Astérisque

MARC ROSSO

Représentations des groupes quantiques

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 744, p. 443-483

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__443_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 1991
43ème année, 1990-91, n° 744

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES QUANTIQUES

par Marc ROSSO

1. INTRODUCTION

1.1. L'équation de Yang-Baxter est une équation portant sur des fonctions $R(\lambda, \mu)$ de variables complexes à valeurs dans les endomorphismes du produit tensoriel d'un espace vectoriel de dimension finie V par lui-même. Elle a été introduite par Yang [Yg] comme condition de factorisation de la matrice S de dispersion dans le contexte du problème quantique à n corps en dimension 1, et par Baxter [Ba1, Ba2] pour obtenir une formule explicite pour la fonction de partition de certains modèles exactement résolubles en Mécanique Statistique (méthode de la matrice de transfert). Elle joue aussi un rôle important dans les travaux sur le "scattering inverse" en théorie des systèmes complètement intégrables quantiques, principalement dûs à Faddeev et à son école de Léningrad [Fa].

Cette équation s'écrit, pour $R(\lambda, \mu)$ à valeurs dans $\mathrm{End}(V \otimes V)$:

$$(1) \quad \begin{aligned}&[R(\lambda,\mu)\otimes 1]\,[1\otimes R(\lambda,\nu)]\,[R(\mu,\nu)\otimes 1] = \\ &\qquad\qquad [1\otimes R(\mu,\nu)]\,[R(\lambda,\nu)\otimes 1]\,[1\otimes R(\lambda,\mu)]\end{aligned}$$

égalité dans $\mathrm{End}(V \otimes V \otimes V)$.

Soit $P : V \otimes V \to V \otimes V$ l'opérateur de symétrie : $P(x \otimes y) = y \otimes x$ pour $x, y \in V$. On réserve souvent le nom d'équation de Yang-Baxter à l'équation satisfaite par $P.R(\lambda, \mu)$. La convention ici adoptée tient à ce que les solutions de (1) qui sont constantes en (λ, μ) donnent directement des représentations du groupe de tresses dans les puissances tensorielles de V, et qu'elle permet une interprétation en termes d'opérateurs d'entrelacement.

On appellera R-matrice toute solution de (1). λ, μ sont appelées paramètres spectraux.

Il y a au moins deux façons de voir comment certaines algèbres de Hopf et leurs représentations jouent un rôle dans la recherche de solutions de l'équation de Yang-Baxter.

1.2. Le schéma suivant a été proposé par Jimbo [J1] et a été utilisé par Chari-Pressley [C-P1,
C-P2], Date-Jimbo-Miki-Miwa [DJMM] entre autres.

Considérons une algèbre de Hopf U et supposons que l'on ait une famille de représentations $(V, \pi_\xi)_{\xi \in S}$, indexée par une partie S de $\mathbf{C}^n$ et satisfaisant aux propriétés suivantes :

(i) *Pour (ξ, λ, μ) générique, $(V \otimes V \otimes V, \pi_\xi \otimes \pi_\lambda \otimes \pi_\mu)$ est indécomposable.*

(ii) *Pour $\xi, \mu \in S$, il existe un opérateur d'entrelacement*

$$R(\xi, \mu) : V \otimes V \to V \otimes V \quad \textit{entre} \quad \pi_\xi \otimes \pi_\mu \quad \textit{et} \quad \pi_\mu \otimes \pi_\xi.$$

(iii) $R(\xi, \xi) = \mathrm{id} \quad \forall \xi \in S$.

Alors, $R(\xi, \mu)$ satisfait à l'équation de Yang-Baxter.

1.3. Un autre point de vue est celui de la "R-matrice universelle", qui s'inscrit dans le cadre des algèbres de Hopf quasitriangulaires introduites par Drinfeld [D2] comme suit :

DÉFINITION 1.3.— *La donnée d'une algèbre de Hopf quasitriangulaire est celle d'un couple (A, R) constitué d'une algèbre de Hopf A et d'un élément inversible R de $A \otimes A$, soumis aux conditions suivantes :*

(i) $R\Delta(x) R^{-1} = \Delta'(x) \qquad \forall x \in A$

où Δ désigne le coproduit de A et Δ' le coproduit opposé.

(ii) $(\Delta \otimes \mathrm{id})(R) = R_{13} R_{23}$

$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(R) = R_{13} R_{12}$

où, si $R = \Sigma\, a_i \otimes b_i$, on pose $R_{13} = \Sigma\, a_i \otimes 1 \otimes b_i$, $R_{23} = \Sigma\, 1 \otimes a_i \otimes b_i, \cdots$.

Alors, si $(V, \rho_\lambda)_{\lambda \in S}$ est une famille de représentations de A dans le même espace vectoriel de dimension finie V, $R(\lambda, \mu) = P(\rho_\lambda \otimes \rho_\mu)(R)$ satisfait à l'équation de Yang-Baxter.

De façon très générale, on pourrait définir, avec Drinfeld [D2], la catégorie des groupes quantiques comme la catégorie duale de la catégorie des algèbres de Hopf avec unité, coünité et antipode inversible.

On s'intéresse en fait à certaines classes d'exemples qui, par l'un ou l'autre point de vue, sont reliés à l'équation de Yang-Baxter.

1.4. Kulish-Reshetikhin [Ku-R] et Sklyanin [Sk], pour le cas Sl(2), puis indépendamment Drinfeld et Jimbo [D1, J2, J3] pour le cas général, ont introduit des déformations des algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie simples, ou d'algèbres de Kač-Moody symétrisables, qui sont des algèbres de Hopf quasitriangulaires.

Elles sont reliées aux solutions dites trigonométriques de l'équation de Yang-Baxter (*i.e.* $R(\lambda, \mu)$ est une fonction rationnelle de λ/μ).

Une autre classe très importante est celle des Yangiens, introduite par Drinfeld et étudiée, entre autres, par Cherednik [Ch1, Ch2], Drinfeld [D3, D4], Kirillov-Reshetikhin [K-R1], Olshanskii [O], Chari-Pressley [C-P2, C-P3].

Elles sont reliées aux solutions rationnelles de l'équation de Yang-Baxter (*i.e.* qui dépendent rationnellement de $\lambda - \mu$).

1.5. Woronowicz a proposé une autre approche à la théorie des groupes quantiques, complètement indépendante des motivations données ici, dans un cadre de C^*-algèbres [W1] [W2] [W3].

Il s'agit ici de déformer l'algèbre des fonctions sur un groupe de Lie.

Certaines complétions des duaux restreints des algèbres enveloppantes quantifiées ci-dessus fournissent de tels exemples.

Ce point de vue sera (brièvement) évoqué au numéro 5.

1.6. Faddeev, Reshetikhin et Takhtajan, s'inspirant des formules de la méthode du "scattering inverse" ont adopté une autre formulation, où l'on construit l'algèbre de Hopf et sa duale à partir de la donnée de la R-matrice [F-R-T].

1.7. Manin a proposé un point de vue en termes d'algèbres quadratiques, où le groupe quantique apparaît comme le "groupe d'automorphismes" d'un espace quantique [Ma].

1.8. Cet exposé sera essentiellement consacré aux représentations des algèbres enveloppantes quantifiées de Drinfeld et Jimbo.

Dans le point de vue de Drinfeld, l'anneau de base est l'algèbre des séries formelles $\mathbf{C}[[h]]$ (ce qui permet d'exprimer la R-matrice universelle), et dans celui de Jimbo, on considère une algèbre de Hopf sur $\mathbf{C}(q)$, ou sur $\mathbf{C}$ et dépendant d'un nombre complexe non nul q.

Lusztig a montré que l'on peut aussi définir cette déformation sur $\mathbf{Z}[q, q^{-1}]$ (en construisant un analogue de la $\mathbf{Z}$-forme de Kostant). Lorsqu'on spécialise q en une racine de l'unité, on obtient une modification de la définition de Jimbo. Ceci a permis à Lusztig de mettre en évidence une analogie entre la théorie des représentations modulaires d'un groupe semi-simple sur un corps algébriquement clos de caractéristique p et celle des représentations de dimension finie du groupe quantique correspondant, en une racine p-ième de l'unité. Il conjecture que, dans une large mesure, ces théories sont identiques.

L'étude des représentations aux racines de l'unité dans la définition de Jimbo présente un intérêt en physique. En effet, De Concini et Kač ont montré que, dans ce cas, l'algèbre enveloppante quantifiée a un centre très gros, et que ses représentations irréductibles de dimension maximale sont paramétrées par une variété algébrique affine de dimension égale à la dimension de l'algèbre de Lie associée. En gros, ces paramètres supplémentaires, après imposition de certaines restrictions, sont utilisés comme paramètres spectraux dans le point de vue évoqué en 1.2. (Il faut en fait considérer l'algèbre de Kač-Moody affine associée ; voir, pour plus de précisions, [B-S] [DJMM].)

Ces représentations ont aussi suscité beaucoup d'intérêt en liaison avec les théories des champs conformes rationnelles (interprétation des règles de "fusion" et des représentations de monodromie en termes de représentations de groupes quantiques à une racine de l'unité(*)). Dans [T-K], [Koh], [D6]

(*) voir, par exemple, [A-G-S], [F-G-P], [M-R], [P-S], $\cdots$.

est établie l'équivalence entre deux représentations du groupe des tresses : celle donnée par la monodromie des équations de Knizhnik-Zamolochikov et celle donnée par la R-matrice.

2. ALGÈBRES ENVELOPPANTES QUANTIFIÉES : VALEURS GÉNÉRIQUES DU PARAMÈTRE

2.1. Notations

2.1.1. Soit q une indéterminée, $\mathcal{A} = \mathbf{Z}[q, q^{-1}]$.

Pour $n \in \mathbf{Z}$ et $d \in \mathbf{N}$, soit $[n]_d = \frac{q^{dn} - q^{-dn}}{q^d - q^{-d}} \in \mathcal{A}$.

On pose $[n]_d\,! = [n]_d\,[n-1]_d \cdots [1]_d$ et $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_d = \frac{[n]_d\,!}{[n-j]_d\,!\,[j]_d\,!}$ qui est dans $\mathcal{A}$.

On omettra l'indice d lorsque $d = 1$.

2.1.2. Soit $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice irréductible $n \times n$ à coefficients entiers tels que : $a_{ii} = 2$, $a_{ij} \leq 0$ pour $i \neq j$ et il existe $d_1, d_2, \cdots, d_n$ relativement premiers entre eux dans $\{1, 2, 3\}$ tels que la matrice $(d_i\, a_{ij})$ soit symétrique définie positive.

(a_{ij}) est donc la matrice de Cartan d'une algèbre de Lie simple de dimension finie $\mathcal{G}$.

On pose : $q_i = q^{d_i}$.

2.1.3. Soit P un groupe abélien libre de base ω_i, $i = 1, \cdots, n$. Posons $\rho = \sum_{i=1}^n \omega_i$, $\alpha_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}\, \omega_i$ pour $j = 1, \cdots, n$.

Soit $Q = \sum_i \mathbf{Z}\, \alpha_i$, $Q_+ = \sum_i \mathbf{Z}_+\, \alpha_i$. Pour $\beta = \sum k_i\, \alpha_i$ dans Q, on définit sa hauteur par $ht\, \beta = \sum_i k_i$.

On introduit un ordre partiel sur P défini par : $\lambda \geq \mu \iff \lambda - \mu \in Q_+$.

On définit un accouplement bilinéaire $P \times Q \to \mathbf{Z}$ par : $(\omega_i, \alpha_j) = \delta_{ij}\, d_i$.

Soit r_i l'automorphisme de P défini par $r_i(\omega_j) = \omega_j - \delta_{ij}\, \alpha_i$ $(i, j = 1, \cdots, n)$. Alors $r_i(\alpha_j) = \alpha_j - a_{ij}\, \alpha_i$.

Soit W le sous-groupe de $\mathrm{GL}(P)$ engendré par $r_1, \cdots, r_n$. Alors Q est invariant par W, et l'accouplement ci-dessus aussi.

Posons $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ et $R = W(\Pi)$, $R_+ = R \cap Q_+$. R est donc un système de racines correspondant à (a_{ij}), W son groupe de Weyl.

2.2. Définitions (Drinfeld [D1] [D2], Jimbo [J1] [J2] [J3])

2.2.1. *Soit k un corps de caractéristique nulle.*

$\mathcal{U}$ est la $k(q)$-algèbre définie par les générateurs E_i, F_i, K_i, K_i^{-1}, $1 \leq i \leq n$ et les relations :

(2.2.1.1) $$K_i\,K_j = K_j\,K_i \quad ; \quad K_i\,K_i^{-1} = K_i^{-1}\,K_i = 1.$$

(2.2.1.2) $$K_i\,E_j\,K_i^{-1} = q_i^{a_{ij}}\,E_j \quad ; \quad K_i\,F_j\,K_i^{-1} = q_i^{-a_{ij}}\,F_j.$$

(2.2.1.3) $$E_i\,F_j - F_j\,E_i = \delta_{ij}\,\frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}.$$

(2.2.1.4) $$\sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{d_i} E_i^{1-a_{ij}-s}\,E_j\,E_i^s = 0 \qquad \textit{pour } i \neq j.$$

(2.2.1.5) $$\sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{d_i} F_i^{1-a_{ij}-s}\,F_j\,F_i^s = 0 \qquad \textit{pour } i \neq j.$$

$\mathcal{U}$ est l'algèbre enveloppante quantifiée, ou groupe quantique, associée à la matrice (a_{ij}).

