GÉRARD BEN AROUS

Géométrie de la courbe brownienne plane

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki, exp. nº 730, p. 7-42

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__7_0>

Séminaire BOURBAKI
43ème année, 1990-91, n°730

Novembre 1990

GÉOMÉTRIE DE LA COURBE BROWNIENNE PLANE

par Gérard BEN AROUS

INTRODUCTION :

Nous passons en revue quelques résultats récents sur la géométrie de la trajectoire du mouvement brownien plan. Nous avons choisi d'exposer essentiellement les résultats de Pitman et Yor d'une part (sur le comportement en temps grand de certaines fonctionnelles browniennes, comme le temps passé dans un ensemble, ou le nombre de tours autour d'un ou plusieurs points) et les résultats sur la géométrie de la courbe brownienne en temps fini d'autre part, résultats que nous avons tirés pour l'essentiel, du cours de Le Gall [L12] à Saint-Flour. Nous invitons, bien sur, le lecteur intéressé à se reporter à ce cours, extrêmement riche et clair.

1. PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DU MOUVEMENT BROWNIEN PLAN :

Nous rappelons ici brièvement quelques propriétés fondamentales. Ici, et dans toute la suite, $(B_t)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien plan issu de $z_0 \in \mathbf{C}$, c'est-à-dire un processus aléatoire $B_t = B_t^1 + iB_t^2$, indexé par $t \in \mathbf{R}_+$, à trajectoires presque surement continues, tel que

a) $B_0 = z_0$ $p.s.$,

b) les processus réels $(B_t^1)_{t\geq 0}$ et $(B_t^2)_{t\geq 0}$ sont indépendants,

c) Pour $i \in \{1,2\}$ et tous $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ la variable aléatoire $B_{t_n}^i - B_{t_{n-1}}^i$ est indépendante de $(B_{t_1}^i, \cdots, B_{t_{n-1}}^i)$ et sa loi est gaussienne de moyenne nulle et de variance $t_n - t_{n-1}$.

1.1 Invariance conforme et skew-product :

Il est clair que l'image par une isométrie d'un mouvement brownien est un mouvement brownien. Lévy a généralisé ce résultat de la façon suivante :

THÉORÈME 1.— *Si f est holomorphe d'un ouvert U de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ (avec $z_0 \in U$), et si on pose $\tau_U = \inf(t \geq 0, B_t \notin U)$, alors il existe un mouvement brownien $(\zeta_t)_{t\geq 0}$ tel que, pour tout $t \in [0, \tau_U[$: $f(B_t) = \zeta_{U_t}$ avec $U_t = \int_0^t |f'(B_s)|^2 ds$.*

La preuve est simple : si $f = g+ih$, g et h sont harmoniques et $g(B_t)$ et $h(B_t)$ sont des martingales locales. La formule d'Ito et les équations de Cauchy Riemann montrent que ces martingales locales ont le même processus croissant U_t, et que le processus crochet $\langle g(B_t), h(B_t)\rangle$ est nul. Ce qui implique l'existence de deux browniens réels indépendants β_t et θ_t tels que : $g(B_t) = \beta_{U_t}$ et $h(B_t) = \theta_{U_t}$, pour $t \in [0, \tau_U[$. □

On déduit de ceci la représentation du brownien plan en "skew-product" : Si $z_0 \neq 0$ il existe un mouvement brownien complexe $\zeta_t = \beta_t + i\theta_t$ issu de 0 tel que :

$$B_t = z_0 \exp \zeta_{U_t}$$

avec

$$U_t = \int_0^t \frac{ds}{|B_s|^2} = \inf(u \geq 0, \int_0^u \exp(2\beta_v)dv > t).$$

Ainsi, si on note $R_t = |B_t|$ on a : $R_t = |z_0| \exp \beta_{U_t}$ et si $\phi_{(t)}$ désigne la détermination continue de l'argument de B_t telle que $\phi_{(0)} = \arg z_0 \in]-\pi, \pi]$: $\phi(t) = \theta_{U_t}$. Ainsi $\phi(t)$ est un mouvement brownien réel dont on a changé le temps par une "horloge" (ici U_t) indépendante.

On déduit très simplement de cette représentation que :

a) le mouvement brownien plan est récurrent. C'est-à-dire que pour tout ouvert D de $\mathbf{C}$ presque surement $\forall t \quad \exists T > t \quad B_T \in D$.

b) Avec probabilité 1 : $\limsup_{t\to\infty} \phi(t) = +\infty$ et $\liminf_{t\to\infty} \phi(t) = -\infty$.

En effet $|B_t| = |z_0| \exp \beta_{U_t}$ et $\lim_{t \to \infty} U_t = +\infty$, par le fait que $\limsup_{v \to \infty} \beta_v = +\infty$ et $\liminf_{v \to \infty} \beta_v = -\infty$ on a le résultat si D est une boule de centre 0, ce qui suffit pour prouver le a). De plus $\phi(t) = \theta_{U_t}$ et U_t tend vers l'infini ce qui prouve le b).

Ces deux propriétés du mouvement brownien plan font naître deux questions essentielles.

D'une part le mouvement brownien plan revient infiniment souvent visiter tout ouvert D de $\mathbf{C}$. On peut se demander quelle proportion de temps il y passe. De façon plus précise, il s'agit de comprendre le comportement asymptotique de $\int_0^t 1_{B_s \in D} ds$ lorsque t tend vers l'infini. La réponse est connue depuis longtemps : ce temps d'occupation est de l'ordre de $\log t$.

Pour un énoncé plus précis de ce théorème, dû à Kallianpur et Robbins voir plus bas, au 2.4. b).

D'autre part, par le b) ci-dessus nous savons que le mouvement brownien "fait un nombre infini de tours autour de zéro lorsque t tend vers l'infini". On peut étudier aussi le comportement asymptotique précis de $\phi(t)$ lorsque t tend vers l'infini. La réponse est fournie par le théorème de Spitzer : $\phi(t)$ est de l'ordre de $\log t$ (voir plus bas au 2.4. a) pour un énoncé plus précis).

Pitman et Yor ont construit un outil extrêmement souple pour montrer que ces deux théorèmes (de Kallianpur et Robbins et de Spitzer) sont deux aspects d'un même phénomène, et pour généraliser radicalement ces énoncés. Nous donnons un aperçu de ces résultats au §2.

1.2 Dimension de Hausdorff de la courbe brownienne

La mesure de la courbe brownienne : $\{B_s, s \in [0, \infty[\}$ est nulle. En effet :

$$m(\{B_s, s \in [0, \infty[\}) = \int dy P(T_y < \infty)$$

où $T_y = \inf(s, B_s = y)$.

Or $P(T_y < \infty) = 0$ pour tout $y \neq z_0$ (i.e. les points sont pôlaires). Néanmoins on peut vérifier que la dimension de Hausdorff de cette courbe est 2. Pour un résultat plus précis, voir plus bas (au 3.2).

Lévy [Lé 4] explique ainsi la différence entre la courbe brownienne (de mesure nulle) et la courbe de Péano :

“ Pour qu'une aire soit remplie sans que l'oscillation brownienne soit infinie, il faut une exploration méthodique que le hasard ne peut réaliser”.

En particulier, la trajectoire brownienne se recoupe beaucoup. On sait depuis les travaux de Dvoretzky, Erdös et Kakutani qu'il existe des points multiples de toute multiplicité (finie ou non). On donnera au §3 les progrès récents sur cette question de l'auto-intersection de la courbe brownienne plane, en insistant sur un outil essentiel : le temps local d'auto-intersection : i.e. une mesure de Radon aléatoire portée par les instants de multiplicité. Une question intimement reliée à la précédente est celle du volume des voisinages tubulaires de la courbe brownienne. Elle est abordée au §4, sans pourtant y faire mention des résultats de grandes déviations (qui ont été abordés par Sznitman dans son exposé (Bourbaki ; Février 1987), voir aussi [DV]).

Enfin au §5 nous montrons à quel point la géométrie de la courbe brownienne est complexe en donnant les résultats récents relatifs à l'enveloppe convexe, les composantes connexes du complémentaire et les points de coupure de cette courbe, sur un intervalle de temps fini. Comme le dit Lévy à ce propos (en citant Leibniz) “Notre imagination se lassera plutôt de concevoir que la nature de fournir”.

Fixons ici certaines **notations** pour la suite :

$B_{[u,v]}$ est la trajectoire brownienne entre les instants u et v

$$B_{[u,v]} = \{B_s, s \in [u,v]\} \quad \text{pour} \quad 0 \leq u < v \; .$$

- $m(A)$ est la mesure de Lebesgue de A.
- $D(a,r)$ le disque dans $\mathbf{C}$ de centre a, de rayon r et $D = D(0,1)$.
- $T_A = \inf(t, B_t \in A)$ est le temps d'atteinte de A par le brownien plan.

2. NOMBRE DE TOURS ET LOIS LIMITES :

Pitman et Yor ([PY1] et [PY2]) ont isolé, dans la preuve des deux théorèmes les plus importants pour le comportement en temps grand du mouvement brownien plan (i.e. les théorèmes de Spitzer et de Kallianpur-Robbins), un argument commun et général, et en ont tiré une ligne de conduite (brièvement : "faire un changement d'échelle sur le mouvement brownien en représentation "skew-product"") qui leur a permis d'étendre de façon considérable les théorèmes cités et de mettre au jour leurs liens. Ils ont prouvé ainsi un très grand nombre de résultats nouveaux et ouvert un champ qui semble inépuisable. Il est impossible d'aborder ici tous les aspects de leurs travaux. Nous allons seulement introduire le formalisme unificateur des "limites en échelle logarithmique" (traduction très peu satisfaisante de "log-scaling limit") et donner quelques conséquences.

