Astérisque

GEORGES SKANDALIS

# Approche de la conjecture de Novikov par la cohomologie cyclique [d'après A. Connes, M. Gromov et H. Moscovici]

*Astérisque*, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki, exp. nº 739, p. 299-320

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__299_0>

Séminaire BOURBAKI
43ème année, 1990-91, n° 739

Février 1991

# APPROCHE DE LA CONJECTURE DE NOVIKOV PAR LA COHOMOLOGIE CYCLIQUE
## [d'après A. Connes, M. Gromov et H. Moscovici]

par Georges SKANDALIS

## 0. INTRODUCTION

Toutes les variétés que nous considérons dans cet exposé sont supposées compactes (sans bord), orientées de classe $C^\infty$.

La formule de Hirzebruch [24] calcule la signature d'une variété orientée $V$ de dimension $n = 4k$, c'est-à-dire la signature (différence entre le nombre de signes $+$ et le nombre de signes $-$) de la forme quadratique associée à la forme d'intersection sur $H^{2k}(V;\mathbf{R})$). On obtient :

$$\mathrm{sign}(V) = \langle L(V), [V] \rangle$$

où $[V] \in H_n(V;\mathbf{Z})$ désigne le cycle fondamental de la variété orientée $V$ et $L(V) \in H^*(V;\mathbf{Q})$ est un polynôme en les classes de Pontrjagin de $V$, parfois appelé "classe caractéristique de Pontrjagin-Hirzebruch". En particulier, le nombre $\langle L(V), [V] \rangle$ est un invariant d'homotopie. Dans le cas des variétés simplement connexes, la signature est la seule classe caractéristique invariante d'homotopie.

Supposons à présent que la variété $V$ n'est pas simplement connexe. Notons $\Gamma$ le groupe fondamental de $V$ et $f : V \to B\Gamma$ l'application classifiante du revêtement universel. Pour une classe de cohomologie rationnelle $x \in H^*(B\Gamma;\mathbf{Q})$, appelons "haute signature" de $V$ le nombre $\langle L(V) \cup f^*(x), [V] \rangle$. La conjecture de Novikov ([39]) énonce l'invariance par homotopie de toutes les hautes signatures, c'est-à-dire l'égalité

$$\langle L(W) \cup (f \circ g)^*(x), [W] \rangle = \langle L(V) \cup f^*(x), [V] \rangle$$

pour toute équivalence d'homotopie $g : W \to V$ de variétés compactes orientées.

À l'aide de la dualité de Poincaré, on trouve qu'une manière équivalente d'énoncer cette conjecture est l'invariance par homotopie de la classe d'homotopie $f_*(L(V) \cap [V]) \in H_*(B\Gamma; \mathbf{Q})$.

Enfin, l'énoncé le plus naturel de cette conjecture a lieu dans la $K$-homologie à supports compacts (la théorie homologique duale de la $K$-théorie - *cf.* [30]) de $B\Gamma$ : l'opérateur de signature de $V$ a une classe notée $\sigma_V$ dans le groupe de $K$-homologie $K_0(V)$ dont l'image par l'isomorphisme de Chern $\mathrm{Ch} : K_0(V) \otimes \mathbf{Q} \to H_*(V; \mathbf{Q})$ est $L(V) \cap [V]$. La conjecture de Novikov énonce donc l'invariance par homotopie de l'image de $\sigma_V$ dans $K_0(B\Gamma) \otimes \mathbf{Q}$, c'est-à-dire l'égalité, modulo la torsion, de $(f \circ g)_*(\sigma_W)$ avec $f_*(\sigma_V)$, pour toute équivalence d'homotopie $g : W \to V$ de variétés compactes orientées.

Cette conjecture reste ouverte après une vingtaine d'années. Cependant, grâce aux efforts conjugués de nombreux mathématiciens (*cf.* [7, 15, 25, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 40, 41, 43, 44...]), cette conjecture est maintenant établie pour de nombreuses classes de groupes $\Gamma$. La conjecture de Novikov a récemment connu de nombreux développements connexes (variétés lipschitziennes, cas équivariant pour une action de groupe compact, variétés à bord...). Citons surtout un analogue en $K$-théorie algébrique de la conjecture de Novikov qui vient d'être démontré par Bökstedt, Hsiang et Madsen [4]. On consultera à propos des principaux développements récents l'article d'exposition [45] de Weinberger.

Dans cet exposé, nous examinerons une approche nouvelle de cette conjecture à l'aide de la cohomologie cyclique de Connes. Les résultats que nous discuterons s'énoncent :

**THÉORÈME A** [13].— *La conjecture de Novikov est vraie pour les groupes hyperboliques de Gromov.*

**THÉORÈME B** [12].— *Tout "fibré presque plat" détermine un invariant d'homotopie.*

Le théorème B permet de redémontrer la conjecture de Novikov dans tous les cas précédemment connus, ainsi que le théorème A.

De plus, cette approche est intéressante à plus d'un titre :

a) elle est basée sur des théorèmes de l'indice très puissants et esthétiques ;

b) les méthodes développées peuvent certainement démontrer la conjecture de Novikov dans de nombreux autres cas et, en tous cas, posent des questions intéressantes ;

c) enfin, la même démarche s'applique à la conjecture de Gromov-Lawson et se transpose dans le cas où les groupes discrets sont remplacés par des feuilletages.

## NOTATIONS

Soient $\Gamma$ un groupe et $A$ un anneau. Rappelons que l'ensemble des sommes finies $\sum_{g\in\Gamma} a_g g$ ($a_g \in A$) est muni d'une structure d'anneau pour laquelle on a $(ag)(bh) = (ab)(gh)$ ($a, b \in A$ et $g, h \in \Gamma$). L'anneau ainsi obtenu est noté $A[\Gamma]$.

On note $\ell^2(\Gamma)$ l'espace hilbertien formé des applications $g \to a_g$ de $\Gamma$ dans $\mathbf{C}$ telles que $\sum_{g\in\Gamma} |a_g|^2 < +\infty$. À l'opération de $\Gamma$ par translation (à gauche) dans l'espace hilbertien $\ell^2(\Gamma)$ correspond une opération de l'anneau $\mathbf{C}[\Gamma]$ dans le même espace ;; la $\mathbf{C}^*$-algèbre $\mathbf{C}^*(\Gamma)$ du groupe $\Gamma$ est l'adhérence (normique) de $\mathbf{C}[\Gamma]$ dans la $\mathbf{C}^*$-algèbre des opérateurs continus de $\ell^2(\Gamma)$.