$\mathcal{U}$ est en fait une algèbre de Hopf, pour le coproduit Δ, la coünité ε et l'antipode inversible S définis par :

$$\Delta E_i = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i \quad , \quad \Delta F_i = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i \quad , \quad \Delta K_i = K_i \otimes K_i$$

$$\varepsilon(E_i) = 0 \quad , \quad \varepsilon(F_i) = 0 \quad , \quad \varepsilon(K_i) = 1$$

$$S(E_i) = -K_i^{-1}\,E_i \quad , \quad S(F_i) = -F_i\,K_i \quad , \quad S(K_i) = K_i^{-1}.$$

On dispose de l'antiautomorphisme de k-algèbre ω et de l'automorphisme de k-algèbre φ définis par :

$$\omega(E_i) = F_i \quad , \quad \omega(F_i) = E_i \quad , \quad \omega(K_i) = K_i^{-1} \quad , \quad \omega(q) = q^{-1}$$

$$\varphi(E_i) = F_i \quad , \quad \varphi(F_i) = E_i \quad , \quad \varphi(K_i) = K_i \quad , \quad \varphi(q) = q^{-1}.$$

Introduisons enfin les analogues des puissances divisées :

$$E_i^{(s)} = \frac{E_i^s}{[s]_{d_i}!} \qquad , \qquad F_i^{(s)} = \frac{F_i^s}{[s]_{d_i}!}$$

ainsi que $[K_i\,;\,n] = \frac{K_i\,q^n - K_i^{-1}\,q^{-n}}{q_i - q_i^{-1}}$

$$\begin{bmatrix} K_i \\ N \end{bmatrix} = \prod_{s=1}^{N} \frac{K_i\,q_i^{1-s} - K_i^{-1}\,q_i^{s-1}}{q_i^s - q_i^{-s}}.$$

Noter que $[K_i\,;\,0] = \begin{bmatrix} K_i \\ 1 \end{bmatrix}$.

2.2.2. Soit $\mathcal{U}^+$ la sous-algèbre de $\mathcal{U}$ engendrée par les E_i, $\mathcal{U}^-$ celle engendrée par les F_i et $\mathcal{U}^0$ celle engendrée par K_i, K_i^{-1}, $1 \leq i \leq n$.

On a alors (voir [Ro1] et [Ro5]) un $k(q)$-isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^- \otimes \mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{U}^+.$$

2.2.3. Pour chaque $\varepsilon \in k^*$ tel que $\varepsilon^{2d_i} \neq 1$ pour tout $i = 1, \cdots, n$, on peut considérer la k-algèbre $\mathcal{U}_\varepsilon$ définie par les générateurs E_i, F_i, K_i, K_i^{-1} ($i = 1, \cdots, n$), avec les mêmes relations que ci-dessus où l'on a remplacé q par ε.

On peut la voir comme "spécialisation" de la façon suivante : soit $\mathcal{U}'$ la $k[q, q^{-1}]$-sous-algèbre de $\mathcal{U}$ engendrée par les éléments E_i, F_i, K_i, K_i^{-1}, $[K_i; 0]$. Il est immédiat d'obtenir une présentation par générateurs et relations pour $\mathcal{U}'$, et de voir que c'est une algèbre de Hopf (voir [DC-K]).

Alors $\mathcal{U}_\varepsilon = \mathcal{U}'/(q - \varepsilon)\mathcal{U}'$.

On définit $\mathcal{U}_\varepsilon^+$, $\mathcal{U}_\varepsilon^-$, $\mathcal{U}_\varepsilon^0$ de façon évidente. On a encore une "décomposition triangulaire" comme en 2.2.2.

Cette définition par spécialisation a encore un sens pour $\varepsilon = 1$; les éléments K_i sont centraux et le quotient de $\mathcal{U}_1$ par l'idéal bilatère engendré par les $K_i - 1$ $(i = 1, \cdots, n)$ est isomorphe à l'algèbre enveloppante universelle de la k-algèbre de Lie simple associée à la matrice (a_{ij}).

On déduit de là que $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}$ n'ont pas de diviseurs de 0 [DC-K1] [J-L1].

2.2.4. Voici enfin la définition de Drinfeld, que nous utiliserons au n° 3. L'anneau de base est l'algèbre des séries formelles $k[[h]]$.

$\mathcal{U}_h$ est la $k[[h]]$-algèbre engendrée au sens h-adique par E_i, F_i, H_i $(1 \leq i \leq n)$ et les relations

(2.2.4.1) $$H_i H_j - H_j H_i = 0 \qquad i, j = 1, \cdots, n$$

(2.2.4.2) $$H_i E_j - E_j H_i = a_{ij} E_i \quad , \quad H_i F_j - F_j H_i = -a_{ij} F_j$$

et des relations (2.2.4.3), (2.2.4.4), (2.2.4.5) *que l'on déduit respectivement de* (2.2.1.3), (2.2.1.4) *et* (2.2.1.5) *en remplaçant K_i par* $\exp(-\frac{h}{2} d_i H_i)$ *et q par* $\exp(-\frac{h}{2})$.

$\mathcal{U}_h$ est une algèbre de Hopf topologique pour un coproduit,$\cdots$ obtenus à partir de ceux de 2.2.1 par les mêmes substitutions. Le coproduit est à valeurs dans le produit tensoriel complété pour la topologie h-adique.

2.2.5. Pour simplifier l'exposé, on s'est limité au cas des matrices de Cartan non dégénérées. On peut aussi associer un groupe quantique à toute matrice de Cartan généralisée symétrisable et un certain nombre des résultats évoqués ci-dessous (considérant des représentations intégrables) sont encore vrais. Voir [J-L1].

2.3. Modules de Verma et modules irréductibles de dimension finie ([L1], [Ro1])

La décomposition 2.2.2 permet de développer la théorie de façon analogue à la théorie classique.

2.3.1. Soit Q_2^* le groupe des homomorphismes de Q dans $\{\pm 1\}$.

$\delta \in Q_2^*$ et $\lambda \in P$ définissent un homomorphisme d'algèbre $\lambda_\delta : \mathcal{U}^0 \to k$ par $\lambda_\delta(K_i) = \delta(\alpha_i) \, . \, q^{(\lambda, \alpha_i)}$.

On peut donc considérer la représentation de dimension 1 de la sous-algèbre $\mathcal{U}^0\ \mathcal{U}^+$ de $\mathcal{U}$ où E_i agit par 0 et K_i par $\lambda_\delta(K_i)$, et grâce à 2.2.2 l'induire à $\mathcal{U}$. On notera $M(\lambda)^\delta$ le module correspondant, appelé *module de Verma de plus haut poids λ et type δ.*

Si M est un $\mathcal{U}$-module, $\delta \in Q_2^*$ et $\lambda \in P$, on définit le sous-espace de poids $M^{\lambda,\delta} = \{v \in M \mid K_i\, v = \delta(\alpha_i)\, q^{(\lambda,\alpha_i)} v \text{ pour } i = 1,\cdots,n\}$.

Un vecteur v de M est dit *primitif* s'il est non nul, appartient à un certain sous-espace de poids et est annulé par les E_i.

Un module est dit de plus haut poids s'il est engendré par un vecteur primitif. Un tel module est alors le quotient d'un module de Verma, et est somme directe de ses sous-espaces de poids, qui sont de dimension finie.

$M(\lambda)^\delta$ admet un unique quotient irréductible, noté $L(\lambda)^\delta$.

Quitte à tensoriser par une représentation de dimension 1, on peut supposer que $\delta(\alpha_i) = 1$ pour tout $i = 1,\cdots,n$, ce que l'on fera désormais. On écrira $L(\lambda)$ et $M(\lambda)$ au lieu de $L(\lambda)^1$ et $M(\lambda)^1$.

2.3.2. Le module irréductible $L(\lambda)$ est de dimension finie si et seulement si le poids λ est dominant, *i.e.* $(\lambda,\alpha_i) \geq 0$ pour tout i.

2.3.3. On a des résultats analogues à 2.3.1 et 2.3.2 pour $\mathcal{U}_\varepsilon$ si ε n'est pas racine de l'unité.

2.3.4. Soit M un $\mathcal{U}$-module de plus haut poids $\lambda \in P$, engendré par v_0.

On peut définir son caractère, dans l'algèbre de groupe $\mathbf{Z}[P]$, par la formule habituelle : $\operatorname{Ch} M = \sum_{\mu\in P} \dim M^\mu \,.\, e^\mu$.

On se propose de déterminer ce caractère, suivant Lusztig [L1, L5]. Soit M' le sous-$\mathcal{U}'$-module de M engendré par v_0. On a alors :

i) M' est somme de ses intersections avec les sous-espaces de poids, qui sont des $k[q,q^{-1}]$-modules libres de rang fini. Soit $M'^\mu = M^\mu \cap M'$.

ii) $k(q) \otimes_{k[q,q^{-1}]} M' \xrightarrow{\sim} M$ et $\dim_{k(q)} M^\mu = \operatorname{rang}_{k[q,q^{-1}]} M'^\mu$.

iii) Pour $\varepsilon \in k^*$, soit $M_\varepsilon = M' \otimes_{k[q,q^{-1}]} \big(k[q,q^{-1}]/(q-\varepsilon)\big)$. C'est un $\mathcal{U}_\varepsilon$-module, dont on définit le caractère de façon analogue à ci-dessus :

$$\text{si } M_\varepsilon^\mu = \left\{ v \in M_\varepsilon \mid K_i v = \varepsilon^{(\mu,\alpha_i)}\, v \quad , \quad [K_i,0]\, v = \frac{\varepsilon^{(\mu,\alpha_i)} - \varepsilon^{-(\mu,\alpha_i)}}{\varepsilon - \varepsilon^{-1}}\, v \right\}$$

$$\operatorname{Ch} M_\varepsilon = \sum \dim_k M_\varepsilon^\mu \,.\, e^\mu$$

et on obtient $\mathrm{Ch}\, M_\varepsilon = \mathrm{Ch}\, M$.

iv) En particulier, pour $\varepsilon = 1$, par extension des scalaires K_i agit par 1 et on obtient un module de plus haut poids sur l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie sur k associée à la matrice (a_{ij}). Si, de plus, M est de dimension finie, alors ce dernier module est nécessairement irréductible et son caractère est donné par la formule d'H. Weyl.

On en déduit immédiatement que M était lui-même irréductible (puisque $\mathrm{Ch}\, M = \mathrm{Ch}\, L(\lambda)$).

Remarque.— Joseph et Letzter obtiennent $\mathrm{Ch}\, L(\lambda)$ en montrant que, pour tout $i = 1, \cdots, n$, $M(s_i . \lambda)$ est un sous-module de $M(\lambda)$ ($s_i . \lambda = s_i(\lambda + \rho) - \rho$) et que $L(\lambda)$ est isomorphe au quotient de $M(\lambda)$ par la somme $\sum M(s_i . \lambda)$ ([J-L1]).

2.3.5. Au vu de la proposition suivante, on déduit de 2.3.4 que tout $\mathcal{U}$-module de dimension finie sur $k(q)$ est complètement réductible.

PROPOSITION ([Ro3]).— *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *Tout $\mathcal{U}$-module de dimension finie est complètement réductible.*

ii) *Tout $\mathcal{U}$-module de plus haut poids et de dimension finie est irréductible.*

En effet : i) $\Longrightarrow$ ii) est classique.

Pour ii) $\Longrightarrow$ i), suivant une idée d'Armand Borel, on se ramène, en raisonnant par l'absurde, au cas d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow L(\lambda) \longrightarrow M \longrightarrow L(\mu) \longrightarrow 0\,,$$

où M est indécomposable et $\lambda < \mu$. Mais alors M est un module de plus haut poids de dimension finie et 2.3.4 indique qu'il est irréductible. Contradiction.

Remarques.— i) On indiquera plus bas (*cf.* 2.8.5) une démonstration du fait que dès que ε n'est pas une racine de l'unité, tout $\mathcal{U}_\varepsilon$-module de dimension finie sur k est complètement réductible.

Une preuve cohomologique de ce résultat a été donnée dans [A-P-W1].

Dans [J-L1], Joseph et Letzter ont obtenu un théorème de complète réductibilité pour certaines catégories de modules sur $\mathcal{U}$ où $\mathcal{U}$ est associée à une matrice de Cartan généralisée symétrisable (et le corps de base est $k(q)$).

ii) Dans son approche sur $\mathbf{C}[[h]]$, Drinfeld a montré dans [D5] qu'il existe un isomorphisme d'algèbres $\varphi : \mathcal{U}_h \to U\mathcal{G} \otimes \mathbf{C}[[h]]$, qui est l'identité modulo h et dont la restriction au sous-espace $\mathcal{H}$ engendré par $H_1, \cdots, H_n$ est l'identité.

De là résulte que la classification des $\mathcal{U}_h$-modules qui sont des $\mathbf{C}[[h]]$-modules libres de type fini est la même que celle des $U\mathcal{G}$-modules de dimension finie sur $\mathbf{C}$, et on obtient en particulier la formule des caractères pour les $\mathcal{U}_h$-modules irréductibles.

2.4. Action du groupe de tresses (Voir Lusztig [L4], [L5])

Rappelons que le groupe de Weyl W est engendré par $r_1, \cdots, r_n$, et que les relations suivantes constituent un ensemble complet de relations

$$r_i^2 = 1$$
$$r_i r_j r_i \cdots = r_j r_i r_j \cdots \qquad i \neq j$$

où, dans la dernière équation, il y a 2, 3, 4 ou 6 termes dans chaque membre selon que $a_{ij}\, a_{ji}$ est égal à 0, 1, 2 ou 3 respectivement.

Le groupe de tresses associé B est défini par des générateurs $T_1, \cdots, T_n$ et les relations

$$T_i T_j T_i \cdots = T_j T_i T_j \cdots \qquad i \neq j$$

comme ci-dessus, mais on ne suppose plus que T_i^2 vaut 1.

2.4.1. Afin de construire (voir 2.5 ci-dessous) une base à la Poincaré-Birkhoff-Witt pour $\mathcal{U}$, il est commode d'introduire des analogues des vecteurs de racine dans $\mathcal{U}^+$ et $\mathcal{U}^-$.

