OLIVIER MATHIEU

# Bases des représentations des groupes simples complexes [d'après Kashiwara, Lusztig, Ringel et al.]

*Astérisque*, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki, exp. nº 743, p. 421-442

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__421_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 1991
43ème année, 1990-91, n° 743

# BASES DES REPRÉSENTATIONS DES GROUPES SIMPLES COMPLEXES [d'après Kashiwara, Lusztig, Ringel et al.]

par **Olivier MATHIEU**

## 0. INTRODUCTION

Soit $g$ une algèbre de Lie simple de dimension finie sur $\mathbf{C}$ et soit $V$ un $g$-module simple de dimension finie. Il est naturel de chercher à obtenir une base explicite et canonique de $V$. Cherchons à poser correctement ce problème. Soit $G$ le groupe des automorphismes de la structure $(g, V)$. La composante connexe $G^0$ de $G$ est le produit du groupe adjoint $Ad$ de $g$ par le groupe $\mathbf{C}^*$ des homothéties de $V$. Un tel groupe continu ne peut laisser stable une base de $V$. Il est donc nécessaire d'ajouter des données supplémentaires $\theta$ à la structure $(g, V)$ pour pouvoir espérer obtenir une base explicite $B$ de $V$. Une telle base $B$ mérite d'être appelée canonique si, d'une part, la donnée supplémentaire $\theta$ est uniquement définie (à un automorphisme près) et si, d'autre part, le sous-groupe $\Gamma$ de $G$ des automorphismes qui stabilisent $\theta$ permute les éléments de $B$. Ces conditions peuvent s'écrire $G = \Gamma \ltimes G^0$ et $\Gamma.B = B$.

Dans ce Séminaire, nous exposerons principalement les travaux de M. Kashiwara et de G. Lusztig. La donnée supplémentaire $\theta$ qui consiste essentiellement en une présentation de $g$ et la donnée d'un vecteur de plus haut poids $x$ de $V$ sera décrite dans le premier paragraphe. Puis nous donnerons les trois constructions de la base $B$ :

1) la construction élémentaire de Lusztig (voir §3),

2) la construction topologique (suivant Lusztig, §5),

3) la construction élémentaire de Kashiwara (ou base cristalline, §6).

La construction élémentaire de Lusztig utilise de manière cruciale la théorie des groupes quantiques (ou plus précisément la théorie des algèbres enveloppantes quantiques de Drinfeld et Jimbo). Elle est basée sur un théorème d'existence et d'unicité dont l'énoncé (mais non la preuve) est élémentaire. Avec la seule connaissance de ce théorème, il est certainement difficile d'imaginer à quoi ressemble cette base. La construction topologique, basée sur la théorie des représentations des carquois (rappelée au §2) est complètement explicite. Cette construction donne également des bases des représentations des groupes quantiques, mais elle n'utilise pas de manière essentielle la théorie quantique. La construction élémentaire de Kashiwara présente des points communs avec celle de Lusztig. Cependant, les preuves de Kashiwara sont tout à fait élémentaires.

Enfin, nous verrons que ces bases ont un bon comportement par produit tensoriel et sont liées à de nouvelles formules de multiplicités (voir §5 et §6). Par ailleurs, ces bases sont intéressantes pour la théorie des représentations des groupes algébriques en caractéristique finie.

Le problème de trouver des bases explicites de représentations des groupes simples est un problème classique qui a donné lieu à de très nombreuses contributions remarquables. Afin de contenir cet exposé dans un format raisonnable, il ne sera possible que de les mentionner très brièvement. Sans que cela soit un catalogue exhaustif, je voudrais mentionner les travaux de Hodge (bases pour $\mathrm{SL}(n)$), la théorie monomiale standard de Lakshmibai, Musili et Seshadri [LSM] (bases pour les groupes classiques), les réseaux de Gelfand-Tselin (pour $\mathrm{SL}(n)$), les bases combinatoires de de Concini et Kazhdan [CK] (pour $\mathrm{SL}(n)$), la construction de bonnes bases (Gelfand et Zelevinski pour $\mathrm{SL}(n)$ (voir [BZ]), Retah et Zelevinsky pour $\mathrm{Sp}(4)$, [M] en général), les constructions de bases pour les algèbres enveloppantes (Beilinson, Ginzburg [Gi], Lusztig, McPherson [BLM], Ringel) et les bases liées à la combinatoire de Kazhdan et Lusztig pour $\mathrm{SL}(n)$ (Grojnowsky et Lusztig).

Mentionnons également que les bases canoniques sont définies aussi pour les algèbres de Kač-Moody symétrisables. Rappelons que la recherche de bases explicites pour les représentations des algèbres affines avaient fait l'objet de travaux nombreux liés à la théorie des opérateurs de vertex (travaux de Frenkel, Kač, Kazhdan, Lepowsky, Misra, Primc, Wilson).

## 1. PRÉSENTATIONS DES ALGÈBRES DE LIE SIMPLES

Soit $I$ un graphe non orienté, c'est-à-dire la donnée d'un ensemble fini $I$ et d'un ensemble $A$ de paires d'éléments de $I$. Les éléments de $I$ sont appelés les sommets du graphe et les paires de $A$ les arêtes du graphe. Pour simplifier, nous supposerons désormais que le graphe $I$ est connexe. Introduisons une algèbre de Lie $g(I)$ engendrée par les éléments $e_i$, $f_i$ et $h_i$ (où $i$ parcourt $I$) et définie par les relations suivantes :

1) $[h_i, h_j] = 0$,

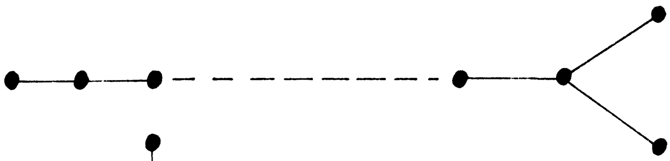
2) $[h_i, e_i] = 2.e_i$ et $[h_i, f_i] = -2.f_i$,

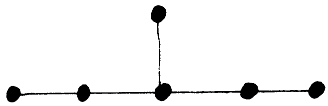
3) lorsque $i$ et $j$ sont distincts et $\{i, j\}$ n'est pas une arête, alors on a $[x, y] = 0$ si $x = e_i$, $h_i$ ou $f_i$ et $y = e_j$, $f_j$ ou $h_j$,

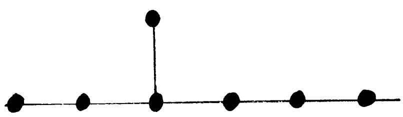
4) lorsque $i, j$ sont les deux sommets d'une arête, on a $[h_i, e_j] = -e_j$, $[h_i, f_j] = f_j$, $ad^2(e_i)(e_j) = 0$ et $ad^2(f_i)(f_j) = 0$, pour tout $i, j$ dans $I$.