2.1 Limites en échelle logarithmique : Définitions

On note $\Omega(\mathbf{C})$ l'espace des fonctions continues de $[0,\infty[$ à valeurs dans $\mathbf{C}$.

Soit $(\psi(h,\omega)\; ,\; h > 0, \omega \in \Omega(\mathbf{C}))$ un processus et φ une fonction mesurable sur $\Omega(\mathbf{C})$.

Soit B un mouvement brownien, issu de $z_0 \neq 0$. On notera ζ le mouvement brownien, issu de zéro, intervenant dans la décomposition de B en "skew-product" et on posera, si $h > 0$:

$$\zeta_u^h = \frac{1}{h}\zeta_{h^2 u}.$$

On dira que le processus ψ converge vers φ en échelle logarithmique (de pôle 0) si pour tout mouvement brownien B, issu de $z_0 \neq 0$, $\psi(h, B) - \varphi(\zeta^{(h)})$ converge en probabilité vers zéro, lorsque h tend vers l'infini.

Il est clair que, si $\psi(h)$ converge en échelle logarithmique vers φ, alors $\psi(h)$ converge en loi vers φ. Mais, toutes les convergences en loi obtenues ainsi sont valides **conjointement**. On pourrait aussi définir la notion de limite en échelle logarithmique de pôle différent de zéro. Toutes les convergences en loi obtenues par limite en échelle logarithmique de pôles éventuellement distincts sont valides conjointement.

2.2 Quelques exemples :

On va donner ici des exemples, utiles pour la suite, de temps aléatoires qui convergent en échelle logarithmique. Ces temps seront tous de la forme :

$$V_h = \frac{1}{h^2} U_{T_h}$$

a) Si on choisit $T_h = \inf(t, R_t = e^{vh})$ avec $v \in \mathbf{R}$ on voit que $V_h = \sigma_v(\zeta^{(h)})$, où $\sigma_v = \inf(t, \beta_t = v)$. Et donc que V_h converge en échelle logarithmique vers σ_v. (ceci est une tautologie).

b) Si $T_h = e^{2vh}$ où $v > 0$, alors V_h converge en échelle logarithmique vers σ_v.

Ce résultat, est la clef du théorème de Spitzer. Il est néanmoins très simple et fondé sur une méthode de Laplace (*cf.* [L12] par exemple).

c) Soit A_t une fonctionnelle additive continue, croissante, de masse finie. Si $v > 0$, on pose $T_h = \inf(t, A_t = vh)$. $V_h = \frac{1}{h^2} U_{T_h}$ converge en échelle logarithmique vers $\inf(u, L_u(\beta) = \frac{2\pi}{\|A\|} v)$. Ici $L_u(\beta)$ est le temps local en 0 du mouvement brownien unidimensionnel $\beta = \mathrm{Re}\ \zeta$.

Pour vérifier ceci, on commence par considérer le cas où A_t est le temps local ℓ_t de $\log|B_t|$ en 0. Dans ce cas $V_h = \inf(u, L_u(\beta^{(h)}) = v)$ et il est trivial que V_h converge en échelle logarithmique vers $\inf(u, L_u(\beta) = v)$.

Dans le cas général, on se ramène au cas particulier précédent au moyen du théorème ergodique pour les fonctionnelles additives (Ito-Mc Kean [IMK] p.277) :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A_t}{\ell_t} = \frac{\|A\|}{2\pi}.$$

2.3 Attracteurs logarithmiques :

Si $G(t,B)$ est une fonction du temps et du brownien B, on peut l'exprimer sous la forme : $G(t,B) = \Gamma(U_t,\zeta)$ pour un processus $\Gamma(u) = \Gamma(u,\zeta)$. Il suffit de poser :

$$\Gamma(u,\zeta) = G(U^{-1}(u), z_0 \exp \zeta(U_.))$$

On définit $\Gamma^{(h)}$ par changement d'échelle :

$$\Gamma^{(h)}(u) = \frac{1}{h}\Gamma(h^2 u).$$

La recette pour fabriquer $\Gamma^{(h)}$ à partir de G est donc la suivante : exprimer la fonctionnelle G en fonction du mouvement brownien ζ (qui intervient dans la représentation en "skew-product"), oublier l'horloge U_t i.e. remplacer t par u, puis faire le changement d'échelle en u.

Par exemple : Si ω_t désigne la détermination continue de l'argument de B_t telle que $\omega_0 = \arg z_0 \in]-\pi,\pi]$ (i.e. le nombre de tours autour de zéro) le processus ainsi fabriqué est

$$\Gamma^{(h)}(u) = \frac{1}{h}\theta(h^2 u) \quad (\text{avec} \quad \theta = \operatorname{Im} \zeta).$$

DÉFINITION : On dit que G est attiré logarithmiquement par le processus γ si le processus $\Gamma^{(h)}$ converge en échelle logarithmique vers γ i.e. : $\Gamma^{(h)}(\zeta) - \gamma(\zeta^{(h)})$ converge en probabilité vers 0, au sens de la convergence uniforme sur les compacts.

Remarque : Pitman-Yor [PY2] caractérisent parmi les processus continus les attracteurs logarithmiques : ce sont ceux qui commutent avec le changement d'échelle brownien i.e. ceux qui s'écrivent $\gamma(u,\zeta) = \sqrt{u}\hat{\gamma}(\zeta^{(\sqrt{u})})$ où $\hat{\gamma}$ est une variable aléatoire.

Voici **deux exemples** d'attracteurs logarithmiques :

1) Pour $i \in \{1,2,3\}$ on pose

$$G_i(t) = \int_0^t 1_{(R_s \in I_i)} d\phi_s \quad \text{et} \quad \gamma_i(u) = \int_0^u 1_{\beta_v \in J_i} d\theta_v$$

avec

$$I_1 =]r,\infty[\ ,\ I_2 =]0,r[\ ,\ I_3 =]0,\infty[\quad (\text{et} \quad r > 0)$$

et

$$J_1 =]0,\infty[\ ,\ J_2 =]-\infty,0[\ ,\ J_3 =]-\infty,\infty[.$$

alors G_i est attiré logarithmiquement par γ_i.

2) Si $G(t) = A_t$ est une fonctionnelle additive croissante continue, de masse finie, alors G est attiré logarithmiquement par $\frac{\|A\|}{2\pi} L_u(\beta)$.

On a le théorème trivial mais essentiel :

THÉORÈME 2.— *Si $(T_h)_{h>0}$ est une famille de temps aléatoires telle que $V_h = \frac{1}{h^2} U_{T_h}$ converge en échelle logarithmique vers le temps aléatoire τ, si $G = (G(t), t > 0)$ est, par ailleurs, une fonctionnelle brownienne attirée logarithmiquement par $\gamma = (\gamma(u), u > 0)$, alors $\frac{1}{h} G(T_h)$ converge en échelle logarithmique vers $\gamma(\tau)$.*

COROLLAIRE.— *Si G est attiré logarithmiquement par γ alors $\frac{2}{\log t} G(t)$ converge en loi vers $\gamma(\sigma_1)$ lorsque t tend vers l'infini.*

En effet le théorème et l'exemple 2.2.2 montrent que : $\frac{1}{h} G(e^{2h})$ converge en loi vers $\gamma(\sigma_1)$. Il suffit de poser $h = \frac{\log t}{2}$ pour conclure.

2.4 Nombre de tours et temps d'occupation :

a) Le théorème de Spitzer

Si l'on considère $\phi(t)$ la détermination continue de l'argument de B_t telle que $\phi(0) = \arg z_0 \in]-\pi, \pi]$. On a vu (et c'est ici trivial) que ϕ est attiré logarithmiquement par $\theta(u)$ (la partie imaginaire du mouvement brownien ζ issu de 0). Par le corollaire du théorème 2 et l'exemple 2.2.2 b), on a donc le théorème de Spitzer [S1] :

$$\frac{2}{\log t}\phi(t) \quad \text{converge en loi vers} \quad \theta(\sigma_1) \quad \text{lorsque} \quad t \to \infty .$$

Il suffit pour retrouver l'énoncé complet du théorème de Spitzer de rappeler que $\theta(\sigma_1)$ a une loi de Cauchy standard, i.e.

$$\lim_{t\to\infty} P(\frac{2}{\log t}\phi(t) \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dy}{\pi(1+y^2)}$$

b) Le théorème de Kallianpur-Robbins :

Si A_t est une fonctionnelle additive croissante continue de masse finie, le même corollaire montre, puisque A est attiré par $\frac{\|A\|}{2\pi}L_u(\beta)$, que :

$$\frac{2}{\log t}A_t \quad \text{converge en loi vers} \quad \frac{\|A\|}{2\pi}L_{\sigma_1}(\beta) \quad \text{lorsque} \quad t \to \infty .$$

En particulier si $A_t = \int_0^t f(B_s)ds$, où f est positive, on a ainsi :

$$\frac{2}{\log t}\int_0^t f(B_s)ds \xrightarrow{(d)} \frac{\int f(x+iy)dxdy}{2\pi}L_{\sigma_1}(\beta)$$

Pour retrouver l'énoncé complet du théorème de Kallianpur-Robbins [KR] il suffit de rappeler que $L_{\sigma_1}(\beta)$ suit une loi exponentielle de moyenne 2. On a ainsi par exemple :

$$\frac{2}{\log t}\int_0^t 1_{B_s\in D}ds \xrightarrow{(d)} \frac{m(D)}{\pi}\mathbf{e}$$

où D est un borélien de $\mathbf{R}^2$ de mesure finie, et où $\mathbf{e}$ est une variable exponentielle de paramètre 1.