Dans la situation classique, un revêtement fini de W agit dans l'algèbre de Lie (par des automorphismes élémentaires) et on peut construire les vecteurs de racine en appliquant ces automorphismes aux vecteurs de racine simple.

Lusztig a introduit une représentation de B par automorphismes d'algèbre de $\mathcal{U}$ (mais ne préservant pas la structure de cogèbre, ceci sera important au n° 3), qui permet de suivre la même démarche. Une autre construction a été donnée dans Kirillov-Reshetikhin [K-R3] et Soibelman-Vaksman [So-V], Soibelman [So2, So3].

La proposition suivante se montre par calculs.

PROPOSITION.— i) *Pour chaque $i = 1, \cdots, n$, il y a un unique automorphisme d'algèbre T_i de $\mathcal{U}$ tel que :*

$$T_iE_i = -F_iK_i \quad , \quad T_iE_j = \sum_{s=0}^{-a_{ij}} (-1)^{s-a_{ij}}\, q_i^{-s}\, E_i^{(-a_{ij}-s)}\, E_jE_i^{(s)} \qquad i \neq j$$

$$T_iF_i = -K_i^{-1}E_i \quad , \quad T_iF_j = \sum_{s=0}^{-a_{ij}} (-1)^{s-a_{ij}}\, q_i^{s}\, F_i^{(s)}\, F_jF_i^{(-a_{ij}-s)} \qquad i \neq j$$

$$T_iK_j = K_jK_i^{-a_{ij}}.$$

Cet automorphisme satisfait à :

$$T_i\,\omega = \omega\, T_i$$
$$T_i^{-1} = \varphi\, T_i\, \varphi^{-1}.$$

ii) *Ces automorphismes satisfont aux relations du groupe de tresses B, si bien que si $w \in W$ et $w = r_{i_1} \cdots r_{i_k}$ est une expression réduite de w, alors l'automorphisme $T_w = T_{i_1} \cdots T_{i_k}$ de $\mathcal{U}$ est indépendant du choix de l'expression réduite de w.*

iii) *Supposons $\beta = w\,\alpha_i \in R_+$, $\alpha_i \in \Pi$. Alors $T_wE_i \in \mathcal{U}^+$.*

2.5. Une base à la Poincaré-Birkhoff-Witt

On suppose ici $k = \mathbf{Q}$. On pose $\mathcal{A} = \mathbf{Z}[q, q^{-1}]$.

Soit $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ la $\mathcal{A}$-sous-algèbre de $\mathcal{U}$ engendrée par les éléments $E_i^{(N)}$, $F_i^{(N)}$, K_i, K_i^{-1} ($1 \leq i \leq n$, $N \geq 0$). Soit $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^+$ (resp. $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^-$) la $\mathcal{A}$-sous-algèbre de $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ engendrée par les éléments $E_i^{(N)}$ (resp. $F_i^{(N)}$) pour $N \geq 0$, $i = 1, \cdots, n$, et $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^0$ la $\mathcal{A}$-sous-algèbre de $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ engendrée par les éléments $\begin{bmatrix} K_i \\ N \end{bmatrix}$, K_i, K_i^{-1}, $i = 1, \cdots, n$, $N \geq 0$.

Lusztig a construit une $\mathcal{A}$-base de $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$, qui est un analogue de la $\mathbf{Z}$-forme de Kostant, de la façon suivante :

Soit w_o l'élément de plus grande longueur de W, et soit ν cette longueur. Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des expressions réduites de w_o, *i.e.* l'ensemble des suites $\mathbf{i} = (i_1, \cdots, i_\nu)$ d'entiers compris entre 1 et n telles que $w_0 = r_{i_1} \cdots r_{i_\nu}$.

Une telle suite détermine un ordre total sur R_+ par :

$$\beta_1 = \alpha_{i_1} \quad , \quad \beta_2 = r_{i_1}(\alpha_{i_2}) \quad , \quad \beta_3 = r_{i_1} r_{i_2}(\alpha_{i_3}), \cdots, \beta_\nu = r_{i_1} \cdots r_{i_{\nu-1}}(\alpha_{i_\nu}).$$

On introduit alors les *analogues des vecteurs de racine* par :

$$E_{\beta_s} = T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_{s-1}}(E_{i_s}) \quad , \quad F_{\beta_s} = \omega(E_{\beta_s}) = T_{i_1} \cdots T_{i_{s-1}}(F_{i_s}).$$

Pour $c = (c_1, \cdots, c_\nu)$ dans $\mathbf{N}^\nu$, posons $E_{\beta_s}^{(c_s)} = T_{i_1} \cdots T_{i_{s-1}}(E_{i_s}^{(c_s)})$ et

$$E_{\mathbf{i}}^{(c)} = E_{\beta_1}^{(c_1)} E_{\beta_2}^{(c_2)} \cdots E_{\beta_\nu}^{(c_\nu)} \quad , \quad F_{\mathbf{i}}^{(c)} = \omega(E_{\mathbf{i}}^{(c)}).$$

On a alors :

PROPOSITION (Lusztig [L5], Dyer-Lusztig [D-L]).— i) *Pour chaque* $\mathbf{i}$ *dans* $\mathcal{X}$, *les éléments* $E_{\mathbf{i}}^{(c)}$, $c \in \mathbf{N}^\nu$ *sont dans* $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^+$. *Ils forment une* $\mathcal{A}$*-base de* $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^+$ *et une* $\mathbf{Q}(q)$*-base de* $\mathcal{U}$.

ii) *De même, les éléments* $F_{\mathbf{i}}^{(c)}$, $c \in \mathbf{N}^\nu$ *forment une* $\mathcal{A}$*-base de* $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^-$ *et une* $\mathbf{Q}(q)$*-base de* $\mathcal{U}$.

iii) *Les éléments :* $\prod_{i=1}^n K_i^{\delta_i} \begin{bmatrix} K_i \\ n_i \end{bmatrix}$, $n_i \geq 0$, $\delta_i \in \{0,1\}$ *forment une* $\mathcal{A}$*-base de* $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^0$ *et une* $\mathbf{Q}(q)$*-base de* $\mathcal{U}^0$.

iv) *La multiplication définit un isomorphisme de* $\mathcal{A}$*-modules*

$$\mathcal{U}_{\mathcal{A}}^- \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{U}_{\mathcal{A}}^0 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{U}_{\mathcal{A}}^+ \longrightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{A}}.$$

v) *On a*

$$\mathcal{U}_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{A}} \mathbf{Q}(q) \simeq \mathcal{U}.$$

De plus, $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ est une $\mathcal{A}$-algèbre de Hopf et on a :

$$\Delta(E_i^{(N)}) = \sum_{k=0}^{N} q_i^{k(N-k)} E_i^{(N-k)} K_i^k \otimes E_i^{(k)}$$

$$\Delta(F_i^{(N)}) = \sum_{k=0}^{N} q_i^{-k(N-k)} F_i^{(k)} \otimes K_i^{-k} F_i^{(N-k)}.$$

La démonstration de la proposition utilise, pour prouver l'indépendance linéaire sur $\mathbf{Q}(q)$, la spécialisation en $q = 1$ de modules irréductibles de plus haut poids assez grand (*cf.* 2.3.4).

Remarques.— (i) Lorsqu'on considérera $\mathcal{U}$ ou $\mathcal{U}_\varepsilon$, on préférera parfois considérer les éléments $E_{\beta_s}^{c_s} = T_{i_1} \cdots T_{i_{s-1}}(E_{i_s}^{c_s})$, $E_{\mathbf{i}}^c = E_{\beta_1}^{c_1} \cdots E_{\beta_\nu}^{c_\nu}$ et $F_{\mathbf{i}}^c = \omega(E_{\mathbf{i}}^c)$ au lieu des puissances divisées.

(ii) Si maintenant k est un corps de caractéristique nulle, la proposition fournit des bases de $\mathcal{U}$ sur $k(q)$ et pour chaque $\varepsilon \in k^*$ tel que $\varepsilon^{2d_i} \neq 1$ pour tout i une base de $\mathcal{U}_\varepsilon$ sur k. (On utilise, pour $\mathcal{U}_\varepsilon$, les éléments $E_{\mathbf{i}}^c$ et le lemme 2.6 ci-dessous.)

(iii) Les bases ci-dessus dépendent d'une expression réduite de w_0. Lusztig [L6] et Kashiwara [Ka] ont construit une base "canonique" ou "cristalline" qui ne dépend pas d'un tel choix et qui possède des propriétés très remarquables. Je renvoie pour cela à l'exposé d'Olivier Mathieu à ce même Séminaire.

(iv) Une conséquence immédiate de la proposition est que le caractère d'un module de Verma $M(\lambda)$ sur $\mathcal{U}$ est donné par la même formule que dans le cas classique.

Convention.— On fixera désormais une expression réduite $\mathbf{i}$ de w_0 et on omettra l'indice $\mathbf{i}$.

2.6. Les analogues des vecteurs de racine E_β satisfont aux relations de quasicommutation suivantes (pour chaque expression réduite $\mathbf{i}$ de w_0) :

Lemme ([L-S1]).— *Avec les conventions de* 2.5 *pour l'ordre total sur* R_+, *on a, pour* $i < j$:

$$E_{\beta_j}\, E_{\beta_i} - q^{(\beta_i,\beta_j)} E_{\beta_i}\, E_{\beta_j} = \sum_{c \in \mathbf{N}^\nu} a_c\, E^c$$

où a_c *est dans* $k[q, q^{-1}]$, *et* $a_c = 0$ *à moins que* $c_p = 0$ *pour* $p \leq i$ *ou* $p \geq j$.

De Concini et Kač [DC-K] introduisent alors une filtration sur $\mathcal{U}$ (respectivement sur $\mathcal{U}_\varepsilon$) telle que l'algèbre graduée associée soit une algèbre de quasi-polynômes (c'est-à-dire une algèbre définie par des générateurs

$x_1, \cdots, x_n$ et des relations $x_i x_j = \lambda_{ij} x_j x_i$ pour λ_{ij} non nul dans le corps de base respectif).

De ceci, ils déduisent que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}_\varepsilon$ sont des algèbres sans diviseurs de zéros et intégralement closes au sens suivant (voir [DC-K-P], Remarque c), 6.4).

DÉFINITION ([DC-K]).— *Soit A une algèbre sans diviseurs de zéros, Z son centre, $Q(Z)$ le corps des fractions de Z. Posons $Q(A) = Q(Z) \otimes_Z A$. On dit que A est intégralement close si pour tout sous-anneau B de $Q(A)$ tel que $A \subset B \subset z^{-1}A$ pour un certain z non nul dans Z, on a $B = A$.*

Remarque.— Si A est commutative, ceci implique la définition usuelle.

2.7. On peut, en utilisant l'antihomomorphisme ω, introduire comme dans le cas classique, sur chaque module de Verma $M(\lambda)$ (on prend $\delta = 1$ pour simplifier les notations), une forme hermitienne contravariante au sens suivant.

Désignons par $^-$ l'involution k-linéaire de $k(q)$ qui envoie q sur q^{-1}.

Une forme k-bilinéaire H sur un $k(q)$-espace vectoriel V est dite hermitienne si $H(av, w) = \overline{a}\, H(v, w)$, $H(v, aw) = a\, H(v, w)$, $H(v, w) = \overline{H(w, v)}$ pour $a \in k(q)$, v et w dans V.

Soit v_λ un vecteur de plus haut poids de $M(\lambda)$. Il y a sur $M(\lambda)$ une unique forme hermitienne H telle que :

$$H(v_\lambda, v_\lambda) = 1\,,\ H(Xv, w) = H(v, \omega(X)w) \text{ pour } X \text{ dans } \mathcal{U}\,,\ v, w \text{ dans } M(\lambda).$$

Alors, comme d'habitude, des sous-espaces de poids distincts sont orthogonaux, le noyau de H est l'unique sous-module maximal propre et on va s'intéresser à la restriction H_η de H au sous-espace de poids $\lambda - \eta$, $\eta \in Q_+$. Soit $\det_\eta(\lambda)$ le déterminant de H_η dans la base $F^c v_\lambda$ introduite en 2.5, où c parcourt l'ensemble $\mathrm{Par}(\eta) = \{(c_1, \cdots, c_\nu) \in \mathbf{N}^\nu\,;\ \sum c_i \alpha_i = \eta\}$.

Notons qu'on peut interpréter chaque élément de $\mathcal{U}^0$ comme fonction sur P à valeurs dans $k(q)$, par : $K_\beta(\lambda) = q^{(\beta,\lambda)}$ pour $\beta \in Q$, $\lambda \in P$.

Utilisant les formules de caractères 2.3.4, 2.5 et la connaissance de la formule de Shapovalov pour le déterminant dans le cas classique, De Concini et Kač ont obtenu la formule suivante :

PROPOSITION ([DC-K]).— *On a*

$$\det_\eta = \prod_{\beta\in R_+}\prod_{m=1}^{\infty}\Big([m]_{d_\beta}\left[K_\beta\,;(\rho,\beta)-\frac{m}{2}(\beta,\beta)\right]\Big)^{|\mathrm{Par}(\eta-m\beta)|},$$

où, pour $\beta\in R_+$, on pose $d_\beta=d_i$ si β est dans l'orbite de α_i sous l'action du groupe de Weyl W.

Ils obtiennent aussi les critères usuels d'inclusions entre modules de Verma, critères aussi obtenus dans [A-P-W1] par des méthodes cohomologiques.

2.8. Centre et homomorphisme d'Harish-Chandra

T. Tanisaki a établi un analogue de l'isomorphisme d'Harish-Chandra sur $k[[h]]$ dans [Ta]. Dans [Ro3], il est prouvé un analogue du critère d'Harish-Chandra pour les caractères centraux sur $k(q)$. L'isomorphisme d'Harish-Chandra sur $k(q)$ est établi dans [DC-K] et [J-L1].

