 V_{dR}$. L'inclusion de V dans $V_{\mathbf{C}}$ induit en prenant les parties fixes par G_K et en passant au quotient une application L–linéaire

$$\alpha_V : V^+ \longrightarrow t_V \ .$$

5.4. — Pour tout $i \in \mathbf{N}$, on pose $H^i(K, V) = \mathrm{Ext}^i_{\underline{SH}_K(L)}(\mathbb{1}_{K,L}, V)$. Ce sont des L–espaces vectoriels de dimension finie, nuls pour $i \neq 0, 1$. Dans la suite, le noyau et le conoyau de α_V vont jouer un grand rôle alors qu'il semblerait plus naturel de considérer les $H^i(K, V)$[15]. Ceux–ci sont étroitement liés à ceux–là :

[13] On appliquera cela à $K = F_{\mathfrak{p}}$ et $L = E_\lambda$, avec $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$ et $\lambda \in S_\infty(E)$ (rappelons que l'on a identifié $\overline{F}_{\mathfrak{p}}$ et $\mathbf{C}$).

[14] La catégorie $\underline{SH}_K(L)$ est une catégorie tannakienne neutre ([DM82], def. 2.19) sur L.

[15] Si l'on "oublie" la filtration par le poids, on peut voir V comme un objet d'une catégorie additive L–linéaire non abélienne; alors $\mathrm{Ker}\,\alpha_V$ s'identifie au L–espace vectoriel des morphismes de $\mathbb{1}_{K,L}$ dans V dans cette catégorie, tandis que $\mathrm{Coker}\ \alpha_V$ classifie les "extensions" de $\mathbb{1}_{K,L}$ par V. En particulier, toute suite exacte courte

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

on a en effet $H^i(K,V) = H^i(K,W_0V)$ et, si $W_0V = V$, $H^0(K,V)$ s'identifie à $\operatorname{Ker}\alpha_V$ et $H^1(K,V)$ à $\operatorname{Coker}\alpha_V$; d'où une suite exacte de L–espaces vectoriels

$$0 \to H^0(K,V) \to \operatorname{Ker}\alpha_V \to \operatorname{Ker}\alpha_{V/W_0V} \to H^1(K,V) \to \operatorname{Coker}\alpha_V \to 0$$

et on voit que $\operatorname{Ker}\alpha_{V/W_0V}$ s'identifie au dual de $H^1(K,(V/W_0V)^*(1))$.

On vérifie facilement que l'on dispose d'une dualité parfaite

$$\operatorname{Coker}\alpha_V \times \operatorname{Ker}\alpha_{V^*(1)} \longrightarrow L\ .$$

§ 6. — Les motifs sur F et leurs réalisations

On note $\mathbb{A}_f(\mathbb{Q})$ (resp. $\mathbb{A}_f(E)$) l'anneau des adèles finies de $\mathbb{Q}$ (resp. E). On pose $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ et, pour tout $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$, $B_{dR,\infty} = \overline{F}_\mathfrak{p} = \mathbb{C}$.

6.1. — Faute de connaître la catégorie $\mathcal{MM}_F(E)$, il est d'usage d'introduire une catégorie "fourre-tout" parfaitement bien définie et jouissant de propriétés agréables, sensée contenir $\mathcal{MM}_F(E)$ et dans laquelle on essaie de faire le maximum du travail (cf. par exemple : [De90], § 1; [Ja90], § 2; [BK90], def. 5.5; [FP91], note II, § 1; $\cdots$). Celle d'aujourd'hui, $\mathcal{C}_F(E)$ va être définie au n° suivant. Commençons par noter $\mathcal{C}_{F,0}$ la catégorie suivante :

– Un objet M de $\mathcal{C}_{F,0}$ consiste en les données suivantes :

i) un F–espace vectoriel de dimension finie M_{dR}, muni d'une filtration décroissante $(Fil^iM_{dR})_{i\in\mathbb{Z}}$ par des sous–F–espaces vectoriels, avec $Fil^iM_{dR} = M_{dR}$ si $i \ll 0$ et $= 0$ si $i \gg 0$;

ii) pour chaque $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$, un $\mathbb{Q}$–espace vectoriel $M_{B,\mathfrak{p}}$, muni d'une action de $G_\mathfrak{p}$ (on pose $M^+_{B,\mathfrak{p}} = (M_{B,\mathfrak{p}})^{G_\mathfrak{p}}$);

iii) un $\mathbb{A}_f(\mathbb{Q})$–module libre de rang fini M_f, muni d'une action linéaire et continue de G_F; si, pour ℓ premier, on note M_ℓ sa ℓ–composante, on demande que M_ℓ soit non ramifiée en dehors d'un nombre fini de places;

iv) pour chaque $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$, un isomorphisme de $\mathbb{A}_f(\mathbb{Q})[\operatorname{Gal}(\overline{F}_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{p})]$–modules

$$i^B_{M,\mathfrak{p}} : \mathbb{A}_f(\mathbb{Q}) \otimes_E M_{B,\mathfrak{p}} \longrightarrow M_f\ ;$$

---

de $\underline{SH}_K(L)$ donne naissance à une suite exacte longue

$$0 \to \operatorname{Ker}\alpha_{V'} \to \operatorname{Ker}\alpha_V \to \operatorname{Ker}\alpha_{V''} \to \operatorname{Coker}\alpha_{V'} \to \operatorname{Coker}\alpha_V \to \operatorname{Coker}\alpha_{V''} \to 0.$$

v) pour chaque place $\mathfrak{p} \in S_p(F)$ (p fini ou non), si l'on note $M_\mathfrak{p}$ le $\mathbf{Q}_p[G_\mathfrak{p}]$–module sous–jacent à M_p si p est fini et à $\mathbf{R} \otimes_\mathbf{Q} M_{B,\mathfrak{p}}$ sinon, un isomorphisme de $B_{dR,\mathfrak{p}}$–espaces vectoriels, compatible avec l'action de $G_\mathfrak{p}$,

$$i_{M,\mathfrak{p}} : B_{dR,\mathfrak{p}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} M_\mathfrak{p} \longrightarrow B_{dR,\mathfrak{p}} \otimes_F M_{dR}{}^{16}$$

et vérifiant, pour tout $r \in \mathbf{Z}$, lorsque $p \neq \infty$,

$$i_{M,\mathfrak{p}}(Fil^r B_{dR,\mathfrak{p}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} M_\mathfrak{p}) = \sum_{s+t=r} (Fil^s B_{dR,\mathfrak{p}} \otimes_F Fil^t M_{dR}) \, .$$

– Si $M = (M_{dR}, (M_{B,\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in S_\infty(F)}, M_f)$ et $N = (N_{dR}, (N_{B,\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in S_\infty(F)}, N_f)$ sont deux objets de $\mathcal{C}_{F,0}$ un morphisme $\eta : M \to N$ est la donnée d'applications $(\eta_{dR}, (\eta_{B,\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in S_\infty(F)}, \eta_f)$ vérifiant toutes les compatibilités que l'on pense.

6.2. — La catégorie $\mathcal{C}_{F,0}$ est abélienne et même $\mathbf{Q}$–linéaire. On note $\mathcal{C}_F(E)_0$ la catégorie déduite de $\mathcal{C}_{F,0}$ par extension des scalaires de $\mathbf{Q}$ à E; un objet de $\mathcal{C}_F(E)_0$ est donc un objet M de $\mathcal{C}_{F,0}$ muni d'un plongement de E dans la $\mathbf{Q}$–algèbre des $\mathcal{C}_{F,0}$–endomorphismes de M, tandis qu'un morphisme est un morphisme des objets de $\mathcal{C}_{F,0}$ sous–jacents qui commute à l'action de E.

Si M est un objet de $\mathcal{C}_F(E)_0$, M_{dR} devient un $E \otimes_\mathbf{Q} F$–module libre de rang fini que l'on note $b(M)$, chaque $M_{B,\mathfrak{p}}$ est un E–espace vectoriel de dimension $b(M)$ et M_f devient un $\mathbf{A}_f(E)$–module libre de rang $b(M)$. Pour chaque place finie λ de E, la E_λ–composante M_λ de M_f est une représentation λ–adique pseudo–géométrique de G_F de dimension $b(M)$. On appelle **espace tangent de** M le $E \otimes F$–module $t_M = M_{dR}/Fil^0 M_{dR}$. Si $\mathfrak{p}$ est une place de F et λ une place de E au–dessus du même $p \in S(\mathbf{Q})$, alors

– si p est premier, $\underline{D}_{dR,\mathfrak{p}}(M_\lambda)$ s'identifie à $(E_\lambda \otimes_{\mathbf{Q}_p} F_\mathfrak{p}) \otimes_{E\otimes F} M_{dR}$ et $t_{M_\lambda,\mathfrak{p}}$ à $(E_\lambda \otimes_{\mathbf{Q}_p} F_\mathfrak{p}) \otimes_{E\otimes F} t_M$;

– si $p = \infty$, posons $M_{\mathfrak{p},\lambda} = E_\lambda \otimes_\mathbf{R} M_\mathfrak{p}$; l'application $i_{M,\mathfrak{p}}$ identifie le $\mathbf{C}$–espace vectoriel $\mathbf{C} \otimes_\mathbf{R} M_{\mathfrak{p},\lambda}$ à $\mathbf{C} \otimes_{E\otimes_\mathbf{Q} F} M_{dR}$; en particulier, on peut parler de la filtration de Hodge et de la filtration conjuguée sur $\mathbf{C} \otimes_\mathbf{R} M_{\mathfrak{p},\lambda}$.

---

[16] Supposons $F = \mathbf{Q}$ et soit $\overline{\mathbf{Z}}$ l'anneau des entiers de $\overline{\mathbf{Q}}$. En adaptant la construction habituelle de B_{dR} (essentiellement, en faisant jouer à $\Pi(\overline{\mathbf{Z}}/p\overline{\mathbf{Z}})$ le rôle habituellement dévolu à $\overline{\mathbf{Z}}_p/p\overline{\mathbf{Z}}_p$), on peut définir une $\mathbf{A}_f(\mathbf{Q})$–algèbre $\mathcal{B}_{dR,f}$ munie d'une filtration indexée par $\mathbf{Z}$ et d'une action de G_F et réénoncer (iv) comme étant la donnée d'un isomorphisme

$$\mathcal{B}_{dR} \otimes_\mathbf{Q} M_B = \mathcal{B}_{dR} \otimes_\mathbf{Q} M_{dR}$$

(où $\mathcal{B}_{dR} = \mathbf{C} \times \mathcal{B}_{dR,f}$) vérifiant des propriétés convenables.

Si S est un ensemble fini de places de F contenant $S_\infty(F)$, on dit que M **admet une fonction** L_S si chaque M_λ en admet une et si celle–ci est indépendante de λ place finie de E (on la note alors $L_S(M,s)$). Si $S = S_\infty(F)$, on dit que M **admet une fonction** L (et on note celle–ci $L(M,s)$).

6.3. — La catégorie $\mathcal{C}_F(E)$ est ainsi définie :

– **un objet** est un objet M de $\mathcal{C}_F(E)_0$, admettant une fonction L et muni d'une filtration croissante (la **filtration par le poids**) par des sous–objets $(W_iM)_{i\in\mathbf{Z}}$ (vérifiant $W_iM = 0$ si $i \ll 0$ et $= M$ si $i \gg 0$) telle que, si λ (resp. $\mathfrak{p}$) est une place archimédienne de E (resp. F), $M_{\mathfrak{p},\lambda}$ devienne une E_λ–structure de Hodge mixte sur $F_\mathfrak{p}$ (cela revient à demander que, sur $\mathbf{C}\otimes_\mathbf{R} M_{\mathfrak{p},\lambda}$, alors la filtration par le poids, celle de Hodge et la filtration conjuguée soient opposées).

– un morphisme de $\mathcal{C}_F(E)$ est un morphisme des objets de $\mathcal{C}_F(E)_0$ sous–jacents qui est compatible avec la filtration par le poids.

Il n'est pas difficile de vérifier que $\mathcal{C}_F(E)$ est encore une catégorie abélienne E–linéaire. Si M et N sont deux objets de $\mathcal{C}_F(E)$, on laisse au lecteur le soin de définir les objets $M\otimes N$ et $\mathrm{Hom}(M,N)$. On dispose aussi d'un objet unité $\mathbb{1}_{F,E}$ (c'est un objet pur de poids 0; on a $\mathbb{1}_{F,E,dR} = E$, $\mathbb{1}_{F,E,B,\mathfrak{p}} = E\otimes F$, pour tout $\mathfrak{p}\in S_\infty(F)$ et $\mathbb{1}_{F,E,f} = \mathbb{A}_f(E)$, avec action triviale de G_F); le dual M^* de M est alors $\mathrm{Hom}(M,\mathbb{1}_{F,E})$ (et on a $\mathrm{Hom}(M,N) = M^*\otimes N$). On obtient ainsi une catégorie tannakienne neutre sur E ([DM82], § 2). Bien sûr la catégorie $\mathcal{C}_F(E)$ n'est autre que la catégorie tannakienne $\mathcal{C}_F(\mathbf{Q})_{(E)}$ déduite de $\mathcal{C}_F(\mathbf{Q})$ par l'extension des scalaires $\mathbf{Q}\subset E$ ([DM82], § 3).

6.4. — Si F' est une extension finie de F contenue dans $\overline{F}$, on dispose de foncteurs évidents d'extension des scalaires $\mathrm{Ext}_{F/F'} : \mathcal{C}_F(E) \longrightarrow \mathcal{C}_{F'}(E)$ et de son adjoint, la restriction des scalaires à la Weil $\mathrm{Res}_{F'/F} : \mathcal{C}_{F'}(E) \longrightarrow \mathcal{C}_F(E)$ (attention que, si λ est finie, $\mathrm{Ext}_{F/F'}(M)_\lambda$ n'est autre que M_λ muni de l'action de $G_{F'}\subset G_F$ tandis que $\mathrm{Res}_{F'/F}(N)_\lambda$ est la représentation de G_F induite par la représentation N_λ de $G_{F'}$). On a $L(\mathrm{Res}_{F'/F}(N),s) = L(N,s)$.

De même, si E' est une extension finie de E on a un foncteur d'extension des scalaires de E à E' allant de $\mathcal{C}_F(E)$ dans $\mathcal{C}_F(E')$ qui admet un adjoint, la restriction des scalaires de E' à E.

On note $\mathbb{1}(1)$ l'**objet de Tate** de la catégorie $\mathcal{C}_\mathbf{Q}(\mathbf{Q})$ (il est pur de poids -2; on a $\mathbb{1}(1)_{dR} = \mathbf{Q}$, $\mathbb{1}(1)_B = 2\pi i\cdot\mathbf{Q}$; pour tout $n\in\mathbf{N}$, le groupe fini $\mathbf{Z}.2\pi i/n\mathbf{Z}.2\pi i$ s'identifie à $\mu_n(\overline{\mathbf{Q}})$ via l'application qui envoie $2\pi i$ sur $e^{2\pi i/n}$ et ceci donne l'action de $G_\mathbf{Q}$ sur

$$\mathbb{1}(1)_f = \mathbf{Q}\otimes_{\widehat{\mathbf{Z}}} \varprojlim_n(\mathbf{Z}.2\pi i/n\mathbf{Z}.2\pi i) \ ,$$

les isomorphismes de comparaison sont ceux que l'on pense. Dans la suite, **on pose** $t = 2\pi i$, que l'on peut donc voir comme un élément de $B_{dR,p}$ pour toute place finie ou non p de $\mathbf{Q}$.