Signalons que l'algèbre que nous notons $\mathbf{C}^*(\Gamma)$ dans cet exposé est la $\mathbf{C}^*$-algèbre réduite du groupe $\Gamma$ qui se note traditionnellement $\mathbf{C}^*_r(\Gamma)$.

## 1. LES INVARIANTS DE MISHCHENKO ET KASPAROV

### a) L'invariant de Mishchenko

Un outil essentiel dans toutes les constructions liées à la conjecture de Novikov est la signature symétrique de Mishchenko :

Soit $V$ une variété compacte (sans bord) orientée de classe $C^\infty$ de dimension $4n$ de groupe fondamental $\Gamma$ ; alors $V$ est naturellement munie d'un fibré plat $E$ de fibre $\mathbf{C}[\Gamma]$ obtenu par linéarisation du revêtement universel. Donnons-nous une triangulation de $V$. Mishchenko a montré que la forme d'intersection sur les simplexes de dimension $2n$, à coefficients dans le fibré plat $E$, définit un élément d'un groupe de Wall $L(\mathbf{C}[\Gamma])$ de l'anneau $\mathbf{C}[\Gamma]$ appelé signature symétrique de $V$ et a prouvé que cet élément est invariant par homotopie ([34]).

### b) L'indice dans $K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$, *cf.* [13]

Notons $\mathcal{R} = \{(a_{m,n})_{m,n\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}\,,\ a_{m,n} \in \mathbf{C}\,/\,\forall k \in \mathbf{N}\,,\ \sum_{m,n}(1+m+n)^k\,|a_{m,n}| < +\infty\}$ l'algèbre des matrices infinies à décroissance rapide.

Soit $V$ une variété compacte (sans bord) de classe $C^\infty$. L'algèbre des noyaux régularisants sur $V$ est l'espace $C^\infty(V\times V)$ des fonctions de classe $C^\infty$ sur $V\times V$ muni du produit de convolution $(h*k)(x,y) = \int h(x,z)k(z,y)\,dz$(1) pour $h,k \in C^\infty(V\times V)$, $x,y\in V$. Cette algèbre est isomorphe à $\mathcal{R}$. En particulier, elle est indépendante de la variété $V$. Si $E$ est un fibré vectoriel complexe de classe $C^\infty$ sur $V$, on forme de même l'algèbre des noyaux régularisants à coefficients dans les endomorphismes de $E$, qui est encore isomorphe à $\mathcal{R}$.

Soient $\Gamma$ le groupe fondamental et $\widetilde{V}$ le revêtement universel de $V$. Le groupe $\Gamma$ opère librement et proprement sur $\widetilde{V}\times\widetilde{V}$ par l'action diagonale ; notons $W$ la variété quotient $\widetilde{V}\times\widetilde{V}/\Gamma$ et $p:\widetilde{V}\times\widetilde{V}\to W$ l'application quotient. L'espace $C_c^\infty(W)$ des fonctions de classe $C^\infty$ à support compact sur $W$ est naturellement muni d'une structure d'algèbre : pour $h,k\in C_c^\infty(W)$ et $x,y\in\widetilde{V}$, on pose $(h*k)(p(x,y)) = \int h(p(x,z))k(p(z,y))\,dz$(2)

Il n'est pas difficile de démontrer que l'algèbre des noyaux régularisants $\Gamma$-invariants $C_c^\infty(W)$ est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{R}[\Gamma] = \mathcal{R}\otimes\mathbf{C}[\Gamma]$. Cet isomorphisme n'est pas canonique. Cependant, on peut construire une

(1) L'intégrale est prise sur $V$ et $dz$ désigne une mesure régulière sur $V$.

(2) L'intégrale est prise sur $\widetilde{V}$ et $dz$ désigne une mesure régulière $\Gamma$-invariante sur $\widetilde{V}$.

*équivalence de Morita* canonique entre les algèbres $C_c^\infty(W)$ et $\mathcal{R}[\Gamma]$. De ce fait, les groupes $K_0(C_c^\infty(W))$ et $K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$ sont canoniquement isomorphes.

Si $E$ est un fibré vectoriel complexe de classe $C^\infty$ sur $V$, on forme de même l'algèbre des noyaux régularisants $\Gamma$-invariants à coefficients dans les endomorphismes de $E$, qui est encore isomorphe à $\mathcal{R}[\Gamma]$.

Soient $E_+$ et $E_-$ deux fibrés vectoriels complexes de classe $C^\infty$ sur la variété $V$ et $D : C^\infty(V; E_+) \to C^\infty(V; E_-)$ un opérateur pseudodifférentiel elliptique, où $C^\infty(V; E_\pm)$ désigne l'espace des sections de classe $C^\infty$ du fibré $E_\pm$. On peut alors relever $D$ et sa parametrix $Q$ en des opérateurs $\Gamma$-invariants $\widetilde{D}$ et $\widetilde{Q}$ agissant sur le revêtement universel $\widetilde{V}$ de $V$ (*cf.* [1, 13]). Alors $\widetilde{D}$ et $\widetilde{Q}$ sont inverses l'un de l'autre modulo l'algèbre des noyaux régularisants $\Gamma$-invariants à coefficients dans les endomorphismes de $E_\pm$. On associe alors à $D$ l'élément de $K_0(C_c^\infty(W)) = K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$ représenté par l'idempotent

$$P_D = \begin{bmatrix} (1-\widetilde{Q}\widetilde{D})^2 & (1-\widetilde{Q}\widetilde{D})(2-\widetilde{Q}\widetilde{D})\widetilde{Q} \\ \widetilde{D}(1-\widetilde{Q}\widetilde{D}) & 1-(1-\widetilde{D}\widetilde{Q})^2 \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} L^{-1} \in M_2(A)$$

où

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -\widetilde{Q} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \widetilde{D} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\widetilde{Q} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et $A$ désigne l'algèbre $\mathcal{R}[\Gamma]$ avec une unité adjointe. Rappelons que si l'algèbre $A$ est obtenue en adjoignant une unité à une algèbre sans unité $J$, $K_0(J)$ est le quotient de $K_0(A)$ par l'image de $K_0(\mathbf{C})$.