On suivra ici De Concini et Kač, car leur construction permet une spécialisation à $\mathcal{U}_\varepsilon$, pour $k=\mathbf{C}$ et $\varepsilon\in\mathbf{C}^*$ lorsque ε n'est pas une racine de l'unité.

2.8.1. Soit Z le centre de $\mathcal{U}$. Tout élément de Z s'écrit :

$$z=\sum_{\eta\in Q_+}\sum_{k,r\in\mathrm{Par}(\eta)}F^k\,\varphi_{k,r}\,E^r\quad,\quad \text{où } \varphi_{k,r}\in\mathcal{U}^0.$$

L'application $z\mapsto\varphi_{0,0}$ est un homomorphisme $h:Z\to\mathcal{U}^0$ appelé *homomorphisme d'Harish-Chandra.*

2.8.2. Soit $\gamma:\mathcal{U}^0\to\mathcal{U}^0$ l'homomorphisme défini par $\gamma(K_i)=q_i\,K_i$. Si on voit $\varphi\in\mathcal{U}^0$ comme fonction sur P, on obtient :

$$\gamma(\varphi)(\lambda)=\varphi(\lambda+\rho)\quad,\quad\lambda\in P.$$

Le groupe Q_2^* agit sur $\mathcal{U}^0$ par : $\delta(K_\beta)=\delta(\beta)K_\beta$, $\delta\in Q_2^*$, $\beta\in Q$ et on obtient une action du produit semi-direct $W\times Q_2^*$ sur $\mathcal{U}^0$.

Soit $\widetilde{W}$ le sous-groupe de ce groupe engendré par les $\sigma W\sigma^{-1}$, $\sigma\in Q_2^*$ et $\mathcal{U}^{0\widetilde{W}}=\{\varphi\in\mathcal{U}^0\mid w(\varphi)=\varphi\ \forall w\in\widetilde{W}\}$.

THÉORÈME ([DC-K] [J-L1]).— *L'application $\gamma^{-1} \circ h$ envoie Z dans $\mathcal{U}^{0\widetilde{W}}$ et définit un isomorphisme de Z sur $\mathcal{U}^{0\widetilde{W}}$.*

2.8.3. Idée de la preuve

a) Le fait que $\gamma^{-1} \circ h(z)$ soit dans $\mathcal{U}^{0\widetilde{W}}$ pour z dans Z se prouve en considérant les inclusions entre modules de Verma.

b) De Concini et Kač construisent en fait l'isomorphisme inverse : partant de φ dans $\mathcal{U}^0$, on cherche $z \in Z$ sous la forme donnée en 2.8.1 avec $\varphi_{00} = \varphi$. On cherche donc à déterminer, par récurrence sur η, la matrice $\phi_\eta := (\varphi_{k,m})_{k,m \in \mathrm{Par}(\eta)}$. On considère le module de Verma $M(\lambda)^\delta$ et, pour chaque γ dans Q_+, la matrice de l'opérateur $\sum_{k,m \in \mathrm{Par}(\gamma)} F^k \, \varphi_{k,r} \, E^r$ dans la base $F^s v_\lambda$, $s \in \mathrm{Par}(\eta)$, du sous-espace de poids $\lambda - \eta$, soit $G_\gamma(\lambda)$. Utilisant que si $z \in Z$, il doit agir dans ce sous-espace par le scalaire $\varphi(\lambda)$, on obtient une équation entre fonctions à valeurs matricielles :

$$\phi_\eta \, H_\eta + \sum_{\gamma < \eta} G_\gamma = \varphi \, . \, I,$$

et les G_γ, $\gamma < \eta$ sont supposés connus.

Utilisant la formule en 2.7 pour le déterminant de H_η, on voit que si S désigne l'ensemble des produits d'éléments $[K_\beta; (\rho, \beta) - \frac{m}{2}(\beta, \beta)]$ pour $\beta \in Q_+$, $m \in \mathbf{N}^*$, les $\varphi_{k,m}$ cherchés sont nécessairement dans $S^{-1}\mathcal{U}$.

De Concini et Kač montrent alors que les $\varphi_{k,m}$ sont en fait dans $\mathcal{U}$ si et seulement si $\gamma^{-1}(\varphi) \in \mathcal{U}^{0\widetilde{W}}$. Des considérations de degré (en les K_i) montrent que $\varphi_{k,m}$ est nul pour k et m assez grands.

De plus, comme le z ainsi construit agit par un scalaire dans chaque module de Verma, il est dans le centre. On le notera z_φ.

2.8.4. Supposons $\varepsilon \in k^*$ non racine de l'unité. Alors pour $\varphi \in \mathcal{U}_\varepsilon^{0\widetilde{W}}$, on peut "spécialiser" l'élément z_φ construit ci-dessus et on obtient, avec des notations évidentes, un isomorphisme d'Harish-Chandra

$$\gamma_\varepsilon^{-1} \circ h_\varepsilon : Z_\varepsilon \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_\varepsilon^{0\widetilde{W}}.$$

2.8.5. *Remarque : Complète réductibilité des représentations de dimension finie de $\mathcal{U}_\varepsilon$*

En utilisant la proposition donnée en 2.3, il s'agit de montrer que le caractère d'un module de plus haut poids de dimension finie est donné par la formule de H. Weyl.

On peut recopier l'argument donné dans [Ro3] pour $\mathcal{U}$ car 2.8.4 donne le critère d'Harish-Chandra sur les caractères infinitésimaux dès que ε n'est pas une racine de l'unité, et on connaît grâce à 2.5, remarque iv), les caractères des modules de Verma.

2.8.6. Considérons par exemple le cas $\mathcal{G} = \mathrm{sl}(2)$. Alors l'élément central $C = \frac{Kq+K^{-1}q^{-1}}{(q-q^{-1})^2} + FE$, introduit par Jimbo dans [J2], engendre le centre de $\mathcal{U}$.

2.8.7. Utilisant la structure quasitriangulaire de $\mathcal{U}_h$ (on va revenir plus en détail là-dessus au n° suivant), Drinfeld a construit dans [D5] des analogues des éléments de Casimir quadratiques. Voici comment.

Supposons pour commencer que (A, R) est une algèbre de Hopf quasitriangulaire, et $R = \sum a_i \otimes b_i$. Posons $u = \sum S(b_i)\, a_i$. Alors $uS(u) = S(u)u$ est dans le centre de A, et le carré de l'antipode S^2 dans A est l'automorphisme intérieur défini par u.

Supposons de plus $A = \mathcal{U}_h$. Alors S^2 est aussi l'automorphisme intérieur défini par $\exp(h\rho)$, où on voit ρ comme élément de la sous-algèbre de Cartan grâce à l'accouplement (,).

Ainsi $\exp(-h\rho)u = u\exp(-h\rho)$ est dans le centre de $\mathcal{U}_h$, et Drinfeld montre qu'il agit, dans tout $\mathcal{U}_h$-module de plus haut poids λ, par multiplication par : $\exp\left[-\frac{h}{2}(\lambda, \lambda + 2\rho)\right]$.

3. LA R-MATRICE UNIVERSELLE POUR $\mathcal{U}_h$

Dans ce numéro, on adopte la définition de Drinfeld et on se propose d'expliquer la construction de la R-matrice universelle. La formule a été obtenue pour sl(2) par Drinfeld, puis pour sl(N) dans [Ro2], et enfin le cas général est dû à Kirillov-Reshetikhin [K-R3], Levendorskii-Soibelman [L-S1].

Ceci repose sur la construction du double quantique indiquée ci-dessous.

$\mathcal{U}_h$ (ou sa sous-algèbre de Hopf topologique $\mathcal{U}_h\, b_+$ engendrée h-adiquement par les E_i, H_i, $1 \leq i \leq n$) est ce que Drinfeld appelle une *QUE-algèbre*, c'est-à-dire une algèbre de Hopf topologique sur $k[[h]]$, munie de la topologie h-adique, qui est un $k[[h]]$-module topologiquement libre et dont la "limite classique" A/hA est isomorphe à une algèbre enveloppante universelle sur k.

On peut définir le dual d'une QUE-algèbre dans la catégorie des QUE-algèbres, et c'est en ce sens qu'on l'entendra ci-dessous. Tous les produits tensoriels sont complétés au sens h-adique.

3.1. THÉORÈME ET DÉFINITION (Drinfeld [D2]).— *Soient A une algèbre de Hopf et A^0 l'algèbre de Hopf duale munie de la comultiplication opposée. Alors, il existe une unique algèbre de Hopf quasitriangulaire (cf. définition* 1.3*) $(D(A), R)$ telle que :*

(i) *$D(A)$ contient A et A^0 comme sous-algèbres de Hopf.*

(ii) *R est l'image de l'élément canonique de $A \otimes A^0$ par le plongement $A \otimes A^0 \to D(A) \otimes D(A)$.*

(iii) *L'application linéaire $A \otimes A^0 \to D(A)$, $a \otimes b \mapsto ab$, est un isomorphisme de cogèbres.*

3.2. La méthode de construction de R consiste à déduire la structure quasitriangulaire de $\mathcal{U}_h$ de celle du double de $\mathcal{U}_h\, b_+$: on montre que $(\mathcal{U}_h\, b_+)^0$ est isomorphe, comme QUE-algèbre, à $\mathcal{U}_h\, b_-$ (la sous-algèbre de Hopf topologique engendrée h-adiquement par les F_i, H_i pour $1 \leq i \leq n$), et que ceci permet de construire un épimorphisme d'algèbres de Hopf $\mathcal{D}(\mathcal{U}_h\, b_+) \to \mathcal{U}_h$. La R-matrice universelle de $\mathcal{U}_h$ est alors l'image par celle de $\mathcal{D}(\mathcal{U}_h\, b_+)$.

3.3. La formule de Drinfeld [D2] pour sl(2) est (avec $q = e^{-\frac{h}{2}}$)

$$R = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^2)^n}{[n]!} q^{-\frac{n(n-1)}{2}} E^n \otimes F^n\Big) \operatorname{Exp}\big(\frac{h}{4} H \otimes H\big)$$

$$= \operatorname{Exp}\big(\frac{h}{4} H \otimes H\big) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^2)^n}{[n]!} q^{-\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\big(\operatorname{Exp}\big(\frac{h}{2} H\big) . E\big)^n \otimes \big(\operatorname{Exp}\big(-\frac{h}{2} H\big) . F\big)^n .$$

3.4. Cas général

Notons que l'on peut construire, comme en 2.5, des bases à la Poincaré-Birkhoff-Witt pour $\mathcal{U}_h\, b_+$ ou $\mathcal{U}_h\, b_-$, via des automorphismes T_i.

Pour établir la dualité entre $\mathcal{U}_h\, b_+$ et $\mathcal{U}_h\, b_-$ et calculer l'élément canonique, on peut partir d'une telle base pour $\mathcal{U}_h\, b_+$ et chercher la base duale. Ceci nécessite de connaître $\Delta(E_\beta)$ pour chaque β dans R_+. Or, on a déjà dit que les automorphismes d'algèbre T_i ne préservent pas la structure de cogèbre!

Cependant, en se fondant sur une autre interprétation des T_i, Kirillov-Reshetikhin et Levendorskii-Soibelman (voir aussi [So2] [So3] [So-V]) ont obtenu la formule suivante :

3.4.1. *Lemme* ([K-R3] [L-S1]).— *Pour tout x dans $\mathcal{U}_h$, on a :*

$$\Delta(T_i(x)) = \widetilde{R}(i)^{-1} \left[(T_i \otimes T_i)\, \Delta(x)\right] \widetilde{R}(i)$$

où

$$\widetilde{R}(i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q_i^2)^n}{[n]_{d_i}!} q_i^{-\frac{n(n-1)}{2}} \big(\operatorname{Exp}\big(\frac{h}{2} d_i H_i\big) E_i\big)^n \otimes \big(\operatorname{Exp}\big(\frac{-h}{2} d_i H_i\big) F_i\big)^n .$$

L'idée est de considérer le produit croisé de $\mathcal{U}_h$ par l'action du groupe de tresses et d'implémenter les automorphismes T_i dans chaque représentation de $\mathcal{U}_h$.

Soit τ l'antiautomorphisme d'algèbre défini par $\tau(E_i) = F_i$, $\tau(F_i) = E_i$, $\tau(H_i) = H_i$.

Pour sl(2), si ρ est une représentation de dimension finie (*i.e.*, ici, dans un $k[[h]]$-module libre de type fini), alors $\rho \circ \tau \circ S$ est isomorphe à la contragrédiente, et Kirillov et Reshetikhin construisent, dans chaque représentation irréductible de dimension finie, un opérateur qui implémente $\tau \circ S$.

Notons que ceci revient à se donner une certaine forme linéaire w sur l'espace des coefficients des représentations de dimension finie $(\mathcal{U}_h)^*_{\text{res}}$ (dual restreint).

Utilisant les relations entre les coefficients de Clebsch-Gordan pour le produit tensoriel de deux représentations irréductibles et l'image de la R-matrice dans ce même produit tensoriel, ils en déduisent :

$$\Delta(w) = R^{-1}\, w \otimes w.$$

L'élément implémentant l'automorphisme T est alors $\breve{w} = w \operatorname{Exp}\left(\frac{h}{8} H^2\right)$. Vaksman et Soibelman construisent directement la forme linéaire $\breve{w}$ comme coefficient d'une certaine représentation de dimension infinie de $(\mathcal{U}_h)^*_{\text{res}}$.

Dans le cas général, soit $\mathcal{U}_{h,i}$ la sous-algèbre de Hopf de $\mathcal{U}_h$ engendrée par E_i, F_i, H_i (isomorphe à $\mathcal{U}_h\,\mathrm{sl}(2)$). Composant la surjection naturelle $(\mathcal{U}_h)^*_{\text{res}} \to (\mathcal{U}_{h,i})^*_{\text{res}}$ avec la forme linéaire $\breve{w}$ ci-dessus, on obtient des formes linéaires $\breve{w}_i$, et on montre que la conjugaison par $\breve{w}_i$ coïncide sur $\mathcal{U}_h$ avec l'automorphisme T_i. (Cette conjugaison a un sens dans le dual de $(\mathcal{U}_h)^*_{\text{res}}$.)