L'objet de Tate $\mathbb{1}_{F,E}(1)$ est l'objet de $\mathcal{C}_F(E)$ déduit de $\mathbb{1}(1)$ par double extension des scalaires.

Pour $r \in \mathbf{N}$, on note $\mathbb{1}_{F,E}(r)$ la puissance tensorielle r–ième de $\mathbb{1}_{F,E}(1)$ et $\mathbb{1}_{F,E}(-r)$ son dual. Pour tout objet M de $\mathcal{C}_F(E)$ et tout $i \in \mathbf{Z}$, on pose $M(r) = M \otimes \mathbb{1}_{F,E}(r)$. Le **dual tordu à la Tate** $M^*(1)$ va jouer un rôle important dans la suite.

6.5. — Soit $\mathcal{M}$ une sous–catégorie pleine de $\mathcal{C}_F(E)$, stable par sous–objet, quotient, somme directe, $M \longmapsto M^*(1)$, contenant $\mathbb{1}_{F,E}$. Pour tout objet M de $\mathcal{M}$, on pose $H^0(F,M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_F(E)}(\mathbb{1}_{F,E}, M)$ ($= \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathbb{1}_{F,E}, M)$), on note $H^1_{\mathcal{M}}(F,M)$ le E–espace vectoriel des classes d'isomorphismes d'extensions de $\mathbb{1}_{F,E}$ par M dans $\mathcal{M}$. Pour chaque place finie λ de E et pour tout $x \in H^1_{\mathcal{M}}(F,M)$, on note x_λ son image dans $H^1(F,M_\lambda)$. On pose

$$H^1_{\mathcal{M},f}(F,M) = \{x \in H^1(F,M) \mid x_\lambda \in H^1_f(F,M_\lambda), \quad \text{pour tout } \lambda\}$$

et aussi $H^0_{\mathcal{M},f}(F,M) = H^0(F,M)$.

Disons que la catégorie $\mathcal{M}$ est **f–admissible** si, pour tout objet M de $\mathcal{M}$, toute place λ de E et $i \in \{0,1\}$, elle satisfait la propriété $C^i_\lambda(M) = C^i_\lambda(M,\mathcal{M})$ suivante :

a) si λ est finie, l'application naturelle $E_\lambda \otimes_E H^i_{\mathcal{M},f}(F,M) \longrightarrow H^i_f(F,M_\lambda)$ est un isomorphisme;

b) si $\lambda \in S_\infty(E)$ et si $H^0_{\mathcal{M},f}(F,M^*(1)) = H^1_{\mathcal{M},f}(F,M^*(1)) = 0$, l'application naturelle $E_\lambda \otimes_E H^i_{\mathcal{M},f}(F,M) \longrightarrow \oplus_{\mathfrak{p}\in S_\infty(F)} H^i(F_\mathfrak{p},M_\lambda)$ est un isomorphisme.

6.6. — Appelons **sous–catégorie tannakienne de $\mathcal{C}_F(E)$** toute sous–catégorie pleine stable par sous–objet, quotient, somme directe, produit tensoriel et dual. Il est raisonnable de penser qu'à tout motif sur F à coefficients dans E, on puisse associer un objet de $\mathcal{C}_F(E)$, **sa réalisation**. On peut alors introduire la catégorie $\underline{SM}_F(E)$ des **structures motiviques** sur F à coefficients dans E comme étant la plus petite sous–catégorie tannakienne de $\mathcal{C}_F(E)$ contenant tout objet qui est isomorphe à la réalisation d'un motif.

Bien sûr, le jour où l'on disposera d'une définition convenable de la catégorie $\mathcal{MM}_F(E)$, les "conjectures standards pour les motifs mixtes" devraient affirmer que le foncteur "réalisation" induit une équivalence entre $\mathcal{MM}_F(E)$ et $\underline{SM}_F(E)$.

"CONJECTURE". — *La catégorie $\underline{SM}_F(E)$ est f-admissible*

6.7. — **Remarque** : On sait (cf. [De71], [De74], [Ja90]) associer à toute variété quasi–projective lisse U sur F sa réalisation $H(U)$ qui est un objet de $\mathcal{C}_F(\mathbf{Q})$ (par exemple, sa réalisation de Rham est l'hypercohomologie du complexe de de Rham de U) à ceci près

– qu'il faut savoir définir les isomorphismes de comparaison $i_{M,\mathfrak{p}}$ pour les places $\mathfrak{p}$ finies : cela a été fait par Faltings ([Fa89], cf. aussi [Il90] lorsque U est projective; le cas général doit pouvoir se déduire des travaux de Faltings [Fa90]) ;

– que l'on peut exhiber pour chaque U un ensemble fini de places S de F contenant $S_\infty(F)$ tel que M admet une fonction L_S, mais que l'on ne sait pas toujours montrer que l'on peut prendre $S = S_\infty(F)$.

Soit $\underline{SM}_{F,J}(\mathbf{Q})$ la plus petite sous–catégorie tannakienne de $\mathcal{C}_F(\mathbf{Q})$ contenant tout objet qui est isomorphe à un $H(U)$ avec U variété quasi–projective lisse sur F. On veut que $\underline{SM}_F(\mathbf{Q})$ contienne $\underline{SM}_{F,J}(\mathbf{Q})$. Suivant Jannsen ([Ja90], § 4), on peut se demander si $\underline{SM}_F(\mathbf{Q}) = \underline{SM}_{F,J}(\mathbf{Q})$, i.e. si $\underline{SM}_{F,J}(\mathbf{Q})$ est "assez grosse", ce qui peut se traduire, une fois un nombre premier ℓ fixé, par le fait que, pour tout objet M de $\underline{SM}_{F,J}(\mathbf{Q})$, l'application naturelle

$$\mathbf{Q}_\ell \otimes_{\mathbf{Q}} H^i_{\underline{SM}_{F,J}(\mathbf{Q}),f}(F,M) \longrightarrow H^i_f(F,M_\ell)$$

est surjective. Une telle question semble malheureusement totalement inabordable à l'heure actuelle.

6.8. — Dans ce qui suit, on suppose donnée une sous–catégorie pleine $\mathcal{M}$ de $\underline{SM}_F(E)$ qui est f–admissible (si la "conjecture" ci–dessus est vraie, cela revient à dire qu'elle contient $\mathbb{1}_{F,E}$, est stable par sous–objet, quotient, somme directe et que, si elle contient M, alors elle contient $M^*(1)$ et toute extension de $\mathbb{1}_{F,E}$ par M dont la classe appartient à $H^1_{\underline{SM}_F(E),f}(F,M)$). Pour $i = 0, 1$, on pose $H^i_f(F,M) = H^i_{\mathcal{M},f}(F,M)$.

On appelle **structures motiviques** les objets de $\mathcal{M}$.

6.9. — Pour tout E–espace vectoriel X de dimension finie et tout $\lambda \in S_\infty(E)$, on pose $X_\lambda = E_\lambda \otimes_E X$ et on note X^*_λ son E_λ–dual.

Soient M une structure motivique et $\lambda \in S_\infty(E)$. Si $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$, $M_{\mathfrak{p},\lambda}$ est une E_λ–structure de Hodge mixte sur $F_\mathfrak{p}$. On peut donc considérer (cf. n° 5.3) l'application

$$\alpha_{M_\lambda} = \oplus_{\mathfrak{p}\in S_\infty(F)}\alpha_{M_{\mathfrak{p},\lambda}} : (\oplus_{\mathfrak{p}\in S_\infty(F)}M^+_{B,\mathfrak{p}})_\lambda \longrightarrow t_{M,\lambda}$$

(où $M^+_{B,\mathfrak{p}} = (M_{B,\mathfrak{p}})^{G_\mathfrak{p}}$) et (*loc. cit.*) les E_λ–espaces vectoriels $\operatorname{Ker}\alpha_{M_\lambda}$ et $\operatorname{Coker}\alpha_{M^*(1)_\lambda}$ sont en dualité de même que $\operatorname{Coker}\alpha_{M_\lambda}$ et $\operatorname{Ker}\alpha_{M^*(1)_\lambda}$. Notons

u_{M_λ} le composé des applications naturelles

$$H^0(F,M)_\lambda \longrightarrow \oplus_{\mathfrak{p}} H^0(F_{\mathfrak{p}},M_\lambda) \longrightarrow \oplus_{\mathfrak{p}} \operatorname{Ker} \alpha_{M_{\mathfrak{p},\lambda}} = \operatorname{Ker} \alpha_{M_\lambda} \ ,$$

v_{M_λ} le composé $H^1_f(F,M)_\lambda \longrightarrow \oplus_{\mathfrak{p}} H^1(F_{\mathfrak{p}},M_\lambda) \longrightarrow \oplus_{\mathfrak{p}}\text{Coker } \alpha_{M_{\mathfrak{p},\lambda}} =$ Coker α_{M_λ}, v'_{M_λ} : $\operatorname{Ker}\alpha_{M_\lambda} \longrightarrow H^1_f(F,M^*(1))^*_\lambda$ la transposée de $v_{M^*(1)_\lambda}$ et u'_{M_λ} : Coker $\alpha_{M_\lambda} \longrightarrow H^0(F,M^*(1))^*_\lambda$ la transposée de $u_{M^*(1)_\lambda}$.

Soient M une structure motivique et N une extension, dans $\mathcal{M}$, de $\mathbb{1}_{F,E}$ par M dont la classe appartient à $H^1_f(F,M)$. Si $x \in H^1_f(F,M^*(1))^*_\lambda$, notons x_N son image dans $H^1_f(F,N^*(1))^*_\lambda$ et

$$\Lambda(M,N,\lambda) = \{x \in H^1_f(F,M^*(1))^*_\lambda \mid x_N \in \operatorname{Im} v'_{N_\lambda}\} \ .$$

Si $x \in \Lambda(M,N,\lambda)$, et si $x_N = v'_{N_\lambda}(y)$, l'image de y dans $\operatorname{Ker}\alpha_{\mathbb{1}_{F,E}}$ est l'image d'un $z \in H^0(F,\mathbb{1}_{F,E})_\lambda$ et l'image $\delta_{M,N,\lambda}(x)$ de z dans $H^1_f(F,M)_\lambda$ ne dépend pas des choix faits.

Il n'est pas difficile de déduire de la f-admissibilité l'existence d'une unique transformation naturelle

$$\delta_\lambda = (\delta_{M,\lambda})_{M \in Ob(\mathcal{M})} \text{ avec } \delta_{M,\lambda} : H^1_f(F,M^*(1))^*_\lambda \longrightarrow H^1_f(F,M)^*_\lambda$$

telle que, si M et N sont comme ci-dessus et si $x \in \Lambda(M,N,\lambda)$, alors $\delta_{M,\lambda}(x) = \delta_{M,N,\lambda}(x)$.

6.10. — De la f-admissibilité on peut déduire également que, pour toute structure motivique M et tout $\lambda \in S_\infty(E)$, la suite de E_λ-espaces vectoriels de dimension finie

$$s_{f,\lambda}(M)\ 0 \to H^0(F,M)_\lambda \to \operatorname{Ker}\alpha_{M_\lambda} \to (H^1_f(F,M^*(1))^*_\lambda \to H^1_f(F,M)_\lambda$$

$$\to \text{Coker } \alpha_{M_\lambda} \to H^0(F,M^*(1))^*_\lambda \to 0$$

est exacte.

Avec les notations de l'introduction, on en déduit un isomorphisme canonique de $(L_f(M) \otimes_E L_f(M^*(1)))_\lambda$ sur $\det_{E_\lambda}(\operatorname{Ker}\alpha_{M_\lambda}) \otimes_{E_\lambda} \det^*_{E_\lambda}(\text{Coker } \alpha_{M_\lambda})$. Par ailleurs, la suite exacte tautologique

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\alpha_{M_\lambda} \longrightarrow (\oplus_{\mathfrak{p} \in S_\infty(F)} M^+_{B,\mathfrak{p}})_\lambda \longrightarrow t_{M,\lambda} \longrightarrow \text{Coker } \alpha_{M_\lambda} \longrightarrow 0$$

fournit un isomorphisme de $(\det^*_E(\oplus_{\mathfrak{p} \in S_\infty(F)} M^+_{B,\mathfrak{p}}) \otimes_E \det_E t_M)_\lambda$ sur $\det^*_{E_\lambda}(\operatorname{Ker}\alpha_{M_\lambda}) \otimes_{E_\lambda} \det_{E_\lambda}(\text{Coker } \alpha_{M_\lambda})$. Le produit tensoriel de ces deux isomorphismes est un isomorphisme

$$\iota_{M,\lambda} : \Delta_f(M)_\lambda \longrightarrow E_\lambda \ .$$

On a $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} \Delta_f(M) = \otimes_{\lambda \in S_\infty(E)} \Delta_f(M)_\lambda$ tandis que $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} E = \oplus_{\lambda \in S_\infty(E)} E_\lambda$ et l'**isomorphisme** ι_M permettant d'énoncer la conjecture $C_{DB}(M)$ est la somme directe des $\iota_{M,\lambda}$.

Enfin, si λ est une place finie de E, la propriété $C_\lambda(M)$ permet d'identifier $\Delta_f(M)_\lambda$ et $\Delta_f(M_\lambda)$ (cf. § 3 et 4) et donc de définir la norme $|\ |_{\lambda,EP}$, ce qui permet d'énoncer $C_{BK}(M)$.

6.11. — **Remarque** : Si M est une structure motivique sur F, alors $\mathrm{Res}_{F/\mathbf{Q}}(M)$ est un objet de $\mathcal{C}_{\mathbf{Q}}(E)$ qui admet une fonction L et celle–ci est égale à $L(M,s)$. Il est naturel de conjecturer que $\mathrm{Res}_{F/\mathbf{Q}}(M)$ est une structure motivique sur $\mathbf{Q}$ et que, inversement, si N est une structure motivique sur $\mathbf{Q}$, $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Q}/F}(N)$ est une structure motivique sur F et que les foncteurs $\mathrm{Res}_{F/\mathbf{Q}}$ et $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Q}/F}$ vérifient les propriétés d'adjonction que l'on pense[17]. S'il en est ainsi, les conjectures pour M sont équivalentes aux conjectures pour $\mathrm{Res}_{F/\mathbf{Q}}(M)$ ce qui fait que l'on peut, sans restreindre la généralité, supposer $F = \mathbf{Q}$, ce que nous ferons parfois[18].

§ 7. — Simplifications, réductions

7.1. — Dans la plupart des cas que l'on considère effectivement au moins deux des quatre espaces vectoriels $H^0(F,M)$, $H^1_f(F,M)$, $H^0(F,M^*(1))$ et $H^1_f(F,M^*(1))$ sont nuls, ce qui simplifient la structure des suites exactes $s_{f,\lambda}(M)$ et l'énoncé des conjectures $C_r(M)$ et $C_{DB}(M)$.