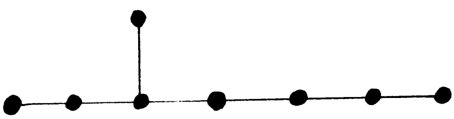
L'algèbre de Lie $g(I)$ est en général de dimension infinie. Elle est de dimension finie si et seulement si le graphe $I$ est de l'un des types suivants :

$A_n$ 

$D_n$ 

$E_6$ 

$E_7$ 

$E_8$ 

Ces graphes particuliers sont appelés graphes de Dynkin. Lorsque $I$ est de type $A_n$, l'algèbre de Lie $g(I)$ est isomorphe à sl$(n+1)$. Lorsque $I$ est de type $D_n$, l'algèbre de Lie $g(I)$ est isomorphe à so$(2n)$. Enfin, lorsque $I$ est de type $E_n$, pour $n = 6$, 7 ou 8, l'algèbre de Lie $g(I)$ est l'une des algèbres de Lie exceptionnelles de type $E$. La présentation précédente est appelée présentation de Serre. N'importe quel automorphisme $\tau$ du graphe $I$ induit un automorphisme encore noté $\tau$ de l'algèbre de Lie $g(I)$. Par cet automorphisme, les éléments $e_i$, $f_i$, $h_i$ sont envoyés sur les éléments $e_j$, $f_j$, $h_j$, si $j = \tau(i)$. Il est connu que les algèbres de Lie simples sur $\mathbf{C}$ sont classifiées par les paires $(I, \tau)$, où $I$ est un graphe de Dynkin et où $\tau$ est un automorphisme de $I$ ayant au moins un point fixe. La classification associe à la paire $(I, \tau)$ l'algèbre de Lie des points fixes de l'automorphisme $\tau$ de l'algèbre de Lie $g(I)$.

Pour simplifier, nous ne considérerons ici que le cas non tordu, c'est-à-dire le cas où l'automorphisme $\tau$ est l'identité. Cette restriction n'est pas essentielle car les bases canoniques seront invariantes sous $\tau$ dès que celui-ci stabilise la représentation donnée.

Par la théorie de Cartan et Weyl, les représentations simples de dimension finie de $g(I)$ sont classifiées par les fonctions de $I$ dans $\mathbf{N}$. Pour une telle fonction $v$, il existe une unique représentation simple $V = L(v)$ de dimension finie qui possède un vecteur non nul $x$ tel que $e_i.x = 0$ et $h_i.x = v(i).x$ pour tout élément $i$ de $I$. De plus, le vecteur $x$ est unique à un scalaire près. Le vecteur $x$ est appelé vecteur de plus haut poids.

Soit $g^+$ (respectivement $g^0$, $g^-$) la sous-algèbre de Lie de $g(I)$ engendrée par les éléments $e_i$ (respectivement par les éléments $h_i$, $f_i$) et soit $U^+$ (respectivement $U^0$, $U^-$) son algèbre enveloppante. Notons $U$ l'algèbre enveloppante de $g(I)$. Alors, on a :

$$g(I) = g^+ \oplus g^0 \oplus g^- \qquad \text{(décomposition triangulaire de Cartan)}$$
$$U = U^+ \otimes U^0 \otimes U^-.$$

Soit $d$ une application de $I$ dans $\mathbf{N}$. On dénote par $g_d^-$ le sous-espace de $g^-$ formé des combinaisons linéaires de crochets de $f_i$ où chaque élément $f_i$ apparaît avec la multiplicité $d(i)$ de sorte que l'on a une décomposition

$g^- = \oplus g_d^-$. Lorsque l'espace vectoriel $g_d^-$ est non nul, il est de dimension exactement 1, et $d$ est alors appelé une racine négative de $g(I)$. On note $\Phi^-$ l'ensemble des racines négatives. De même, on dénote par $U_d^-$ le sous-espace de $U^-$ formé des combinaisons linéaires de produits de $f_i$ où chaque élément $f_i$ apparaît avec la multiplicité $d(i)$, de sorte que l'on a une décomposition $U^- = \oplus U_d^-$. Notons $\Phi^+$ l'ensemble des fonctions $d : I \to \mathbf{Z}$ telles que $-d$ appartient à $\Phi^-$. Alors, on a de même $g^+ = \oplus_{d \in \Phi^+} g_d^-$. L'ensemble $\Phi^+$ est appelé ensemble des racines positives et on note $\Phi$ l'ensemble de toutes les racines.

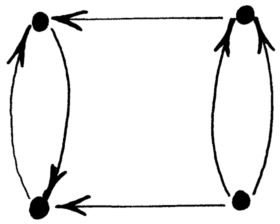
Définissons maintenant une application $\pi_v : U^- \to L(v)$ par la formule $\pi_v(u) = u.x$. Il résulte du théorème de Poincaré, Birkhoff et Witt que l'application $\pi_v$ est surjective. La base canonique de $L(v)$ construite par Lusztig provient d'une base de $U^-$. Plus précisément, Lusztig a construit une base canonique $B$ de $U^-$ qui satisfait à la propriété (*) suivante :

(*) Posons $B_v = \{u \in B \text{ tel que } \pi_v(u) \neq 0\}$. Alors, pour tout $v$, $\pi_v(B_v)$ est une base de $L(v)$.

Le travail de Lusztig consiste à décrire une base canonique $B$ de $U^-$ qui satisfait à la propriété (*). Le point essentiel est d'en donner une description explicite.

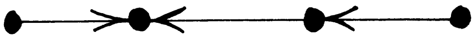
## 2. CARQUOIS

Un carquois $C$ est la donnée d'un quadruplet $(I, F, s, b)$ où $I$ et $F$ sont des ensembles et $s$ et $t$ sont des applications de $F$ dans $I$. Les éléments de $I$ sont appelés les sommets du carquois, les éléments de $F$ les flèches et, pour tout $f \in F$, $s(f)$ et $b(f)$ sont appelés la source et le but de la flèche $f$. Soit $k$ un corps. Une $k$-représentation $E$ du carquois est la donnée d'une collection de $k$-espace vectoriel $(E)_{i \in I}$ et pour chaque flèche $f$ une application linéaire $\theta(f) = E_{s(f)} \to E_{b(f)}$. Nous supposerons toujours que le carquois $C$ est fini et nous ne considérerons que des représentations de dimension finie. Par définition, la dimension de $E$ est la fonction $d : I \to \mathbf{N}$ donnée par $d(i) = \dim E_i$.