De la formule ci-dessus pour $\Delta(w)$, on déduit immédiatement le lemme et on a de plus construit le produit croisé évoqué au-dessus comme sous-algèbre du dual de $(\mathcal{U}_h)^*_{\text{res}}$.

3.4.2. On obtient alors que la duale de la base à la Poincaré-Birkhoff-Witt de $\mathcal{U}_h\, b_+$ est, à un scalaire près, la base à la Poincaré-Birkhoff-Witt de $\mathcal{U}_h\, b_-$, et la méthode du double quantique donne :

THÉORÈME ([K-R3], [L-S1]).— *On a*

$$R = \prod_{\alpha \in R_+} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q_\alpha^2)^n}{[n]_\alpha!}\, q_\alpha^{-\frac{n(n-1)}{2}}\, E_\alpha^n \otimes F_\alpha^n \Big) . \operatorname{Exp}\Big(\frac{h}{2} \sum_{i,j} B_{ij}\, H_i \otimes H_j\Big),$$

où le produit est effectué suivant l'ordre total de R_+ donné par la décomposition réduite de w_0, $q_\alpha = q_i$ si α est dans l'orbite de α_i sous l'action du groupe de Weyl et (B_{ij}) est la matrice inverse de la matrice $(d_i\, a_{ij})$.

4. THÉORIE QUANTIQUE DES INVARIANTS

Revenons à l'algèbre $\mathcal{U}_\varepsilon$, avec $k = \mathbf{C}$, ε non racine de l'unité.

Supposons que (a_{ij}) soit la matrice de Cartan d'une algèbre de Lie simple classique (*i.e.* de type A, B, C, D). La représentation fondamentale de plus haut poids ω_1 est donnée par les mêmes formules que dans le cas classique (avec la traduction évidente pour les $K_i^{\pm 1}$).

L'image de la R-matrice dans cette représentation a été donnée par Jimbo bien avant que l'on connaisse la R-matrice universelle ([J1] ; en fait, il donne même les formules pour R avec paramètre spectral et on obtient R constante par un procédé de limite convenable). Notons-la encore R.

Par exemple, pour (a_{ij}) de type A_N, on a (E_{ij} désignant les unités matricielles) :

$$R = \varepsilon \sum_{i=1}^{N+1} E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{i \neq j} E_{ij} \otimes E_{ji} + (\varepsilon - \varepsilon^{-1}) \sum_{j > i} E_{jj} \otimes E_{ii}.$$

On peut alors considérer les puissances tensorielles de la représentation fondamentale et étudier le commutant de $\mathcal{U}_\varepsilon$. Ce commutant contient toujours les translatées de R : $R_i = I \otimes \cdots \otimes I \otimes R \otimes I \cdots \otimes I$ (R agit dans les positions $(i, i+1)$), qui définissent une représentation du groupe des tresses de type A. Cette représentation se factorise à travers certaines algèbres de dimension finie et les R_i engendrent en fait tout le commutant.

DÉFINITIONS.— 1) *L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_p(\varepsilon)$ est la $\mathbf{C}$-algèbre associative et unitale engendrée par les éléments $g_1, \cdots, g_{p-1}$ et les relations :*

(H1) $$g_i\, g_j = g_j\, g_i \qquad |i-j| \geq 2$$

(H2) $$g_i\, g_{i+1}\, g_i = g_{i+1}\, g_i\, g_{i+1}$$

(H3) $$g_i^2 = (\varepsilon - 1)\, g_i + \varepsilon.$$

2) *L'algèbre de Birman-Murakami-Wenzl* ([B-W], [Mu]) *est la $\mathbf{C}$-algèbre $\mathcal{C}_p(r, \varepsilon)$ associative et unitale engendrée par les éléments $g_1, \cdots, g_{p-1}$, supposés inversibles, et les relations :*

(H1), (H2) *comme ci-dessus*

définissant e_i *par :* $(\varepsilon - \varepsilon^{-1})(1 - e_i) = g_i - g_i^{-1}$

(R1)
$$e_i\, g_i = r^{-1}\, e_i$$

$$e_i\, g_{i-1}^{\pm 1}\, e_i = r^{\pm 1}\, e_i.$$

Ces deux algèbres peuvent être munies de traces ayant la propriété dite de Markov ([Jo], [Re1], [Tu], [We]) et jouent un rôle important dans la théorie des invariants polynomiaux d'entrelacs (polynôme HOMFLY pour la première et polynôme de Kauffman pour la deuxième).

Le résultat suivant est dû à Jimbo pour (a_{ij}) de type A ([J3]) et à Reshetikhin pour (a_{ij}) de type B, C ou D ([Re1]).

THÉORÈME.— (i) *Soit* (a_{ij}) *de type* A *et* (ρ, V) *la représentation fondamentale de* $\mathcal{U}_\varepsilon$. *Alors les opérateurs* εR_i $(1 \leq i \leq p-1)$, *agissant dans* $V^{\otimes p}$, *y définissent une représentation de l'algèbre de Hecke* $\mathcal{H}_p(\varepsilon^2)$, *et les images de* $\mathcal{H}_p(\varepsilon^2)$ *et* $\mathcal{U}_\varepsilon$ *dans* $\mathrm{End}(V^{\otimes p})$ *sont exactement commutant l'une de l'autre.*

(ii) *Soit* (a_{ij}) *de type* B, C *ou* D, *et* (ρ, V) *la représentation fondamentale de* $\mathcal{U}_\varepsilon$. *Alors les opérateurs* R_i $(1 \leq i \leq p-1)$, *agissant dans* $V^{\otimes p}$, *y définissent une représentation de l'algèbre* $\mathcal{C}_n(r, \varepsilon^2)$ *avec* $r = \varepsilon^{2n}$ *si* (a_{ij}) *est de type* B_n, $r = -\varepsilon^{(2n-1)/2}$ *si* (a_{ij}) *est de type* D_n, $r = -\varepsilon^{-(2n+1)}$ *si* (a_{ij}) *est de type* C_n.

Les images de $\mathcal{C}_p(r, \varepsilon^2)$ *et* $\mathcal{U}_\varepsilon$ *dans* $\mathrm{End}(V^{\otimes p})$ *sont, dans chaque cas, exactement commutant l'un de l'autre.*

5. GROUPES QUANTIQUES COMPACTS DE MATRICES

Ici $k = \mathbf{C}$, ε n'est pas une racine de l'unité.

On a déjà évoqué plus haut l'algèbre de Hopf $(\mathcal{U}_h)^*_{\mathrm{res}}$ des coefficients des représentations de dimension finie. On peut y penser comme au substitut de l'algèbre des fonctions régulières sur le groupe algébrique complexe correspondant. Dans la situation classique, c'est exactement l'algèbre des fonctions représentatives sur le groupe compact associé, et cette algèbre est dense dans la C^*-algèbre des fonctions continues sur le groupe compact.

5.1. Woronowicz a introduit les groupes quantiques compacts de matrices comme suit ([W1] [W2]) :

DÉFINITION.— *Un groupe quantique compact de matrices est la donnée d'une C^*-algèbre A et d'une matrice $N \times N$ d'éléments de A : $u = (u_{ij})$ satisfaisant aux conditions suivantes :*

(i) *La sous-algèbre involutive $\mathcal{A}$ engendrée par les éléments u_{ij} est dense dans A.*

(ii) *Il existe un morphisme de C^*-algèbres $\Delta : A \to A \otimes A$ tel que :*

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_k u_{ik} \otimes u_{kj}.$$

(iii) *u est inversible et il existe une application linéaire antimultiplicative $S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, telle que :*

$$S(S(a^*)^*) = a \qquad \forall a \in \mathcal{A},$$

et la matrice $(S(u_{ij}))$ est inverse de u.

Woronowicz a montré, dans ce cadre, l'existence et l'unicité d'une mesure de Haar (*i.e.* d'un état $h \in A^*$, tel que $h.\eta = \eta.h = \eta(1).h$ pour tout $\eta \in A^*$) [W2].

Il a développé la théorie générale des représentations (unitaires) de dimension finie (*i.e.* des $\mathcal{A}$-comodules) et obtenu une caractérisation à la Tannaka-Krein de cette catégorie [W3].

Ceci permet, à partir des duaux $(\mathcal{U}_\varepsilon)^*_{\text{res}}$, $\varepsilon > 0$, de construire des groupes quantiques compacts de matrices ([Ro4], [So2], [An]).

L'algèbre $\mathcal{U}_\varepsilon$ agit alors par "opérateurs différentiels tordus" dans l'algèbre $\mathcal{A}$.

Les représentations de l'algèbre $\mathcal{A}$ correspondante sont étudiées en détail dans [So1, So2, L-S].

5.2. Ces groupes quantiques ont donné un cadre géométrique à la théorie des q-analogues des fonctions spéciales, en particulier des polynômes orthogonaux. Par exemple, les "q-petits polynômes de Jacobi" apparaissent naturellement comme coefficients matriciels des représentations unitaires irréductibles du groupe quantique SU(2), et les coefficients de Clebsch-Gordan s'expriment en terme des q-polynômes de Hahn.

Les équations aux différences finies satisfaites par ces polynômes sont données par l'action de l'opérateur de Casimir 2.8.6.

La mesure de Haar s'exprime grâce à l'intégrale de Jackson de q-dénombrement, et les relations d'orthogonalité des polynômes s'interprètent comme celles des coefficients de représentations par rapport à la mesure de Haar.

Voir, par exemple, [K-K], [Koo], [K-R2], [MMNNU], [So-V].

6. SPÉCIALISATION ARITHMÉTIQUE (OU RESTREINTE)

Dans ce numéro, ℓ est un entier impair, premier avec tous les coefficients de la matrice de Cartan.

$k = \mathbf{Q}$, et on pose $\mathcal{A} = \mathbf{Z}[q, q^{-1}]$.

Rappelons (*cf.* 2.5) que l'on dispose de bases à la Poincaré-Birkhoff-Witt de la $\mathcal{A}$-algèbre $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$.

Pour toute $\mathcal{A}$-algèbre A, on peut appliquer $\otimes_{\mathcal{A}} A$ et obtenir une A-algèbre $\mathcal{U}_A$, en particulier pour $A = \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Q}$, où q agit par 1.

Soit $\mathcal{B}$ l'anneau quotient de $\mathcal{A}$ par l'idéal engendré par le ℓ-ième polynôme cyclotomique. On dispose des $\mathcal{B}$-algèbres $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\pm}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{0}$.

De même, si l'on considère le quotient B de $\mathbf{Q}[q, q^{-1}]$ par ce même polynôme cyclotomique ($\mathcal{B} \subset B$), on obtient $\mathcal{U}_B$, $\mathcal{U}_B^{\pm}$, $\mathcal{U}_B^{0}$.

Notons encore $\overline{U}_{\mathbf{Q}}$ l'algèbre enveloppante sur $\mathbf{Q}$ de la $\mathbf{Q}$-algèbre de Lie simple associée à (a_{ij}), et $\overline{E}_i$, $\overline{F}_i$, $\overline{H}_i$ ses générateurs satisfaisant aux relations habituelles. Soit $\overline{U}_{\mathbf{Z}}$ sa $\mathbf{Z}$-forme de Kostant, engendrée par les puissances divisées : $\overline{E}_i^{(N)} = \frac{E_i^N}{N!}$, $\overline{F}_i^{(N)} = \frac{F_i^N}{N!}$ pour $1 \leq i \leq n$, $N \geq 0$.

Si p est un nombre premier impair, soit $\mathbf{F}_p$ le corps à p éléments. $\overline{U}_{\mathbf{F}_p} = \overline{U}_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_p$ est l'hyperalgèbre du groupe algébrique simple sur $\mathbf{F}_p$ associé à (a_{ij}).

6.1. On a $K_i^{2\ell} = 1$ dans $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ ou $\mathcal{U}_B$ et les K_i^{ℓ} sont centraux. On notera $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$

et $\widetilde{\mathcal{U}}_B$ les quotients respectifs par l'idéal bilatère engendré par les $K_i^\ell - 1$, $1 \leq i \leq n$.

De même K_i est central dans $\mathcal{U}_{\mathbf{Z}}$ ou $\mathcal{U}_{\mathbf{Q}}$ et on définit les algèbres $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{Z}}$, $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{Q}}$.

PROPOSITION ([L4], [L5]).— (i) *$\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{Q}}$ et $\overline{U}_{\mathbf{Q}}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{Z}}$ et $\overline{U}_{\mathbf{Z}}$) sont isomorphes comme algèbres de Hopf.*

(ii) *Supposons $\ell = p$. On peut identifier $\mathcal{B}/(q-1)\mathcal{B}$ à $\mathbf{F}_p$, ce qui fait de $\mathbf{F}_p$ une $\mathcal{B}$-algèbre, et former $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{F}_p} = \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_p$. Alors $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{F}_p}$ et $\overline{U}_{\mathbf{F}_p}$ sont isomorphes comme algèbres de Hopf.*

6.2. Soit $\overline{u}$ la sous-algèbre de $\overline{U}_{\mathbf{F}_p}$ engendrée par $\overline{E}_i$, $\overline{F}_i$, $1 \leq i \leq n$. C'est une algèbre de Hopf de dimension $p^{2\nu+n}$ sur $\mathbf{F}_p$. L'idéal bilatère de $\overline{U}_{\mathbf{F}_p}$ engendré par le noyau de l'augmentation de $\overline{u}$ n'est autre que le noyau de l'application de Frobenius $\mathrm{Fr} : \overline{U}_{\mathbf{F}_p} \to \overline{U}_{\mathbf{F}_p}$ (transposée de l'application de Frobenius usuelle sur l'algèbre de coefficients du groupe simple sur $\mathbf{F}_p$) : $\mathrm{Fr}\,(\overline{E}_i^{(N)}) = \overline{E}_i^{(N/p)}$ si p divise N et 0 sinon ; $\mathrm{Fr}\,(\overline{F}_i^{(N)}) = \overline{F}_i^{(N/p)}$ si p divise N et 0 sinon.