– C'est le cas lorsque $W_0M = 0$ (en particulier si M est **pur de poids** ≥ 1) puisqu'alors $H^0(F,M) = H^1_f(F,M) = H^0(F,M^*(1)) = 0$ (pour les H^0, cela résulte de $gr_0^W M = gr_0^W M^*(1) = 0$; pour le H^1_f, on remarque que toute extension N de $\mathbf{1}_{F,E}$ par M est scindée, car $W_0N = \mathbf{1}_{F,E}$ s'identifie à un sous–objet de N, d'où la nullité de $H^1(F,M)$ et a fortiori celle de $H^1_f(F,M)$). Si $\lambda \in S_\infty(E)$, la suite $s_{f,\lambda}(M_\lambda)$ se réduit à un isomorphisme

$$\mathrm{Ker}\,\alpha_{M_\lambda} \longrightarrow (H^1_f(F,M^*(1))^*_\lambda$$

(en particulier, on doit avoir $r_M = \dim_E H^1_f(F,M^*(1)) = \dim_{E_\lambda} \mathrm{Ker}\,\alpha_{M_\lambda}$, qui se calcule à partir de la seule connaissance des structures de Hodge mixtes $M_{\mathfrak{p},\lambda}$, pour $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$).

– Inversement, si $W_{-3}M = M$ (en particulier si M est **pur de poids** ≤ -3), on a $W_0(M^*(1)) = 0$; on doit donc avoir $r_M = 0$ et, si $\lambda \in S_\infty(E)$,

[17] On s'attend à ce que la même chose se produise avec les foncteurs $\mathrm{Res}_{F/F'}$ et $\mathrm{Ext}_{F'/F}$ pour tout sous–corps F' de F.

[18] Il est cependant parfois commode de travailler avec des motifs "semi-stables" et des fonctions L incomplètes (cf. § 12). On ne peut plus alors remplacer F par $\mathbf{Q}$.

$s_{f,\lambda}(M_\lambda)$ se réduit à un isomorphisme

$$H^1_f(F,M)_\lambda \longrightarrow \mathrm{Coker}\ \alpha_{M_\lambda}\ .$$

– On s'attend (bien que cela ne résulte pas du formalisme développé jusqu'à présent) qu'il n'y ait pas d'extension non triviale entre deux motifs purs de même poids. S'il en est ainsi, on voit que, si $W_{-1}M = 0$ (en particulier, si M **est pur de poids** 0) $s_{f,\lambda}(M_\lambda)$ se réduit à

$$0 \longrightarrow H^0(F,M)_\lambda \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\alpha_{M_\lambda} \longrightarrow (H^1_f(F,M^*(1))^*_\lambda \longrightarrow 0$$

(et donc encore à un isomorphisme de $\mathrm{Ker}\,\alpha_{M_\lambda}$ sur le dual de $(H^1_f(F,M^*(1))_\lambda$ si $H^0(F,M) = 0$), tandis que, si $W_{-2}M = M$ (en particulier, si M **est pur de poids** -2), on doit avoir $r_M = -\dim_E H^0(F,M^*(1))$ et $s_{f,\lambda}(M_\lambda)$ se réduit à

$$0 \longrightarrow H^1_f(F,M)_\lambda \longrightarrow \mathrm{Coker}\ \alpha_{M_\lambda} \longrightarrow H^0(F,M^*(1))^*_\lambda \longrightarrow 0\ .$$

– Enfin, si M est **pur de poids** -1, $\mathrm{Ker}\,\alpha_M = \mathrm{Coker}\ \alpha_{M_\lambda} = H^0(F,M) = H^0(F,M^*(1)) = 0$ et $s_{f,\lambda}(M_\lambda)$ se réduit à un isomorphisme

$$H^1_f(F,M^*(1))^*_\lambda \longrightarrow H^1_f(F,M)_\lambda\ ,$$

autrement dit à une dualité parfaite

$$H^1_f(F,M)_\lambda \times H^1_f(F,M^*(1))_\lambda \longrightarrow E_\lambda\ .$$

7.2. — La situation est particulièrement agréable lorsque M est f**–close**, i.e. lorsque $H^1_f(F,M) = H^1_f(F,M^*(1)) = 0$ (il suffit de savoir que $H^1_f(F,M_\lambda) = H^1_f(F,M^*(1)_\lambda) = 0$ pour une place finie λ). Toutes les applications intervenant dans la suite exacte $s_{f,\lambda}(M)$ sont alors triviales, ce qui rend $C_{DB}(M)$ particulièrement simple à énoncer, surtout si $H^0(F,M) = H^0(F,M^*(1)) = 0$: soit $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) une base de $\oplus_{\mathfrak{p}\in S_\infty(F)} M^+_{B,\mathfrak{p}}$ (resp. t_M) sur E; pour tout $\lambda \in S_\infty(E)$,

$$\alpha_{M_\lambda} : (\oplus_{\mathfrak{p}\in S_\infty(F)} M^+_B)_\lambda \longrightarrow t_{M,\lambda}$$

doit être un isomorphisme et, si b_λ est le déterminant de la matrice de α_{M_λ} relativement aux bases choisies, il doit exister $c \in E^*$ tel que $L(M,0) = c.(b_\lambda)_{\lambda\in S_\infty(E)}$.

Appelons f**–équivalence sur** $\mathcal{M}$ la relation d'équivalence la plus restrictive sur $Obj(\mathcal{M})$ telle que,

i) si N est une extension de $\mathbf{1}_{F,E}$ par M dont la classe appartient à $H^1_f(F,M)$, alors M et N sont f–équivalents, *ii*) si M et N sont f–équivalents, $M^*(1)$ et $N^*(1)$ le sont aussi.

Si M et N sont f–équivalents, $C_r(M)$ (resp. $C_{DB}(M)$, $C_{BK}(M)$) est vraie si et seulement si $C_r(N)$ (resp. $C_{DB}(N)$, $C_{BK}(N)$) l'est. Comme tout objet de $\mathcal{M}$ est f–équivalent à un objet f–clos, il suffirait théoriquement de vérifier ces conjectures pour les objets f–clos.

7.3. — Une structure motivique M pure de poids w est dite **critique** s'il existe $\lambda \in S_\infty(E)$ telle que α_{M_λ} soit un isomorphisme (et α_{M_μ} est alors un isomorphisme pour tout $\mu \in S_\infty(E)$). Si M n'est pas de poids -1, on voit que cela implique que M est f–close. Si M est de poids -1 et si M est critique, conjecturalement $r_M \geq 0$ et M est f–close si et seulement si $r_M = 0$, i.e. si et seulement si $L(M,0) \neq 0$.

B – Cas particuliers

§ 8. — Le cas des 1–motifs

8.1. — Rappelons ([De74], § 10) qu'une variété semi–abélienne A sur F est une extension d'une variété abélienne par un tore et qu'un 1–**motif lisse sur** F est un complexe de schémas en groupes commutatifs sur F, concentré en degré -1 et 0,

$$\mathcal{X} \xrightarrow{U} S \ ,$$

où S est une variété semi–abélienne et $\mathcal{X}$ est localement constant pour la topologie étale, $\mathcal{X}(\overline{F})$ étant un $\mathbf{Z}$–module libre de rang fini.

Les 1–motifs lisses sur F forment de manière naturelle une catégorie additive $\mathcal{MM}_{F,1}$. Notons $\mathcal{MM}_{F,1}(\mathbf{Q})$ la catégorie des 1–motifs à isogénie près, i.e. la catégorie suivante :

– les objets de $\mathcal{MM}_{F,1}(\mathbf{Q})$ sont les 1–motifs lisses,

– on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{MM}_{F,1}(\mathbf{Q})}(M_1, M_2) = \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{MM}_{F,1}}(M_1, M_2)$.

Il n'est pas difficile de voir que la catégorie $\mathbf{Q}$–linéaire $\mathcal{MM}_{F,1}(\mathbf{Q})$ est abélienne. On note $\mathcal{MM}_{F,1}(E)$ la catégorie des 1–**motifs sur** F **à coefficients dans** E, i.e. la catégorie E–linéaire déduite de $\mathcal{MM}_{F,1}(\mathbf{Q})$ par l'extension des scalaires $\mathbf{Q} \to E$. Il est commode de voir un objet M de $\mathcal{MM}_{F,1}(E)$ comme un complexe $[X \xrightarrow{u} S]$, où X est un E–espace vectoriel de dimension finie muni d'une action discrète de G_F, S une variété semi–abélienne sur F, munie d'un plongement de E dans $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{End}_F(S)$ et $u : X \to \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} S(\overline{F})$ une application E–linéaire, G_F–équivariante.

Pour tout 1–motif $M = [X \xrightarrow{u} S]$ sur F à coefficients dans E, on sait (*loc. cit.*) définir sa filtration par le poids, lui associer sa réalisation de de Rham M_{dR} (c'est l'algèbre de Lie de l'extension universelle de M par un groupe vectoriel, tandis que l'espace tangent de M est l'algèbre de Lie de S), sa réalisation Betti $M_{B,\mathfrak{p}}$ pour chaque place infinie $\mathfrak{p}$ de F (appelée réalisation de Hodge dans *loc. cit.*) et sa réalisation galoisienne M_f (on a $M_f = \varprojlim_n M_n$, avec

$$M_n = \{(x,s) \in X \times S(\overline{F}) \mid u(x) = ns\}/\{(nx, u(x)) \mid x \in X\}) .$$

On sait aussi ([Bures]) définir des isomorphismes de comparaison et montrer que l'on obtient bien ainsi un objet de $\mathcal{C}_F(E)$. Cette construction est fonctorielle. De la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes (démontrée par Faltings, cf. [De83]), on déduit facilement que ce foncteur

$$\underline{\text{Real}} : \mathcal{MM}_{F,1}(E) \longrightarrow \mathcal{C}_F(E)$$

est pleinement fidèle et induit donc une équivalence entre $\mathcal{MM}_{F,1}(E)$ et son image essentielle que nous notons $\underline{SM}_{F,1}(F)$. Celle–ci contient $\mathbb{1}_{F,E}$ (qui est la réalisation de $[E \longrightarrow 0]$) et est stable par $M \longmapsto M^*(1)$.

Si $M = \underline{\text{Réal}}(X \xrightarrow{u} S])$, tout $s \in \mathbb{Q} \otimes S(F)$ fournit une extension de $\mathbb{1}_{F,E} = \underline{\text{Réal}}([E \to 0])$ par M : c'est $\underline{\text{Réal}}([X \oplus E \xrightarrow{(u,v)} S])$, avec $v(1) = s$. Cette extension est scindée si et seulement si $s \in u(X)$. D'où une suite exacte

$$X \longrightarrow \mathbb{Q} \otimes S(F) \longrightarrow H^1_{\underline{SM}_{F,1}(E)}(F, M) \longrightarrow 0 .$$

8.2. — Si M est un objet de $\underline{SM}_{F,1}(E)$, on a $h^{r,s}(M) = 0$[19] sauf, peut-être, si $r,\ s \in \{-1, 0\}$. Il semble raisonnable de **conjecturer que $\underline{SM}_{F,1}(E)$ est exactement la sous–catégorie de $\underline{SM}_F(E)$ formée des objets M tels que $h^{r,s}(M) = 0$ si $r \notin \{-1,0\}$ ou si $s \notin \{-1,0\}$.**

En particulier $\underline{SM}_{F,1}(E)$ devrait être une sous–catégorie de $\underline{SM}_F(E)$ stable par sous–objet, quotient, somme directe et telle que, si elle contient M, elle contient toute extension de $\mathbb{1}_{F,E}$ par M. Elle devrait donc être f–admissible[20], i.e. tout objet $M = \underline{\text{Réal}}([X \xrightarrow{u} S])$ devrait satisfaire $C^i_\lambda(M)$ pour toute place λ de E. Il n'est pas difficile de voir que c'est le cas lorsque λ est archimédienne. Lorsque λ est fini, on vérifie que l'application $E_\lambda \otimes_E H^0(F, M) \longrightarrow H^0(F, M_\lambda)$ est un isomorphisme tandis que $E_\lambda \otimes_E H^1_f(F, M) \longrightarrow H^1_f(F, M_\lambda)$ est injective.

[19] On peut définir les nombres de Hodge d'une structure motivique M en posant $h^{r,s}(M) = \dim_E(Fil^r M / Fil^{r+1} M)$ si M est pur de poids $r+s$ et $h^{r,s}(M) = h^{r,s}(gr^W_{r+s} M)$ en général.

[20] Aussi nous écrirons $H^1(F, M) = H^1_{\underline{SM}_{F,1}(E)}(F, M)$ et $H^1_f(F, M) = H^1_{\underline{SM}_{F,1}(E),f}(F, M)$).

La surjectivité pour toutes les places λ divisant un nombre premier ℓ fixé équivaut (cf. [BK90], prop. 5.4), si S est extension de la variété abélienne A par le tore T, à ce que la partie ℓ–primaire $\text{Ш}(A)(\ell)$ du groupe de Safarevic de A,

$$\text{Ш}(A) = \operatorname{Ker}(H^1(F, A(\overline{F})) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\in S(F)} H^1(F_{\mathfrak{p}}, A(\overline{F}_{\mathfrak{p}})))$$

soit finie. Par conséquent :

PROPOSITION. — *La catégorie $\underline{SM}_{F,1}(\mathbf{Q})$ est f-admissible si et seulement si, pour toute variété abélienne A sur F et tout nombre premier ℓ, $\text{Ш}(A)(\ell)$ est finie. S'il en est ainsi, $\underline{SM}_{F,1}(E)$ est aussi f-admissible.*

En outre, sans même connaître la finitude des groupes de Safarevic, les propriétés établies de $\underline{SM}_{F,1}(E)$ permettent de construire la suite exacte $s_{f,\lambda}(M)$ pour tout objet M de $\underline{SM}_{F,1}(E)$ et tout $\lambda \in S_\infty(E)$.

8.3. — Intéressons nous au cas $E = \mathbf{Q}$ et regardons quelques cas particuliers :

a) **Le cas** $M = \mathbb{1}_{F,\mathbf{Q}}$, réalisation de $[\mathbf{Q} \to 0]$: alors $M^*(1) = \mathbb{1}_{F,\mathbf{Q}}(1)$, réalisation de $[0 \to \mathbf{G}_m]$. On a $H^0(F, M) = \mathbf{Q}$, $H^1_f(F, M) = H^1(F, M) = 0$, $H^0(F, M^*(1)) = 0$, $H^1(F, M^*(1)) = \mathbf{Q} \otimes F^*$ tandis que $H^1_f(F, M^*(1))$ s'identifie au sous–$\mathbf{Q}$–espace vectoriel $\mathbf{Q} \otimes U_F$ où U_F désigne le groupe des unités de F. Pour tout $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$, on a $M_{B,\mathfrak{p}} = \mathbf{Q}$, avec action triviale de G_F et $t_M = 0$, de sorte que α_{M_∞} est l'application 0, $\operatorname{Ker} \alpha_{M_\infty} = \oplus_{\mathfrak{p}\in S_\infty(F)}\mathbf{R}$ et $\operatorname{Coker} \alpha_{M_\infty} = 0$. La suite exacte $s_{f,\infty}(M)$ se réduit à

$$0 \longrightarrow \mathbf{R} \longrightarrow \oplus_{\mathfrak{p}\in S_\infty(F)}\mathbf{R} \longrightarrow (\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} U_F)^* \longrightarrow 0\ ,$$

où $\mathbf{R} \longrightarrow \oplus_{\mathfrak{p}\in S_\infty(F)}\mathbf{R}$ est l'application diagonale tandis que l'application suivante est la transposée de l'application $\mathbf{R}$–linéaire, déduite par extension des scalaires de l'application

$$U_F \longrightarrow \oplus_{\mathfrak{p}\in S_\infty(F)}\mathbf{R}$$

qui est $u \longmapsto (\log \|u\|_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}\in S_\infty(F)}$[21].