**Un exemple de carquois avec 4 sommets et 6 flèches**

Soit $(I, A)$ un graphe. Une orientation du graphe est la donnée de deux applications $s, b : A \to I$ telles que l'on ait $a = \{s(a), b(a)\}$ pour tout arête $a$ du graphe. Ainsi, un graphe orienté est un cas particulier de carquois.



**Un exemple d'orientation du graphe $A_4$**

Soit $C$ un carquois. On définit de manière naturelle la notion de morphisme de représentation. La catégorie $\mathrm{Rep}_k(C)$ des représentations (de dimension finie) du carquois $C$ est une catégorie abélienne. Une représentation $E$ du carquois est dite indécomposable si elle ne peut pas s'écrire comme la somme directe de deux représentations non nulles. Il est connu que toute représentation $E$ est somme directe de représentations indécomposables et une telle décomposition est unique, à isomorphisme près. On dit que le carquois $C$ est de type de représentation finie si $C$ n'admet qu'un nombre fini de représentations indécomposables. Rappelons le théorème de Gabriel.

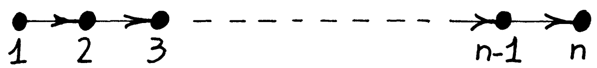
**THÉORÈME 2.1** (Gabriel).— *Le carquois $C$ est de type de représentation finie si et seulement si $C$ est un graphe de Dynkin orienté.*

De plus, il est possible de décrire dans ce cas toutes les représentations indécomposables de $C$.

**THÉORÈME 2.2** (Gabriel).— *Soit $C = (A, I)$ un graphe de Dynkin orienté et soit $d$ une fonction de $I$ dans* $\mathbf{N}$. *Si $d$ est la dimension d'une représentation indécomposable de $C$, alors $d$ est une racine négative de $g(I)$. Réciproquement, si $d$ est une racine positive de $g(I)$, alors $C$ admet une unique représentation indécomposable de dimension $d$.*

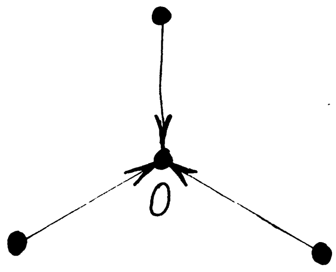
Ainsi, lorsque $C$ est le carquois d'un graphe de Dynkin orienté $I$, l'application $E \mapsto \dim E$ détermine une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentation indécomposable de $C$ sur l'ensemble des racines positives de $g(I)$.

*Exemple* 2.3.— Considérons l'orientation suivante du graphe de Dynkin $A_n$




Les racines négatives de $g(I)$ sont exactement toutes les fonctions non nulles $d : I \to \mathbf{N}$ dont les valeurs sont 0 ou 1 et dont le support $J = \{i \text{ tel que } d(i) \neq 0\}$ est connexe. Soit $d$ une telle fonction et soit $\{r, r+1, \cdots, s\}$ son support. L'unique représentation indécomposable de dimension $d$ est un espace vectoriel $E = \oplus E_i$ où les espaces vectoriels $E_i$ sont de dimension 1 si $i \in [r, s]$ et 0 sinon et la donnée d'injections $E_r \to E_{r+1} \cdots E_r \to E_{r+1}$.

*Exemple* 2.4.— Considérons l'orientation suivante du graphe de Dynkin $D_4$ :



La plus grande racine négative est la fonction $d$ telle que $d(0) = 2$ et que ses autres valeurs sont 1. La représentation indécomposable correspondante est la donnée d'un espace vectoriel $E_0$ de dimension 2 (correspondant au sommet 0) et de trois droites distinctes de $E_0$. C'est l'unique représentation indécomposable de dimension $d$ car il est connu que $\mathrm{GL}(2,k)$ agit trois fois transitivement sur la droite projective.

## 3. LA CONSTRUCTION ÉLÉMENTAIRE DE LUSZTIG

Dans ce paragraphe, nous allons décrire très brièvement la construction élémentaire de Lusztig. Cette section étant indépendante du reste de cet exposé, nous ne rappellerons pas toutes les définitions concernant les groupes quantiques, pour lesquelles nous pouvons renvoyer le lecteur à l'exposé de M. Rosso à ce Séminaire.

Soit $I$ un graphe de Dynkin. On lui associe une matrice de Cartan $A = (A_{i,j})$ par les règles suivantes. Les coefficients diagonaux $a_{i,i}$ sont égaux à 2. Les coefficients non diagonaux $a_{i,j}$ sont égaux à $-1$ si $i$ et $j$ sont les sommets d'une même arête et à 0 sinon. L'algèbre enveloppante quantique de Drinfeld et Jimbo est une algèbre associative $\mathbf{U}$ sur le corps $\mathbf{Q}(v)$ engendrée par des générateurs $E_i$, $F_i$, $K_i$ et $K_i^{-1}$ et complètement définie par les relations suivantes :

$$K_i K_j = K_j K_i \quad \text{et} \quad K_i K_i^{-1} = 1 \tag{1}$$

$$K_i E_j = v^{a_{i,j}} E_j K_i \quad \text{et} \quad K_i F_j = v^{-a_{i,j}} F_j K_i \tag{2}$$

$$E_i F_j - F_j E_i = \delta_{i,j}(K_i - K_i^{-1})/(v - v^{-1}) \tag{3}$$

$$E_i^2 E_j - (v+v^{-1}) E_i E_j E_i + E_j E_i^2 = 0 \text{ si } a_{i,j} = -1 \text{ et } E_j E_i = E_j E_i \text{ sinon} \tag{4}$$

$$F_i^2 F_j - (v+v^{-1}) F_i F_j F_i + F_j F_i^2 = 0 \text{ si } a_{i,j} = -1 \text{ et } F_j F_i = F_j F_i \text{ sinon.} \tag{5}$$

Soit $\sigma$ l'involution de la $\mathbf{Q}$-algèbre $\mathbf{U}$ qui envoie $E_i$ sur $E_i$, $F_i$ sur $F_i$, $K_i$ sur $K_i^{-1}$ et $v$ sur $v^{-1}$. On notera $\mathbf{U}^-$ la $\mathbf{Q}[v, v^{-1}]$-sous-algèbre de $\mathbf{U}$ engendrée par les éléments $F_i^{(N)}$ où $F_i^{(N)} = F_i^N/[N!]$ et $[N!] = \prod_{N \geq h \geq 1}(v^h - v^{-h})/v - v^{-1})$. Puis Lusztig définit certains automorphismes $T(i)$ de $\mathbf{U}$, pour chaque $i \in I$.