Mais on obtient aussi le résultat

$$\frac{2}{\log t} L(t, R, 1) \xrightarrow{(d)} L_{\sigma_1}(\beta)$$

si $L(t, R, 1)$ est le temps local en 1 de la semi-martingale $R_s (= |B_s|)$ au temps 1.

En effet $L(t, R, 1)$ (qui compte le temps passé par le brownien sur le cercle de centre 0 et de rayon 1) est une fonctionnelle additive croissante continue, de masse 2π.

c) **Petits et grands tours :**

Toujours par le corollaire du théorème 2, on peut étudier le comportement du nombre de "grands tours" et du nombre de "petits tours" autour de 0 : Si $r > 0$, posons

$$\phi_+(t) = \int_0^t 1_{R_s > r} d\phi(s) \quad \text{et} \quad \phi_-(t) = \int_0^t 1_{R_s < r} d\phi(s)$$

On a vu que ces processus sont attirés logarithmiquement par $\gamma_+(u) = \int_0^u 1_{\beta_v > 0} d\theta(v)$ et $\gamma_-(u) = \int_0^u 1_{\beta_v < 0} d\theta(v)$.

On sait donc que le couple $\frac{2}{\log t}(\phi_+(t), \phi_-(t))$ converge en loi vers : (W_+, W_-) avec $W_+ = \gamma_+(\sigma_1)$, $W_- = \gamma_-(\sigma_1)$. C'est l'intérêt de la présentation suivie ici de n'avoir rien à prouver pour la convergence de la loi du **couple**.

En fait Pitman et Yor précisent ce résultat en introduisant la variable qui décrit la transition entre les petits et les grands tours, i.e. le temps local $L(t, R, 1)$. Sans rien d'autre à prouver, on sait donc que :

$$\frac{2}{\log t}(\phi_+(t), \phi_-(t), L(t, R, 1)) \xrightarrow{(d)} (W_+, W_-, \Lambda)$$

avec

$$W_+ = \gamma_+(\sigma_1) = \int_0^{\sigma_1} 1_{\beta_v > 0} d\theta_v$$

$$W_- = \gamma_-(\sigma_1) = \int_0^{\sigma_1} 1_{\beta_v < 0} d\theta_v$$

$$\Lambda = L_{\sigma_1}(\beta) \ : \quad (\text{temps local de } \beta \text{ en } 0 \text{ au temps } \sigma_1).$$

La loi du triplet limite (W_+, W_-, Λ) est calculée dans [PY1] :

a) Λ est de loi exponentielle de paramètre 2

b) W_+ et W_- sont **indépendants** conditionnellement à Λ

c) conditionnellement à W_+ et Λ, W_- suit une loi de Cauchy de paramètre $\Lambda/2$

d) la loi de W_+ est de densité $[2\ ch(\pi\omega)/2]^{-1}$

En fait, on a la formule, si $a \geq 0$ et $b, c \in \mathbf{R}^2$:

$$E(\exp(-a\Lambda + ibW_- + icW_+) = f(2a + |b|, c)$$

où

$$\begin{aligned} f(u, v) &= (chv + \frac{u}{v} shv)^{-1} \qquad && \text{si} \quad v \neq 0 \\ &= (1+u)^{-1} && \text{si} \quad v = 0. \end{aligned}$$

On peut trouver dans [PY1] une description beaucoup plus éclairante des variables (W_-, W_+) au moyen des excursions du brownien $\zeta_t = \beta_t + i\theta_t$ dans les demi-plans supérieur ou inférieur.

d) **Le nombre de tours autour de plusieurs points.**

Soient n points $z_0, z_1, \cdots, z_n$ distincts. Si (B_t) est un brownien issu de z_0, on considère ici les enlacements $\phi^1(s), \cdots, \phi^n(s)$ autour des n points $z_1, \cdots, z_n$.

On va même considérer directement les petits et les grands tours en posant :

$$\phi^j_+(t) = \int_0^t 1_{|B_s - z_j| > r_j} d\phi^j(s)$$

et

$$\phi^j_-(t) = \int_0^t 1_{|B_s - z_j| < r_j} d\phi^j(s)$$

où les $r_j > 0$ sont arbitraires.

On a alors, si A_t est une fonctionnelle additive croissante de masse 2π :

THÉORÈME 3.— *Lorsque t tend vers l'infini, le $(2n+1)$-uplet $\frac{2}{\log t}(\phi_+^j(t), \phi_-^j(t); 1 \leq j \in n\ ; A_t)$ converge en loi vers $(W_+, W_-^j; 1 \leq j \leq n\ ; \Lambda)$ où, pour chaque j, le triplet (W_+, W_-^j, Λ) a la loi de (W_+, W_-, Λ) décrite au théorème précédent et où les $n+1$ variables $(W_+, W_-^1, \cdots, W_-^n)$ sont indépendantes conditionnellement à Λ.*

Ainsi la loi limite est donnée par une limite commune W_+ décrivant les "grands tours", ceux qui sont dus au mouvement du brownien au voisinage de l'infini, et n variables W_-^j décrivant les enlacements au voisinage de chaque z_j. Ces $(n+1)$ variables ne sont pas indépendantes ; elles le deviennent si on conditionne par Λ, qui mesure la transition entre les voisinages de $z_1, \cdots, z_n$ et ∞. Là aussi, une description très précise de la loi du $(2n+1)$-uplet limite est donnée en [PY1] (théorème 6.2) au moyen d'excursions.

Enfin ce théorème est généralisé en un "théorème des résidus"

THÉORÈME 4.— *Soit $(z_1, \cdots, z_n)$ n points distincts de* **C**. *Soit f une fonction à valeurs complexes telle que*

(i) f est holomorphe dans $D_j \setminus \{z_j\}$ où D_j est un voisinage de z_j,

(ii) f est bornée sur le complémentaire de la réunion de ces voisinages,

(iii) f est holomorphe au voisinage de l'infini et $\lim\limits_{z\to\infty} f = 0$

alors : $\frac{2}{\log t}\int_0^t f(B_s)dB_s$ converge en loi, lorsque t tend vers l'infini, vers :

$$\sum_j \mathrm{Res}(f, z_j)(\frac{\Lambda}{2} + iW_-^j) + \mathrm{Res}(f, \infty)(\frac{\Lambda}{2} - 1 + iW_+)$$

Dans le cas particulier où f a un pôle simple en chaque z_j, on retrouve le résultat précédent. La preuve du théorème consiste à se ramener à ce cas particulier.

En guise de conclusion, il faut rappeler que nous avons seulement effleuré ici le domaine (et les résultats) mis au jour par Pitman et Yor.

3. POINTS MULTIPLES DE LA COURBE BROWNIENNE

3.1 Intersections de courbes browniennes indépendantes

Si $p \geq 2$ et si $B^1, \cdots, B^p$ sont p mouvements browniens indépendants dans $\mathbf{C}^2$ issus de $x^1, \cdots, x^p$, existe-t-il un point commun aux trajectoires de $B^1, \cdots, B^r$?

La méthode la plus féconde pour répondre à cette question passe par la construction du temps local d'intersection. De façon plus générale, pour montrer qu'un ensemble aléatoire est non vide et, surtout, étudier les propriétés des points "typiques" de cet ensemble, il suffit de construire une mesure (aléatoire et judicieuse) portée par cet ensemble.

Ici cette mesure sera d'abord construite sur l'ensemble des temps de multiplicité (plutôt que des points multiples), i.e. sur

$$\{(t_1, \cdots, t_p) \in \mathbf{R}_+^p : B_{t_1}^1 = \cdots = B_{t_p}^p\}.$$

Cette mesure, dite temps local d'intersection, est formellement définie par :

$$\alpha(ds_1, \cdots, ds_p) = [\int \delta_y(B_{s_1}) \cdots \delta_y(B_{s_p}) dy] ds_1 \cdots ds_p$$

On pose : $\delta_y^\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} 1_{|z-y| \leq \varepsilon}$ et :

$$\alpha_\varepsilon(ds_1, \cdots, ds_p) = [\int \delta_y^\varepsilon(B_{s_1}) \cdots \delta_y^\varepsilon(B_{s_p}) dy] ds_1 \cdots ds_p.$$

On a alors :

THÉORÈME 5.— *Avec probabilité 1, il existe une mesure de Radon $\alpha(ds_1, \cdots, ds_p)$ sur $\mathbf{R}_+^p$ telle que, pour tous boréliens $A^1, \cdots, A^p$ de $\mathbf{R}_+$ et, pour tout $n < \infty$*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \alpha_\varepsilon(A^1 \times \cdots \times A^p) = \alpha(A^1 \times \times A^p) \quad (dans \quad L^n).$$

Le support de la mesure α est inclus dans :

$$\{(s_1 \cdots s_p) \in \mathbf{R}_+^p . B_{s_1}^1 = \cdots = B_{s_p}^p\}$$

et, avec probabilité 1, pour tout $j \in \{1 \cdots p\}$ et tout $t > 0$:

$$\alpha(\{s_j = t\}) = 0$$

et

$$\alpha([0,t]^p) > 0.$$

Ce théorème montre, bien sûr, que les courbes $B^1, \cdots, B^p$ s'intersectent ; plus précisément :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (t_1, \cdots, t_p) \in]0, \varepsilon[^p \quad B^1_{t_1} = \cdots = B^p_{t_p}.$$

On peut décrire la mesure α plus précisément en calculant explicitement tous les moments $E(\alpha(A^1 \times \cdots A^p)^n)$ (cf. [L3], par exemple).