La fonction $L(M, s)$ est la fonction $\zeta(F, s)$ du corps de nombres F. La conjecture $C_r(M)$ dit que, si $r = \#S_\infty(F)$, $\zeta(F, s)$ a un pôle en $s = 0$ de multiplicité $r - 1$, $C_{DB}(M)$ dit que, si $u_1, u_1, \ldots, u_{r-1}$ sont des unités de F linéairement indépendantes sur $\mathbf{Z}$, si $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{r-1}$ sont des éléments distincts de $S_\infty(F)$ et si $R = \det(\log \|u_i\|_{\mathfrak{p}_j})$, $\zeta^*(F, 0)/R \in \mathbf{Q}^*$, tandis que les

[21] Où $\|\ \|_{\mathfrak{p}}$ est la valeur absolue usuelle si $\mathfrak{p}$ est réelle et son carré si $\mathfrak{p}$ est imaginaire.

techniques esquissées au § 11 ci–dessous permettent de montrer que $C_{BK}(M)$ dit que, si e est l'indice dans U_F du groupe engendré par les u_i et si h est le nombre de classes de F,

$$\zeta^*(F,0) = \pm Rh/e \ ,$$

ce qui est bien connu (cf. par exemple [Ta84], Chap. I).

b) **Le cas $\mathbb{1}_{F,\mathbf{Q}}(1) = \underline{\text{Réal}}[0 \to \mathbf{G}_m]$** : c'est le cas "dual du précédent". Si l'on pose $t = 2\pi i \in \mathbf{C}$, on a $M_{B,\mathfrak{p}} = \mathbf{Q}\cdot t$, pour tout $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$ et donc $M^+_{B,\mathfrak{p}} = 0$ si $\mathfrak{p}$ est réelle, $\mathbf{Q}\cdot t$ sinon. On a $t_M = F$. Si l'on note $S_{\mathbf{R}}(F)$ (resp. $S_{\mathbf{C}}(F)$) l'ensemble des places réelles (resp. imaginaires) de F, l'application

$$\alpha_{\mathbb{1}_{F,\mathbf{Q}}(1)_\infty} : \oplus_{\mathfrak{p}\in S_{\mathbf{C}}(F)}\mathbf{R}\cdot t \longrightarrow \mathbf{R}\otimes_{\mathbf{Q}} F = (\oplus_{\mathfrak{p}\in S_{\mathbf{R}}(F)}\mathbf{R}) \oplus (\oplus_{\mathfrak{p}\in S_{\mathbf{C}}(F)}\mathbf{C})$$

est l'application qui envoie $(u\mathfrak{p}\cdot t)_{\mathfrak{p}\in S_{\mathbf{C}}(F)}$ sur $(0,(u\mathfrak{p}\cdot 2\pi_i)_{\mathfrak{p}\in S_{\mathbf{C}}(F)})$. On a $\operatorname{Ker}\alpha_{M_\infty} = 0$ et Coker α_{M_∞} s'identifie à $\oplus_{\mathfrak{p}\in S_\infty(F)}\mathbf{R}$, canoniquement isomorphe à son dual, qui est aussi $\operatorname{Ker}\alpha_{(\mathbb{1}_{F,\mathbf{Q}})_\infty}$. La suite exacte $s_{F,\infty}(M)$ est la transposée de $s_{F,\infty}(\mathbb{1}_{F,\mathbf{Q}})$.

On a $L(M,s) = \zeta(F,s+1)$. La conjecture $C_r(M)$ dit que $\zeta(F,s)$ a un pôle simple en $s = 1$, $C_{DB}(M)$ dit que, si d est le discriminant de F, $\zeta^*(F,1)\cdot\sqrt{d}/R \in \mathbf{Q}^*$ et $C_{BK}(M)$ peut, via les techniques du § 11, se traduire en disant que

$$\zeta^*(F,1) = \pm 2^{r_1}\cdot(2\pi)^{r_2}\cdot d^{-1/2}\cdot hR/e \ ,$$

ce qui est encore bien connu (cf. par exemple, [Ta84], chap. I).

c) **Le cas d'une extension non triviale de $\mathbb{1}_{F,\mathbf{Q}}$ par $\mathbb{1}_{F,\mathbf{Q}}(1)$** : nous allons, pour simplifier, supposer en outre $F = \mathbf{Q}$. Alors il existe q entier naturel ≥ 2 tel que $M = \underline{\text{Réal}}([\mathbf{Q} \xrightarrow{u} \mathbf{G}_m])$, avec $u(1) = q$. On a $W_{-1}M = \mathbb{1}_{\mathbf{Q},\mathbf{Q}}(1)$. On peut écrire $M_{B,\infty} = \mathbf{Q}\cdot t \oplus \mathbf{Q}u$, avec $M^+_{B,\infty} = \mathbf{Q}u$, $t_M = t_{W_{-1}}M = \mathbf{Q}$. L'application α_{M_∞} envoie u sur $\log(q)$ et est un isomorphisme. La structure motivique $M^*(1)$ s'identifie canoniquement à M. On a $H^0(\mathbf{Q},M) = 0$; le $\mathbf{Q}$–espace vectoriel $H^1(\mathbf{Q},M)$ s'identifie au quotient de $\mathbf{Q}\otimes\mathbf{Q}^*$ par la droite engendrée par $1\otimes q$. Posons $q = p_1^{r_1}\cdot p_2^{r_2}\cdots p_a^{r_a}$, avec les p_i des nombres premiers distincts et les r_i des entiers ≥ 1. On vérifie que $H^1_f(\mathbf{Q},M)$ s'identifie au sous–$\mathbf{Q}$–espace vectoriel de $H^1(\mathbf{Q},M)$ engendré par les images des $1\otimes p_i$. La suite exacte $s_{f,\infty}(M)$ se réduit à un isomorphisme de $H^1_f(\mathbf{Q},M)^*_\infty$ sur $H^1_f(\mathbf{Q},M)_\infty$, ce qui équivaut à une forme bilinéaire non dégénérée

$$h : H^1_f(\mathbf{Q},M)_\infty \times H^1_f(\mathbf{Q},M)_\infty \longrightarrow \mathbf{R} \ ;$$

si l'on pose $\varepsilon_{i,i} = \log(p_i)/r_i$ et $\varepsilon_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, celle–ci est caractérisée par

$$h(p_i,p_j) = (\log(p_i)\cdot\log(p_j))/\log(q) - \varepsilon_{i,j} \ .$$

On a $L(M,s) = \zeta(s)\cdot\zeta(s+1)\cdot \prod_{1\le i\le a}(1-p_i^{-s})$. Les conjectures $C_r(M)$, $C_{DB}(M)$ et $C_{BK}(M)$ sont alors des théorèmes qui se déduisent facilement des résultats sur la valeur de la fonction zéta de Riemann en $s=0$ et $s=1$.

d) **Le cas d'une variété abélienne**, i.e. le cas où $M = \underline{\text{Réal}}[0 \to A]$, où A est une variété abélienne sur F. Quitte à remplacer A par sa restriction des scalaires à la Weil, on peut supposer $F = \mathbf{Q}$. On vérifie que $M^*(1)$ s'identifie à M, que α_{M_∞} est un isomorphisme, que $H^0(\mathbf{Q},M) = 0$ et que $H^1_f(\mathbf{Q},M) = H^1(\mathbf{Q},M) = \mathbf{Q}\otimes A(\mathbf{Q})$, de sorte que, ici encore, la suite exacte $s_{f,\infty}(M)$ se réduit à un isomorphisme de $H^1_f(\mathbf{Q},M)^*_\infty$ sur $H^1_f(\mathbf{Q},M)_\infty$, ce qui équivaut à une forme bilinéaire non dégénérée

$$h : \mathbf{R}\otimes A(\mathbf{Q}) \times \mathbf{R}\otimes A(\mathbf{Q}) \longrightarrow \mathbf{R}\ .$$

On peut montrer (cf. [Bl80]) que celle–ci n'est autre que la hauteur de Néron–Tate.

On a $L(M,s) = L_A(s+1)$, où L_A est la fonction L de Hasse–Weil de A. Les techniques du § 11 permettent de montrer que la conjonction de $C_r(M)$ et $C_{BK}(M)$ équivaut à la conjecture de Birch et Swinnerton–Dyer[22]. On sait qu'il y a eu récemment des progrès importants sur cette conjecture (cf. [Ko90], [Pe89], [Gr91], [Ru91]).

§ 9. — Motifs des variétés projectives lisses

9.1. — Soit X une variété projective lisse sur $\mathbf{Q}$[23]. On se propose d'étudier ce qui se passe pour les structures motiviques $H^i(X)(m)$[24], où i, $m \in \mathbf{Z}$ avec $i \ge 1$. Si $M = H^i(X)(m)$, la dualité de Poincaré jointe au théorème de Lefschetz "vache" permet d'identifier $M^*(1)$ à $H^i(X)(i+1-m)$. Nous allons étudier simultanément les conjectures pour M et $M^*(1)$, i.e. les valeurs de $L(H^i(X),s)$ en $s=m$ et en $s=n$, où $n = i+1-m$, ce qui nous permet de supposer $m \le (i+1)/2 \le n$. Remarquons que M est pur de poids $i-2m$ et $M^*(1)$ de poids $i-2n$.

9.2. — **Supposons d'abord** $m < i/2$, ce qui fait que M est de poids ≥ 1 et $M^*(1)$ de poids ≤ -3. On doit donc avoir (n° 7.1) $H^1_f(\mathbf{Q},M) = 0$, $r_{M^*(1)} = 0$

---

22 Une fois supposée la finitude de $Ш(A)$ qui est nécessaire pour donner un sens à $C_{BK}(M)$ aussi bien qu'à la conjecture de Birch et Swinnerton–Dyer.

23 Le cas d'une variété projective lisse Y sur F se ramène à celui–ci en prenant pour X la restriction des scalaires à la Weil de Y.

24 Je triche un peu : lorsque l'on veut associer à $H^i(X)(m)$ un objet de $\mathcal{C}_F(\mathbf{Q})$, on peut avoir des problèmes aux places de mauvaise réduction.

et $r_M = \dim_{\mathbf{Q}} H^1_f(\mathbf{Q}, M^*(1)) = \dim_{\mathbf{R}} \operatorname{Ker} \alpha_{M_\infty} = \dim_{\mathbf{R}} \operatorname{Coker} \alpha_{M^*(1)_\infty}$. On constate que $\operatorname{Coker} \alpha_{M^*(1)_\infty} = H^i_{dR}(X)_{\mathbf{R}}/(Fil^n H^i_{dR}(X)_{\mathbf{R}} + H^i_B(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}(n))_{\mathbf{R}})$ s'identifie au groupe de cohomologie de Deligne $H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n))$ (cf. par exemple [Sc88], [Ja88], § 4). Modulo les conjectures habituelles sur l'équation fonctionnelle vérifiée par $L(H^m(X), s)$ (*op. cit.*, § 1), les conjectures $C_r(M)$ et $C_r(M^*(1))$ sont vraies, tandis que $C_{DB}(M)$ et $C_{DB}(M^*(1))$ sont équivalentes (la situation est un peu plus compliquée pour la relation entre $C_{BK}(M)$ et $C_{BK}(M^*(1))$, cf. § 12).

On voit aussi que M est critique si et seulement si $H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n)) = 0$ et qu'alors $C_{DB}(M)$ et $C_{DB}(M^*(1))$ sont des cas particuliers de la conjecture de Deligne ([De79], conj. 1.8).

9.3. — Pour comprendre le lien avec la conjecture de Beilinson, rappelons (cf. par exemple [So85]) que, si $r \in \mathbf{N}$, $K_r(X) \otimes \mathbf{Q}$ est muni d'opérations d'Adams $(\psi^a)_{a \in \mathbf{N}^*}$ et que $K_r(X) \otimes \mathbf{Q} = \oplus_{j \in \mathbf{N}} K_r(X)^{(j)}$, où $K_r(X)^{(j)}$ désigne le sous-$\mathbf{Q}$-espace vectoriel de $K_r(X) \otimes \mathbf{Q}$ où ψ^a opère par multiplication par a^j pour tout a. Rappelons aussi que Beilinson a introduit le **groupe de cohomologie motivique** $H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(n)) = K_{n-m}(X)^{(n)}$ et construit une application

$$r_{i,n,\infty} : H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(n)) \longrightarrow H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n)) .$$

On sait aussi (au moins lorsque X admet un modèle régulier sur $\mathbf{Z}$, sinon il faut encore une conjecture de plus, cf. *op. cit.*) définir un sous-$\mathbf{Q}$-espace vectoriel $H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(n))_{\mathbf{Z}}$ de $H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X_{/\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n))$; la conjecture de Beilinson dit, dans ce cas, que $r_{i,n,\infty}$ induit un isomorphisme

$$c_{i,n,\infty} : \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(n))_{\mathbf{Z}} \longrightarrow H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n)) ,$$

et donc aussi un isomorphisme $d_{i,n,\infty}$ des déterminants de ces deux $\mathbf{R}$-espaces vectoriels ; et que, si $b_{\mathcal{D}}$ est une base bien choisie de $\det_{\mathbf{R}} H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n))$[25], il existe une base $b_{\mathcal{M}}$ de $H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(n))_{\mathbf{Z}}$ telle que $d_{i,n,\infty}(b_{\mathcal{M}}) = L^*(H^i(X), n) \cdot b_{\mathcal{D}}$.

Bien sûr, on pense que $H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(n))_{\mathbf{Z}}$ doit pouvoir s'identifier à $H^1_f(\mathbf{Q}, M^*(1))$ et $c_{i,n,\infty}$ à l'application naturelle de $H^1_f(\mathbf{Q}, M^*(1))_{\mathbf{R}}$ sur $\operatorname{Coker} \alpha_{M^*(1)_\infty}$. Modulo cette interprétation et l'équation fonctionnelle, c'est un exercice de vérifier que $C_{DB}(M)$ équivaut à la conjecture de Beilinson.

9.4. — En utilisant les classes de Chern en cohomologie ℓ-adique, on peut aussi définir [So81], pour tout nombre premier ℓ, des applications

$$r_{i,n,\ell} : H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(n)) \longrightarrow H^1(\mathbf{Q}, H^i_{\acute{e}t}(X \otimes \overline{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}_\ell(n))) .$$

[25] De façon précise, $\det_{\mathbf{R}} H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n))$ s'identifie à $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} V$ avec $V = \det_{\mathbf{Q}} H^i(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}(n-1))^{(-1)^{n-1}} \otimes \det^*_{\mathbf{Q}} Fil^n H^i_{dR}(X)$ et il faut prendre $b_{\mathcal{D}} = 1 \otimes b$, avec b une base de V.