Soit $\omega$ le plus grand élément du groupe de Weyl $W$ de l'algèbre de Lie $g(I)$, et soit $N$ la longueur de $\omega$. Choisissons une décomposition réduite $r$ de $\omega$. Cela fournit une suite $i_1, \cdots, i_N$ d'éléments de $I$. Pour une suite $c_1, \cdots, c_N$ d'entiers positifs, Lusztig pose

$$F^c = F_{i_1} . T(i_1) F_{i_2} \cdots T(i_1) \cdots T(i_N) F_{i_N}.$$

Les éléments $F^c$ forment une base, dite de Poincaré, Birkhoff et Witt, de la $\mathbf{Q}[v, v^{-1}]$-algèbre $\mathbf{U}^-$. Comme cette base dépend du choix d'une décomposition réduite $r$ de $\omega$, cette base sera notée $B_r$. Soit $\mathcal{L}_r$ le $\mathbf{Q}[v^{-1}]$-module engendré par $B_r$.

**PROPOSITION 3.1** (Lusztig).— (1) *Le $\mathbf{Q}[v^{-1}]$-module $\mathcal{L}_r$, vu comme sous-espace de $\mathbf{U}^+$ est indépendant d'un choix d'une décomposition réduite. On pourra poser $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}$.*

(2) *Soit $\pi : \mathcal{L} \to v^{-1}\mathcal{L}$ la projection canonique. Alors $\pi(B_r)$ est une base $\beta$ de $\mathcal{L}/v^{-1}\mathcal{L}$ indépendante de la décomposition réduite $r$.*

Bien que l'énoncé du théorème suivant soit élémentaire, la preuve utilise la théorie des carquois.

**THÉORÈME 3.2** (Lusztig).— (1) *La restriction de $\pi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}/v^{-1}L$ induit un isomorphisme $\rho : \mathcal{L} \cap \sigma\mathcal{L} \to \mathcal{L}/v^{-1}\mathcal{L}$.*

(2) *Posons $\mathbf{B} = \rho^{-1}(\beta)$. Alors $\mathbf{B}$ est une base du $\mathbf{Q}[v^{-1}]$-module $\mathcal{L}$.*

Formellement, on obtient les relations définissant l'algèbre enveloppante de $g(I)$ en faisant $v = 1$ dans la présentation de l'algèbre enveloppante quantique de Jimbo et Drinfeld. Donc la base globale $\mathbf{B}$ de $\mathbf{U}^-$ définit une base $B$ de $U^-$.

## 4. LES BASES DE RINGEL

Soit $I$ un graphe de Dynkin. Choisissons une orientation de $I$, ce qui permet de lui associer un carquois $C$ (voir §2). Soit $k$ un corps et soit $\Omega$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $k$-représentations de $C$. Notons $\mathbf{Z}\Phi^-$ le $\mathbf{Z}$-module libre engendré par $\Phi^-$. Le théorème de Gabriel (voir §2) signifie que l'on a un isomorphisme naturel $\Omega \simeq \mathbf{Z}\Phi^-$. En particulier, $\Omega$ est indépendant de $k$. Notons $\mathbf{C}\Omega$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ avec base $\Omega$. Supposons maintenant que $k$ soit un corps fini avec $q$ éléments, et soit $V$, $V'$, $V'' \in \Omega$. Notons $g_{V,V'V''}$ le nombre de sous-représentations de $V$ qui sont isomorphes à $V$" et dont le quotient correspondant est isomorphe à $V'$. Ringel [Ri] a défini une structure d'algèbre associative sur $\mathbf{C}\Omega$ en posant :

$$V' \,.\, V'' = \sum_V g_{V,V'V''}\, V.$$

On notera que la somme ci-dessus est en fait finie. En effet, si le coefficient $g_{V,V'V''}$ est non nul, alors $\dim V = \dim V' + \dim V''$, de sorte que, pour $V'$ et $V''$ donnés, seulement un nombre fini de ces coefficients sont non nuls.

**THÉORÈME 4.1** (Ringel).— *Soient $V$, $V'$, $V'' \in \Omega$. Alors $g_{V,V'V''}$, vue comme une fonction de $q$, est un polynôme en $q$ à coefficients entiers.*

Ainsi, il est possible de définir une nouvelle structure d'algèbre associative sur $\mathbf{C}\Omega$ en posant :

$$V' \,.\, V'' = \sum_V g_{V,V'V''}(1)\, V.$$

Soit $i \in I$. Notons $F_i$ l'élément de $\Omega$ qui correspond à la racine simple $d_i$ définie par $d_i(j) = \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. Un calcul aisé prouve que l'on a :

| | |
|---|---|
| $[F_i, F_j] = 0$ | si $i, j$ ne sont pas les sommets d'une arête de $I$, |
| $\mathrm{ad}(F_i)^2\,(F_j) = 0$ | sinon. |

Donc, il existe un unique morphisme d'algèbre $R : U^- \to \mathbf{C}\Omega$ tel que $R(f_i) = F_i$.

**THÉORÈME 4.2** (Ringel).— *Le morphisme $R$ est un isomorphisme.*

Expliquons le principe de la preuve. Soit $d : I \to \mathbf{N}$ et choisissons un espace vectoriel $F$ muni d'une décomposition $F = \oplus F_i$ telle que l'on ait $\dim F_i = d(i)$. Posons $E_d = \oplus \mathrm{Hom}(F_i, F_j)$, où la somme porte sur les couples $(i,j)$ qui sont des arêtes orientées de $I$. Posons $G_d = \prod \mathrm{GL}(F_i)$. L'espace $E_d$ s'identifie à l'espace des représentations du carquois $C$ associé au graphe orienté $I$ et l'ensemble quotient $E_d/G_d$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations de dimension $d$. Il existe une relation d'ordre partiel sur les représentations de dimension $d$ : si $V$, $V'$ sont deux telles représentations, on pose $V \leq V'$ si l'orbite sous $G_d$ de $V$ dans $E_d$ est incluse dans l'adhérence de l'orbite de $V'$. La preuve de la surjectivité de $R$ repose sur une induction sur $d$ et sur l'ordre partiel précédemment défini (voir Lusztig [Lu1], section 5).