Considérons parallèlement la $\mathcal{B}$-sous-algèbre u de $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ engendré par E_i, F_i, K_i, $1 \leq i \leq n$, et son quotient $\widetilde{u}$ par l'idéal bilatère engendré par les $K_i^\ell - 1$. Alors $\widetilde{u}$ est un $\mathcal{B}$-module libre de rang $\ell^{2\nu+n}$.

Nous allons voir qu'elle admet une interprétation analogue à $\overline{u}$ en termes d'une "application de Frobenius en caractéristique nulle".

6.3. L'application de Frobenius en caractéristique nulle (Lusztig [L5])

THÉORÈME.— *Il existe un unique morphisme de B-algèbres $\widetilde{\mathrm{Fr}} : \mathcal{U}_B \to \overline{U}_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} B$ tel que :*

$$\widetilde{\mathrm{Fr}}(E_i^{(N)}) = \overline{E}_i^{(N/\ell)} \qquad \text{si } \ell \text{ divise } N \quad , \quad 0 \text{ sinon}$$

$$\widetilde{\mathrm{Fr}}(F_i^{(N)}) = \overline{F}_i^{(N/\ell)} \qquad \text{si } \ell \text{ divise } N \quad , \quad 0 \text{ sinon}$$

$$\widetilde{\mathrm{Fr}}(K_i) = 1.$$

Il se restreint en un morphisme de $\mathcal{B}$-algèbres

$$\widetilde{\mathrm{Fr}} : \mathcal{U}_{\mathcal{B}} \to \overline{U}_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{B}$$

et se factorise à travers les quotients $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$ et $\widetilde{\mathcal{U}}_{B}$.

Soit u' la B-sous-algèbre de $\widetilde{\mathcal{U}}_B$ engendrée par E_i, F_i, K_i pour $1 \leq i \leq n$, et u'^{+} sa B-sous-algèbre engendrée par les E_i.

La preuve de l'existence de $\widetilde{\mathrm{Fr}}$ repose sur une interprétation de $\widetilde{\mathcal{U}}_B^+$ comme "produit croisé" de u'^{+} par l'algèbre enveloppante $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{Q}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}} B$ agissant sur u'^{+} via certaines dérivations. Plus précisément : soit δ_i (resp. δ_i') la dérivation de $\mathcal{U}_B$ définie par : $\delta_i(x) = E_i^{(\ell)}\, x - x\, E_i^{(\ell)}$ (resp. $\delta_i'(x) = F_i^{(\ell)}\, x - x\, F_i^{(\ell)}$).

Alors δ_i laisse u et u^+ stables, δ_i' laisse u et u^- stables.

On montre alors qu'il existe une unique structure de B-algèbre sur $(\mathcal{U}_{\mathbf{Q}}^+ \otimes B) \otimes_B u'^{+}$, qui coïncide avec les structures connues sur $\mathcal{U}_{\mathbf{Q}}^+ \otimes B$ et u'^{+} et telle que : $E_i\, x = x\, E_i + \delta_i(x)$, pour tout x dans u'^{+}. Cette algèbre est isomorphe à $\mathcal{U}_B^+$ par un isomorphisme γ envoyant $E_i \in \mathcal{U}_{\mathbf{Q}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}} B$ sur $E_i^{(\ell)} \in \mathcal{U}_B^+$ et $y \in u'^{+}$ sur lui-même. $\widetilde{\mathrm{Fr}}$ est alors défini sur $\mathcal{U}_B^+$ en utilisant γ^{-1} et en envoyant $(\mathcal{U}_{\mathbf{Q}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}} B) \otimes_B u'^{+}$ sur $\mathcal{U}_{\mathbf{Q}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}} B$ grâce à l'augmentation de u'^{+}.

6.4. Le noyau de $\widetilde{\mathrm{Fr}} : \mathcal{U}_{\mathcal{B}} \to \overline{U}_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{B}$ n'est autre que l'idéal bilatère engendré par l'idéal d'augmentation de l'algèbre de Hopf $\widetilde{u}$ introduite en 6.2.

6.5. Supposons ici $\ell = p$.

Appliquons le foncteur $\otimes_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_p$ à $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$ et $\overline{U}_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{B}$. Par 6.1, on obtient $\overline{U}_{\mathbf{F}_p}$ pour chacun des deux, et $\widetilde{\mathrm{Fr}}$ devient l'application de Frobenius de 6.2.

De plus, $\widetilde{u} \otimes_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_p$ est isomorphe à $\overline{u}$ comme algèbre de Hopf sur $\mathbf{F}_p$.

Soit $\widetilde{u}' = \widetilde{u} \otimes_{\mathcal{B}} B$.

PROPOSITION (Lusztig [L4]).— (i) *Les $\widetilde{u}'$-modules simples sont paramétrés par $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$.*

(ii) *Si M est un $\widetilde{u}'$-module simple, alors il contient un $\mathcal{B}$-réseau M_0 qui est un $\widetilde{u}$-sous-module et tel que $M_0 \otimes_{\mathcal{B}} \mathbf{F}_p$ ait pour quotient le $\overline{u}$-module simple de même paramètre que M dans $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$.*

Lusztig conjecture en fait que $\overline{u}$ et $\widetilde{u}$ ont des théories des représentations identiques (pour p pas trop petit). En particulier, le $\overline{u}$-module simple associé à M ci-dessus devrait avoir la même dimension que M.

6.6. Revenons à ℓ non nécessairement premier et considérons la catégorie $\mathcal{C}$ des $\mathcal{U}_B$-modules de dimension finie, sur lesquels les K_i^ℓ agissent par 1 (on peut toujours se ramener à ce cas). (Voir Lusztig [L2]).

6.6.1. Les objets simples sont classifiés par les poids dominants. En effet, si λ est un poids dominant, on dispose du $\mathcal{U}$-module simple $L(\lambda)$ de dimension finie sur $\mathbf{Q}(q)$ et d'un vecteur de plus haut poids v. Soit $L(\lambda)_\mathcal{A}$ le sous-$\mathcal{U}_\mathcal{A}$-module engendré par v et $N(\lambda) = L(\lambda)_\mathcal{A} \otimes_\mathcal{A} B$. C'est un $\mathcal{U}_B$-module qui a un unique quotient simple, $\mathcal{L}(\lambda)$. L'application $\lambda \mapsto \mathcal{L}(\lambda)$ est une bijection de P_+ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets simples de $\mathcal{C}$.

6.6.2. Si M est un $\mathcal{U}_B$-module dans $\mathcal{C}$ et $\lambda \in P$, $\lambda = \sum k_i\omega_i$, Lusztig définit son sous-espace de poids λ par

$$M_\lambda = \left\{ v \in M \mid K_i v = q_i^{k_i} v \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} K_i \\ \ell \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} k_i \\ \ell \end{bmatrix}_{q_i} v \quad \forall i = 1, \cdots, n \right\}.$$

M est somme de ses sous-espaces de poids et si $M = N(\lambda)$, la dimension des sous-espaces de poids est donnée par la formule d'H. Weyl.

Ces dimensions, pour $\mathcal{L}(\lambda)$, ne sont pas connues.

De façon très analogue à ses conjectures pour les modules rationnels simples sur les groupes algébriques simples sur un corps algébriquement clos de caractéristique non nulle, Lusztig a conjecturé une formule pour les dimensions des sous-espaces de poids de $\mathcal{L}(\lambda)$, en terme des polynômes de Kazhdan-Lusztig du groupe de Weyl affine associé à (a_{ij}) ([L2]).

6.7. On est en fait ramené au cas où les coordonnées k_i du poids dominant λ sont telles que $0 \leq k_i \leq \ell - 1$ grâce à un analogue du théorème du produit tensoriel de Steinberg (Lusztig [L2]).

En effet, un poids dominant λ s'écrit de façon unique $\lambda = \lambda' + \ell\lambda''$ avec λ'' dominant et les coordonnées de λ' comprises entre 0 et $\ell - 1$. Alors $\mathcal{L}(\lambda) \simeq \mathcal{L}(\lambda') \otimes \mathcal{L}(\ell\lambda'')$ comme $\mathcal{U}_B$-module. En fait u' agit trivialement dans $\mathcal{L}(\ell\lambda'')$ et la représentation de $\mathcal{U}_B$ dans $\mathcal{L}(\ell\lambda'')$ se factorise à travers l'application de Frobenius $\widetilde{\mathrm{Fr}} : \mathcal{U}_B \to \overline{U}_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} B$, si bien que la structure des sous-espaces de poids de $\mathcal{L}(\ell\lambda'')$ est connue. Par ailleurs, la restriction de $\mathcal{L}(\lambda')$ à u' reste irréductible, et tout u'-module irréductible sur lequel les K_i^ℓ agissent par 1 est obtenu une fois et une seule comme une telle restriction.

6.8. La théorie des représentations de $\mathcal{U}_B$ est étudiée en détail dans [A-P-W1], [A-P-W2], [A-W], et [P-W] pour le cas où (a_{ij}) est de type A.

Andersen, Polo et Wen introduisent une "algèbre de coordonnées" pour $\mathcal{U}$, qui est un $\mathbf{Z}[q]$-module libre, et l'utilisent pour développer une théorie générale de l'induction. En particulier, ils obtiennent des analogues du théorème de Serre, du théorème d'annulation de Kempf pour les caractères dominants et de la formule des caractères de Demazure, et définissent des filtrations à la Jantzen. Ils vérifient la conjecture de Lusztig lorsque le système de racines est de rang 2 et lorsque (a_{ij}) est de type A_3.

Je renvoie à leurs articles pour plus de précisions.

7. SPÉCIALISATION NON RESTREINTE

Les résultats de ce numéro sont dûs à De Concini et Kač [DC-K].

$k = \mathbf{C}$, ε est une racine primitive ℓ-ième de l'unité. On pose $\ell' = \ell$ si ℓ est impair et $\ell' = \frac{1}{2}\ell$ si ℓ est pair. On suppose que $\ell' > \max\{d_i\}$.

7.1. Les éléments $E_\alpha^{\ell'}$, $F_\alpha^{\ell'}$, $K_\beta^{\ell'}$ satisfont aux relations suivantes :

$$E_\alpha^{\ell'} E_\beta = \varepsilon^{-(\alpha,\beta)\ell'} E_\beta E_\alpha^{\ell'} \quad , \quad F_\alpha^{\ell'} F_\beta = \varepsilon^{(\alpha,\beta)\ell'} F_\beta F_\alpha^{\ell'}$$

$$E_\alpha^{\ell'} F_\beta = F_\beta E_\alpha^{\ell'} \quad , \quad F_\alpha^{\ell'} E_\beta = E_\beta F_\alpha^{\ell'}$$

$$K_\beta^{\ell'} E_\alpha = \varepsilon^{(\alpha,\beta)\ell'} E_\alpha K_\beta^{\ell'} \quad , \quad K_\beta^{\ell'} F_\alpha = \varepsilon^{-(\alpha,\beta)\ell'} F_\alpha K_\beta^{\ell'} .$$

Par conséquent, les éléments E_α^ℓ, F_α^ℓ, K_β^ℓ ($\alpha \in R_+$, $\beta \in Q$) sont dans le centre Z_ε de $\mathcal{U}_\varepsilon$ et, dans le module de Verma $M(\lambda)$, $F_\alpha^{\ell'} v_\lambda$ engendre un sous-module de plus haut poids propre, pour chaque $\alpha \in R_+$.

On définit le $\mathcal{U}_\varepsilon$-module diagonal $\overline{M}(\lambda)$ comme le quotient de $M(\lambda)$ par le sous-module engendré par tous les $F_\alpha^{\ell'} v_\lambda$, $\alpha \in R_+$.

Il est immédiat que les $F_{\beta_1}^{m_1} \cdots F_{\beta_\nu}^{m_\nu} v_\lambda$, où $0 \leq m_i < \ell'$ forment une base sur $\mathbf{C}$ de $\overline{M}(\lambda)$.

De plus, en considérant le déterminant de la forme hermitienne contravariante (que l'on peut spécialiser lorsque $|\varepsilon| = 1$), on voit que si $\lambda(K_\beta^\ell)^2 \neq 1$ pour tout β dans R_+, alors $\overline{M}(\lambda)$ est irréductible.

7.2. Pour chaque α dans R_+, soit $x_\alpha = E_\alpha^\ell$, $y_\alpha = F_\alpha^\ell$ et pour β dans Q, $z_\beta = K_\beta^\ell$. On s'intéresse à la sous-algèbre Z_0 de Z_ε engendrée par ces éléments, et à ses sous-algèbres Z_0^+, Z_0^-, Z_0^0 engendrées respectivement par les x_α, y_α et z_β. On pose $z_i = z_{\alpha_i}$. Z_0^0 est l'algèbre des polynômes de Laurent en z_i, z_i^{-1}.

PROPOSITION.— (i) $Z_0 = Z_0^+ \otimes Z_0^0 \otimes Z_0^-$.

(ii) Z_0^+ *(resp.* Z_0^-*) est une algèbre de polynômes en les* x_α *(resp.* y_α*),* $\alpha \in R_+$.

(iii) $\mathcal{U}_\varepsilon$ *est un* Z_0*-module libre de base* $F^k K_1^{m_1} \cdots K_n^{m_n} E^r$*, où*

$$0 \leq m_i < \ell \quad , \quad 0 \leq k_j < \ell \quad , \quad 0 \leq r_j < \ell$$

(iv) $\mathcal{U}_\varepsilon^\pm \cap Z_\varepsilon = Z_0^\pm$.