*Remarque* : Les relevés $\widetilde{D}$ et $\widetilde{Q}$ ne sont uniquement déterminés que si $D$ et $Q$ sont "suffisamment locaux". En général, ils ne sont déterminés qu'à un noyau régularisant $\Gamma$-invariant près. L'addition d'un tel noyau ne change pas la classe de l'idempotent $P_D$ dans $K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$.

## c) Le théorème de l'indice de Kasparov et Mishchenko

Rappelons que le spectre d'un élément autoadjoint d'une $C^*$-algèbre $A$ est inclus dans $\mathbf{R}$. Il s'ensuit que les groupes de $L$ et $K$-théorie coïncident *i.e.* $L(A) = K_0(A)$.

L'algèbre $\mathcal{R}$ est une sous-algèbre de la $C^*$-algèbre $\mathcal{K}$ des opérateurs compacts d'un espace de Hilbert séparable. Or, pour toute $C^*$-algèbre $A$, le produit tensoriel $C^*$-algèbrique $\mathcal{K} \otimes A$ a la même $K$-théorie que $A$.

L'image par inclusion $i : \mathbf{C}[\Gamma] \to C^*(\Gamma)$ de l'idempotent $P_D$ associé à l'opérateur de signature définit un élément $a_V \in K_0(\mathcal{K} \otimes C^*(\Gamma)) = K_0(C^*(\Gamma))$.

**THÉORÈME 1.1.**—*Soit $V$ une variété compacte orientée de groupe fondamental $\Gamma$. Notons $t_V \in K_0(C^*(\Gamma)) = L(C^*(\Gamma))$ l'image par inclusion $i : \mathbf{C}[\Gamma] \to C^*(\Gamma)$ de l'invariant de Mishchenko et $a_V \in K_0(\mathcal{K} \otimes C^*(\Gamma)) = K_0(C^*(\Gamma))$ l'image par l'inclusion $i : \mathbf{C}[\Gamma] \to C^*(\Gamma)$ de l'idempotent $P_D$ associé à l'opérateur de signature. On a $a_V = t_V$.*

Ce théorème est énoncé dans [29] et démontré dans [30]. L'égalité $a_V = t_V$ modulo la torsion est aussi énoncée dans [36] et démontrée dans [37]. Pour une démonstration directe, *cf.* [27].

Rappelons que l'opérateur de signature de $V$ détermine un élément noté $f_*(\sigma_V)$ du groupe de $K$-homologie à supports compacts $K_0(B\Gamma)$. Il existe un homomorphisme naturel $\beta : K_0(B\Gamma) \to K_0(C^*(\Gamma))$ ("assembly map" en $K$-théorie topologique) tel que $\beta(f_*(\sigma_V)) = a_V$. Comme par le théorème 1.1, l'élément $a_V$ est un invariant d'homotopie, il en résulte :

**COROLLAIRE 1.2.**— *Si l'homomorphisme $\beta : K_0(B\Gamma) \to K_0(C^*(\Gamma))$ est rationnellement injectif, la conjecture de Novikov est vérifiée pour le groupe $\Gamma$.*

On dit que le groupe satisfait à la "conjecture de Novikov forte" (terminologie de J. Rosenberg [42]) si l'homomorphisme $\beta$ est rationnellement injectif. Signalons que tous les groupes pour lesquels la conjecture de Novikov est établie satisfont à la conjecture de Novikov forte.

Il est aussi clair que tout homomorphisme $\phi : K_0(C^*(\Gamma)) \to \mathbf{C}$ détermine un invariant d'homotopie. C'est en grande partie cette remarque qui a conduit Kasparov à construire la $K$-théorie bivariante pour les $C^*$-algèbres.

## 2. COHOMOLOGIE CYCLIQUE ET COHOMOLOGIE DE GROUPES

### Cohomologie cyclique

Pour une exposition de la cohomologie cyclique, nous renvoyons à [9], [16], [8]. Contentons-nous ici de rappeler les définitions qui nous seront utiles.

Soit $A$ une algèbre sur $\mathbf{C}$. Rappelons qu'une $n$-cochaîne sur $A$ est une application multilinéaire $\phi : A^{n+1} \to \mathbf{C}$. Le bord de Hochschild d'une $n$-cochaîne $\phi$ est la $n+1$-cochaîne $b\phi$ donnée par la formule

$$b\phi(a_0, a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}) = \sum_{0 \leq j \leq n} (-1)^j \, \phi(a_0, \cdots, a_j a_{j+1}, \cdots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1} \, \phi(a_{n+1} a_0, a_1, \cdots, a_n).$$

**DÉFINITION.**— *Soit $A$ une algèbre sur $\mathbf{C}$. Une $n$-cochaîne cyclique sur $A$ est une application multilinéaire $\phi : A^{n+1} \to \mathbf{C}$ telle que :*

$$\forall (a_0, a_1, \cdots, a_n) \in A^{n+1} \quad , \quad \phi(a_1, \cdots, a_n, a_0) = (-1)^n \, \phi(a_0, a_1, \cdots, a_n).$$

*On note $C^n_\lambda(A)$ l'espace des $n$-cochaînes cycliques sur $A$.*
*Un $n$-cocycle cyclique sur $A$ est une $n$-cochaîne cyclique $\phi$ telle que $b\phi = 0$.*
*On note $Z^n_\lambda(A)$ l'espace des $n$-cocycles cycliques sur $A$.*

On vérifie sans peine que le bord de Hochschild d'une cochaîne cyclique est un cocycle cyclique. La cohomologie cyclique $H^n_\lambda(A)$ de $A$ est la cohomologie du complexe des cochaînes cycliques muni du bord de Hochschild, autrement dit $H^n_\lambda(A) = Z^n_\lambda(A)/bC^{n-1}_\lambda(A)$.