Il existe une application naturelle, la symétrisation, $\gamma : U^- \to S\,g^-$ uniquement définie par la condition $\gamma(x^n) = x^n$ (cette application est en fait définie pour n'importe quelle algèbre enveloppante). L'application $\gamma$ est un isomorphisme d'espace vectoriel. Notons $K(d)$ la fonction partition de Kostant, c'est-à-dire le nombre de manières d'écrire $d$ comme une somme à coefficients entiers positifs de racines négatives. Utilisant la symétrisation $\gamma$, on obtient $\dim U_d^- = K(d)$. Notons $\Omega_d$ le sous-ensemble de $\Omega$ formé des classes de représentations indécomposables. Comme les représentations indécomposables correspondent aux racines négatives (théorème de Gabriel), le nombre d'éléments de $\Omega_d$ est également $K(d)$. Ainsi, les espaces $\mathbf{C}\Omega_d$ et $U_d^-$ ont même dimension. Donc $R$ est un isomorphisme.

Ainsi, l'isomorphisme de Ringel identifie $U^-$ avec une algèbre $\mathbf{C}\Omega$ qui a une base naturelle, à savoir $\Omega$. Cette base n'est pas canonique au sens de Lusztig, car elle dépend du choix d'une orientation du graphe de Dynkin. La construction de Lusztig est une modification de la construction précédente, comme nous allons le voir au paragraphe suivant.

*Exemple* 4.3.— Calculons la base de Ringel dans le cas où $I$ est de type $A_1$ (cas où $I$ est réduit à un point). L'algèbre de Lie $g(I)$ est isomorphe à $\mathrm{sl}(2)$ et a pour base les éléments $e$, $f$ et $h$ (comme il n'y a ici qu'un seul indice, nous l'avons omis des notations). Pour chaque entier $d$, l'espace

$\Omega_d$ est réduit à un élément. Notons $F(d)$ l'élément de $U^-$ correspondant. Notons $g_{d,a,b}(q)$ le nombre de sous-espaces vectoriels de dimension $b$ dans $k^d$ dont le quotient est de dimension $a$. Ce nombre est toujours nul, sauf lorsque $d = a + b$, relation que nous supposerons vérifiée désormais. Alors $g_{d,a,b}(q)$ est le nombre de $k$-points de la Grassmanienne $G(d, b)$ des espaces vectoriels de dimension $b$ dans $k^d$. La décomposition de Bruhat est une décomposition de la variété $G(d, b)$ dont les strates sont isomorphes à des espaces vectoriels. On a donc $g_{d,a,b}(q) = \sum a_n q^n$ où $a_n$ est le nombre de strates de dimension $n$. Comme le nombre de strates de dimension $n$ est indépendant de la caractéristique, on voit dans ce cas que $g_{d,a,b}(q)$ est un polynôme en $q$. Les formules explicites pour les coefficients $a_n$ sont compliquées, mais il est connu que le nombre total de strates est $d!/a!b!$ (c'est le nombre d'éléments de $S_d/S_a \times S_b$). Donc on a $g_{d,a,b}(1) = d!/a!b!$. De là on déduit que la base de Ringel est formée des éléments $f^n/n!$.

*Remarque* 4.4.— Ici, nous avons spécialisé les polynômes de Ringel $g_{V,V'V''}(q)$ à $q = 1$. En fait, le théorème de Ringel est plus précis. Le théorème 4.1 permet de définir une structure d'algèbre sur $\mathbf{C}\Omega \otimes \mathbf{C}[q]$. Ringel a identifié cette algèbre à une sous-algèbre remarquable de l'algèbre enveloppante quantique de Jimbo et Drinfeld.

## 5. LA CONSTRUCTION TOPOLOGIQUE DE $B$

Dans ce paragraphe, on reprend les notations du paragraphe précédent. On suppose donné un graphe de Dynkin $I$ muni d'une orientation, et on note $C$ le carquois correspondant. La construction de $B$ dépend du choix d'une orientation, mais non la base elle-même. Ici, le corps de base est $\mathbf{C}$ et non un corps fini $k$. Soit $d : I \to \mathbf{N}$, et soit $r \in E_d$. Rappelons que le groupe $G_d$ agit sur $E_d$. Notons $G_d(r)$ le stabilisateur sous $G_d$ du point $r$. Il résulte de la simple connexité de $I$ que le groupe $G_d(r)$ est connexe. Soit $X$ la fermeture d'une orbite $O$ de $G_d$ dans $E_d$. Le complexe de cohomologie d'intersection $IC(X)$ est un faisceau pervers irréductible et $G_d$- équivariant de $E_d$. Réciproquement, il résulte de la finitude du nombre de $G_d$-orbites dans $E_d$ et de la connexité des stabilisateurs que tout faisceau pervers équivariant sur $E_d$ est la cohomologie d'intersection de la fermeture d'une orbite.

Notons $P_d$ l'ensemble des faisceaux pervers équivariants irréductibles de $E_d$, et posons $P = \coprod P_d$. Soit $\mathbf{C}P$ l'espace vectoriel de base $P$. Suivant Lusztig, il existe une structure naturelle d'algèbre associative sur $\mathbf{C}P$. Pour définir la multiplication, fixons $d$, $d'$, $d'' \in \mathbf{N}^I$, et considérons le diagramme suivant :

$$E_{d'} \times E_{d''} \xleftarrow{\beta} E' \xrightarrow{\beta'} E'' \xrightarrow{\beta''} E_d$$

défini comme suit. Rappelons que nous avons choisi une fois pour toutes des espaces vectoriels $F$, $F'$, $F''$, $I$-gradués, de dimension respectivement $d$, $d'$, $d''$. Un point de $E_d$ est par définition une représentation de $C$ sur $F$. Un point de $E''$ est la donnée d'une représentation de $C$ sur $F$ et d'une sous-représentation $V''$ de dimension $d''$. Un point de $E'$ est la donnée d'une représentation de $C$ sur $F$, d'une sous-représentation $V''$ de dimension $d''$ et de deux isomorphismes d'espaces vectoriels $\mu'' : V'' \to F''$ et $\mu' : F/V' \to F'$. Les applications $\beta$, $\beta'$, $\beta''$ sont naturelles. Le groupe $G_d \times G_{d'} \times G_{d''}$ agit naturellement sur les variétés du diagramme précédent et on a :

(a) l'application $\beta'$ est un fibré principal de groupe $G_{d'} \times G_{d''}$,

(b) l'application $\beta$ est une fibration localement triviale à fibre lisse,

(c) l'application $\beta''$ est propre.