(v) Z_0 *est invariante par les automorphismes* T_i.

7.3. $\mathcal{U}_\varepsilon$ est donc un Z_0-module nœthérien, par conséquent son sous-module Z_ε est finiment engendré sur Z_0, donc est entier sur Z_0. Par le théorème de la base de Hilbert, Z_ε est une algèbre finiment engendrée.

On peut donc considérer son spectre Spec Z_ε, *i.e.* la variété algébrique affine des homomorphismes d'algèbre de Z_ε vers $\mathbf{C}$. De même pour Z_0. On a : $\operatorname{Spec} Z_0 \simeq \mathbf{C}^{2\nu} \times (\mathbf{C}^*)^n$ (non canoniquement).

Soit Rep $\mathcal{U}_\varepsilon$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de dimension finie sur $\mathbf{C}$ de $\mathcal{U}_\varepsilon$. On a une suite d'applications canoniques

$$\operatorname{Rep} \mathcal{U}_\varepsilon \xrightarrow{X} \operatorname{Spec} Z_\varepsilon \xrightarrow{\tau} \operatorname{Spec} Z_0,$$

où X associe à chaque représentation irréductible son caractère central et τ est induite par l'inclusion $Z_0 \subset Z_\varepsilon$. Comme Z_ε est entière sur Z_0, τ est finie et surjective (théorème de Cohen-Seidenberg). X est surjective car si $\chi \in \operatorname{Spec} Z_\varepsilon$ et si I^χ est l'idéal de $\mathcal{U}_\varepsilon$ engendré par le noyau de χ, l'algèbre $\mathcal{U}_\varepsilon^\chi = \mathcal{U}_\varepsilon / I^\chi$ n'est pas réduite à $\{0\}$ (lemme de Nakayama).

7.4. On va utiliser la théorie des algèbres associatives de dimension finie pour déterminer la dimension maximale des représentations irréductibles de $\mathcal{U}_\varepsilon$ et le degré de τ.

Rappelons que $\mathcal{U}_\varepsilon$ n'a pas de diviseurs de 0. On peut donc considérer le corps des fractions $Q(Z_\varepsilon)$ de Z_ε et $Q(\mathcal{U}_\varepsilon) := Q(Z_\varepsilon) \otimes_{Z_\varepsilon} \mathcal{U}_\varepsilon$. C'est une algèbre à division, de dimension finie sur son centre. Soit F un sous-corps commutatif maximal de $Q(\mathcal{U}_\varepsilon)$: il contient nécessairement $Q(Z_\varepsilon)$ et si m est sa dimension sur $Q(Z_\varepsilon)$, alors la dimension de $Q(\mathcal{U}_\varepsilon)$ sur $Q(Z_\varepsilon)$ est m^2 et $F \otimes_{Q(Z_\varepsilon)} \mathcal{U}_\varepsilon$ est isomorphe à l'algèbre des matrices $m \times m$ sur F. On appellera m le degré de $\mathcal{U}_\varepsilon$.

Ce qui précède permet de considérer le polynôme caractéristique, la trace tr, la norme d'un élément de $\mathcal{U}_\varepsilon$ et la forme bilinéaire $(x, y) = \operatorname{tr}(xy)$. Comme $\mathcal{U}_\varepsilon$ est intégralement clos, Z_ε l'est aussi et les coefficients du polynôme caractéristique d'un élément de $\mathcal{U}_\varepsilon$ sont dans Z_ε. On définit l'idéal discriminant de $\mathcal{U}_\varepsilon$ comme l'idéal (non nul) de Z_ε engendré par les éléments $\det((u_i, u_j), 1 \leq i, j \leq m^2)$, où $u_1, \cdots u_{m^2}$ sont dans $\mathcal{U}_\varepsilon$. L'ensemble des zéros de cet idéal est une sous-variété fermée propre $\mathcal{D}$ de $\operatorname{Spec} Z_\varepsilon$ appelée sous-variété discriminante.

On peut alors énoncer le résultat principal.

THÉORÈME.— *Soient ℓ un entier impair, $\ell > \max\{d_i\}$ et ε une racine primitive ℓ-ième de l'unité.*

(i) *$\operatorname{Spec} Z_\varepsilon$ est une variété algébrique affine normale et l'application $\tau : \operatorname{Spec} Z_\varepsilon \to \operatorname{Spec} Z_0$ est finie de degré ℓ^n.*

(ii) *si $\chi \in \operatorname{Spec} Z_\varepsilon \backslash \mathcal{D}$, alors $X^{-1}(\chi)$ consiste en une unique (classe de) représentations irréductibles de $\mathcal{U}_\varepsilon$, de dimension ℓ^ν.*

7.5. Voici les étapes de la démonstration.

Utilisant les techniques d'algèbres associatives de dimension finie, De Concini et Kač commencent par montrer que, si χ n'est pas dans $\mathcal{D}$, alors l'algèbre $\mathcal{U}_\varepsilon^\chi$ (notation 7.3) est isomorphe à $M_m(\mathbf{C})$, et que si χ est dans $\mathcal{D}$, alors la dimension de $\mathcal{U}_\varepsilon^\chi$ est supérieure ou égale à m^2 mais la dimension de chacune de ses représentations irréductibles est strictement plus petite que m.

Il s'agit donc de déterminer m et le degré de τ.

Rappelons que l'on dispose des représentations diagonales $\overline{M}(\lambda)$, de dimension ℓ^ν et que si $\lambda(z_\alpha^2) \neq 1\ \forall\alpha \in R_+$, alors $\overline{M}(\lambda)$ est irréductible. Fixons un tel λ.

Soit $H_0 \subset \operatorname{Spec} Z_0$ défini par $x_\alpha = 0$, $y_\alpha = 0$ et $z_\alpha^2 \neq 1$. Alors $\tau \circ \chi(\overline{M(\lambda)}) \in H_0$, et l'image réciproque par $\tau \circ \chi$ de cet élément contient ℓ^n éléments. Par ailleurs, $\dim_{Q(Z_0)} Q(\mathcal{U}_\varepsilon) = \ell^{2\nu+n}$ (proposition 7.2 (iii)), donc $\ell^{2\nu+n} = m^2.\deg\tau$, et $m \geq \ell^\nu$.

On va introduire un groupe d'automorphismes G d'une complétion $\widehat{\mathcal{U}_\varepsilon}$ de $\mathcal{U}_\varepsilon$, qui agit dans $\operatorname{Rep}\mathcal{U}_\varepsilon$, $\operatorname{Spec} Z_\varepsilon$, $\operatorname{Spec} Z_0$ (X et τ étant équivariantes) et tel que l'orbite GH_0 contienne un ouvert métrique non vide de $\operatorname{Spec} Z_0$. (Cette orbite est formée des images de représentations diagonales irréductibles, tordues par G, de dimension ℓ^ν. Chaque point de cette orbite a exactement ℓ^n antécédents.)

On en déduit alors $\deg\tau \geq \ell^n$, d'où $\deg\tau = \ell^n$ et $m = \ell^\nu$.

La construction de G se fait ainsi (il faut, ici, que ℓ soit impair) :

a) Rappelons que, dans la spécialisation à la Lusztig, on a introduit des dérivations données par le commutateur par les analogues des puissances divisées. On peut bien entendu considérer de telles dérivations pour l'algèbre $\mathcal{U}$ sur $\mathbf{C}(q)$, et il est très remarquable que ces dérivations descendent à $\mathcal{U}_\varepsilon$.

Notons e_α, f_α, $k_{\pm\alpha}$ les dérivations associées à $E_\alpha^{(\ell)}$, $F_\alpha^{(\ell)}$, $K_{\pm\alpha}^\ell/[\ell]_{d_\beta}!$, et posons $e_i = e_{\alpha_i}$, $f_i = f_{\alpha_i}$. Alors, si $\alpha = w\,\alpha_i$, $w \in W$, on a $e_\alpha = T_w\, e_i\, T_w^{-1}$, $f_\alpha = T_w\, f_i\, T_w^{-1}$, et e_i, f_i, $k_{\pm\beta}$ sont donnés par des formules explicites.

b) On considère l'algèbre de Lie $\widehat{\mathcal{G}}$ sur Z_0 de dérivations de $\mathcal{U}_\varepsilon$ engendrée par les e_α, f_α, $k_{\pm\alpha}$. Elle est normalisée par les T_i et Z_0 est invariante par $\widehat{\mathcal{G}}$.

c) Afin de pouvoir envisager le groupe d'automorphismes correspondant, il est commode de compléter Z_0 ainsi : $\widehat{Z}_0$ est l'algèbre des séries formelles en x_α, y_α, ($\alpha \in R_+$), z_i et z_i^{-1}, qui convergent vers une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}^{2\nu} \times (\mathbf{C}^*)^n$. On pose $\widehat{\mathcal{U}}_\varepsilon = \widehat{Z}_0 \otimes_{Z_0} \mathcal{U}_\varepsilon$ et $\widehat{Z}_\varepsilon = \widehat{Z}_0 \otimes_{Z_0} Z_\varepsilon$.

Alors, pour tout $t \in \mathbf{C}$, les séries $\exp te_\alpha$, $\exp tf_\alpha$, $\exp tk_\beta$ convergent vers des automorphismes (sur $\mathbf{C}$) de l'algèbre $\widehat{\mathcal{U}}_\varepsilon$, et on peut considérer le sous-groupe G du groupe des automorphismes de $\widehat{\mathcal{U}}_\varepsilon$ engendré par les automorphismes $\exp te_\alpha$, $\exp tf_\alpha$, $\exp tk_\alpha$, $\alpha \in R_+$.

$\widehat{Z}_\varepsilon$ et $\widehat{Z}_0$ sont invariantes par G, si bien qu'il agit par transformations holomorphes sur $\operatorname{Spec} Z_\varepsilon$ et $\operatorname{Spec} Z_0$.

d) De formules explicites pour l'action de e_α, f_α dans Z_0, on déduit que l'orbite GH_0 contient un ouvert métrique non vide de $\operatorname{Spec} Z_0$.

7.6. L'action de G sur $\operatorname{Spec} Z_0$ est étudiée davantage dans [DC-K-P].

7.7. Les représentations irréductibles de dimension maximale évoquées au théorème 7.4 ont été explicitées pour (a_{ij}) de type A, dans [Ar], [Ar-Ch1], [DJMM3]. Voir aussi [Ar-Ch2], [DJMM1], [DJMM2], [DJMM4].

ADDENDUM

Entre le moment où ce texte a été rédigé et celui de l'exposé oral, D. Kazhdan et G. Lusztig ont établi dans "Affine Lie algebras and quantum groups", Intern. Math. Research Notes **2** (1991), 21-29, une équivalence de catégories tensorielles entre une catégorie de représentations d'une algèbre de Lie affine et la catégorie des représentations de dimension finie d'une algèbre enveloppante quantifiée.

Ceci implique, grâce aux travaux de L. Casian et S. Kumar sur les conjectures de Kazhdan-Lusztig pour les représentations de niveau négatif des algèbres de Kač-Moody affines, la conjecture de Lusztig sur le caractère des modules simples d'une algèbre enveloppante quantifiée à une racine de l'unité (voir 6.6.2).

BIBLIOGRAPHIE

[A-G-S] L. ALVAREZ-GAUMÉ, C. GOMEZ, G. SIERRA - *Quantum group interpretation of some conformal field theories*, prépublication CERN.

[A-P-W1] H.H. ANDERSEN, P. POLO et WEN K. - *Representations of quantum algebras*, Invent. Math. **104** (1991), 1-60.

[A-P-W2] H.H. ANDERSEN, P. POLO et WEN K. - *Injective modules for quantum algebras*, à paraître dans Amer. J. Math.

[A-W] H.H. ANDERSEN, WEN K. - *Representations of quantum algebras : the mixed case*, prépublication Aarhus Universitet 1991, n° 5.

[An] N. ANDRUSKIEWITSH - *Some exceptional compact matrix pseudo-groups*, prépublication École Polytechnique.

[Ar] D. ARNAUDON - *Periodic and flat irreducible representations of* $\mathrm{SU}(3)_q$, Comm. Math. Phys. **134** (1990), 523-537.

[Ar-Ch1] D. ARNAUDON, A. CHAKRABARTI - *Periodic and partially periodic representations of* $\mathrm{SU}(N)_q$, à paraître dans Comm. Math. Phys.

[Ar-Ch2] D. ARNAUDON, A. CHAKRABARTI - *Flat periodic representations of* $\mathcal{U}_q(\mathcal{G})$, prépublication École Polytechnique A023-1190.

[B] O. BABELON - *Extended conformal algebra of Yang-Baxter equation*, Phys. Lett. **B125** (1988), 523-529.

[Ba1] R.J. BAXTER - *Partition function of the eight-vertex lattice model*, Ann. Phys. **70** (1972), 193-228.

[Ba2] R.J. BAXTER - *Exactly solved models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London, 1982.

[B-S] V.V. BAZHANOV, Y.G. STROGANOV - *Chiral Potts models as a descendant of the six vertex model*, J. Stat. Phys. **51** (1990), 799-817.

[B-M-L] A.A. BEILINSON, R. MAC PHERSON, G. LUSZTIG - *A geometric setting for the quantum deformation of* GL_n, Duke Math. J. **61** (1990).

[Be] D. BERNARD - *Vertex operator representations of the quantum affine algebra* $\mathcal{U}_q(\mathrm{Br}^{(1)})$, Lett. Math. Phys. **17** (1989), 239-245.

[B-W] J. BIRMAN, H. WENZL - *Braids, link polynomials and a new algebra*, Trans. AMS **313** (1989), 249-273.

[Ca] P. CARTIER - *Développements récents sur les groupes de tresses ; applications à l'algèbre et à la topologie*, Sém. Bourbaki, exp. n° 716, Astérisque **189-190** (1991), 17-67.