On conjecture que l'image de $H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(n))_{\mathbf{Z}}$ est contenue dans $H^1_f(\mathbf{Q}, H^i_{ét}(X \otimes \overline{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}_\ell(n)))$ (et cela a été démontré sous des hypothèses assez larges par Gros [Gr90])[26]. Bien sûr, on s'attend à ce que cette application induise un $\mathbf{Q}_\ell$–isomorphisme

$$c_{n,i,\ell} : \mathbf{Q}_\ell \otimes H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(n))_{\mathbf{Z}} \longrightarrow H^1_f(\mathbf{Q}, H^i_{ét}(X \otimes \overline{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}_\ell(n)))^{27}$$

et que celui–ci ne soit autre que l'isomorphisme naturel de $\mathbf{Q}_\ell \otimes H^1_f(\mathbf{Q}, M^*(1))$ sur $H^1_f(\mathbf{Q}, M^*(1)_\ell)$. Autrement dit, l'utilisation du **groupe de cohomologie motivique** $H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(n))_{\mathbf{Z}}$ et des **régulateurs** $c_{n,i,\ell}$ pour ℓ place finie ou non de $\mathbf{Q}$, nous permet de supprimer les guillemets dans l'énoncé des conjectures $C_{BK}(M)$ et $C_{BK}(M^*(1))$ i.e. de la réinterpréter comme des conjectures où la catégorie $\mathcal{M}$ n'intervient plus.

9.5. — **Le cas** $m = i/2$, avec i pair est très semblable, à ceci près que, comme M est de poids 0, il se peut que $H^0(\mathbf{Q}, M) \neq 0$. La fonction $L(H^{2m}(X), s)$ doit encore avoir un zéro d'ordre $= \dim_{\mathbf{R}} H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n))$ en $s = m$, mais elle doit avoir un pôle d'ordre $\dim_{\mathbf{Q}} H^0(\mathbf{Q}, H^{2m}(X)(m))$ en $s = n = m+1$. Via les mêmes réinterprétations que dans le cas $m < i/2$, la suite exacte $s_{f,\infty}(M^*(1))$ s'écrit

$$0 \longrightarrow \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(n))_{\mathbf{Z}} \longrightarrow H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n)) \longrightarrow \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} H^0(\mathbf{Q}, M)^* \longrightarrow 0$$

alors que, si $C^m_h(X)$ désigne le groupe des cycles de codimension m modulo équivalence homologique, la conjecture de Beilinson fait intervenir l'application (conjecturée être un isomorphisme)

$$\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(n))_{\mathbf{Z}} \oplus (\mathbf{R} \otimes C^m_h(X)) \longrightarrow H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n)) ,$$

où $\mathbf{R} \otimes C^m_h(X) \longrightarrow H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n))$ est induite par l'application cycle en cohomologie de de Rham. Modulo les mêmes interprétations que pour $m < i/2$ et la conjecture standard qui dit que l'application naturelle $C^m_h(X)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow$

---

[26] Dans le contexte de Bloch–Kato, il paraît plus simple de définir $H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(n))_f$ comme le sous–groupe de $H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(n))$ formé des x tels que $r_{n,i,\ell}(x) \in H^1_f(\mathbf{Q}, H^i_{ét}(X \otimes \overline{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}_\ell(n))$ pour tout ℓ et de remplacer dans l'énoncé des conjectures $H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(n))_{\mathbf{Z}}$ par $H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(n))_f$ quitte à conjecturer, par ailleurs, que $H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(n))_{\mathbf{Z}} = H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(n))_f$).

[27] Le fait que $c_{n,i,\ell}$ est un isomorphisme a été démontré dans certains cas particuliers par Jannsen ([Ja89], [Ja90]).

$H^0(\mathbf{Q}, M)$ est un isomorphisme, on vérifie que la conjecture $C_{DB}(M)$ est encore équivalente à la conjecture de Beilinson[28].

9.6. — Considérons enfin le cas où $m = n = (i+1)/2$ (avec i impair). Alors M est pur de poids -1 et s'identifie à $M^*(1)$ ce qui fait (cf. n° 7.1) que la suite exacte $s_{f,\infty}(M^*(1))$ correspond à l'existence d'une forme bilinéaire non dégénérée

$$<,>_M : \mathbf{R} \otimes H^1_f(\mathbf{Q}, M) \times \mathbf{R} \otimes H^1_f(\mathbf{Q}, M) \longrightarrow \mathbf{R} ,$$

la dimension du $\mathbf{Q}$–espace vectoriel $H^1_f(\mathbf{Q}, M)$ devant être égale à l'ordre du zéro de $L(H^{2m-1}(X), s)$ en $s = m$.

Rappelons ([Be87], [Bl84b]) que, dans ce cas, si $CH^m(X)^0$ désigne le groupe des cycles de codimension m homologiquement équivalents à 0 modulo l'équivalence rationnelle, et si d désigne la dimension de X, il existe un accouplement

$$<,>_m : CH^m(X)^0 \times CH^{d+1-m}(X)^0 \longrightarrow \mathbf{R} .$$

On conjecture (*loc. cit.*) que $\mathbf{Q} \otimes CH^m(X)^0$ est de dimension finie sur $\mathbf{Q}$, que les $\mathbf{R}$–espaces vectoriels $\mathbf{R} \otimes CH^m(X)^0$ et $\mathbf{R} \otimes CH^{d+1-m}(X)^0$ sont mis en dualité par cet accouplement et que, si $L \in CH^1(X)$ est la classe d'une section hyperplane, alors (si $m \leq (d+1)/2$; sinon il n'y a qu'à échanger m et $d+1-m$) la flèche naturelle

$$L^{d+1-2m} : \mathbf{Q} \otimes CH^m(X)^0 \longrightarrow \mathbf{Q} \otimes CH^{d+1-m}(X)^0$$

est un isomorphisme.

Si on l'utilise pour identifie ces deux $\mathbf{Q}$–espaces vectoriels, $<,>_m$ induit une forme bilinéaire sur $\mathbf{R} \otimes CH^m(X)^0$. On s'attend à ce qu'il existe un isomorphisme naturel de $\mathbf{Q} \otimes CH^m(X)^0$ sur $H^1_f(\mathbf{Q}, M)$ identifiant $<,>_m$ à $<,>_M$. S'il en est ainsi, $C_{DB}(M)$ est équivalente à la conjecture de Beilinson.

On peut construire [Ja90], pour chaque nombre premier ℓ, l'**application d'Abel–Jacobi ℓ–adique**

$$CH^m(X)^0 \longrightarrow H^1(\mathbf{Q}, H^{2m-1}_{\acute{e}t}(X \otimes \overline{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}_\ell(m))) = H^1(\mathbf{Q}, M_\ell) .$$

[28] Pour le démontrer, il faut comprendre ce qu'est l'application composée $\mathbf{R} \otimes C^m_h(X) \to H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n)) \to \mathbf{R} \otimes H^0(\mathbf{Q}, M)^*$. Celle-ci se factorise par l'application naturelle de $\mathbf{R} \otimes C^m_h(X)$ dans $\mathbf{R} \otimes H^0(\mathbf{Q}, M)$. L'application $\mathbf{R} \otimes H^0(\mathbf{Q}, M) \to \mathbf{R} \otimes H^0(\mathbf{Q}, M)^*$ qui en résulte n'est autre que celle que l'on déduit par extension des scalaires de l'isomorphisme $H^0(\mathbf{Q}, M) \to H^0(\mathbf{Q}, M)^*$ qui résulte de l'identification de M à son dual (Lefschetz "vache" plus dualité de Poincaré).

On s'attend encore à ce que l'image soit contenue dans le H^1_f et que cette application s'identifie à l'application naturelle de $H^1_f(\mathbb{Q},M)$ dans $H^1_f(\mathbb{Q},M_\ell)$.

§ 10. — Motifs d'Artin tordus

10.1. — Pour les valeurs aux entiers positifs de la fonction zêta de Riemann, Bloch et Kato démontrent (à peu de choses près) leur conjecture ([BK90], § 6). Leur méthode donne un peu plus : soit d un entier ≥ 1 et χ un caractère de Dirichlet, i.e. un homomorphisme de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_d)/\mathbb{Q}) = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*$ dans E^*. Il définit un motif d'Artin $E(\chi)$ sur $\mathbb{Q}$ à coefficients dans E (que l'on peut voir comme la réalisation du 1–motif $[E \to 0]$, où $G_{\mathbb{Q}}$ agit sur E via χ). On s'intéresse au comportement en $s = m$ de $L(\chi, s)$, i.e. au comportement en $s = 0$ de $L(M, s)$ avec $M = E(\chi)(m)$. Disons que χ est pair (resp. impair) si $\chi(-1) = 1$ (resp. -1).

a) Si $m = 0$ ou 1, on est dans le cadre des 1–motifs et les conjectures sont vraies.

b) Si $m < 0$ et si les parités de m et de χ sont opposées, $C_r(M)$ et $C_{DB}(M)$ disent que $L(\chi, m)$ est un nombre rationnel non nul, ce qui est bien connu; on est dans un cas critique et, si ℓ est un nombre premier, on peut déduire de la "**conjecture principale**" (pour ℓ) de la théorie d'Iwasawa que, si b est comme dans $C_{DB}(M)$, on a bien $|1 \otimes b|_{\ell,EP} = 1$; grâce à Mazur et Wiles [MW84], c'est un théorème si ℓ^2 ne divise pas d[29].

c) Si $m \geq 2$ et si m et χ ont la même parité, on est encore dans un cas critique (dual du précédent si l'on remplace χ par χ^{-1}) ; l'équation fonctionnelle montre que $C_r(M)$ et $C_{DB}(M)$ sont vraies. Un calcul local assez délicat permet en outre de déduire du cas précédent que si b est comme dans $C_{DB}(M)$, alors on a bien $|1 \otimes b|_{\ell,EP} = 1$, au moins si ℓ ne divise pas d.

d) Si $m < 0$ et si m et χ ont la même parité, la fonction $L(M, s)$ a un pôle simple en $s = 1$ et on doit donc avoir $\dim_E H^1_f(\mathbb{Q}, M^*(1)) = 1$, où $M^*(1) = E(\chi^{-1})(1 - m)$. Deligne a construit une extension non triviale de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q},E}$ par $M^*(1)$ dans la catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}(E)$ ([De89], n° 3.18 ; en toute rigueur, il faudrait vérifier l'existence d'isomorphisme de comparaison pour les p divisant d). On s'attend bien sûr à ce que cette extension soit une structure motivique et à ce que sa classe engendre $H^1_f(\mathbb{Q}, M^*(1))$. S'il en est ainsi, alors $C_{DB}(M)$ est vraie et, avec toujours les mêmes notations, on peut vérifier que $|1 \otimes b|_{\ell,EP} = 1$, au moins si ℓ ne divise pas $\varphi(d)$.

e) Enfin le cas $m \geq 2$ avec parités différentes se déduit de (d) comme

---

[29] Autrement dit, $C_{BK}(M)$ est vraie à multiplication près par un nombre rationnel qui est une unité en dehors des ℓ tels que ℓ^2 divise d.

(c) de (b) : modulo le fait que l'extension construite par Deligne est "la bonne", on trouve que $C_{DB}(M)$ est vraie et que $|1 \otimes b|_{\ell,EP} = 1$, au moins si ℓ ne divise pas $\varphi(d)$.

10.2. — **Remarque** : Plaçons nous dans le cas (e); on peut de nouveau définir un groupe de cohomologie motivique $K_{2m-1}(\chi)^{(m)}$ qui est un E–espace vectoriel de dimension 1 et des régulateurs ([So79]) permettant, comme aux n° 9.3 et 9.4 de réexprimer les conjectures sans faire référence à des extensions de motifs. Il semble que Beilinson ait montré [Be90] que ces constructions sont compatibles avec celles de Deligne.

10.3. — Supposons le corps F totalement réel et considérons la fonction $\zeta(F,s)$ au voisinage de $s = m$. Bien sûr, c'est le cas particulier de la situation considérée au § 9 où l'on prend $X = \operatorname{Spec} F$ et $i = 0$. On voit que les entiers m négatifs impairs sont critiques. La conjecture $C_{DB}(M)$ dit que pour un tel m, $\zeta(F,m)$ est un nombre rationnel non nul et on peut montrer que $C_{BK}(M)$ équivaut à une conjecture de Lichtenbaum ([Li72]). Avec les mêmes notations que ci–dessus, $C_{BK}(M)$ revient à prouver que, pour tout ℓ, $|1 \otimes b|_{\ell,EP} = 1$. On sait [BN78] que, pour ℓ fixé, cette condition résulte de la "conjecture principale" correspondante. En particulier, si $F/\mathbf{Q}$ est abélienne, c'est vrai si ℓ^2 ne divise pas le conducteur de F[30].

10.4. — **Remarques** : *i)* Considérons la catégorie des **motifs mixtes de Tate sur** F, i.e. la sous–catégorie pleine de la catégorie des motifs mixtes sur F à coefficients dans $\mathbf{Q}$ dont les objets sont ceux dont tous les quotients simples sont isomorphes à un tordu à la Tate de l'objet–unité. Bien sûr, la seule fonction L intéressante produite par cette catégorie est la fonction $\zeta(F,s)$. Cependant les travaux de Deligne sur $\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ ([De89], voir aussi [Ih89], [BGSV90]) semblent fournir les moyens de réaliser cette catégorie comme sous–catégorie pleine de $\mathcal{C}_F(\mathbf{Q})$; il serait intéressant de vérifier qu'il en est bien ainsi et que la catégorie obtenue est bien f–admissible. On peut se poser la même question avec la catégorie un peu plus grosse formée des motifs qui sont extensions successives de motifs d'Artin tordus.

ii) Nous n'avons fait qu'évoquer la **cohomologie motivique** ([BMS87], [Li87], [BGSV90],...) qui figure pourtant en bonne place parmi les ingrédients qui sont amenés à jouer un rôle important dans les développements liés à ces conjectures.

iii) Un brillant avenir semble aussi promis à l'**utilisation des variétés de Shimura pour la construction de motifs mixtes** (permettant en

---

[30] Cela peut aussi se déduire (mais c'est la même démonstration) du n° 10.1 en décomposant la fonction $\zeta(F,s)$ en produit de fonctions L de Dirichlet).

particulier, dans certains cas, de vérifier que lorsque $L(M,0)=0$, il existe une extension non triviale du motif unité par $M^*(1)$) : voir le rapport [Ra90] et les travaux récents de Harder ([Ha89], ?) et de Franke (travail en préparation ?).

iv) En dehors des résultats sur les conjectures de Birch et Swinnerton–Dyer et de ceux sur les fonctions L de Dirichlet, il commence à y avoir quelques résultats partiels pour d'autres motifs. Disons seulement :

a) Que Bloch et Kato ([BK90], § 7) obtiennent des résultats sur $L(H^1(X),2)$, lorsque X est une courbe elliptique à multiplication complexe définie sur E ; en gros, ils montrent que $C_{DB}(M)$ est vraie dans ce cas et, utilisant les résultats de Kolyvagin et Rubin sur la "conjecture principale" dans le cas elliptique, que $|1\otimes b|_{\ell,EP}=1$ si ℓ est "régulier pour E" [So87].

b) Que Nekovar [Ne92] obtient des résultats "à la manière de Kolyvagin" qui confortent la conjecture de Bloch et Kato pour $L(M(f),m)$ où M est le motif de rang 2 associé à une forme modulaire nouvelle, à coefficients rationnels, de poids $2m$ pour $\Gamma_0(N)$.

v) Tous ces résultats ont en commun l'utilisation des idées de Kolyvagin (en particulier l'utilisation des systèmes d'Euler, cf. [Pe89], [Ko90]) et la **théorie d'Iwasawa** y joue un grand rôle. A chaque fois on a besoin d'utiliser la "conjecture principale" de cette théorie pour le motif correspondant et il faut commencer par comprendre ce qu'elle doit être. Dans le cas "ordinaire", cela a été fait par Greenberg [Gre89] et Schneider [Sc89].