Soit $\mathcal{P}' \in P_{d'}$, $\mathcal{P}'' \in P_{d''}$. Il provient des assertions (a) et (b) qu'il existe un faisceau pervers $\mathcal{Q}$ de $E''$ tel que $\beta'^{*}\mathcal{Q} = \beta^*(\mathcal{P}' \otimes \mathcal{P}'')$. Le théorème de Beilinson, Bernstein, Deligne et Gabber implique alors que l'on a

$$\beta''_* \mathcal{Q} = \oplus \mathcal{P} \otimes A_{\mathcal{P}},$$

où $\mathcal{P}$ parcourt $P_d$ et où les $A_{\mathcal{P}}$ sont des espaces vectoriels gradués. La multiplication de Lusztig sur $\mathbf{C}P$ est alors définie par la formule suivante :

$$\mathcal{P}' \,.\, \mathcal{P}'' = \sum \dim(A_{\mathcal{P}})\,\mathcal{P}.$$

Pour tout $i \in I$, notons encore $F_i$ l'unique élément de $P$ correspondant à la racine simple $d_i$.

**THÉORÈME 5.1** (Lusztig).— *Il existe un isomorphisme d'algèbres $L$ : $U^- \to \mathbf{C}P$, qui envoie les générateurs $f_i$ sur $F_i$.*

Comme l'algèbre $\mathbf{C}P$ a une base naturelle (à savoir $P$), le théorème précédent fournit une base $B$ de $U^-$. La preuve du théorème précédent repose sur des arguments similaires à ceux du théorème de Ringel. La preuve du théorème suivant est de nature complètement différente. Elle est fondée sur les résultats de Deligne sur la transformée de Fourier géométrique.

**THÉORÈME 5.2** (Lusztig).— *La base $B$ est canonique, i.e. elle ne dépend pas du choix d'une orientation du graphe de Dynkin $I$.*

La dimension d'un espace vectoriel est un entier positif. Le théorème suivant, qui est un corollaire immédiat de la formule définissant la multiplication dans $\mathbf{C}P$ montre que l'approche topologique est plus précise que l'approche élémentaire :

**THÉORÈME 5.3** (Lusztig).— *Le produit $b.b'$ de deux éléments de la base canonique $B$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs d'éléments de $B$.*

En fait, Lusztig prouve également un résultat analogue pour le coproduit [Lu3]. De plus, les espaces vectoriels $A_{\mathcal{P}}$ dans la formule définissant le produit sont $\mathbf{Z}$-gradués. Il est donc possible de définir une structure d'algèbre sur $\mathbf{C}P \otimes \mathbf{C}[q, q^{-1}]$. En fait, les résultats de Lusztig sont plus précis, car il identifie cette algèbre sur $\mathbf{C}[q, q^{-1}]$ avec une sous-algèbre remarquable de l'algèbre enveloppante quantique.

Soit $v : I \to \mathbf{N}$, et soit $x$ un vecteur de plus haut poids de $L(v)$. Soit $\pi_v : U^- \to L(v)$ l'application définie par la formule $\pi_v(u) = u.x$, pour $u \in U^-$. Il résulte du théorème de Poincaré, Birkhoff et Witt que l'application $\pi_v$ est surjective. Posons $B_v = \{u \in B \text{ tel que } \pi_v(u) \neq 0\}$, de sorte que $\pi_v(B_v)$ engendre l'espace vectoriel $L(v)$.

**THÉORÈME 5.4** (Lusztig).— *Pour tout $v$, $\pi_v(B_v)$ est une base de $L(v)$.*

Dans la suite de cet exposé, on notera encore $B_v$ la base $\pi_v(B_v)$. Soient $V$, $V'$ deux $g(I)$-modules simples de dimension finie. Le produit tensoriel $V \otimes V'$ est semi-simple. Décomposer ce produit tensoriel équivaut donc à déterminer l'espace $\mathrm{Hom}_{g(I)}(V \otimes V', L(v))$ pour tous les $v$. Il existe une unique fonction $u : I \to \mathbf{N}$ et un vecteur non nul $y$ de $V$ tel que $e_i.y = 0$ et $h_i.y = u(h_i).y$ pour tout $i \in I$ (le vecteur $y$, qui est un vecteur de plus haut poids, est unique à un scalaire près). De même, il existe une unique fonction $w : I \to \mathbf{Z}_-$ et un vecteur non nul $z$ de $V$ tel que $f_i.z = 0$ et $h_i.z = w(h_i).z$ pour tout $i \in I$ (le vecteur $z$, qui est dit "vecteur de plus bas poids" est unique à un scalaire près). Posons $L(v)[u+w,u]$ le sous-espace de $L(v)$ formé des éléments $m$ de $L(v)$ tels que $h_i.m = (u+w)(h_i).m$ et $(e_i)^{(u(h_i)+1)}.m = 0$. Le lemme suivant est bien connu :

*Lemme* 5.5 .— *L'application* $\mathrm{Hom}_{g(I)}(V \otimes V', L(v)) \to L(v)[u+w,u]$ *qui envoie* $\theta$ *sur* $\theta(y \otimes z)$ *(évaluation en* $y \otimes z$*) est un isomorphisme.*

On voit donc l'intérêt de trouver des bases $A$ des modules $L(v)$ telles que, pour tout $u : I \to \mathbf{N}$ et $w : I \to \mathbf{Z}_-$, $A \cap L(v)[u+w,u]$ soit une base de $L(v)[u+w,u]$. Par le lemme 5.5, de telles bases fournissent des décompositions des produits tensoriels. Une base $A$ qui vérifie la condition ci-dessus est appelée une bonne base. L'existence des bonnes bases en général est prouvée dans [M], mais avant les travaux de Lusztig la construction explicite de bonnes bases n'était connue que pour $\mathrm{SL}_n$ par de Concini et Kazhdan [DK].

**THÉORÈME 5.6** (Lusztig).— *La base* $B_v$ *est bonne.*

Enfin, Lusztig obtient une description combinatoire des ensembles $A \cap L(v)[u+w,u]$, ce qui lui permet de donner de nouvelles formules combinatoires pour les multiplicités des produits tensoriels et de décrire combinatoirement l'espace des covariants d'un produit tensoriel de trois modules.