On verra plus loin une interprétation du temps local d'intersection comme limite de la surface (normalisée) de l'intersection de p Saucisses de Wiener indépendantes.

Le temps local d'intersection a été introduit par Wolpert [Wo] Dynkin [Dy1] et [Dy2], étudié, entre autres, par Geman Horowitz et Rosen [GHR], Rosen [R1] [R2] Yor [Y3], [Y4].

3.2 Temps local d'auto-intersection :

Considérons maintenant un seul mouvement brownien dans C, issu de 0.

Pour étudier les points multiples de sa trajectoire, on construit le temps local d'auto-intersection (de multiplicité p) comme la mesure aléatoire β sur

$$\mathcal{J}_p = \{(t_1, \cdots, t_p) \in \mathbf{R}^p_+ \ , \ t_1 < \cdots < t_p\}$$

définie formellement par :

$$\beta(ds_1 \cdots ds_p) = (\int \delta_y(B_{s_1}) \cdots \delta_y(B_{s_p}) dy) ds_1 \cdots ds_p.$$

THÉORÈME 6.— *Avec probabilité 1, il existe une mesure de Radon β sur $\mathcal{J}_p$ telle que, pour tout compact de $\mathcal{J}_p$ de la forme $A_1 \times \cdots \times A_p$ on ait, pour tout $n < \infty$:*

$$\beta(A_1 \times \cdots \times A_p) = \lim_{\varepsilon \to 0} \beta_\varepsilon(A_1 \times \cdots \times A_p)$$

en norme L^n. avec

$$\beta_\varepsilon(ds_1 \cdots ds_p) = 1_{\mathcal{J}_p}(s_1 \cdots s_p)\left(\int \prod_{i=1}^{p} \delta_y^\varepsilon(B_{s_i})dy\right)ds_1 \cdots ds_p.$$

La mesure β est portée par l'ensemble des temps de multiplicité p : $\{(s_1 \cdots s_p) \in \mathcal{J}_p \;, B_{s_1} = \cdots = B_{s_p}\}$. Avec probabilité 1, pour tout $j \in \{1 \cdots p\}$ et tout $t > 0$:

$$\beta(\{s_j = t\}) = 0 \; .$$

De plus, pour tout $0 \leq a \leq b$: $\beta(\mathcal{J}_p \cap [a,b]^p) = +\infty$.

Comme corollaire de ce théorème on obtient donc l'existence de points multiples de la trajectoire brownienne, de multiplicité supérieure ou égale à p (due initialement à Dvoretzky-Erdös-Kakutani [DEK2]).

Ce théorème permet aussi de donner certaines propriétés des temps typiques d'auto-intersection, comme la suivante (énoncée de façon informelle) : "entre deux points doubles typiques la portion de trajectoire d'un mouvement brownien est celle d'un lacet brownien (i.e. d'un mouvement brownien conditionné pour revenir à son point de départ)".

La phrase précédente ne peut être vraie pour **tous** les points doubles. Le Gall [L6] donne une version "intégrée sur tous les points doubles". Plus précisément, notons, pour $0 \leq u \leq v \leq 1$:

$$\begin{aligned} {}_uB_v(t) &= B_{u+t} - B_u \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq v-u. \\ &= B_v - B_u \quad \text{si} \quad t > v-u. \end{aligned}$$

Pour toute fonction borélienne Φ sur l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}^2$:

$$E\left(\int_{0 \leq u < v \leq 1} \Phi({}_uB_v)\beta_2(dudv)\right) = \int_{0 \leq u < v \leq 1} \frac{dudv}{2\pi(v-u)} E(\Phi(L^{(v-u)}))$$

où $L^{(a)}$ désigne un lacet brownien (un mouvement brownien issu de 0 conditionné à retourner en 0 à l'instant a), avec la convention $L_t^{(a)} = 0$ si $t \in]a,1]$.

(Le Gall donne aussi la version naturelle de ce résultat valide pour les points de p-multiplicité.)

La conséquence essentielle d'une telle formule est que toute propriété vraie presque sûrement pour les lacets browniens sera aussi vérifiée pour ${}_uB_v$ pour β_2-presque tout (u,v).

Ainsi on montre facilement que, pour β_2 presque tout (u,v) le point double $B_u = B_v$ n'est pas un point triple.

Plus généralement, on a ainsi :

THÉORÈME 7.— *Avec probabilité 1, pour β_p presque tout $s_1 \cdots s_p$ le point $B_{s_1} = \cdots = B_{s_p}$ n'est pas un point de multiplicité $p+1$.*

En particulier, il existe des points de multiplicité exactement p [AD]. Ce théorème montre que les points de multiplicité $p+1$ sont rares parmi ceux de multiplicité p. La mesure ℓ_p, portée par l'ensemble des points de multiplicité p, image de β_p par l'application $(s_1,\cdots,s_p) \to B_{s_1}$ est étrangère à ℓ_{p+1}.

Pour apprécier la taille de l'ensemble des points de multiplicité $p+1$, on peut aussi tenter de comparer les mesures de Hausdorff.

Le Gall [L9] montre que, si l'on pose :

$$\varphi_p(x) = x^2(\log\frac{1}{x}\log\log\log\frac{1}{x})^p$$

la φ_p-mesure de Hausdorff est la "bonne" mesure pour les points de multiplicité p. Précisément, l'ensemble des points de multiplicité p est réunion dénombrable d'ensembles de φ_p-mesure finie et non nulle.

En particulier, la dimension de Hausdorff n'est pas suffisante pour distinguer les points de multiplicité p ou $p+1$, cette dimension valant toujours 2.

En fait les deux approches (temps local ou mesure de Hausdorff) sont très comparables car Le Gall montre qu'il existe deux constantes C_p, C'_p telles que, presque sûrement pour tout borélien F de $\mathbf{R}^2$:

$$C_p\ell_p(F) \leq \varphi_p - m(F \cap D_p) \leq C'_p\ell_p(F)$$

(où D_p est l'ensemble des points de multiplicité $p+1$).

Enfin, signalons que, grâce à la propriété donnée ci-dessus pour le mouvement brownien entre deux points doubles, Le Gall a pu contourner ce qui semble être une utilisation abusive de la propriété de Markov dans la preuve originale (due à Dvoretzky-Erdös-Kakutani) de l'existence de points de multiplicité infinie. Il obtient ainsi le

THÉORÈME 8.— *Si K est un compact totalement discontinu de $\mathbf{R}$, il existe avec probabilité 1 un point z de $\mathbf{R}^2$ et un homéomorphisme croissant φ de $\mathbf{R}$ tel que*

$$\varphi(K) = \{t \geq 0, B_t = z\}.$$

Ainsi il existe des points de multiplicité exactement dénombrable ou de multiplicité la puissance du continu. Il ne semble pas que le temps local d'auto-intersection correspondant ait été construit.

3.3 Renormalisation du temps local d'auto-intersection :

Le problème ici est d'étudier la singularité de la mesure β_2 sur la diagonale. Cette question dite de la renormalisation du temps local pour les points doubles a été résolue par Varadhan [V]. La question identique pour les points de multiplicité $p > 2$ est nettement plus difficile ; voir [Dy2], [Dy6], [R4], [RY], [L12], [LJ].

Si $k \geq 0$ et $\ell \in \{0, \cdots, 2^k - 1\}$ on pose

$$A_\ell^k = \left[\frac{2\ell}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+1}{2^{k+1}}\right] \times \left[\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+2}{2^{k+1}}\right]$$

les A_ℓ^k forment une partition de $\mathcal{J}_2 \cap [0,1]^2$. On sait que $\beta_2(\mathcal{J}_2 \cap [0,1]^2) = +\infty$, mais on a :

THÉORÈME 9.— *Pour tout borélien de $\mathcal{J}_2 \cap [0,1]^2$ la série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{2^k-1} \beta_2(A \cap A_\ell^k) - E(\beta_2(A \cap A_\ell^k)) \right)$$

converge (p.s et L^2). La somme de cette série est notée $\gamma(A)$ et l'application $A \longrightarrow \gamma(A)$ est appelée temps local d'auto-intersection renormalisé.

4. LA SAUCISSE DE WIENER :

4.1 La surface d'une petite saucisse de Wiener :

DÉFINITION : Si K est un compact non polaire de $\mathbf{R}^2$, on définit la saucisse de Wiener (de base K) entre les instants u et v par :

$$\begin{aligned} S_K(u,v) &= \{y \in \mathbf{R}^2, \exists s \in [u,v]\ y - B_s \in K\} \\ &= \bigcup_{u \le s \le v} (B_s + K). \end{aligned}$$

Le cas le plus usuel est celui où K est le disque unité, $S_D(u,v)$ est alors le voisinage tubulaire de la trajectoire du mouvement brownien entre les instants u et v.