Dans le cas général, Kato a commencé à le faire [Ka91]. Très en gros, il s'agit de voir comment se comporte un motif M sur F dans une extension finie abélienne L de F, ce qui consiste essentiellement à refaire ce que l'on a fait ici pour des motifs à coefficients dans la $\mathbb{Q}$–algèbre étale $E[\mathrm{Gal}(L/F)]$. Parallèlement, il faut développer la théorie p–adique, i.e. construire et étudier les fonctions L p–adiques, comprendre les analogues p–adiques des conjectures de Bloch et Kato (cf. entre autres [Co89], [Co91], [CP89], [Gre91], [Ne92b] [Pa91], [Pe92],...).

C – Compléments

§ 11. — Groupes de Safarevic et nombres de Tamagawa

Tout comme la conjecture de Birch et Swinnerton–Dyer, la conjecture de Bloch et Kato, sous sa forme originale fait intervenir des groupes de Safarevic et des nombres de Tamagawa. Faute d'avoir fait les vérifications nécessaires, nous allons, comme Bloch et Kato, nous limiter au cas où $E=\mathbb{Q}$.

11.1. — Considérons tout d'abord un $\mathbb{Z}_\ell$–module de type fini T muni d'une action linéaire et continue de G_F, non ramifiée en dehors d'un nombre fini de places, tel que la représentation $V=\mathbb{Q}_\ell\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}T$ soit pseudo–géométrique.

Notons $H^1_f(F,T)$ l'image inverse de $H^1_f(F,V)$ dans $H^1(F,T)$. C'est un $\mathbf{Z}_\ell$–module de type fini et on peut parler de son déterminant $\det_\ell H^1_f(F,T)$ qui est un $\mathbf{Z}_\ell$–réseau de $\det_\ell H^1_f(F,V)$; de même $\det_\ell H^0(F,T)$ est un réseau de $\det_\ell H^0(F,V)$ et $L_f(T) = \det_\ell H^0(F,T) \otimes \det^*_\ell H^1_f(F,T)$ est un réseau de $L_f(V)$; si $T^+ = \oplus_{\mathfrak{p}\in S_\infty(F)} H^0(G_\mathfrak{p},T)$, $\det_\ell T^+$ est un réseau de $\det_\ell V^+$; enfin si $T^*(1)$ est le "dual tordu à la Tate" de T, $L_f(T^*(1))$ est un réseau de $L_f(V^*(1))$. Par conséquent $\Delta'_f(T) = L_f(T) \otimes L_f(T^*(1)) \otimes \det^*_\ell T^+$ est un réseau de $\Delta'_f(V) = L_f(V) \otimes L_f(V^*(1)) \otimes \det^*_\ell V^+$. Choisissons une base ω'_f de $\Delta'_f(T)$ et une base ω de $\det_\ell t_V$. Le problème est de calculer $|\omega'_f \otimes \omega|_{\ell,EP} \in \ell^{\mathbf{Z}}$ (qui dépend, a priori, des choix de T et ω mais pas de ω'_f).

11.2. — Pour toute place $\mathfrak{p}$ de F, notons encore $H^1_f(F_\mathfrak{p},T)$ l'image inverse de $H^1_f(F_\mathfrak{p},V)$ dans $H^1(F_\mathfrak{p},T)$. Si $\mathfrak{p}$ est une place finie, l'application naturelle

$$(\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} H^1_f(F_\mathfrak{p},T) \longrightarrow H^1(F_\mathfrak{p},V/T)$$

est injective et nous notons $H^1_{/f}(F_\mathfrak{p},V/T)$ son conoyau. Si $\mathfrak{p}$ est infinie, on pose $H^1_{/f}(F_\mathfrak{p},V/T) = H^1(F_\mathfrak{p},V/T)$. On choisit un ensemble fini S de places de F contenant toutes les places à l'infini, toutes les places divisant ℓ et toutes les places où V est ramifiée. Bloch et Kato définissent alors le groupe de Safarevic $\text{Ш}(T)$ comme le premier groupe de cohomologie du complexe

$$(\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} H^1_f(F,T) \longrightarrow H^1(U_S,V/T) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\in S} H^1_{/f}(F_\mathfrak{p},V/T) \, .$$

Il est facile de voir que ce groupe est fini et indépendant de S[31].

11.3. — Pour tout $\mathbf{Q}_\ell$–espace vectoriel W de dimension finie, si ω est une base de $\det_\ell W$, notons μ_ω l'unique mesure de Haar sur W telle que, si Λ_0 est un réseau de W vérifiant $\det_\ell \Lambda_0 = \mathbf{Z}_\ell \cdot \omega$, alors $\mu_\omega(\Lambda_0) = 1$. Si Λ est un $\mathbf{Z}_\ell$–module de type fini muni d'une identification de $\mathbf{Q}_\ell \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \Lambda$ à W et si $\det_\ell \Lambda = \mathbf{Z}_\ell . a\omega$, avec $a \in \mathbf{Q}_\ell$, on a $\mu_\omega(\Lambda) = |a|_\ell$.

Soit $\mathfrak{p}$ une place finie de F ; convenons que $t_{V,\mathfrak{p}} = 0$ si $\mathfrak{p}$ ne divise pas ℓ. On dispose (cf. n° 4.4) d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(F_\mathfrak{p},V) \longrightarrow \underline{D}_\mathfrak{p}(V) \longrightarrow \underline{D}_\mathfrak{p}(V) \oplus t_{V,\mathfrak{p}} \longrightarrow H^1_f(F_\mathfrak{p},V) \longrightarrow 0$$

permettant d'identifier $\det_\ell H^1_f(F_\mathfrak{p},V) \otimes \det^*_\ell H^0(F_\mathfrak{p},V)$ à $\det_\ell t_{V,\mathfrak{p}}$. Si $\omega_\mathfrak{p}$ est une base de $\det_\ell t_{V,\mathfrak{p}}$, et si ω_1 et ω^*_0 sont des bases de $\det_\ell H^1_f(F_\mathfrak{p},V)$

---

[31] Lorsque $T = T_\ell(A)$, module de Tate d'une variété abélienne A, on vérifie que, si $\text{Ш}(A)(\ell)$ est fini, alors $\text{Ш}(A)(\ell) = \text{Ш}(T)$.

et $\det^*_\ell H^0(F_\mathfrak{p}, V)$ respectivement telles que $\omega_\mathfrak{p} = \omega_1 \otimes \omega_0^*$, le nombre $\mu_{\omega_1}(H^1_f(F_\mathfrak{p},T))/\mu_{\omega_0}(H^0(F_\mathfrak{p},T))$ $(\in \ell^{\mathbb{Z}})$ ne dépend que de $\omega_\mathfrak{p}$ et nous le notons $Tam^0_{\mathfrak{p},\omega_\mathfrak{p}}(T)$. Si $\mathfrak{p}$ ne divise pas ℓ, $\det_\ell t_{V,\mathfrak{p}} = \mathbb{Q}_\ell$ et on pose $Tam^0_\mathfrak{p}(T) = Tam^0_{\mathfrak{p},1}(T)$. On montre que $Tam^0_\mathfrak{p}(T) = 1$ pour presque tout $\mathfrak{p}$ fini ne divisant pas ℓ. Le produit

$$\prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell} Tam^0_\mathfrak{p}(T) \times \prod_{\mathfrak{p}|\ell} Tam^0_{\mathfrak{p},\omega_\mathfrak{p}}(T)$$

a donc un sens et ne dépend que de la base $\omega = \pm \otimes_{\mathfrak{p}|\ell}\, \omega_\mathfrak{p}$ de $\det_\ell t_V$. On le note $Tam^0_\omega(T)$.

11.4. — On démontre

PROPOSITION. — *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, on a* $\#Ш(T) = \#Ш(T^*(1))$ *et*

$$(|\omega'_f \otimes \omega|_{\ell,EP})^{-1} = Tam^0_\omega(T) \times \#Ш(T^*(1)) \ .$$

11.5. — Soit maintenant $\mathfrak{p}$ une place finie de F telle que $P_\mathfrak{p}(V,1) \neq 0$. On voit qu'alors $H^0(F_\mathfrak{p}, V) = 0$ et que

- si $\mathfrak{p}$ ne divise pas ℓ, $H^1_f(F_\mathfrak{p}, V) = 0$ donc $H^1_f(F_\mathfrak{p}, T) = H^1(F_\mathfrak{p}, T)_{tor}$;
- si $\mathfrak{p}$ divise ℓ, l'**exponentielle de Bloch–Kato**, qui est l'application naturelle définie au n° 4.4,

$$t_{V,\mathfrak{p}} \longrightarrow H^1_f(F_\mathfrak{p}, V)$$

est un isomorphisme; en particulier, le choix d'une base $\omega_\mathfrak{p}$ de $\det_\ell t_{V,\mathfrak{p}}$ munit $H^1_f(F_\mathfrak{p}, V)$ par transport de structure d'une mesure de Haar $\mu_{BK,\mathfrak{p},\omega_\mathfrak{p}}$. Si $\mathfrak{p}$ ne divise pas ℓ et si $Tam_\mathfrak{p}(T) = \#H^1(F_\mathfrak{p},T)_{tor}$, on vérifie que $Tam^0_\mathfrak{p}(T) = |L_\mathfrak{p}(V,0)|_\ell . Tam_\mathfrak{p}(T)$. De même, si $\mathfrak{p}$ divise ℓ et si $Tam_{\mathfrak{p},\omega_\mathfrak{p}}(T) = \mu_{BK,\mathfrak{p},\omega_\mathfrak{p}}(H^1_f(F_\mathfrak{p},T))$, on a $Tam^0_{\mathfrak{p},\omega_\mathfrak{p}}(T) = |L_\mathfrak{p}(V,0)|_\ell . Tam_{\mathfrak{p},\omega_\mathfrak{p}}(T)$.

11.6. — Supposons $F = \mathbb{Q}$ et venons–en à la conjecture originale de Bloch et Kato. Celle–ci est énoncée à la manière des théorèmes sur les nombres de Tamagawa des groupes semi–simples [Cl88] et nous allons avoir besoin d'introduire quelques notations supplémentaires.

Les couples (M, Θ) formés d'une structure motivique M sur $\mathbb{Q}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et d'un $\mathbb{Z}$–module de type fini Θ avec une action linéaire et continue de $G_\mathbb{Q}$ sur $\widehat{\Theta} = \widehat{\mathbb{Z}} \otimes \Theta$, munis d'un isomorphisme de $\mathbb{Q} \otimes \Theta$ sur $M_{B,\infty}$, avec les conditions de compatibilité que l'on pense, forment, de manière naturelle une catégorie abélienne. Notons $H^1(\mathbb{Q}, \Theta) = H^1(\mathbb{Q}, (M, \Theta))$ le groupe des classes d'extension de $(\mathbb{1}_{\mathbb{Q},\mathbb{Q}}, \mathbb{Z})$ par (M, Θ) dans cette catégorie et $H^1_f(\mathbb{Q}, \Theta) \subset H^1(\mathbb{Q}, \Theta)$ l'image inverse de $H^1_f(\mathbb{Q}, M)$.

Considérons une structure motivique M telle que (a) $W_{-3}M = M$ et (b) $P_p(M,1)$ ($= (P_p(M_\ell,1)$, pour un ℓ quelconque) $\neq 0$ pour tout nombre premier p[32]. Choisissons Θ comme ci–dessus, sans torsion. Posons $A_\Theta(\mathbb{Q}) = H^1_f(\mathbb{Q},\Theta)$, $A_\Theta(\mathbb{Q}_p) = H^1_f(\mathbb{Q}_p,\widehat{\Theta})$ pour p premier, $A_\Theta(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\otimes t_M/\mathrm{Im}(\Theta)$ et $A_\Theta(\mathbb{R}) = (A_\Theta(\mathbb{C}))^{\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})}$[33, 34].

Si $\widehat{\Theta} = \Pi\Theta_\ell$, et si p est premier, $A_\Theta(\mathbb{Q}_p) = \Pi_\ell H^1_f(\mathbb{Q}_p,\Theta_\ell)$ et (b) implique que, si $\ell \neq p$, $H^1_f(\mathbb{Q}_p,\Theta_\ell)$ est un groupe fini, trivial pour presque tout ℓ. Alors, $A_\Theta(\mathbb{Q}_p)$ est compact si p est fini, localement compact pour $p=\infty$, tandis que le quotient

$$\Big(\prod_{p\in S(\mathbb{Q})} A_\Theta(\mathbb{Q}_p)\Big)/A_\Theta(\mathbb{Q})$$

est compact.

Choisissons une base ω sur $\mathbb{Q}$ de $\det_{\mathbb{Q}} t_M$. Pour chaque $p\in S(\mathbb{Q})$, ω peut être considérée comme une base de $\det_{\mathbb{Q}_p} t_{M_p}$. Si $p=\infty$, elle définit une mesure de Haar $\mu_{BK,\infty,\omega}$ sur $A_\Theta(\mathbb{R})$. Si p est fini, la mesure $\mu_{BK,p,\omega}$ sur $H^1_f(\mathbb{Q}_p,M_p) = \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} A_\Theta(\mathbb{Q}_p)$ peut être considérée comme une mesure sur $A_\Theta(\mathbb{Q}_p)$. Moyennant une hypothèse un peu technique sur les isomorphismes de comparaison p–adiques (qui dans la pratique est toujours satisfaite), Bloch et Kato montrent que, pour presque tout p,

$$\mu_{BK,p,\omega}(A_\Theta(\mathbb{Q}_p)) = P_p(M,1)$$

et le produit infini $\prod_{p\in S_f(\mathbb{Q})}\mu_{BK,p,\omega}(A_\Theta(\mathbb{Q}_p))$ converge. Ceci permet de définir la mesure produit $\mu_{BK} = \prod \mu_{BK,p,\omega}$ sur le groupe localement compact $\prod_{p\in S(\mathbb{Q})} A_\Theta(\mathbb{Q}_p)$ qui, grâce à la formule du produit, est indépendante de ω et que Bloch et Kato appelle **la mesure de Tamagawa**. Ils posent

$$Tam(\Theta) = \mu_{BK}\Big(\Big(\prod_{p\in S(\mathbb{Q})} A_\Theta(\mathbb{Q}_p)\Big)/A_\Theta(\mathbb{Q})\Big)$$

---

32 Conjecturalement (b) résulte de (a) puisque l'on s'attend à ce que, dans $\mathbb{C}[t]$, $P_p(M,t) = \Pi(1-\alpha_i t)$ avec $|\alpha_i| \leq p^{w/2}$ si $W_w M = M$, résultat qui, grâce à Deligne (conjectures de Weil), est vrai pour presque tout p.