### Accouplement avec la $K$-théorie

Soit $n$ un nombre pair et $\phi$ un $n$-cocycle cyclique sur une algèbre $A$. Soit $B$ l'algèbre obtenue à partir de $A$ en adjoignant une unité. Rappelons que $B$ est isomorphe à $A \times \mathbf{C}$ comme $\mathbf{C}$-espace vectoriel et que le produit est défini par $(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$ $(a, b \in A,\ \lambda, \mu \in \mathbf{C})$.

Alors $\phi$ définit un cocycle cyclique encore noté $\phi$ sur $B$ par la formule $\phi((a_0, \lambda_0), (a_1, \lambda_1), \cdots (a_n, \lambda_n)) = \phi(a_0, a_1 \cdots, a_n)$.

Notons $M_k(B)$ l'algèbre des matrices $k \times k$ à coefficients dans $B$. En utilisant la trace de $M_k(\mathbf{C})$, on étend le cocycle cyclique $\phi$ à $M_k(B)$. Soit $e$ un idempotent de $M_k(B)$. Le nombre $\phi(e, e, \cdots, e)$ ne dépend que de la classe de $e$ dans $K_0(A)$ et de celle de $\phi$ dans $H^n_\lambda(A)$. On définit un accouplement entre $K_0(A)$ et $H^n_\lambda(A)$ en posant

$$\langle [\phi], [e] \rangle = c_n\, \phi(e, e, \cdots, e)$$

où $c_n \in \mathbf{C}$ est une constante de normalisation $\left(c_{2m} = \frac{1}{(2\pi i)^m m!}\right)$.

## Normalisation des cocyles de groupes

Soit $\Gamma$ un groupe. Un $n$-cocycle de groupe $c$ sur $\Gamma$ sera dit normalisé si $c(g_1, \cdots, g_n) = 0$ si $g_1 \cdots g_n = 0$.

Par un argument de résolution projective, on démontre sans peine (*cf.* [6], [13]) :

**PROPOSITION 2.1.**— *Dans toute classe de cohomologie de $H^n(\Gamma, \mathbf{C})$, il y a au moins un cocycle normalisé.*

Soit $c$ un cocycle normalisé sur le groupe $\Gamma$. On associe à $c$ un cocycle cyclique $\phi_c$ sur $\mathbf{C}[\Gamma]$ qui est décrit sur la base $\Gamma$ de $\mathbf{C}[\Gamma]$ par :

$$\phi_c(g_0, g_1, \cdots g_n) = c(g_1, \cdots g_n) \,\text{si}\, g_0 g_1 \cdots g_n = 1 \,\text{et}\, \phi_c(g_0, g_1, \cdots g_n) = 0 \,\text{sinon.}$$

*Remarque* : En fait, on a un plongement de $H^n(\Gamma, \mathbf{C})$ dans $H^n_\lambda(\mathbf{C}[\Gamma])$. La cohomologie cyclique de $\mathbf{C}[\Gamma]$ a été calculée par Burghelea (*cf.* [6]).

## Extension à $\mathcal{R}[\Gamma]$. Premier théorème de l'indice

**DÉFINITION 2.2.**— *Soit $c$ un $n$-cocycle normalisé sur le groupe $\Gamma$. On définit le cocycle cyclique $\psi_c$ sur $\mathcal{R}[\Gamma]$ en posant :*

$$\psi_c(k_0 g_0, k_1 g_1, \cdots k_n g_n) = \mathrm{Tr}(k_0 k_1 \cdots k_n)\ \phi_c(g_0, g_1, \cdots g_n)$$

*pour* $(k_0 k_1 \cdots, k_n) \in \mathcal{R}^{n+1}$ *et* $(g_0, g_1, \cdots, g_n) \in \Gamma^{n+1}$ *où* Tr *désigne la trace sur l'algèbre* $\mathcal{R}$.

Les éléments de la forme $kg$ ($k \in \mathcal{R}$, $g \in \Gamma$) engendrent $\mathcal{R}[\Gamma]$ ; on étend $\psi_c$ à $\mathcal{R}[\Gamma]^{n+1}$ par linéarité. On vérifie sans peine que $\psi_c$ est un cocycle cyclique. La trace Tr est donnée par la formule $\mathrm{Tr}((a_{m,n})_{m,n \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}}) = \sum_{n \in \mathbf{N}} a_{n,n}$.

Connes et Moscovici ont démontré le théorème de l'indice suivant :

**THÉORÈME 2.3** (*cf.* [13]).—*Soient $V$ une variété compacte, $\Gamma$ son groupe fondamental, $f : V \to B\Gamma$ l'application classifiante et $D$ un opérateur pseudodifférentiel elliptique sur $V$. Notons $[D]$ la classe de $D$ dans le groupe de $K$-homologie $K_0(V)$,* $\mathrm{Ch}[D]$ *son image dans $H_*(V)$ par l'isomorphisme de Chern et $[P_D]$ l'indice de $D$ dans $K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$. Soit $c$ un $n$-cocycle normalisé sur le groupe $\Gamma$ ; notons $x$ sa classe dans $H^n(B\Gamma; \mathbf{C}) = H^n(\Gamma; \mathbf{C})$. On a alors $\langle [\psi_c], [P_D] \rangle = d_n \langle f^*(x), \mathrm{Ch}[D] \rangle$.*

Ici, $d_n$ est une constante non nulle $\left(d_{2m} = \frac{1}{(2\pi i)^m (2m)!}\right)$.

Dans le cas du 0-cocycle $c = 1$, on retrouve comme cas particulier le théorème de l'indice à valeurs dans l'algèbre de von Neumann de $\Gamma$ de ([1]).

La démonstration de ce théorème utilise les étapes suivantes :

a) Au cocycle de groupe $c$, on associe un cocycle d'Alexander-Spanier $\eta$ sur $V$ dont la classe de cohomologie est $f^*(x)$. En utilisant l'isomorphisme local entre les groupoïdes $W$ et $V \times V$, on associe à tout cocycle $\zeta$ d'Alexander-Spanier un homomorphisme $f_\zeta : K_0(V) \to \mathbf{C}$ de sorte qu'on ait $\langle [\psi_c], [P_D] \rangle = f_\eta([D])$.

b) On calcule l'homomorphisme $f_\eta$ ci-dessus associé au cocycle d'Alexander-Spanier $\eta$ en utilisant le calcul symbolique de Getzler ([17]).