Il s'agit ici d'étudier le comportement asymptotique (lorsque $\varepsilon \to 0$) de $m(S_{\varepsilon K}(0,1))$ ou encore le comportement asymptotique (lorsque $t \to \infty$) de $m(S_K(0,t))$.

Les deux questions sont reliées par l'invariance d'échelle : $m(S_k(0,t))$ a en effet la même loi que $t\ m(S_{t^{-1/2}K}(0,1))$.

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 10.—

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\log \frac{1}{\varepsilon}) m(S_{\varepsilon K}(0,1)) = \pi$$

(la convergence étant L^2, et presque sûre si K est étoilée)

COROLLAIRE.—

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} \frac{\log t}{t} m(S_K(0,t)) = 2\pi$$

(la convergence étant L^2 et presque sûre).

Preuve : Elle consiste à montrer que

$$(a) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} (\log \frac{1}{\varepsilon}) E(m(S_{\varepsilon K}(0,1))) = \pi$$

et que :

$$(b) \qquad (\operatorname{var} m(S_{\varepsilon K}(0,1)))^{1/2} \leq C(\log \frac{1}{\varepsilon})^{-2}.$$

Ce qui donne :

$$E\left(\left[\frac{m(S_{\varepsilon K}(0,1))}{E(m(S_{\varepsilon K}(0,1)))} - 1\right]^2\right) = 0(\frac{1}{(\log 1/\varepsilon)^2})$$

et donc la convergence L^2.

Si $\varepsilon_k = e^{-k^2}$, on a, par (a) et (b) :

$$\sum_{k=1}^{\infty} E\left(\left[\frac{m(S_{\varepsilon_k K}(0,1))}{E(m(S_{\varepsilon_k K}(0,1)))} - 1\right]^2\right) < \infty$$

et donc :

$$\lim_{k \to \infty} \frac{m(S_{\varepsilon_k K})}{E(m(S_{\varepsilon_k K}))} = 1 \ p.s$$

Si K est étoilé, $m(S_{\varepsilon K})$ est une fonction croissante de ε, ce qui achèvera la preuve, une fois (a) et (b) prouvés.

Pour prouver (a) on a :

$$\begin{aligned} E(m(S_{\varepsilon K}(0,1))) &= E(\int 1_{S_{\varepsilon K}+(0,1)}(y)dy) \\ &= \int P(T_{y-\varepsilon K} \leq 1)dy \end{aligned}$$

où $T_{y-\varepsilon K} = \inf(s, B_s \in y - \varepsilon K)$.

Or la théorie du potentiel permet d'estimer ces temps d'atteinte et de vérifier que, si ζ est une variable de loi exponentielle indépendante du mouvement brownien et si $G_\lambda(x,y)$ est la fonction de Green du Brownien tué au temps ζ on a (si K est non-polaire) :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\log \frac{1}{\varepsilon}) P(T_{y-\varepsilon K} < \zeta) = \pi G_\lambda(0,y).$$

C'est-à-dire que la transformée de Laplace de $(\log \frac{1}{\varepsilon})\gamma_\varepsilon(ds)$ (où γ_ε est la loi de $T_{y-\varepsilon K}$) converge vers la transformée de Laplace de $\pi p_s(0,y)ds$. On en déduit que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(\log \frac{1}{\varepsilon})\gamma_\varepsilon([0,t]) = \pi \int_0^t p_s(0,y)ds$$

c'est-à-dire que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(\log \frac{1}{\varepsilon})P(T_{y-\varepsilon K} \leq t) = \pi \int_0^t p_s(0,y)ds \ .$$

De plus on montre qu'il existe une constante $C(\lambda, K)$ telle que :

$$P(T_{y-\varepsilon K} \leq \zeta) \leq C(\lambda, K)G_\lambda(0, \frac{y}{2})(\log \frac{1}{\varepsilon}),$$

d'où :

$$\begin{aligned} P(T_{y-\varepsilon K} \leq 1) &\leq e^\lambda P(T_{y-\varepsilon K} \leq \zeta) \\ &\leq e^\lambda C(\lambda, K)(\log \frac{1}{\varepsilon})G_\lambda(0, \frac{y}{2}) \end{aligned}$$

G_λ étant intégrable, par convergence dominée le (a) est prouvé.

La preuve du (b) est plus délicate, nous renvoyons à [L4].

Remarque : La limite de $\log \frac{1}{\varepsilon} m(S_{\varepsilon K}(0,1))$ est indépendante de K.

Ceci est spécifique à la dimension 2. En dimension $d \geq 3$ on prouve le résultat suivant : $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{2-d} m(S_{\varepsilon K}(0,1)) = C(K)$ où $C(K)$ est la capacité newtonienne de K.

4.2 Interprétation du résultat précédent en termes de conduction de la chaleur :

Le comportement asymptotique du volume de la saucisse de Wiener est directement lié au problème de conduction de la chaleur suivant :

Si un compact K non polaire de $\mathbf{R}^2$ est maintenu à température 1 lorsque le temps varie de 0 à $+\infty$, alors que $\mathbf{R}^2 \setminus K$ est à température nulle à l'instant initial $t = 0$, quel est le comportement asymptotique, lorsque t tend vers $+\infty$, de la quantité de chaleur $E_K(t)$ transmise au temps t par K à $\mathbf{R}^2 \setminus K$?

Si u est la solution de l'équation de la chaleur sur $\mathbf{R}^2 \setminus K$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u$$

avec $u(0,x) = 0$ et $\lim_{x \to x_0} u(t,x) = 1$ pour tout $t > 0$, et tout point régulier x_0 de la frontière de K, on a :

$$E_K(t) = \int_{\mathbf{R}^2 \setminus K} u(t,x)dx$$

Or on a : $u(t,x) = P(T_{x-K} \leq t)$ et donc :

$$E_K(t) = \int_{\mathbf{R}^2 \setminus K} P(T_{x-K} \leq t)dx = \int_{\mathbf{R}^2} P(T_{x-K} \leq t)dx - m(K)$$

et donc $E_K(t) = E(m(S_K(0,t))) - m(K)$.

Ainsi on a vu que : $E_K(t) \sim 2\pi\frac{t}{\log t}$ lorsque $t \to +\infty$.

En dimension ≥ 3 $E_K(t) \sim C(K)t$, si $C(K)$ est la capacité newtonienne de K.

Spitzer [S2] a prouvé ce théorème et a même donné le développement asymptotique de $E_K(t)$. Nous reviendrons sur ce point au 4.4.

4.3 Intersections de Saucisses de Wiener indépendantes :

Considérons ici p mouvements browniens indépendants $B^1, \cdots, B^p$ dans C^2 et K un compact non polaire. Le théorème suivant, (dû à Le Gall [L3]) permet d'interpréter le temps local d'intersection comme une mesure de l'intersection des p saucisses $S^{?}_{\varepsilon K}(0,t)$ convenablement normalisée.

THÉORÈME 11.— *Pour tout $n < \infty$*

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(\log\frac{1}{\varepsilon})^p m(S^1_{\varepsilon K}(0,t) \cap \cdots \cap S^p_{\varepsilon K}(0,t)) = \pi^p \alpha([0,t]^p)$$

en norme L^n.

4.4 Fluctuations et renormalisation :

La renormalisation de Varadhan (exposé au 3.3) permet d'obtenir un terme de plus dans le développement asymptotique de $m(S_{\varepsilon K}(0,1))$:

THÉORÈME 12.— *Si K est non polaire*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\log\frac{1}{\varepsilon})^2(m(S_{\varepsilon K}(0,1)) - E(m(S_{\varepsilon K}(0,1))) = -\pi^2\gamma(\mathcal{J}_2\cap[0,1]^2))$$

en norme L^2.

Comme corollaire de ce théorème on peut obtenir un développement asymptotique :

$$m(S_{\varepsilon K}(0.1)) = \frac{\pi}{\log 1/\varepsilon} + \frac{\pi}{(\log 1/\varepsilon)^2}$$
$$(\frac{1+\kappa-\log 2}{2} + R(K) - \pi\gamma(\mathcal{J}_2\cap[0,1]^2)) + 0((\log\frac{1}{\varepsilon}))^2$$

où κ est la constante d'Euler et $R(K)$ est le logarithme de la capacité logarithmique de K.

Pour cela il suffit d'utiliser, outre le théorème précédent, le développement asymptotique, lorsque $\varepsilon\to 0$, de $E(m(S_{\varepsilon K}(0,1)))$ (ou, ce qui est équivalent, du flot de chaleur $E_K(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$) donné par Spitzer [S2].

On peut aussi inverser l'argument et obtenir ce développement asymptotique avant celui de Spitzer. On peut même obtenir un développement d'ordre plus élevé mais à condition d'avoir développé la renormalisation des temps locaux d'intersections de multiplicité supérieure à 2, ce qui est beaucoup plus difficile. Pour cela renvoyons à Dynkin [Dy3], Le Gall [L10], ou Rosen et Yor [RY] (pour les points triples).

Esquisse de preuve : Si ℓ et k sont des entiers tels que $\ell\le 2^k-1$ les processus

$$\left(B_{\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}-t} - B_{\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}}, t\in[0,\frac{1}{2^{k+1}}]\right) \text{ et } \left(B_{\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}+t} - B_{\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}}, t\in[0,\frac{1}{2^{k+1}}]\right)$$

sont des browniens indépendants.