## 6. BASES CRISTAL DE KASHIWARA ET GRAPHES COLORÉS

Soit $g$ une algèbre de Lie simple de dimension finie. Pour la simplicité de l'exposé, nous allons supposer que l'algèbre de Lie est l'une des algèbres $g(I)$ de la section 1. En fait, la théorie de Kashiwara est définie pour toute algèbre de Lie de Kač-Moody symétrisable, il n'y a pas de différence essentielle entre le cas particulier expliqué ci-dessous et le cas général. Dans [Ka1] [Ka2], Kashiwara donne la construction de bases de représentations simples de dimension finie de $g(I)$. Comme pour construction élémentaire de Lusztig, la construction de Kashiwara est basée de manière cruciale sur l'utilisation des algèbres enveloppantes quantiques de Drinfeld et Jimbo. Lusztig a d'ailleurs montré que les bases de Kashiwara et celles qu'il avait obtenues sont les mêmes [Lu2]. Il faut noter que les constructions et les preuves de Kashiwara sont élémentaires. Nous n'allons pas indiquer cette construction. En revanche, nous allons expliquer comment Kashiwara a utilisé ces bases pour donner une remarquable formule combinatoire pour décomposer les produits tensoriels de représentations (ces formules reposent sur une combinatoire complètement différente de la combinatoire des formules de Lusztig).

Un graphe coloré est la donnée :

1) d'un ensemble $G$, appelé ensemble de sommets,

2) d'un ensemble $A$ de paires d'éléments de $G$. L'ensemble $A$ est appelé ensemble des arêtes du graphe,

3) de deux applications, appelées source et but $s, b : A \to G$, telles que l'on ait $a = \{s(a), b(a)\}$ pour tout $a \in A$,

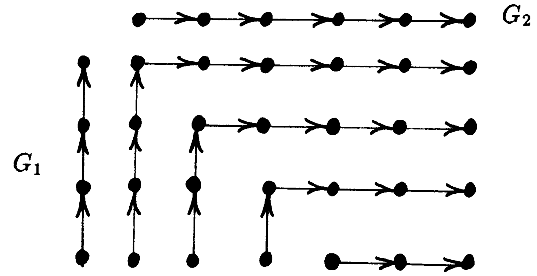
4) d'un ensemble $I$, dit ensemble de couleurs, et d'une application $c : A \to I$. Une arête $a$ est dite de couleur $i$ si $c(a) = i$.

Une ficelle est un graphe non coloré et orienté du type suivant :

**(exemple de ficelle de longueur 4, *i.e.* avec 5 points)**

Suivant Kashiwara, on peut définir le produit tensoriel de certains graphes colorés de la manière suivante. Tout d'abord, considérons deux ensembles $G_1$ et $G_2$ munis d'une structure de graphe non coloré orienté. Supposons que $G_1$ et $G_2$ soient des ficelles. Alors, on définit sur le produit

$G_1 \times G_2$ une structure de graphe orienté non coloré. Indiquons la formule générale sur un exemple :




**(produit de deux ficelles.**
**La première ligne représente un graphe à 4 points $G_1$.**
**La première colonne représente un graphe à 6 points $G_2$)**

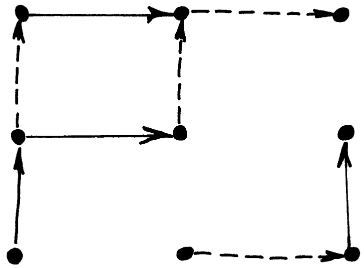
Soit $G$ un graphe $I$-coloré. Disons que $G$ est admissible si, pour toute couleur $i \in I$, les graphes orientés obtenus en ne conservant que les arêtes de couleur $i$ sont des unions de ficelles. Soient $G_1$, $G_2$ deux graphes colorés admissibles. Alors la formule précédente permet de définir une structure de $I$-graphe coloré sur le produit $G_1 \times G_2$.

*Exemple* 6.1.— Dans cet exemple, nous considérons des graphes avec deux couleurs $a$ et $b$. Nous représenterons les arêtes de couleur $a$ avec des traits pleins et les arêtes de couleur $b$ avec des traits discontinus. Soit $G$ le graphe à trois éléments de type suivant :

Si l'on ne retient dans $G$ que les arêtes de couleur $a$, le graphe se décompose en deux ficelles :

De même, si l'on ne conserve que les arêtes de couleur $b$, le graphe se décompose en deux ficelles :

Posons $G_1 = G_2 = G$. Alors le produit $G_1 = G_2$ est le graphe à 9 points suivant :

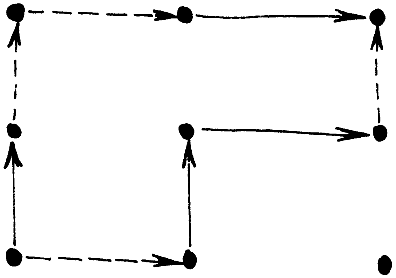


*Exemple* 6.2.— Avec les mêmes conventions, le produit des graphes suivants :

$G_1$

$G_2$

est le graphe



Revenons aux représentations. Soit $v : I \to \mathbf{N}$. Soit $L(v)$ la représentation de $g(I)$ définie au §1, soit $x$ un vecteur de plus haut poids et soit $B_v$ sa base canonique. Kashiwara a défini de manière naturelle une structure de graphe $I$-coloré sur $B_v$. Voici une liste de propriétés du graphe de Kashiwara :

(1) Le graphe $B_v$ est connexe.

(2) $x$ est un point source de $B_v$, *i.e.* $x$ n'est le but d'aucune arête du graphe et de plus $x$ est l'unique point source du graphe.

(3) Le graphe est admissible.

(4) La ficelle de couleur $i$ de source $x$ est de longueur $v(i)$.

En fait, les assertions (1) et (2) précédentes peuvent être exprimées différemment : pour tout élément $y$ de $B_v$, il existe un chemin orienté allant de $x$ à $y$. On remarquera que la propriété (4) permet de retrouver $v$ à partir du graphe.

Soit $u, v : I \to \mathbf{N}$. Rappelons que toute représentation de $g(I)$ de dimension finie est semi-simple, somme directe de certains $L(w)$. En particulier, le produit tensoriel $L(u) \otimes L(v)$ est semi-simple.