La classe $[P_D]$ n'est *a priori* pas un invariant d'homotopie. Pour démontrer l'invariance par homotopie de la haute signature associée à $x$, il suffit de démontrer que le nombre $\langle [\psi_c], [P_D] \rangle$ ne dépend que de l'image de $P_D$ dans $K_0(C^*(\Gamma))$, puisque, par le théorème 1.1, cette image est un invariant d'homotopie.

Or il n'est pas raisonnable d'espérer que le cocycle cyclique $\phi_c$ s'étende en un cocycle cyclique de $C^*(\Gamma)$. On peut cependant dans certains cas étendre ce cocycle cyclique à une sous-algèbre de Banach de $C^*(\Gamma)$ ayant la même $K$-théorie que $C^*(\Gamma)$. Pour cela, on dispose du résultat "classique" (et simple) suivant :

*Lemme* 2.4 (*cf.* e.g. [28], p. 109, exerc. 6.15).—*Soit $\rho : A \to B$ un homomorphisme d'algèbres de Banach unifères. Si l'image de $\rho$ est dense dans $B$ et que $A^{-1} = \rho^{-1}(B^{-1})$, alors $\rho$ induit un isomorphisme en $K$-théorie.*

Si l'homomorphisme $\rho$ vérifie les conditions du lemme et est de plus injectif, on dit parfois que $A$ est une sous-algèbre pleine de $B$.

Un cas où cette méthode s'applique est :

**THÉORÈME 2.5** ([13]).—*La conjecture de Novikov est vraie pour les groupes hyperboliques de Gromov.*

Nous renvoyons à [20] et [19] pour une description des groupes hyperboliques de Gromov. Deux propriétés de ces groupes sont utilisées dans le théorème 2.5 :

a) Gromov a démontré (*cf.*[20]) que, si $\Gamma$ est un groupe hyperbolique, toute classe de cohomologie $x \in H^n(\Gamma, \mathbf{C})$ $(n \geq 2)$, est représentée par un cocycle (normalisé) borné.

b) P. de la Harpe ([22]) a généralisé aux groupes hyperboliques un estimé sur la norme de $C^*(\Gamma)$[(3)] obtenu par Haagerup pour les groupes libres puis par Jolissaint pour les sous-groupes discrets des groupes de Lie de rang 1. On en déduit (*cf.*[26]) :

**PROPOSITION 2.6.**—*Soit $\Gamma$ un groupe hyperbolique. Le complété de $\mathbf{C}[\Gamma]$ pour la norme $N$ donnée par $N(\sum_{g\in\Gamma} a_g g) = \|\sum_{g\in\Gamma} |a_g|\, g\|$ est une sous-algèbre pleine $A$ de $C^*(\Gamma)$.*

Ici, $\|\mathbf{a}\|$ désigne la norme de $\mathbf{a}$ dans $C^*(\Gamma)$.

Soient $n$ un nombre pair et $c$ un $n$-cocycle normalisé borné sur $\Gamma$. Posons $\phi = \phi_c$.

(3) Rappelons que $C^*(\Gamma)$ désigne ici la $C^*$-algèbre réduite du groupe $\Gamma$.

Pour $\mathbf{a}^i = \sum_{g\in\Gamma} a^i_g g$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$, on a

$$\phi(\mathbf{a}^0, \mathbf{a}^1, \cdots, \mathbf{a}^n) = \sum_{g_0 g_1 \cdots g_n = 1} a^0_{g_0} a^1_{g_1} \cdots a^n_{g_n} c(g_1, \cdots, g_n).$$

Donc

$$|\phi(\mathbf{a}^0, \mathbf{a}^1, \cdots, \mathbf{a}^n)| \leq k \sum_{g_0 g_1 \cdots g_n = 1} |a^0_{g_0}| \, |a^1_{g_1}| \cdots |a^n_{g_n}| = k\tau(\mathbf{b}^0 \mathbf{b}^1 \cdots \mathbf{b}^n)$$

où $\mathbf{b}^i = \sum_{g\in\Gamma} |a^i_g| g$ et $\tau\left(\sum_{g\in\Gamma} a_g g\right) = a_1$.

Il s'ensuit que $|\phi(\mathbf{a}^0, \mathbf{a}^1, \cdots, \mathbf{a}^n)| \leq k\, \|\mathbf{b}^0\mathbf{b}^1 \cdots \mathbf{b}^n\| \leq kN(\mathbf{a}^0)N(\mathbf{a}^1) \cdots N(\mathbf{a}^n)$. Donc le cocycle $\phi$ s'étend en un cocycle cyclique sur l'algèbre $A$ ; il définit donc un homomorphisme de $K_0(A) = K_0(C^*(\Gamma))$ dans $\mathbf{C}$, d'où le théorème 2.5.

L'importance de ce théorème vient de l'abondance des groupes hyperboliques (*cf.* [20]).

La méthode de démonstration soulève aussi de nombreuses questions :

**Question 1** : L'inclusion $A \to C^*(\Gamma)$ induit-elle un isomorphisme en $K$-théorie pour tout groupe $\Gamma$ ?

Une réponse positive à cette question impliquerait la conjecture de Novikov pour tous les cocycles de groupe bornés. Cependant, l'égalité $A^{-1} = \rho^{-1}(C^*(\Gamma)^{-1})$ semble liée au “rang 1”. La réponse à la question 1 est néanmoins positive pour les groupes résolubles comme l'a montré Bost ([5]). Remarquons que, pour un groupe moyennable, la norme $N$ est la norme $\| \, \|_1$, de sorte que $A$ est l'algèbre de Banach $\ell^1(\Gamma)$.

En fait, l'estimé de [22] permet de montrer que, si le groupe $\Gamma$ est hyperbolique, le complété $A_n$ de $\mathbf{C}[\Gamma]$ pour la norme $N_n$ donnée par $N_n(\sum_{g\in\Gamma} a_g g) = \| \sum_{g\in\Gamma} |a_g|(1 + |g|)^n g\|$ est une sous-algèbre pleine de $C^*(\Gamma)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ici, $|g|$ désigne la longueur de $g$ relativement à un système de générateurs de $\Gamma$.

**Question 2** : L'inclusion $A_n \to C^*(\Gamma)$ induit-elle un isomorphisme en $K$-théorie pour tout groupe $\Gamma$ ?