33 Bloch et Kato utilisent le point de vue "Beilinson", i.e. ils voient le $H^1_f(\mathbb{Q},M)$ comme un groupe défini via la cohomologie motivique, muni de régulateurs.

34 Ces notations suggèrent que l'on devrait savoir définir un faisceau de groupes abéliens A_Θ pour une certain topologie. Lorsque $M = \underline{\text{Réal}}[0\to A]$ où A est une variété abélienne sur $\mathbb{Q}$, si on prend $\Theta = H_1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$, on peut montrer que $A_\Theta(K) = A(K)$, pour $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

(c'est aussi $\mu_{BK,\infty,\omega}(A_\Theta(\mathbf{R})/A_\Theta(\mathbf{Q})).\prod_{p\neq\infty}\mu_{BK,p,\omega}(A_\Theta(\mathbf{Q}_p)))$; ils **conjecturent** que le groupe fini $ш(\Theta_\ell)$ est nul pour presque tout ℓ, et que, si l'on pose $ш(\Theta) = \prod_{\ell \text{ premier}} ш(\Theta_\ell)$, alors

$$Tam(\Theta) = \#H^0(\mathbf{Q}, M^*(1)/\Theta^*(1))/\#ш(\Theta) .$$

Pour $p \in S(\mathbf{Q})$, posons $\mu^0_{BK,p,\omega} = \mu_{BK,\infty,\omega}$ si $p = \infty$ et $= |P_p(M,1)|^{-1} \cdot \mu_{BK,p,\omega}$ sinon (c'est donc la mesure considérée au n° 11.3). Notons μ^0_{BK} la mesure produit sur $\Pi A_\Theta(\mathbf{Q}_p)$ et posons

$$Tam^0(M) = \mu^0_{BK}\Big(\Big(\prod_{p\in S(\mathbf{Q})} A_\Theta(\mathbf{Q}_p)\Big)/A_\Theta(\mathbf{Q})\Big) .$$

La conjecture de Bloch et Kato équivaut à dire que

$C_{Tam}(M)$ $\qquad L(M,0) = Tam^0(\Theta) \cdot \#ш(\Theta)/\#H^0(\mathbf{Q}, M^*(1)/\Theta^*(1))$.

Il n'est pas difficile de déduire de la proposition 11.4 que cette conjecture équivaut à $C_{BK}(M)$.

11.7. — **Remarque** : Il semble que l'on puisse traduire la conjecture $C_{BK}(M)$ dans le style de $C_{Tam}(M)$ pour une structure motivique quelconque M. Mais il est alors indispensable de travailler avec la mesure μ^0_{BK} (en dehors du domaine de convergence, la mesure μ_{BK} n'existe pas) et il faut remplacer le "groupe" A_Θ par un complexe.

§ 12. — Représentations λ–adiques et motifs semi–stables, équations fonctionnelles, fonctions L incomplètes[35]

12.1. — Rappelons ([Se70]) que, pour tout $s \in \mathbf{C}$, on pose $\Gamma_{\mathbf{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$. Soient $K \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$ et V une structure de Hodge mixte sur K à coefficients réels. On définit une filtration décroissante sur V par des sous $\mathbf{R}$–espaces vectoriels en posant, pour tout $r \in \mathbf{Z}$,

$\gamma^r V$ = le plus grand sous–espace vectoriel de V tel que $(\gamma^r V)_{\mathbf{C}} \subset Fil^r V_{\mathbf{C}}$. Lorsque $K = \mathbf{R}$, on remarque que $\gamma^r V$ est stable par $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ qui agit donc sur $gr^r_\gamma V$; on pose alors $n_r^+ = \dim_{\mathbf{R}}(gr^r_\gamma V)^+$ et $n_r^- = \dim_{\mathbf{R}}(gr^r_\gamma V)^-$. Si $K = \mathbf{C}$, on pose $n_r^+ = n_r^- = \dim_{\mathbf{R}} gr^r_\gamma V$. Dans tous les cas, on pose[36]

$$L(V,s) = \prod_{r\in\mathbf{Z}} \Gamma_{\mathbf{R}}(s+\varepsilon_r - r)^{n_r^+} \cdot \Gamma_{\mathbf{R}}(s+1-\varepsilon_r - r)^{n_r^-} ,$$

[35] cf. [FP92]. Pour simplifier, on se place dans le cas $E = \mathbf{Q}$, mais la généralisation ne présente pas de difficulté.

[36] On vérifie facilement que dans le cas d'une structure de Hodge pure, on retrouve la définition usuelle ([Se70]).

où $\varepsilon_r \in \{0,1\}$ est défini par $\varepsilon_r \equiv r \pmod 2$.

On peut également (cf. [FP92]) par des recettes du même genre définir le "facteur ε" $\varepsilon(V, \psi_0, \mu_0)$.

On remarque que $(\gamma^0 V)^+$ s'identifie à $\operatorname{Ker}\alpha_V$ et que $L(V,s)$ a un pôle en $s=0$ d'ordre $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker}\alpha_V$.

12.2. — **Remarque** : On ne change pas les "bonnes propriétés" des facteurs locaux archimédiens si l'on remplace $\Gamma_{\mathbb{R}}(s)$ par $a.\Gamma_{\mathbb{R}}(s)$. Les travaux récents de Deninger ([Den90], [Den91]) suggèrent de prendre $a = 1/\sqrt{2}$.

12.3. — Soient maitenant $\mathfrak{p}$ une place finie de F et $B_{st,\mathfrak{p}}$ la $B_{cris,\mathfrak{p}}$–algèbre B_{st} relative à l'extension $\overline{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}$ (cf. par exemple [Il90], n° 1.2.3). Pour tout nombre premier ℓ, on dit qu'une représentation ℓ–adique V de $G_{\mathfrak{p}}$ est **semi–stable**

a) lorsque ℓ ne divise pas $\mathfrak{p}$, si l'action de l'inertie $I_{\mathfrak{p}}$ est unipotente;

b) lorsque ℓ divise $\mathfrak{p}$ si $\dim_{(F_{\mathfrak{p}})_0}(B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} V)^{G_{\mathfrak{p}}} = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} V$.

On dit que V est **potentiellement semi–stable** ou *pst* s'il existe une extension finie $F'_{\mathfrak{p}}$ de $F_{\mathfrak{p}}$ telle que V soit semi–stable en tant que représentation de $\operatorname{Gal}(\overline{F}_{\mathfrak{p}}/F'_{\mathfrak{p}})$. Lorsque ℓ ne divise pas $\mathfrak{p}$, c'est toujours le cas (c'est le théorème de monodromie ℓ–adique de Grothendieck, [ST68], Appendix). Lorsque ℓ divise $\mathfrak{p}$ ce n'est plus vrai[37].

A toute représentation ℓ–adique *pst* V de $G_{\mathfrak{p}}$, on sait associer une représentation linéaire de $W'_{\mathfrak{p}}$, groupe de Weil–Deligne de $F_{\mathfrak{p}}$, à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$ si ℓ ne divise pas $\mathfrak{p}$ (cf. [De73], [Ta79], § 4)[38], dans $(\overline{F}_{\mathfrak{p}})_0$ si ℓ divise $\mathfrak{p}$ (cf. [Bures]). Ce qui fait que l'on peut associer à V non seulement un facteur $L_{\mathfrak{p}}(V,s) = (P_{\mathfrak{p}}(V, N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$ défini comme au n° 3.3 mais aussi un conducteur $a_{\mathfrak{p}}(V)$ et un "facteur ε" $\varepsilon_{\mathfrak{p}}(V, \psi, dx, s)$ ([Ta79], § 4).

12.4. — Disons qu'une représentation ℓ–adique de G_F est **géométrique** si elle est *pst* en toutes les places finies et non ramifiées en dehors d'un nombre fini d'entre elles.

"CONJECTURE" (cf. [FM92]). — *Soit ℓ un nombre premier. Le foncteur $M \longmapsto M_\ell$ induit une $\otimes$–équivalence entre la catégorie $\mathbb{Q}_\ell$–linéaire déduite de la catégorie $\underline{SM}_F(\mathbb{Q})$ par l'extension des scalaires $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell$ et la sous–catégorie pleine de la catégorie des représentations ℓ–adiques de G_F qui sont géométriques.*

---

[37] Toute représentation potentiellement semi–stable est de de Rham; j'ignore si la réciproque, qui constituerait une sorte de théorème de monodromie p–adique, est vraie.

[38] La construction de cette représentation dépend de certains choix, mais pas sa classe d'isomorphisme.

En particulier, si M est un objet de $\underline{SM}_F(\mathbf{Q})$, alors pour tout nombre premier ℓ, sa réalisation ℓ–adique est géométrique[39]. S'il en est ainsi et si $\mathfrak{p}$ est une place de F au-dessus du nombre premier p, on dispose d'une famille, indexée par les nombres premiers ℓ, de représentations de $W'_{\mathfrak{p}}$ dont on conjecture qu'elles sont définies sur $\mathbf{Q}$ et compatibles ([De73], n° 8.7). Ceci permet de définir $a_{\mathfrak{p}}(M)$ et $\varepsilon_{\mathfrak{p}}(M,\psi,dx)$ comme étant $a_{\mathfrak{p}}(M_\ell)$ et $\varepsilon_{\mathfrak{p}}(M_\ell,\psi,dx)$ pour n'importe quel choix de ℓ, y compris $\ell = p$. Si $\mathfrak{p} \in S_\infty(F)$, on note $\varepsilon_{\mathfrak{p}}(M,\psi_0,\mu_0,s)$ la constante $\varepsilon(M_{\mathfrak{p}},\psi_0,\mu_0)$ où $M_{\mathfrak{p}}$ est la structure de Hodge mixte sur F associée à M. Si ψ désigne un caractère additif non trivial de $\mathbb{A}_F/F$ et $dx = \otimes dx_{\mathfrak{p}}$ la mesure de Tamagawa sur $\mathbb{A}_F$, on peut alors définir le facteur $\varepsilon(M,s)$ par la formule usuelle

$$\varepsilon(M,s) = \Pi_{\mathfrak{p}}\varepsilon_{\mathfrak{p}}(M,\psi_{\mathfrak{p}},dx_{\mathfrak{p}},s) \ .$$

Dans ce cadre général, si $\Lambda(M,s) = \prod_{\mathfrak{p}\in S(F)} L_{\mathfrak{p}}(M,s)$ est la fonction L "complète" de M, l'équation fonctionnelle s'écrit

"CONJECTURE" $C_{EF}(M)$. — *La fonction $\Lambda(M,s)$ admet un prolongement méromorphe dans $\mathbf{C}$ et vérifie $\Lambda(M,s) = \varepsilon(M,s)\cdot\Lambda(M^*(1),-s)$.*

12.5. — Il semble que l'on puisse vérifier que, si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de $\underline{SM}_F(\mathbf{Q})$ et si deux des trois conjectures $C_{EF}(M')$, $C_{EF}(M)$, $C_{EF}(M'')$ sont satisfaites, il en est de même de la troisième.

Si $C_{EF}(M)$ est satisfaite, on peut vérifier que $C_r(M)$ et $C_r(M^*(1))$ sont équivalentes, de même que $C_{DB}(M)$ et $C_{DB}(M^*(1))$. Pour C_{BK}, c'est un peu plus subtil : B. Perrin–Riou a énoncé [FP92] une formule conjecturale $C_{EP,\mathfrak{p}}(V)$, de nature élémentaire mais un peu longue à expliquer, pour le calcul de la "caractéristique d'Euler–Poincaré" d'une représentation p–adique *pst* V de $G_{\mathfrak{p}}$ (où p divise $\mathfrak{p}$). On montre que, si le motif $\det(M)$ est un tordu à la Tate d'un motif d'Artin, si $C_{EP,\mathfrak{p}}(M_p)$ est vraie pour tout $\mathfrak{p}$ et si $C_{EF}(M)$ est vraie, alors $C_{BK}(M)$ et $C_{BK}(M^*(1))$ sont équivalentes[40].

[39] Les "bons" motifs seraient alors les motifs **semi–stables**, i.e. les M tels que, pour tout ℓ et tout $\mathfrak{p}$, M_ℓ munie de l'action de $G_{\mathfrak{p}}$, est semi-stable. On devrait avoir un **théorème de réduction semi–stable** disant que toute structure motivique sur F devient semi-stable après une extension finie des scalaires. Pour les 1-motifs, cela se déduit facilement du théorème de réduction semi-stable pour les variétés abéliennes.

[40] Il est amusant de remarquer que, dans la démonstration de Bloch et Kato de leur

12.6. — Soit S un ensemble fini de places de F contenant les places à l'infini. On peut alors énoncer des conjectures $C_{r,S}(M)$, $C_{DB,S}(M)$, $C_{BK,S}(M)$ sur le comportement en $s=0$ de la fonction $L_S(M,s)$ via un formalisme tout à fait analogue à ce qu'on a développé pour $L(M,s)$ et nous ne le ferons pas, faute de place. Disons seulement que les groupes $H^1_f(F,M)$ et $H^1_f(F,M^*(1))$ doivent être remplacés par $H^1_{f,S}(F,M)$ et $H^1_{f,S}(F,M^*(1))$ où

$$H^1_{f,S}(F,M)=\{x\in H^1(F,M)\mid x_{\ell,\mathfrak{p}}\in H^1_f(F_\mathfrak{p},M_\ell)\ \forall\ell \text{ premier et } \mathfrak{p}\notin S\}\ ,$$

que l'ordre du zéro éventuel en $s = 0$ de $L_S(M,s)$ est égal à $\dim_{\mathbf{Q}} H^1_{f,S}(F,M^*(1)) - \dim_{\mathbf{Q}} H^0(F,M)$ et que l'application naturelle de $H^1_{f,S}(F,M)$ dans $H^1(F,M_\ell)$ doit induire un isomorphisme de $\mathbf{Q}_\ell\otimes H^1_{f,S}(F,M)$ sur

$$H^1_{f,S}(F,M_\ell)=\left\{x\in H^1(F,M_\ell)\mid x_\mathfrak{p}\in\left\{\begin{array}{ll} H^1_f(F_\mathfrak{p},M_\ell) & \text{si } \mathfrak{p}\notin S\\ H^1_g(F_\mathfrak{p},M_\ell) & \text{si } \mathfrak{p}\in S\end{array}\right.\right\}$$

où $H^1_g(F_\mathfrak{p},M_\ell)$ désigne le sous-groupe de $H^1(F_\mathfrak{p},M_\ell)$ classifiant les extensions de $\mathbf{Q}_\ell$ par M_ℓ qui sont *pst*.

Il est intéressant d'observer que la seule façon raisonnable d'arriver à rendre toutes ces conjectures compatibles entre elles conduit aux conjectures suivantes :

"CONJECTURE". — *La catégorie $\underline{SM}_F(\mathbf{Q})$ est de dimension cohomologique* 1.