Le temps local d'auto-intersection

$$\beta([\frac{2\ell}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+1}{2^{k+1}}[\times]\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+2}{2^{k+1}}])$$

suit la même loi que le temps local d'intersection $\alpha([0, \frac{1}{2^{k+1}}]^2)$. Ainsi (en notant, si U est une variable aléatoire, $\{U\} = U - E(U)$ la variable U centrée) on sait par le 4.3 que

$$(\log\frac{1}{\varepsilon})^2 m(S_{\varepsilon K}(\frac{2\ell}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+1}{2^{k+1}}) \cap S_{\varepsilon K}(\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+2}{2^{k+1}}))$$

converge dans L^2, lorsque ε tend vers zéro, vers $\pi^2\{\beta(A_\ell^k)\}$ avec

$$A_\ell^k = [\frac{2\ell}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+1}{2^{k+1}}[\times]\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+2}{2^{k+1}}].$$

Or on a :

$$\{m(S_{\varepsilon K}(0,1))\} = \sum_{i=1}^{2^n}\{m(S_{\varepsilon K}(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}))\}$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{2^k-1}\{m(S_{\varepsilon K}(\frac{2\ell}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+1}{2^{k+1}}) \cap S_{\varepsilon K}(\frac{2\ell+1}{2^{k+1}}, \frac{2\ell+2}{2^{k+1}}))\}$$

Or par le théorème 11 et par invariance d'échelle :

$$E(\sum_{i=1}^{2^n}\{m(S_{\varepsilon K}(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}))\}) \leq \frac{C}{2^{n/2}}(\log\frac{1}{\varepsilon})^{-2},$$

pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0(n)$. Ainsi (cf. [L12] pour les détails) :

$$L^2\lim_{\varepsilon\to 0}(\log\frac{1}{\varepsilon})^2\{m(S_{\varepsilon K}(0,1))\} = -\pi^2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{2-1}\{\beta(A_\ell^k)\}$$

$$= -\pi^2\gamma(\mathcal{J}_2 \cap [0,1]^2).$$

5. GÉOMÉTRIE DE LA COURBE BROWNIENNE :

5.1 Points cônes :

Si B est un mouvement brownien le théorème de Spitzer implique que, pour t fixé, avec probabilité 1, les courbes $(B_{t+s}, 0 < s \leq 1)$ et $(B_{t-s}, 0 < s \leq t)$ font un nombre infini de tours autour de B_t. Il est impossible de renforcer l'affirmation précédente pour la rendre vraie avec probabilité 1, pour tout t. Il existe des temps exceptionnels (et aléatoires) où la courbe brownienne, loin de s'enrouler autour de $B_t(\omega)$ demeure dans un cône de sommet $B_t(\omega)$.

Par exemple si $B_t = B_t^1 + iB_t^2$ et

$$T = \inf(t \geq 0 \ . \ B_t^1 = \sup_{0 \leq \varepsilon \leq 1} B_s^1)$$

il est clair que les deux courbes $(B_{T-s}, 0 \leq s \leq T)$ et $(B_{T+s} 0 < s \leq 1-T)$ sont contenues dans le demi-plan $\{x \leq B_T^1\}$.

Plus généralement on définit :

DÉFINITION : Si $\alpha \in]0, 2\pi[$, on dit que B_t est un point cône bilatère (respectivement unilatère) d'angle α, s'il existe $\delta > 0$ et un cône fermé d'angle α et de sommet B_t qui contienne les deux courbes (respectivement une des deux courbes) $(B_{t+s}, 0 < s < \delta)$ et $(B_{t-s}, 0 < s < \delta)$.

Nous venons de voir qu'il existe des points cônes bilatères d'angle π. Il s'agit d'un cas limite, en effet, si Γ_α est l'ensemble des points cônes bilatères d'angle α, Evans [EV] a prouvé le

THÉORÈME 13.— *Avec probabilité 1 :*

(1) si $\alpha \in]0, \pi[\quad \Gamma_\alpha = \emptyset$

(2) si $\alpha \in [\pi, 2\pi[\quad \dim \Gamma_\alpha = 2 - \frac{2\pi}{\alpha}$.

Par contre, Burdzy [B1] et Shimura [Sh2] ont constaté qu'il existe des points cônes unilatères d'angle $\in]\frac{\pi}{2}, \pi]$. On peut aussi en donner la dimension de Hausdorff. Le Gall [L7] a construit un temps local (une mesure de Radon portée par certains points cônes unilatères) et obtenu ainsi une description précise probabiliste de ces ensembles comme l'adhérence de la trajectoire de certains processus stables plongés dans le brownien, généralisant ainsi les résultats de Spitzer [S1] relatifs au cas où $\alpha = \pi$. Pour le cas où $\alpha < \frac{\pi}{2}$, il n'existe pas de points cônes unilatères. Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la question est ouverte.

5.2. Enveloppe convexe de la courbe brownienne

Soit $C(t)$ l'enveloppe convexe de la trajectoire brownienne jusqu'au temps t : $\{B_s, 0 \leq s \leq t\}$. Quelle est l'allure de $C(t)$, de $\partial C(t)$?

On sait que le périmètre moyen de $C(t)$ est de $\sqrt{8\pi t}$ (Takacs [Ta]), que l'aire moyenne de $C(t)$ est de $\frac{\pi t}{2}$ (El Bachir [EB]).

On a même la loi du log-itéré pour l'aire $A(t)$ de $C(t)$ due à P. Lévy [Le3] : $\limsup_{t \to \infty} \frac{A(t)}{2t \log \log t} = \frac{1}{2\pi}$ presque sûrement.

La frontière $\partial C(t)$ possède les propriétés suivantes :

THÉORÈME 14.—

1) Pour tout $t > 0$, avec probabilité 1, $C(t)$ n'a pas de coins, i.e. il n'existe pas de cône d'angle $< \pi$ et de sommet sur $\partial C(t)$ qui contienne $C(t)$.

Avec probabilité 1

2) $\partial C(t)$ est une courbe C^1, et n'est pas une courbe $C^{1,\alpha}$ avec $\alpha > 0$.

3) L'ensemble $e(t)$ des points extrémaux de $\partial C(t)$ est de dimension 0.

4) $\partial C(t) \setminus e(t)$ est une réunion dénombrable de segments de droite.

5) $C(t)$ n'a pas de points extrémaux isolés.

Le 1) est dû à El Bachir [EB] : Cranston-Hsu-March [CHM] ont étudié la régularité de $\partial C(t)$ et donné un module de continuité précis qui contient l'énoncé donné ici au 2). Voir aussi Burdzy-San Martin [BSM]. Evans [Ev] a prouvé les 3), 4), 5).

Preuve du 1) : (En suivant l'approche de Le Gall [L12]). Si on suppose que $C(t)$ a un coin en z, alors z est un point de la trajectoire brownienne, en fait on a même $z \in \{B_s, s \in]0, t[\}$ car B_0 et B_t sont intérieurs à $C(t)$ par le théorème de Spitzer. Un tel z est un point cône bilatère d'angle $\alpha < \pi$. On a vu qu'il n'existe pas de tels points.

Le fait que $\partial C(t)$ soit C^1 est alors simple. Pour la non-régularité $C^{1,\alpha}$ (i.e. la non-höldérianité de la tangente) on renvoie à Cranston-Hsu-March [CHM].

Le 5) est très simple : un point extrémal isolé est un coin, car $C(t)$ est aussi l'enveloppe convexe de $\{z\} \cup C(t) \setminus D(x,\delta)$ (pour δ assez petit, par Krein-Milman).

Le 3) est aussi très simple : un point extrémal est un point cône bilatère d'angle π. On a vu que la dimension de l'ensemble de ces points est nulle.

5.3 Points de coupure :

Est-il possible de déconnecter la courbe brownienne en enlevant un seul point ?

Un tel point sera alors dit point de coupure. La réponse est positive (en dimension ≥ 2) et est due à Burdzy. Elle est triviale en dimension ≥ 4 puisque les trajectoires browniennes n'ont alors pas de points doubles, tous les points sont des points de coupure. En dimension 2 (et 3) la preuve de Burdzy est délicate : il s'agit d'une approche "théorie du potentiel". On renvoie à [B4], on citera ici seulement le résultat et quelques questions.

THÉORÈME 15.— *Avec probabilité 1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t \in]0,\varepsilon[$ tel que :*

$$B_s \neq B_t \quad \forall s \in [0,1] \setminus \{t\}$$

et

$$\{B_s, 0 \leq s < t\} \cap \{B_s, t < s \leq 1\} = \emptyset\ .$$

Remarque : Burdzy utilise ce résultat pour infirmer une conjecture de Mandelbrot : la courbe brownienne n'est pas homéomorphe au Tapis de Sierpinski.

On ne sait presque rien sur l'ensemble des points de coupure, si ce n'est qu'il est non vide. Quelle est sa dimension ? Est-il non dénombrable ? Est-il inclus dans l'ensemble des points cônes bilatères ?

5.4. L'extérieur de la courbe brownienne : points spirales.

Soit F la composante connexe non bornée du complémentaire de la courbe brownienne : $\mathbf{C} \setminus B_{[0,1]}$. Burdzy [B3] a montré que la frontière de ∂F est très complexe : "presque tout point de ∂F n'est atteignable par une courbe continue venue de l'infini, qu'au prix d'un nombre infini de tours dans les deux sens".