Comme on peut toujours étendre les cocycles à croissance polynomiale à l'algèbre $A_n$, une réponse positive à la question 2 impliquerait la conjecture de Novikov pour tous les cocycles de groupe à croissance polynomiale.

Une façon plus générale de procéder peut être la suivante (*cf.* [10]) : étant donné un cocycle de groupe normalisé $c$, construire une sous-algèbre $A$ (pouvant dépendre de $c$) de $C^*(\Gamma)$, ayant la même $K$-théorie que $C^*(\Gamma)$ à laquelle le cocycle $\phi_c$ s'étend. Par exemple, à l'invariant de Godbillon-Vey, correspond un 2-cocycle (cocycle de Bott-Thurston) de tout groupe $\Gamma$ agissant sur le cercle par difféomorphismes préservant l'orientation (*cf.* [18]). Connes a montré ([10]) que ce cocycle définit un homomorphisme de la $K$-théorie de $C^*(\Gamma)$ dans $\mathbf{C}$ d'où un invariant d'homotopie. De la même manière sont traitées toutes les classes "secondaires" de cohomologie de groupe.

## 3. "FIBRÉS PRESQUE PLATS"

À proprement parler, il n'y a pas de fibrés presque plats, mais des éléments de $K$-théorie presque plats :

**DÉFINITION 3.1** ([12]).—*Soient $\alpha > 0$ un nombre réel, $V$ une variété riemannienne compacte et $E$ un fibré hermitien sur $V$. Soit $\nabla$ une connexion unitaire sur $E$ et $\theta = \nabla^2$ sa courbure. La connexion $\nabla$ est dite $\alpha$-plate si $\|\theta\| < \alpha$. S'il existe une connexion unitaire $\alpha$-plate $\nabla$ sur $E$, nous dirons que $E$ est un fibré $\alpha$-plat. Un élément de $K$-théorie $x \in K^0(V)$ est dit presque plat si, pour tout $\alpha > 0$, il existe des fibrés vectoriels $\alpha$-plats $E_\pm$ tels que $x$ soit égal à la différence des classes de $E_+$ et $E_-$ dans $K^0(V)$.*

La courbure $\theta$ est une deux forme à valeurs dans les endomorphismes de $E$. Comme la dimension du fibré $E$ croît quand $\alpha$ tend vers 0, il est important de préciser quelle est la norme de $\theta$ considérée : si $X$ et $Y$ sont deux vecteurs tangents en un point $x$ de $V$, la courbure définit un endomorphisme $\theta_{X,Y}$ de l'espace hilbertien $E_x$ ; désignons par $\|\theta_{X,Y}\|$ sa norme. On pose alors $\|\theta\| = \operatorname{Sup}\{\|\theta_{X,Y}\| \,/\, \|X\| \leq 1 \text{ et } \|Y\| \leq 1\}$.

On peut formuler une définition analogue pour $K^1$ : un élément de

$K^1(V)$ est dit presque plat si, pour tout $\alpha > 0$, il peut être représenté par une section $u$ du fibré des automorphismes unitaires d'un fibré unitaire $E$ muni d'une connexion unitaire $\alpha$-plate $\nabla$ tel que $\|\nabla u\| < \alpha$.

Il est clair que le produit de deux éléments presque plats de $K$-théorie est presque plat : si $x_i \in K^*(V_i)$ $(i = 1, 2)$ est presque plat, le produit tensoriel $x_1 \otimes x_2 \in K^*(V_1 \times V_2)$ est presque plat.

**3.2** *Exemple* :Il est facile de décrire des éléments de $K^1$ presque plats :

Munissons le fibré trivial de dimension $N$ sur le cercle $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ de la connexion unitaire pour laquelle le transport parallèle $v_{[s,t]}$ le long du segment orienté $[s, t]$ de $\mathbf{R}$ soit donné, sur la base $(b_0, \cdots, b_{N-1})$, par $v_{[s,t]}(b_k) = e^{2i(k/N)\pi(t-s)} b_k$. Pour $t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, notons $u_t$ l'opérateur unitaire de $\mathbf{C}^N$ qui agit sur la base $(b_0, \cdots, b_{N-1})$ par $u_t b_k = b_{k-1}$ si $k \neq 0$, $u_t b_0 = e^{2i\pi t} b_{N-1}$. Alors la section $t \to u_t$ représente le générateur de $K^1(\mathbf{T})$ ; or, pour tout $t$, on a $v_{[0,t]} u_0 v_{[t,0]} = e^{-2i\pi t/N} u_t$ donc la section $t \to u_t$ est presque invariante par la connexion.

Il en résulte que l'élément de Bott sur $\mathbf{T}^2$ est un élément de $K$-théorie presque plat.

Les éléments de $K$-théorie presque plats proviennent du groupe fondamental. En effet, on démontre assez facilement :

**PROPOSITION 3.3.**—*Soit $V$ une variété riemannienne simplement connexe. Toute classe de $K$-théorie presque plate de $V$ est triviale. Plus précisément, il existe $\alpha > 0$ tel que tout fibré $\alpha$-plat sur $V$ soit trivial.*

**THÉORÈME 3.4** ([12]).—*Soient $V$ une variété compacte orientée et $x \in K^*(V)$ un élément de $K$-théorie presque plat. Alors, pour toute équivalence d'homotopie $f : W \to V$, on a $\langle \sigma_V, x\rangle = \langle \sigma_W, f^*(x)\rangle$ où $\sigma_V$* (resp. *$\sigma_W$) désigne la classe de l'opérateur de signature de $V$* (resp. *$W$) dans le groupe de $K$-homologie $K_*(V)$* (resp. *$K_*(W)$).*

Il est possible de donner une démonstration directe de ce théorème : si $f : W \to V$ est une équivalence d'homotopie préservant l'orientation et $E$ un fibré suffisamment plat sur $V$, on peut comparer directement les opérateurs de signature de $V$ et $W$ à coefficients dans les fibrés $E$ et $f^*E$

et démontrer qu'ils ont même indice (*cf.* [23]).