CONJECTURE. — *Pour tout nombre premier ℓ, la catégorie des représentations ℓ-adiques géométriques de F est de dimension cohomologique* 1. *En outre, pour toute représentation géométrique V et toute place finie $\mathfrak{p}$ de F, la représentation du groupe $W'_\mathfrak{p}$ associée à V est F-semi-simle (au sens de* [De73], *déf.* 8.6*).*

Modulo ces conjectures, il semble que l'on puisse vérifier que les conjectures $C_{BK}(M)$ et $C_{BK,S}(M)$ sont équivalentes. En outre, il est facile de voir que, si

$$0\longrightarrow M'\longrightarrow M\longrightarrow M''\longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de $\underline{SM}_F(\mathbf{Q})$ qui "a bonne réduction en dehors de S" (auquel cas $L_S(M,s) = L_S(M',s).L_S(M'',s)$) et si deux des trois

conjecture pour la fonction zéta de Riemann qu'ils ne regardent qu'aux entiers positifs, ce qu'ils font revient à la prouver d'abord aux entiers négatifs, puis à prouver la conjecture $C_{EP,\mathfrak{p}}(\mathbf{Q}_p(i))$ et à utiliser l'équation fonctionnelle.

conjectures $C_{BK,S}(M')$, $C_{BK,S}(M)$, $C_{BK,S}(M'')$ sont vraies, il en est de même de la troisième. Ces deux "résultats" impliquent le bon comportement des conjectures $C_{BK}(M)$ par suite exacte courte.

12.7. — Un autre intérêt des fonctions L incomplètes est que, étant donné un motif M "connu", et avec la terminologie du n° 6.2, on ne sait pas toujours que M admet une fonction $L(M,s)$, mais que l'on sait montrer en général que M admet une fonction $L_S(M,s)$ pourvu que S soit assez grand. La démonstration de la "conjecture" C_{BK} devrait pouvoir se décomposer en deux parties :

a) l'existence d'un bon formalisme ;

b) la démonstration de $C_{BK,S}(M)$ pour un motif M "ayant bonne réduction en dehors de S" (que l'on doit même pouvoir supposer vérifier $H^1_{f,S}(F,M) = H^1_{f,S}(F,M^*(1)) = 0$).

Mais peut-être ne faut il pas trop rêver !

RÉFÉRENCES

[BN78] P. Bayer et J. Neukirch. — On Values of Zeta Functions and ℓ-adic Euler Characteristics, Invent. Math. 50 (1978), 35–64.

[Be85] A. Beilinson. — Higher regulators and values of L-functions, J. Soviet. Math. 30 (1985), 2036–2070.

[Be87] A. Beilinson. — Height pairing between algebraic cycles, Contemporary Math. 67 (1987), 1–24.

[Be90] A. Beilinson. — Polylogarithms and cyclotomic elements, *Preprint* 1990.

[BGSV90] A. Beilinson, A. Goncharov, V. Schechtman and A. Varchenko. — Aomoto Dilogarithms, Mixed Hodge structures and Motivic Cohomology of Pairs of triangles on the Plane *in* **The Grothendieck Festschrift**, vol. I, Prog. in Math. 86, Birkhaüser (1990), 135–172.

[BMS87] A. Beilinson, R. MacPherson and V. Schechtman. — Notes on motivic cohomology, Duke Math. J. 54 (1987), 679–710.

[BS63] B. Birch and H. Swinnerton-Dyer. — Notes on elliptic curves I, Journal de Crelle 212 (1963), 7–25.

[BS65] B. Birch and H. Swinnerton-Dyer. — Notes on elliptic curves II, Journal de Crelle 218 (1965), 79–108.

[Bl80] S. Bloch. — A note on height pairings, Tamagawa numbers and Swinnerton–Dyer conjecture, Invent. Math. 58 (1980), 65–76.

[Bl84] S. Bloch. — Algebraic cycles and values of L–functions, Journal de Crelle 350 (1984), 94–108.

[Bl84b] S. Bloch. — Height pairings for algebraic cycles, Journal of Pure and Applied Algebra 34 (1984), 119–145.

[Bl86] S. Bloch. — Algebraic cycles and the Beilinson conjectures, Contemporary Math. 58 (1986), 65–79.

[BK90] S. Bloch et K. Kato. — L functions and Tamagawa numbers of motives, *in* **The Grothendieck Festschrift**, vol. 1, Prog. in Math. 86, Birkhaüser, Boston (1990), 333–400.

[CL88] L. Clozel. — Nombres de Tamagawa des groupes semi–simples (d'après Kottwitz), *Séminaire Bourbaki*, exp. 702, novembre 1988.

[Co89] J. Coates. — On p–adic L–functions, *Séminaire Bourbaki*, exp. 701, novembre 1988.

[Co91] J. Coates. — Motivic p–adic L–functions, *in* **L–functions and Arithmetic**, Proc. of the Durham Symposium, London Math. Soc. L.N.S. 153, Cambridge University Press (1991), 141–172.

[CP89] J. Coates and B. Perrin–Riou. — On p–adic L–functions attached to motives over $\mathbb{Q}$, Adv. Stud. Pure Math. 17, (1989), 23–54.

[De71] P. Deligne. — Théorie de Hodge II, Pub. Math. I.H.E.S. 40 (1971), 5–57.

[De73] P. Deligne. — Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L *in* **Modular Functions of One Variable**, vol. 2, Lecture Notes in Math. 349, Springer 1973, 501–595.

[De74] P. Deligne. — Théorie de Hodge III, Pub. Math. I.H.E.S. 44 (1974), 5–77.

[De79] P. Deligne. — Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales, AMS, Proc. Symp. Pure Math. 33 (1979), 313–346.

[De83] P. Deligne. — Preuve des Conjectures de Tate et de Shafarevitch (d'après G. Faltings), *Séminaire Bourbaki*, exp. 616, novembre 1983.

[De85] P. Deligne. — Lettre à C. Soulé, 1985.

[De89] P. Deligne. — Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points *in* **Galois Groups over $\mathbb{Q}$**, MSRI publications 16, Springer 1989, 79–297.

[DM82] P. DELIGNE and J. MILNE. — Tannakian categories *in* **Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties**, Lecture Notes in Math. 900, Springer 1982, 101–228.

[Den91] C. DENINGER. — On the Γ–factors attached to motives, Invent. Math. 104 (1991), 245–261.

[Den92] C. DENINGER. — Local L–factors of motives and regularized determinants, Invent. Math. 107 (1992), 137–150.

[DS91] C. DENINGER and A. SCHOLL. — The Beilinson conjectures, *in* **L–functions and Arithmetic**, Proc. of the Durham Symposium, London Math. Soc. L.N.S. 153, Cambridge University Press (1991), 173–209.

[Fa89] G. FALTINGS. — Crystalline cohomology and p–adic Galois representations, *in* **Algebraic analysis, geometry and number theory**, Johns Hopkins University Press, Baltimore (1989), 25–80.

[Fa90] G. FALTINGS. — F–isocrystals on Open Varieties : Results and Conjectures, *in* **The Grothendieck Festschrift**, vol. 2, Prog. in Math. 87, Birkhaüser, Boston (1990), 219–248.

[FI90] J.–M. FONTAINE et L. ILLUSIE. — p–adic periods : a survey, prépublication d'Orsay, 1990.

[FM92] J.–M. FONTAINE et B. MAZUR. — Représentations ℓ–adiques géométriques, *in* [Bures], en préparation.

[FP91] J.–M. FONTAINE et B. PERRIN–RIOU. — Autour des conjectures de Bloch et Kato : I : Cohomologie galoisienne, II : Structures motiviques f–closes, III : Le cas général, C.R. Acad. Sci. Paris, 313, série I, 1991, 189–196, 349–356 et 421–428.

[FP92] J.–M. FONTAINE et B. PERRIN–RIOU. — Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L, *prépublication d'Orsay*, 1992.

[Gr90] M. GROS. — Régulateurs syntomiques et valeurs de fonctions L p–adiques (avec un appendice de M. Kurihara : Computation of the syntomic regulator in the cyclotomic case), Invent. Math. 99 (1990), 293–320.

[Gr91] B. GROSS. — Kolyvagin's work for modular elliptic curves, *in* **L–functions and Arithmetic**, London Math. Soc. L. Note Ser. vol. 153, Cambridge Univ. Press 1991, 235–256.

[Gre89] R. GREENBERG. — Iwasawa theory for p–adic representations, Adv. Stud. Pure Math. 17, (1989), 97–137.

[Gre91] R. GREENBERG. — Iwasawa theory for motives, *in* **L–functions and Arithmetic**, Proc. of the Durham Symposium, London Math. Soc. L.N.S. 153, Cambridge University Press (1991), 373–392.

[Ha89] G. HARDER. — Arithmetische Eigenschaften von Eisenstein Klassen. die modulare Konstruktion von gemischten Motiven und von Erweiterungen endlicher Galoismoduln, *Preprint* 1989.

[Il90] L. ILLUSIE. — Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p–adique, *Séminaire Bourbaki*, exp. 726, juin 1990.

[Ja88] U. JANNSEN. — Deligne Homology, Hodge–D–conjecture, and Motives, *in* [RSS88], 305–372.

[Ja89] U. JANNSEN. — On the ℓ–adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology, *in* **Galois groups over $\mathbf{Q}$**, MSRI Publications vol. 16, Springer 1989.

[Ja90] U. JANNSEN. — Mixed motives and algebraic K–theory, Lecture Notes in Math. 1400, Springer, Berlin (1990).

[Ka91] K. KATO. — Iwasawa theory and p–adic Hodge theory, *preprint* 1991.

[Ko90] V.A. KOLYVAGIN. — Euler Systems, in the Grothendieck Festschrift, vol. II, Prog. in Math. 87, Birkhäuser (1990), 435–483.

[Li72] S. LICHTENBAUM. — On the values of zeta and L–functions : I, Annals of Math. 96 (1972), 338–360.

[Li84] S. LICHTENBAUM. — Values of zeta functions at non–negative integers *in* **Number Theory**, Noordwijkerhout, Lecture Notes in Math. 1068, Springer, Berlin (1984), 127–138.

[Li87] S. LICHTENBAUM. — The Construction of Weight–two Arithmetic Cohomolgy, Invent. Math. 88 (1987), 183–215.

[Mi86] J.S. MILNE. — **Arithmetic duality theorems**, Perspectives in Mathematics, vol. 1, Academic Press (1986).

[MW84] B. MAZUR and A. WILES. — Class fields of abelian extensions of $\mathbf{Q}$, Invent. Math. 76 (1984), 179–330.

[Ne92] J. NEKOVAR. — Kolyvagin's method for Chow groups of Kuga–Sato varieties, Invent. Math. 107 (1992), 99–125.

[Ne92b] J. NEKOVAR. — On p–adic height pairing, Séminaire de Théorie des Nombres de Paris, à paraître.

[Pa91] A. PANCHISHKIN. — Non Archimedian L–Functions of Siegel and Hilbert Modular Forms, Lecture Notes in Math. 1471, Springer 1991.

[Pe89] B. PERRIN–RIOU. — Travaux de Kolyvagin et Rubin, *Séminaire Bourbaki*, exp. 717, novembre 1989.

[Pe92] B. PERRIN–RIOU. — Théorie d'Iwasawa et hauteur p–adique, Invent. Math. 109 (1992), 137–185.

[Ra89] D. RAMAKRISHNAN. — Regulators, Algebraic Cycles, and Values of L–Functions, *in* **Algebraic K–theory and Algebraic Number Theory**, Contemporary Mathematics, vol. 83, Amer. Math. Soc., Providence (1989), 183–310.

[Ra90] D. RAMAKRISHNAN. — Problems arising from the Tate and Beilinson Conjectures in the context of Shimura Varieties, *in* **Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L–functions**, vol. II, Perspectives in Mathematics, vol. 11, Academic Press (1990), 227–252.

[RSS88] M. RAPOPORT, N. SCHAPPACHER and P. SCHNEIDER *(éd.)*. — **Beilinson's Conjectures on Special Values of L–Functions**, Perspectives in Mathematics, vol. 4, Academic Press, Boston (1988).

[Ru91] K. RUBIN. — The "main conjectures" of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields, Invent. Math. 103 (1991), 25–68.

[Sc88] P. SCHNEIDER. — Introduction to the Beilinson conjectures, *in* [RSS88], 1–35.

[Sc89] P. SCHNEIDER. — Motivic Iwasawa theory, Adv. Stud. Pure Math. 17, (1989), 421–456.

[Sc90] A.J. SCHOLL. — Motives for modular forms, Invent. Math. 100 (1990), 419–430.

[Sc91] A.J. SCHOLL. — Remarks on special values of L-functions, *in* **L–functions and Arithmetic**, Proc. of the Durham Symposium, London Math. Soc. L.N.S. 153, Cambridge University Press (1991), 373–392.

[Se70] J.–P. SERRE. — Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures), *in* **Collected Papers**, vol. 2, Springer Berlin (1986), 581–592.

[ST68] J.–P. SERRE and J.–P. TATE. — Good reduction of abelian varieties, Ann. of Math. 88 (1968), 492–517.

[So79] C. SOULÉ. — K–théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale, Invent. Math. 55 (1979), 251–295.

[So81] C. SOULÉ. — On higher p–adic regulators, *in* **Algebraic K–theory**, Lecture Notes in Math. 854, Springer, Berlin (1981), 371–401.

[So83] C. SOULÉ. — K–théorie et zéros aux points entiers de fonctions zéta, Proc. ICM. Warszawa (1983).

[So85] C. SOULÉ. — Régulateurs, *Séminaire Bourbaki*, exp. 644, février 1985.

[So87] C. Soulé. — p-adic K-theory of elliptic curves, Duke Math. Journal 54 (1987), 249–269.

[Ta65] J. Tate. — Algebraic cycles and poles of zeta functions, *in* **Arithmetical Algebraic Geometry**, Harper and Row, New York (1965).

[Ta66] J. Tate. — On the Conjectures of Birch and Swinnerton–Dyer and a geometric analog, *Séminaire Bourbaki*, exp. 306, février 1966.

[Ta79] J. Tate. — Number theoretic Background, *in* **Proceedings of Symposia in Pure Mathematics**, vol. 33 (1979), part 2, 3–26.

[Ta84] J. Tate. — **Les Conjectures de Stark sur les Fonctions L d'Artin en $s = 0$**, Birkhaüser, Boston (1984).

[Bures] Séminaire sur les périodes p-adiques (tenu à Bures en 1988), actes en prépartion.

[SGA4] **Théorie des topos et cohomologie étale des schémas**, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier, Lecture Notes in Math. 269, 270 et 305, Springer, Berlin (1972–73).

[SGA$\frac{1}{2}$] **Cohomologie étale**, par P. Deligne, Lecture Notes in Math. 569, Springer, Berlin (1977).

[SGA5] **Cohomologie ℓ-adique et Fonctions L**, dirigé par A. Grothendieck, Lecture Note in Math. 589, Springer, Berlin (1977).

Jean-Marc FONTAINE
Université de Paris-Sud
Arithmétique et Géométrie Algébrique
C.N.R.S. URA D0752
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY CEDEX