[C-P1] V. CHARI, A. PRESSLEY - *Quantum affine algebras*, à paraître dans Comm. Math. Phys. (1991).

[C-P2] V. CHARI, A. PRESSLEY - *Yangians and R-matrices*, L'Enseignement Math. **36** (1990), 267-302.

[C-P3] V. CHARI, A. PRESSLEY - *Fundamental representations of Yangians and rational R-matrices*, à paraître dans J. für reine und angewandte Mathematik.

[Ch1] J. CHEREDNIK - *Quantum groups as hidden symmetries of classical representation theory*, Proceed. of 17th Int. Conf. on diff. geom. methods in theoretical physics, World Scient. (1989), 47.

[Ch2] J. CHEREDNIK - *A new interpretation of Gelfand-Tzetlin bases*, Duke Math. J. **54** (1987), 563.

[C-G] E. CREMMER, J.-L. GERVAIS - *The quantum group structure associated with non linearly extended Virasoro algebras*, Comm. Math. Phys. **134** (1990), 619.

[DJMM1] E. DATE, M. JIMBO, K. MIKI, T. MIWA - *New R-matrices associated with cyclic representations of* $\mathcal{U}_q(A_2^{(2)})$, prépublication RIMS **706** (1990).

[DJMM2] E. DATE, M. JIMBO, K. MIKI, T. MIWA - *R-matrix for cyclic representations of* $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathrm{sl}}(3, \mathbf{C}))$ *at* $q^3 = 1$, Phys. Lett. **A148** (1990), 45-49.

[DJMM3] E. DATE, M. JIMBO, K. MIKI, T. MIWA - *Cyclic representations of* $\mathcal{U}_q(\mathrm{sl}(n+1, \mathbf{C}))$ at $q^N = 1$, à paraître dans Public. RIMS.

[DJMM4] E. DATE, M. JIMBO, K. MIKI, T. MIWA - *Generalized chiral Potts models and minimal cyclic representations of* $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathrm{gl}}(n, \mathbf{C}))$, à paraître dans Comm. Math. Phys.

[DC-K] C. DE CONCINI, V.G. KAČ - *Representations of quantum groups at roots of 1*, Colloque Dixmier 1989, 471-506, Progress in Math. **92**, Birkhäuser (1990).

[DC-K-P] C. DE CONCINI, V.G. KAČ, C. PROCESI - *Quantum coadjoint action*, prépublication Scuola Normale Superiore Pisa, n° 95, 1991.

[D1] V.G. DRINFELD - *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Soviet Math. Dokl. **32** (1985), 254-258.

[D2] V.G.DRINFELD - *Quantum groups*, Proceedings ICM, Berkeley (1986), vol. 1, 798-820.

[D3] V.G. DRINFELD - *A new realization of Yangians and quantized affine algebras*, Soviet Math. Dokl. **36** (1988), 212-216.

[D4] V.G. DRINFELD - *Degenerate affine Hecke algebras and Yangians*, Funct. Anal. and Applic. **20** (1986), 58-60.

[D5] V.G. DRINFELD - *On almost cocommutative Hopf algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 321-342.

[D6] V.G. DRINFELD - *Quasi-Hopf algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 1419-1457.

[D-L] M. DYER, G. LUSZTIG - Appendice à [L5].

[Fa] L.D. FADDEEV - *Integrable models in* $(1+1)$*-dimensional quantum field theory*, Les Houches 1982, Elsevier Science Publishers (1984).

[F-R-T] L.D. FADDEEV, N.Y. RESHETIKHIN, L.A. TAKHTAJAN - *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 193-226.

[Fr] J. FRÖHLICH - *Statistics of fields, the Yang-Baxter equation and the theory of knots and links*, dans "Non Perturbative Quantum Field Theory", eds. G. 't Hooft et al., Plenum Press (1988).

[F-J] I. FRENKEL, N. JING - *Vertex representations of quantum affine algebras*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **85** (1988), 9373-9377.

[F-G-P] P. FURLAN, A. GANCHEV, V. PETKOVA - *Quantum groups and fusion rules multiplicities*, Nucl. Phys. **B343** (1990), 205-227.

[H] T. HAYASHI - *Q-analogues of Clifford and Weyl algebras. Spinor and oscillator representations of quantum enveloping algebras*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), 129-144.

[J1] M. JIMBO - *Quantum R-matrix for the generalized Toda system*, Comm. Math. Phys. **102** (1986), 537-547.

[J2] M. JIMBO - *A q-difference analogue of $U(\mathcal{G})$ and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63-69.

[J3] M. JIMBO - *A q-difference analogue of $U(\mathrm{gl}(N+1))$, Hecke algebra and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **11** (1986), 247-252.

[Jg] N. JING - *Twisted vertex representations of quantum affine algebras*, Invent. Math. **102** (1990), 663-690.

[Jo] V.F.R. JONES - *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Ann. Math. **126** (1987), 335-388.

[J-L1] A. JOSEPH, G. LETZTER - *Local finiteness of the adjoint action for quantized enveloping algebras*, à paraître dans J. of Algebra.

[J-L2] A. JOSEPH, G. LETZTER - *Separation of variables for quantized enveloping algebras*, prépublication.

[Ka] M. KASHIWARA - *Crystalizing the q-analogue of universal enveloping algebras*, prépublication RIMS ; *Bases cristallines*, CRAS Paris **311** (1990), 277.

[K-R1] A.N. KIRILLOV, N.Y. RESHETIKHIN - *Yangians and Bethe ansatz*, Lett. Math. Phys. **12** (1986), 199-208.

[K-R2] A.N. KIRILLOV, N.Y. RESHETIKHIN - *Representations of the algebra $U_q(\mathrm{sl}(2))$, q-orthogonal polynomials and invariant of links*, dans "Infinite dimensional Lie algebras and groups", ed. V.G. Kač, World Scientific, Singapore (1989).

[K-R3] A.N. KIRILLOV, N.Y. RESHETIKHIN - *q-Weyl group and a multiplicative formula for universal R-matrices*, Comm. Math. Phys. (1991).

[K-K] H.T. KŒLINK, T.H. KOORNWINDER - *The Clebsch-Gordan coefficients for the quantum group $\mathrm{SU}_\mu(2)$ and q-Hahn polynomials*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. **A92** (1989), 443-456.

[Koh] T. KOHNO - *Monodromy representations of braid groups and Yang-Baxter equations*, Ann. Inst. Fourier **37** (1987), 139-160 ; *Quantized universal enveloping algebras and braid groups*, prépublication.

[Koo] T.H. KOORNWINDER - *Representations of the twisted $\mathrm{SU}(2)$ quantum group and some q-hypergeometric orthogonal polynomials*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. **A92** (1989), 97-117.

[Ku-R] P.P. KULISH, N.Y. RESHETIKHIN - *The quantum linear problem for the sine-Gordan equation and higher representations*, J. Soviet Math. **23** (1983), n° 4.

[L-S1] S.Z. LEVENDORSKII, Y.S. SOIBELMAN - *Some applications of quantum Weyl group 1. The multiplicative formula for universal R-matrix for simple Lie algebras*, Journ. Geom. and Phys. **7** (1991), n° 4.

[L-S2] S.Z. LEVENDORSKII, Y.S. SOIBELMAN - *Algebras of functions on compact quantum groups, Schubert cells and quantum tori*, à paraître dans Comm. Math. Phys.

[L1] G. LUSZTIG - *Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras*, Adv. in Math. **70** (1988), 237-249.

[L2] G. LUSZTIG - *Modular representations and quantum groups*, Contemp. Math. **82** (1989), 59-77.

[L3] G. LUSZTIG - *On quantum groups*, J. Algebra **131** (1990), 466-475.

[L4] G. LUSZTIG - *Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized enveloping algebras*, Journ. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 257-296.

[L5] G. LUSZTIG - *Quantum groups at roots of 1*, Geom. Dedicata (1990).

[L6] G. LUSZTIG - *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, I : J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 447-498, II : Progress of Theor. Physics (à paraître).

[L7] G. LUSZTIG - *Introduction to quantized enveloping algebras*, prépublication.

[Ma] Y. MANIN - *Quantum groups and non-commutative geometry*, CRM Université de Montréal (1989).

[MMNNU] T. MASUDA, K. MIMACHI, Y. NAKAGAMI, M. NOUMI, K. UENO *Representations of the quantum group* $\mathrm{SU}_q(2)$ *and the little q-Jacobi polynomials*, J. Funct. Analysis.

[M-R] G. MOORE, N.Y. RESHETIKHIN - *A comment on quantum group symmetry in conformal field theory*, prépublication.

[Mu] J. MURAKAMI - *The Kauffman polynomial of links and representation theory*, Osaka J. Math. **24** (1987), 745-758.

[O] G.I. OLSHANSKII - *Extension of the algebra $U(\mathcal{G})$ for infinite dimensional classical Lie algebras $\mathcal{G}$ and the Yangians* $Y(\mathrm{gl}(m))$, Soviet Math. Dokl. **36** (1988), 569-573.

[P-W] B. PARSHALL, J.P. WANG - *Quantum linear groups*, Memoirs of AMS, vol. 89, n° 439 (1991).

[P-S] V. PASQUIER, H. SALEUR - *Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups*, prépublication.

[P-W] P. PODLES, S.L. WORONOWICZ - *Quantum deformations of Lorentz group*, Comm. Math. Phys. **130** (1990), 381-431.

[Re1] N.Y. RESHETIKHIN - *Quantized enveloping algebras, the Yang-Baxter equation and invariants of links* I *et* II, prépublications LOMI E-4-87 et E-17-87.

[Re2] N.Y. RESHETIKHIN - *Quasitriangular Hopf algebras and invariants of tangles*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 491-513.

[Re-S] N.Y. RESHETIKHIN, M. SEMENOV-TIAN-SHANSKI - *Central extensions of quantum current groups*, Lett. Math. Phys. **19** (1990), 133-143.

[Ri] C.M. RINGEL - *Hall algebras and quantum groups*, Invent. Math. **101** (1990), 583-592.

[R-A] P. ROCHE, D. ARNAUDON - *Irreducible representations of the quantum analogue of* SU(2), Lett. Math. Phys. **17** (1989), 295-300.

[Ro1] M. ROSSO - *Finite dimensional representations of the quantum analogue of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra*, Comm. Math. Phys. **117** (1988), 581-593.

[Ro2] M. ROSSO - *Analogue of PBW theorem and the universal R-matrix for* $\mathcal{U}_h\mathrm{sl}(N+1)$, Comm. Math. Phys. **124** (1989), 307-318.

[Ro3] M. ROSSO - *Analogues de la forme de Killing et du théorème d'Harish-Chandra pour les groupes quantiques*, Annales Scient. de l'École Norm. Sup. **23** (1990), 445-467.

[Ro4] M. ROSSO - *Algèbres enveloppantes quantifiées, groupes quantiques compacts de matrices et calcul différentiel non commutatif*, Duke Math. J. **61** (1990), 11-40.

[Ro5] M. ROSSO - *Groupes quantiques, représentations linéaires et applications*, Thèse Université Paris 7 (1990).

[Sk] E.K. SKLYANIN - *On an algebra generated by quadratic relations*, Uspekhi Mat. Nauk **40** (1985), n° 2.

[So1] Y. SOIBELMAN - *Algebra of functions on quantum groups* SU(n) *and Schubert cells*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **307** (1989), 41-45.

[So2] Y. SOIBELMAN - *Algebra of functions on a compact quantum group and its representations*, Algebra and Analysis **2** (1990), n° 1.

[So3] Y. SOIBELMAN - *Gelfand-Naimark states and quantum Weyl group for* SU(n), Funct. Anal. and Applic. **24** (1990), n° 3.

[So-V] Y. SOIBELMAN, L. VAKSMAN - *Algebra of functions on quantum group* SU(2), Funct. Anal. and Applic. **22** (1988), n° 3, 1-14.

[T] M. TAKEUCHI - *The q-bracket product and quantum enveloping algebras of classical type*, J. of Math. Soc. of Japan **42** (1990), 605-630.

[Ta] T. TANISAKI - *Harish-Chandra isomorphisms for quantum algebras*, prépublication.

[T-K] A. TSUCHIYA, Y. KANIE - *Vertex operators in two dimensional conformal field theory on* $\mathbf{P}^1$ *and monodromy representations of braid groups*, Adv. Stud. in Pure Math., Vol. 16, Academic Press, Boston (1988), 297-372 et ibidem, Vol. 19 (1989), 675-682.

[Tu] V.G. TURAEV - *The Yang-Baxter equation and invariants of links*, Invent. Math. **92** (1988), 527-553.

[Ve] J.-L. VERDIER - *Groupes quantiques (d'après V.G. Drinfel'd)*, Sém. Bourbaki, exp. n° 685, Astérisque **152-153** (1987), 305-319.

[We] H. WENZL - *Quantum groups and subfactors of type B, C and D*, Comm. Math. Phys. **133** (1990), 383-432.

[W1] S.L. WORONOWICZ - *Twisted* SU(2) *group. An example of non-commutative differential calculus*, Publ. RIMS **23** (1987), 117-181.

[W2] S.L. WORONOWICZ - *Compact matrix pseudogroups*, Comm. Math. Phys. **111** (1987), 613-655.

[W3] S.L. WORONOWICZ - *Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups, Twisted* SU(N) *group*, Invent. Math. **93** (1988), 35-76.

[Ym] H. YAMANE - *A Poincaré-Birkhoff-Witt theorem for quantized enveloping algebras of type* A_N, Publ. RIMS **25** (1989), 503-520.

[Yg] C.N. YANG - *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1312-1315.

Marc ROSSO

École Polytechnique
URA 169 du CNRS
Centre de Mathématiques
F-91128 PALAISEAU CEDEX

et

Miller Fellow
University of California
Department of Mathematics
University of California
BERKELEY, CA 94720 - USA