La démonstration originale de ce théorème décrite dans [12] est moins directe, mais développe des idées très intéressantes :

- à un fibré presque plat, on associe une "presque représentation" du groupe fondamental $\Gamma$ ;

- on définit l'image par une presque représentation de la signature symétrique de Mishchenko : c'est une matrice inversible autoadjointe ;

- on démontre enfin un théorème de l'indice qui stipule l'égalité entre la signature à coefficients dans le fibré presque plat du départ et la signature de cet opérateur autoadjoint.

Expliquons brièvement chacune de ces idées :

## Presque représentation associée à un fibré presque plat

Soit $V$ une variété riemannienne. Choisissons un point base $x$ de $V$ et, pour chaque élément du groupe fondamental $\Gamma$ de $V$, un lacet qui le représente. Donnons-nous un fibré unitaire $E$ sur $V$, muni d'une connexion unitaire $\nabla$. Le transport parallèle le long de ces représentants donne une application $u$ de $\Gamma$ dans le groupe des transformations unitaires de $E_x$. Si la connexion $\nabla$ est plate, l'application $u$ est une représentation. Si la connexion $\nabla$ est $\alpha$-plate, avec $\alpha$ suffisamment petit, l'application $u$ est presque une représentation : étant donnés $\varepsilon > 0$ et une partie finie $F$ de $\Gamma$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $u$ est l'application associée à une connexion $\alpha$-plate, on ait pour tout $x, y \in F$, $\|u(xy) - u(x)u(y)\| < \varepsilon$. On dit alors que l'application $u$ est une $(F, \varepsilon)$-représentation.

Pour des raisons qui vont apparaître ci-dessous, on considère des presque représentations telles que $u(g^{-1}) = u(g)^*$ pour tout $g \in \Gamma$. Pour cela, on remplace $u$ par l'application $g \to \frac{1}{2}\left(u(g) + u(g^{-1})^*\right)$. Alors $u$ n'est plus unitaire mais reste une presque représentation (donc est presque unitaire).

*Remarque* : Réciproquement, on peut facilement construire une partie finie $F$ de $\Gamma$ possédant la propriété suivante : pour tout $\alpha > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, à toute $(F, \varepsilon)$-représentation, on peut associer un fibré $\alpha$-plat. On obtient ainsi une autre façon de démontrer que l'élément de Bott de $\mathbf{T}^2$ est presque plat. Enfin, soit $u$ la $(F, \varepsilon)$-représentation associée à un fibré $\alpha$-plat $E$. Alors le fibré associé est isomorphe à $E$. (Ceci généralise la proposition 3.3.)

### Image de l'invariant de Mishchenko par une "presque représentation"

L'invariant de Mishchenko est un élément du groupe de Wall $L(\mathbf{C}[\Gamma])$ et est donc représenté par un élément autoadjoint inversible $x \in M_n(\mathbf{C}[\Gamma])$.

Soit $u$ une application de $\Gamma$ dans $M_N(\mathbf{C})$ telle que $u(g^{-1}) = u(g)^*$ pour tout $g \in \Gamma$. On déduit de $u$ une application linéaire encore notée $u$ de $\mathbf{C}[\Gamma]$ dans $M_N(\mathbf{C})$ en posant $u(\sum_{g\in\Gamma} a_g g) = \sum_{g\in\Gamma} a_g u(g)$. Remarquons que $u$ est autoadjointe *i.e.* que $u(x^*) = u(x)^*$ pour tout $x \in \mathbf{C}[\Gamma]$. Enfin, on étend $u$ aux matrices ; on obtient ainsi une application linéaire encore notée $u$ de $M_n(\mathbf{C}[\Gamma])$ dans $M_{nN}(\mathbf{C})$.

On démontre sans peine le résultat suivant :

*Lemme* 3.5.— a) *Soit $x$ un élément autoadjoint et inversible de $M_n(\mathbf{C}[\Gamma])$. Il existe une partie finie $F$ de $\Gamma$ et un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que l'image $u(x)$ par toute $(F, \varepsilon)$-représentation $u$ soit inversible dans $M_{nN}(\mathbf{C})$.*

b) *Soient $x$ et $y$ deux éléments autoadjoints et inversibles de $M_n(\mathbf{C}[\Gamma])$. Si $x$ et $y$ définissent le même élément de $L(\mathbf{C}[\Gamma])$, il existe une partie finie $F$ de $\Gamma$ et un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $u(x)$ et $u(y)$ ont même signature par toute $(F, \varepsilon)$-représentation $u$.*

Le a) résulte de ce que $u(x^{-1})\,u(x)$ est proche de 1. Le b) résulte sans difficulté de la définition du groupe $L(\mathbf{C}[\Gamma])$. (Ici, il s'agit de la signature de l'élément autoadjoint inversible $u(x) \in M_{nN}(\mathbf{C})$, *i.e.* le nombre de valeurs propres positives moins le nombre de valeurs propres négatives.)

Le théorème 3.4 résulte alors du théorème suivant :

**THÉORÈME 3.6** ([12]).—*Soient $V$ une variété riemannienne compacte orientée, $\Gamma$ son groupe fondamental. Notons $\sigma_V$ la classe de l'opérateur de signature $V$ dans le groupe de $K$-homologie $K_0(V)$. Soit $x \in \mathbf{C}[\Gamma]$ un représentant de l'invariant de Mishchenko. Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour* *tout fibré $\alpha$-plat $E$, on ait $\langle \sigma_V, [E] \rangle = \mathrm{Signature}(u(x))$, où $u$ désigne la presque représentation associée à $E$.*

Ici, $[E]$ désigne la classe du fibré $E$ dans $K^0(V)$.

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème de l'indice plus général où l'opérateur de signature est remplacé par n'importe quel opérateur elliptique $E$. On regarde alors l'indice de $D$ dans le groupe $K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$ au lieu de $L(\mathbf{C}[\Gamma])$. On peut encore définir l'image de $x \in K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$ par une presque représentation comme dans le lemme 3.5. La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 2.3 ci-dessus. On utilise ici la cohomologie cyclique entière, qui est une généralisation naturelle de la cohomologie cyclique.