Un point z est sur ∂F si et seulement si il existe une fonction continue $\varphi[0,1] \to \mathbf{C}$ telle que :

(1) $$\varphi(s) \in F \quad \forall s \in [0,1[$$

(2) $$\varphi(1) = z.$$

On dira que $z \in \partial F$ est un point spirale si pour toute fonction φ vérifiant (1) et (2) on a :

$$\begin{cases} \limsup\limits_{s-01} \arg(\varphi(s) - z) = +\infty \\ \liminf\limits_{s-01} \arg(\varphi(s) - z) = -\infty \end{cases}$$

Un point cône bilatère ne peut être un point spirale. En fait les points cônes bilatères d'angle π forment une partie dense de ∂F. Néanmoins les points spirales sont génériques sur ∂F au sens de la mesure harmonique.

THÉORÈME 16.— *Avec probabilité 1, presque tout $z \in \partial F$ (au sens de la mesure harmonique) est un point spirale.*

Preuve : Il existe une application analytique bijective f du disque unité D sur $\widehat{F} = F \cup \{\infty\}$. On peut étendre f par continuité de $\bar{D}$ sur $\widehat{F} \cup \partial F$, car les limites radiales existent pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$ (par le fait que $\mathbf{C} \setminus F$ est connexe). Cette extension n'est pas injective du fait de l'existence de points de coupure (cf. Pommerenke [Po]). Soit A_f l'ensemble des points $\zeta \in \partial D$ tels que f ait une dérivée angulaire non nulle en ζ. Le point clef de la preuve est le lemme suivant :

Lemme.— *$f(A_f)$ est de dimension nulle.*

En effet $f(A_f)$ est inclus dans l'ensemble des points cônes bilatères d'angle, pour tout $\alpha > \pi$. L'estimation, donnée au 5.1, de la dimension de Hausdorff de l'ensemble de ces points cônes montre donc que $\dim f(A_f) = 0$.

Il faut ensuite remarquer qu'il existe un $\beta > 0$ tel que si $H \subset \partial F$ et si $\dim H < \beta$ alors la mesure harmonique de H est nulle. Ceci est une conséquence du théorème de Makarov [Ma] qui affirme entre autres que l'on peut choisir $\beta = 1$.

Mais la version faible du théorème de Makarov utile ici peut être prouvée de façon probabiliste très simplement (*cf.* Le Gall [L12]). On déduit donc que la mesure harmonique de $f(A_f)$ est nulle.

Pour achever la preuve il suffit d'utiliser le théorème de Mac-Millan : on dira que $\zeta \in \partial F$ est un f-point spirale si $\arg(f(z)-f(\zeta))$ est non borné supérieurement et inférieurement sur toute courbe de D aboutissant en ζ. On notera S_f l'ensemble des f points spirale.

Le théorème de Mac Millan affirme que la mesure harmonique de $\partial D \setminus (S_f \cup A_f)$ est nulle, et donc aussi celle de $f(\partial D \setminus S_f \cup A_f)$ (par invariance conforme de la mesure harmonique).

Or il est clair d'après les définitions que, si $z \in \partial F$ n'est pas un point spirale il existe un point ζ de ∂D qui n'est pas un f-point spirale tel que $f(\zeta) = z$. Ainsi le complémentaire de l'ensemble des points spirale de ∂F est inclus dans

$$f(\partial D \setminus S_f \cup A_f) \cup f(A_f)$$

qui est de mesure nulle □.

5.5. Les petites composantes connexes du complémentaire de la courbe brownienne :

Combien la courbe brownienne laisse-t-elle de "petits trous" dans le plan ?

Mandelbrot [M] a conjecturé que le nombre N_ε de composantes connexes du complémentaire de la courbe brownienne, d'aire supérieure à

ε est de l'ordre de $\frac{L(\varepsilon)}{\varepsilon}$, où L est une fonction à croissance lente telle que $\int_0^1 \frac{L(u)}{u} du < \infty$. Mountford [Mo] a prouvé cette conjecture avec $L(\varepsilon) = \frac{2\pi}{(\log \varepsilon)^2}$. Nous allons donner ici l'approche de Le Gall [L11] qui a amélioré ces résultats : si $u < v$ notons $N_{[u,v[}$ le nombre de composantes connexes du complémentaire de la courbe brownienne dont l'aire appartient à $[u, v[$ on a alors :

THÉORÈME 17.— *Avec probabilité 1, pour tout $\delta > 0$:*

$$\lim_{u \to 0} \sup_{v \geq (1+\delta)u} \left| \frac{(\log u)^2 N_{[u,v[}}{u^{-1} - v^{-1}} - 2\pi \right| = 0$$

En particulier : $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon (\log \varepsilon)^2 N_\varepsilon = 2\pi$.

Preuve : Si W_ε est la réunion de toutes les composantes connexes d'aire inférieure ou égale à $\pi\varepsilon^2$, il est clair que $W_\varepsilon \subset S_{\varepsilon D}(0,1)$ (la saucisse de Wiener de rayon ε). Réciproquement on montre que, si $y \in S_{\varepsilon D}(0,1)$ la composante connexe de y sera contenue dans le disque de centre y et de rayon ε (et donc d'aire $\leq \pi\varepsilon^2$), ceci avec probabilité proche de 1. Ainsi la mesure de W_ε est de l'ordre de celle de $S_{\varepsilon D}(0,1)$, i.e. de l'ordre de $\frac{\pi}{|\log \varepsilon|}$.

Si $\lambda \in [0, 1[$ et si $U_\varepsilon^\lambda = W_\varepsilon \setminus W_{\lambda\varepsilon}$, on peut vérifier (c'est beaucoup plus difficile) que :

$$m(U_\varepsilon^\lambda) = m(W_\varepsilon) - m(W_{\lambda\varepsilon}) \sim \frac{\pi}{|\log \varepsilon|} - \frac{\pi}{|\log \lambda\varepsilon|}$$

i.e. que $m(U_\varepsilon^\lambda) \sim \frac{\pi |\log \lambda|}{(\log \varepsilon)^2}$. Ce qui permet de prouver le théorème si on remarque en outre que :

$$(M\lambda^{2n})^{-1} m(U_{\lambda^n}^\lambda) \leq N_{[\pi\lambda^{2n+2}, \pi\lambda^{2n}[} \leq (\pi\lambda^{2n+2})^{-1} m(U_{\lambda^n}^\lambda).$$

BIBLIOGRAPHIE

[AD] O. Adelman, A. Dvoretzky, Plane Brownian motion has strictly n-multiple points. *Israel J. Math.* 52, 361-364 (1985).

[B1] K. Burdzy, Brownian paths and cones. *Ann. Probab.* 13, 1006-1010 (1985).

[B2] K. Burdzy, *Multidimensional Brownian Excursions and Potential Theory.* Longman, New-York, 1987.

[B3] K. Burdzy, Geometric properties of two-dimensional Brownian paths. *Probab. Th. Rel. Fields* 81, 485-505 (1989).

[B4] K. Burdzy, Cut points on Brownian paths. *Ann. Probab.* 17, 1012-1036.

[BSM] K. Burdzy, J. San Martin, Curvature of the convex hull of planar Brownian motion near its minimum point. *Stoch. Process. Appl.* 33, 89-103 (1989).

[CT] Z. Ciesielski, S.J. Taylor, First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path. *Trans. Amer. Math. Soc.* 103, 434-450 (1963).

[CHM] M. Cranston, P. Hsu, P. March, Smoothness of the convex hull of planar Brownian motion. *Ann. Probab.* 17, 144-150 (1989).

[Da] B. Davis, Brownian motion and analytic functions. *Ann. Probab.* 7, 913-932 (1979).

[DV] M.D. Donsker, S.R.S. Varadhan, Asymptotics for the Wiener sausage. *Comm. Pure Appl. Math.* 28, 525-565 (1975).

[Du1] R. Durrett, A new proof of Spitzer's result on the winding of two-dimensional Brownian motion. *Ann. Probab.* 10, 244-246 (1982).

[Du2] R. Durett, *Brownian Motion and Martingales in Analysis.* Wadsworth, Belmont Ca. 1984.

[DE] A. Dvoretzky, P. Erdös, Some problems on random walk in space. *Proc. Second Berkeley Symposium on Math, Statistics and Probability.* 353-367. University of California Press, Berkeley, 1951.

[DK1] A. Dvoretzky, P. Erdös, S. Kakutani, Double points of paths of Brownian motion in n-space. *Acta Sci. Math. (Szeged)* 12, 74-81 (1950).

[DK2] A. Dvoretzky, P. Erdös, S. Kakutani, Multiple points of Brownian motion in the plane. *Bull. Res. Council Israel Sect. F3*, 364-371 (1954).

[DK3] A. Dvoretzky, P. Erdös, S. Kakutani, Points of multiplicity of plane Brownian paths. *Bull. Res. Council Israel Sect. F7*, 175-180 (1958).

[DKT] A. Dvoretzky, P. Erdös, S. Kakutani, S.J. Taylor, Triple points of Brownian motion in 3-space. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 53, 856-862 (1957).

[Dy1] E.B. Dynkin, Additive functionals of several time-reversible Markov processes. *J. Funct. Anal.* 42, 64-101 (1981).

[Dy2] E.B. Dynkin, Local times and quantum fields, *Seminar on Stochastic Processes 1983*, pp.69-84, Birkhäuser, Boston, 1984.

[Dy3] E.B. Dynkin, Polynomials of the occupation field and related random fields. *J. Funct. Anal.* 42, 64-101 (1984).