**THÉORÈME 6.3** (Kashiwara).— *Le graphe produit $B_u \times B_v$ est une union disjointe de graphes $B_w$. En outre, le nombre de composantes connexes de $B_u \times B_v$ isomorphes à $B_w$ est exactement la multiplicité de $L(w)$ dans $L(u) \otimes L(v)$.*

Le théorème de Kashiwara fournit donc un procédé combinatoire et algorithmique pour calculer les multiplicités des produits tensoriels. En effet, supposons connus les graphes $B_u$ et $B_v$. Pour obtenir les multiplicités du produit tensoriel $L(u) \otimes L(v)$, il suffit donc de faire les calculs suivants :

(1) calculer le graphe $B_u \times B_v$ à l'aide des formules précédents,

(2) décomposer $B_u \times B_v$ en composantes connexes,

(3) pour chaque composante connexe, chercher l'unique sommet qui est une source (l'unicité de la source est affirmée par le théorème de Kashiwara),

(4) pour chaque sommet source $s$ d'une composante connexe, associer une fonction $w_s : I \to \mathbf{N}$. La fonction $w_s$ est définie comme suit : $w_s(i)$ est la longueur de la ficelle de couleur $i$ dont la source est $s$.

Par exemple, soit $V$ la représentation naturelle de sl(3). L'exemple 6.1 calcule la décomposition de $V \otimes V$, et l'exemple 6.2 calcule la décomposition de $V \otimes V^*$. Bien entendu, ces deux exemples sont très faciles, mais il est remarquable que la méthode puisse s'appliquer à toutes les algèbres de Lie simples.

La formule de Steinberg [S] qui calcule les multiplicités des produits tensoriels est une formule générale de grande importance théorique. Cependant, cette formule contient à la fois des termes positifs et des termes négatifs. C'est pourquoi de nombreux auteurs ont cherché des formules combinatoires pour calculer les décompositions des produits tensoriels. Ici "formule combinatoire" signifie une formule qui décrit les multiplicités comme le nombre d'éléments d'un certain ensemble, mais non comme la différence du cardinal de deux ensembles. Par exemple, pour le groupe SL($n$), la formule de Littlewood et Richardson exprime ces multiplicités en termes de tableaux de Young. Littleman [L] a récemment généralisé cette construction pour tous les groupes classiques. Il est donc remarquable que la formule de Kashiwara soit valable pour toutes les algèbres de Lie semi-simples (y compris les algèbres de Lie exceptionnelles et en fait pour toutes les algèbres de Kač-Moody symétrisables).

**(Ajout septembre 1991)** Dans des travaux en préparation, six auteurs (Kashiwara, Kang, Misra, Miwa, Nakashima, Nakayashiki) décrivent combinatoirement les bases crystal des représentations des algèbres affines à l'aide de "chemin de diagrammes" [KMN1], [KMN2].

## BIBLIOGRAPHIE


[BLM] A. BEILINSON, G. LUSZTIG et R. McPHERSON - *A geometric setting for quantum groups*, Duke Math. J. **61** (1990), 655-.

[BZ] A. BERENSTEIN et A. ZELEVINSKY - *Tensor product multiplicities and convex polytopes in partition space*, preprint (1989).

[DJM] E. DATE, M. JIMBO et T. MIWA - *Representation of $U_q\mathrm{gl}_n(\mathbf{C})$ at $q = 0$ and the Robinson-Shensted correspondence* Phys. and Math. of strings (vol. à la mémoire de V. Kniznik) W. Sc., Singapour (1990), 185-211.

[DK] C. DE CONCINI et D. KAZHDAN - *Special bases for $S_n$ and $\mathrm{GL}_n$*, Isr. J. Math. **40** (1981), 416-432.

[Dr] V. DRINFELD - *Hopf algebras and the Yang-Baxter equations*, Soviet Math. Dokl. **32** (1985), 254-258.

[Gi] V. GINZBURG - *Lagrangian constructions of the enveloping algebra of $U(\mathrm{sl}_n)$*, preprint (1990).

[Ji] M. JIMBO - *A q-difference of $U(g)$ and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63-69.

[Ka1] M. KASHIWARA - *Crystallizing the q-analog of universal enveloping algebras*, Comm. Math. Phys. **133** (1990), 249-260.

[Ka2] M. KASHIWARA - *On crystal bases of the Q-analog of universal enveloping algebras*, preprint (1990).

[Ka3] M. KASHIWARA - *Crystallizing the q-analogue of universal enveloping algebras*, Proceedings ICM 90 (Kyoto).

[KN] M. KASHIWARA et T. NAKASHIMA - *Crystal graphs of the q-analog of classical Lie algebras*, RIMS preprint.

[KMN1] M. KASHIWARA, S. KANG, K. MISRA, T. MIWA, T. NAKASHIMA et S. NAKAYASHIKI - *Affine crystal and vertex models* (en préparation).

[KMN2] M. KASHIWARA, S. KANG, K. MISRA, T. MIWA, T. NAKASHIMA et S. NAKAYASHIKI - *Perfect crystals of quantized enveloping algebras* (en préparation).

[LMS] V. LAKSHMIBAI, C. MUSILI et C. SESHADRI - *Geometry of $G/P$* IV, Proc. Ind. Acad. Sc. **99** (1979), 279-362.

[L] V. LAKSHMIBAI - *Standard monomial theory for* $\mathrm{SL}_n$, preprint (1991).

[LS] V. LAKSHMIBAI et C. SESHADRI - *Geometry of $G/P$* V, J. of Algebra **100** (1986), 462-557.

[Li] P. LITTLEMAN - *A generalization of the Littlewood- Richardson rule*, preprint (1987).

[Lu1] G. LUSZTIG - *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras* I, Journal of A.M.S. **3** (1990), 447-498.

[Lu2] G. LUSZTIG - *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras* II, preprint (1990).

[Lu3] G. LUSZTIG - *Quivers, perverse sheaves and quantized enveloping algebras*, preprint.

[Lu4] G. LUSZTIG - *Quivers, perverse sheaves and quantized enveloping algebras*, preprint.

[Ma] O. MATHIEU - *Good bases for G-modules*, Geometrica Dedicata (Tits volume) **36** (1990), 51-66.

[MM] K. MISRA et T. MIWA - *Crystal basis for the basic representation of* $U_q(\widehat{\mathrm{sl}}_n)$, preprint.

[N] T. NAKASHIMA - *A basis of symmetric tensor representations for the quantum analogue of the Lie algebras* $A_n$, $B_n$, $C_n$, $D_n$, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **26** (1990), 723-733.

[Ri] C. RINGEL - *Hall algebras and quantum troups*, Inv. Math. **101** (1990), 583-592.

[St] R. STEINBERG - *A general Clebsch-Gordan theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 406-407.

Olivier MATHIEU

D.M.I. - E.N.S.

45 rue d'Ulm

F-75230 PARIS CEDEX 05

et

RUTGERS UNIVERSITY

Hill Center

NEW BRUNSWICK NJ 08903

USA