[Dy4] E.B. Dynkin, Random fields associated with multiple points of the Brownian motion *J. Funct. Anal.* 62, 397-434 (1985).

[Dy5] E.B. Dynkin, Functionals associated with self-intersections of the Brownian motion. *Séminaire de Probabilités XX, Lecture Notes in Math.* 1204, 553-571, Springer, Berlin, 1986.

[Dy6] E.B. Dynkin, Self-intersection gauge for random walks and for Brownian motion. *Ann. Probab.* 16, 1-57 (1988).

[Dy7] E.B. Dynkin, Regularized self-intersection local times of the planar Brownian motion. *Ann. Probab.* 16, 58-74 (1988).

[E] S.F. Edwards, The statistical mechanics of polymers with excluded volume. *Proc. Phys. Sci.* 85, 613-624 (1965).

[EB] M. EL Bachir, L'enveloppe convexe du mouvement brownien. Thèse de troisième cycle, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1983.

[Ev] S.N. Evans, On the Hausdorff dimension of Brownian cone points. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 98, 343-353 (1985).

[GHR] D. Geman, J. Horowitz, J. Rosen, A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. *Ann. probab.* 12, 86-107 (1984).

[H] J. Hawkes, Some geometric aspects of potentials theory. *Stochastic Analysis and Applications. Lecture Notes in Math.* 1095, 130-154, Springer, New-York, 1984.

[IMK] K. Itô, H.P. McKean, *Diffusion Processes and their Sample Paths.* Springer, New-York, 1965.

[Kn] F.B. Knight, *Essentials of Brownian Motion and Diffusion.* A.M.S. Providence, 1981.

[KR] G. Kallianpur, H. Robbins, Ergodic property of the Brownian Motion process. *Proc. Nat. Acad. Sci.* U.S.A. 39, 525-533.

[L1] J.F. Le Gall, Sur la mesure de Hausdorff de la courbe brownienne. *Séminaire de Probabilités XIX. Lecture Notes in Math.* 1123, 297-313. Springer, New-York, 1985.

[L2] J.F. Le Gall, Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan. *Séminaire de Probabilités XIX. Lecture Notes in Math* 1123, 314-331, Springer, New-York 1985.

[L3] J.F. Le Gall, Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement brownien *Ann. Probab.* 14, 1219-1244 (1986).

[L4] J.F. Le Gall, Le comportement du mouvement brownien entre les deux instants où il passe par un point double. *J. Funct. Anal.* 71, 246-262 (1987).

[L5] J.F. Le Gall, Mouvement brownien, cônes et processus stables. *Probab. Th. Rel. Fields* 76, 587-627 (1987).

[L6] J.F. Le Gall, Temps locaux d'intersection et points multiples des processus de Lévy. *Séminaire de probabilités XXI, Lecture Notes in Math.* 1247, 341-375. Springer, New-York, 1987.

[L7] J.F. Le Gall, The exact Hausdorff measure of Brownian multiple points, *Seminar on Stochastic Processes 1986*, pp.107-137, Birkhäuser, Boston, 1987.

[L8] J.F. Le Gall, Fluctuation results for the Wiener sausage. *Ann. Probab.* 16, 991-1018 (1988).

[L9] J.F. Le Gall, Sur une conjecture de M. Kac. *Probab. Th. Rel. Fields* 78, 389-402 (1988).

[L10] J.F. Le Gall, Wiener sausage and self-interaction local times. *J. Funct. Anal.* 88, 299-341 (1990).

[L11] J.F. Le Gall, On the connected components of the complement of a two-dimensional Brownian path. *To appear.*

[L12] J.F. Le Gall, Cours à l'Ecole d'été de St Flour 1990. A paraître en Lecture Notes Springer Verlag.

[LY] J.F. Le Gall, M. Yor, Etude asymptotique de certains mouvements browniens complexes avec drift. *Probab. Th. Rel. Fields* 71, 183-229 (1986).

[LJ] Y. Le Jan, On the Fock space representation of functionals of the occupation field and their renormalization. *J. Funct. Anal.* 80, 88-108 (1988).

[Lé1] P. Lévy, Le mouvement brownien plan. *Amer. J. Math.* 62, 487-550 (1940).

[Lé2] P. Lévy, La mesure de Hausdorff de la courbe du mouvement brownien. *Giornale de l'Istituto Italiano degli Attuari* 16, 1-37 (1953).

[Lé3] P. Lévy, Le caractère universel de la courbe du mouvement brownien et la loi du logarithme itéré. *Rendiconti del circolo matematico di Palermo,II,* 4, 337-366 (1955).

[Lé4] P. Lévy, *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien.* Gauthier-Villars, Paris, 1965.

[Ma] N.G. Makarov, On the distorsion of boundary sets under conformal mappings. *Proc. London Math. Soc. (3)* 51, 369-384 (1985).

[M] B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature.* W.H. Freeman and Co. New-York, 1982.

[MM] J.E. McMillan, Boundary behaviour of a conformal mapping. *Acta Math.* 123, 43-68 (1969).

[Mo] T.S. Mountford, On the asymptotic number of small components created by planar Brownian motion. *Stochastics* 28, 177-188 (1989).

[PY1] J.W. Pitman, M. Yor, Asymptotic laws of planar Brownian motion. *Ann. Probab.* 14, 733-779 (1986).

[PY2] J.W. Pitman, M. Yor, Further asymptotic laws of planar Brownian Motion. *Annals of Probability* 1989, vol.17, N°3, 965-1011.

[Po] G. Pommerenke, *Univalent Functions.* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[PS] S.C. Port, C.J. Stone, *Brownian Motion and Classical Potential Theory.* Academic Press, New-York, 1978.

[ReY] D. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingale Calculus.* Springer, 1990 (to appear).

[RoW] L.C.G. Rogers, D. Williams, *Diffusions, Markov Processes, and Martingales, Vol.II.* Wiley, Chichester, 1987.

[R1] J. Rosen, A local time approach to the self-intersections of Brownian paths in space. Comm. Math. Physics. 88, 327-338 (1983).

[R2] J. Rosen, Self-intersections of random fields. *Ann. Probab.* 12, 108-119 (1984).

[R3] J. Rosen, Tanaka formula and renormalization for intersections of planar Brownian motion. Séminaire de Probabilités XX. *Lecture Notes in Math.* 1204, 515-531. Springer, Berlin, 1986.

[RY] J. Rosen, M. Yor, Tanaka formulae and renormalization for triple intersections of Brownian motion in the plane. *Ann. Probab.* to appear.

[Sh1] M. Shimura, A limit theorem for two-dimensional conditioned random walk. *Nagoya Math. J.* 95, 105-116 (1984).

[Sh2] M. Shimura, Excursions in a cone for two-dimensional Brownian motion. *J. Math. Kyoto Univ.* 25, 433-443 (1985).

[Sh3] M. Shimura, Meandering points of two-dimensional Brownian motion. *Kodai Math. J.* 11, 169-176 (1988).

[S1] F. Spitzer, Some theorems concerning two-dimensional Brownian motion. *Trans. Amer. Math. Soc.* 87, 187-197 (1958).

[S2] F. Spitzer, Electrostatic capacity, heat flow and Brownian motion. Z. *Wahrsch. verw. Gebiete 3*, 110-121 (1964).

[Sz] A.S. Sznitman, Some bounds and limiting results for the Wiener sausage of small radius associated with elliptic diffusions. *Stochastic Process. Appl.* 25, 1-25 (1987).

[Ta] L. Takacs, Expected perimeter length, Amer. Math. Monthly 87-142.

[T1] S.J. Taylor, The exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 60, 253-258 (1964).

[T2] S.J. Taylor, Sample path properties of processes with stationary independent increments. *Stochastic Analysis, D. Kendall, E. Harding eds.* Wiley, London, 1973.

[T3] S.J. Taylor, The measure theory of random fractals. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 100, 383-406 (1986).

[V] S.R.S. Varadhan, Appendix to "Euclidean quantum field theory", by K. Symanzik. In *Local Quantum Theory* (R. Jost ed.). Academic, New-York, 1969.

[Wo] R. Wolpert, Wiener path intersections and local time. *J. Funct. Anal.* 30, 329-340 (1978).

[Y1] M. Yor, Compléments aux formules de Tanaka-Rosen. *Séminaire de Probabilités XIX. Lecture Notes in Math.* 1123, 332-349. Springer, Berlin, 1985.

[Y2] M. Yor, Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbf{R}^3$. *Séminaire de Probabilités XIX. Lecture Notes in Math.* 1123, 350-365. Springer, Berlin, 1985.

[Y3] M. Yor, Précisions sur l'existence et la continuité des temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbf{R}^d$. *Séminaire de Probabilités XX. Lecture Notes in Math.* 1204, 532-541. Springer, Berlin, 1986.

[Y4] M. Yor, Sur la représentation comme intégrales stochastiques des temps d'occupation du mouvement brownien dans $\mathbf{R}^d$. *Séminaire de Probabilités XX. Lecture Notes in Math.* 1204, 543-552. Springer, Berlin, 1986.

Gérard BEN AROUS
Université Paris XI
Département de Mathématiques
U.R.A. n°743 du CNRS
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY CEDEX

Ecole Normale Supérieure
Département de Mathématiques
et d'Informatique
U.R.A. n° 762 du CNRS
45, rue d'Ulm
F- 75230 PARIS CEDEX 05