**Importance du théorème 3.4.**

D'après [12], on peut construire suffisamment de fibrés presque plats pour redémontrer la conjecture de Novikov dans les cas suivants :

a) si $\Gamma$ est un sous-groupe discret d'un groupe de Lie connexe ou le groupe fondamental d'une variété complète de courbure sectionnelle négative ou nulle [30] ;

b) si $\Gamma$ est un sous-groupe discret d'un groupe algébrique sur un corps local ([32]).

De plus, ce théorème permet de donner une nouvelle démonstration de la conjecture de Novikov pour les groupes hyperboliques.

*Remarques* : La construction de tous les fibrés presque plats utilisés pour établir les corollaires du théorème 3.4 passe par des applications lipschitziennes propres de $\Gamma$ dans $\mathbf{R}^n$. Or on peut faire correspondre à une telle application un élément de $K$-homologie de $C^*(\Gamma)$[4], donc lui associer un invariant d'homotopie. L'avantage de cette façon de procéder, outre sa simplicité est qu'elle établit en plus la conjecture de Novikov forte.

[4] Cette construction m'a été signalée par A. Connes. Elle n'est pas encore publiée, mais devrait faire partie de la version "détaillée" de [12].

## 4. COMPLÉMENTS

### Conjecture de Gromov-Lawson.

Commençons par énoncer cette conjecture :

**Conjecture** (*cf.* [21]) : *Soit $V$ une variété compacte spinorielle de courbure scalaire strictement positive. Notons $\Gamma$ le groupe fondamental de $V$ et $f : V \to B\Gamma$ l'application classifiante. Alors, pour tout $x \in H^*(B\Gamma; \mathbf{C})$, $\langle \alpha_V, f^*(x) \rangle = 0$ où $\alpha_V \in H_*(V; \mathbf{Q})$ désigne le genre $\widehat{A}$ de $V$, i.e. l'image de la classe de $K$-homologie de l'opérateur de Dirac de $V$ par l'isomorphisme de Chern.*

On a :

a) La conjecture de Gromov-Lawson est vraie pour les groupes hyperboliques.

b) Soient $V$ une variété compacte spinorielle de courbure scalaire strictement positive. L'indice de l'opérateur de Dirac à coefficients dans une classe de $K$-théorie presque plate est nul.

En fait, la conjecture de Gromov-Lawson est une conséquence de la conjecture de Novikov forte (*cf.* [42]), d'où le a). Le b) est presque immédiat.

### Feuilletages : Conjecture de Baum-Connes

On peut transposer les méthodes décrites ci-dessus dans d'autres cadres (*cf.* [2]). Dans le cas des feuilletages par exemple, on s'intéresse à la généralisation suivante de la conjecture de Novikov (*cf.* [3]) :

Soit $(V, F)$ une variété compacte feuilletée de classe $C^\infty$. Le groupoïde d'homotopie de $(V, F)$ est le groupoïde différentiable des classes d'homotopie des chemins tracés dans les feuilles de $(V, F)$. Rappelons qu'une homotopie feuilletée est une homotopie $(h_t)_{t\in[0,1]} : W \to V$ telle que pour tout point $x \in W$, $h_t(x)$ reste sur une même feuille de $V$.

Soient $(V, F)$ et $(W, H)$ deux variétés compactes feuilletées de classe $C^\infty$.

Une application $f : W \to V$ de classe $C^\infty$ est appelée une équivalence d'homotopie feuilletée s'il existe une application $g : V \to W$ telle que :

a) l'image par $f$ (*resp.* $g$) de toute feuille de $W$ (*resp.* $V$) est contenue dans une feuille de $V$ (*resp.* $W$) :

b) Il existe des homotopies feuilletées reliant $g \circ f$ et $f \circ g$ à l'identité de $V$ et $W$.

La conjecture de Baum-Connes s'énonce :

**Conjecture** (*cf.* [3]) : *Soient $V$ une variété compacte orientée, de dimension paire et $F$ un feuilletage sur $V$ ; notons $BG$ l'espace classifiant du groupoïde d'homotopie $G$ de $(V, F)$ et $h : V \to BG$ l'application classifiante. Alors l'image par $h$ de $\sigma_V$ dans $K_0(BG) \otimes \mathbf{Q}$ est un invariant d'homotopie feuilletée.*

Rappelons que $\sigma_V$ désigne la classe dans le groupe de $K$-homologie $K_0(V)$ de l'opérateur de signature de $V$. Cette conjecture signifie que si $f : (W, H) \to (V, F)$ est une équivalence d'homotopie feuilletée préservant l'orientation, on a l'égalité de $(h \circ f)_*(\sigma_W)$ avec $h_*(\sigma_V)$ modulo la torsion.

Les deux méthodes décrites ci-dessus s'appliquent à ce cadre :

a) Un élément de $H^*(BG; \mathbf{C})$ définit un cocycle cyclique sur une algèbre (notée $C_c^\infty(G)$) qui joue dans ce cadre le rôle de $\mathcal{R}[\Gamma]$. On obtient une démonstration de cette conjecture pour les cocycles qui peuvent être étendus à une sous-algèbre pleine de la $C^*$-algèbre du feuilletage. Cette méthode est développée dans [10] où de nombreuses classes de cohomologie sont traitées (en particulier les classes de cohomologie de Gel'fand Fuchs).

b) Soient $(V, F)$ et $(W, H)$ deux variétés riemanniennes feuilletées orientées. Soit $f : W \to V$ une équivalence d'homotopie feuilletée préservant l'orientation. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout fibré hermitien $E$ sur $V$ $\alpha$-plat le long de $F$, les signatures de $V$ à coefficients dans $E$ et de $W$ à coefficients dans $f^*E$ sont égales (*cf.* [23]).

## BIBLIOGRAPHIE

[1] M.F. ATIYAH - *Elliptic operators discrete groups and von Neumann algebras*, Astérisque **32-33** (1976), 43-72.

[2] P. BAUM and A. CONNES - *Geometric $K$-theory for Lie groups and foliations*, preprint I.H.E.S. (1982).

[3] P. BAUM and A. CONNES - *Leafwise homotopy equivalence and rational Pontrjagin classes.* **in** Foliations, Advanced Studies in Pure Mathematics **5** (1985), 1-14.

[4] M. BÖKSTEDT, W.C. HSIANG et I. MADSEN - En préparation. Voir l'exposé de BÖKSTEDT au Congrès (ICM) de Kyoto (1990).

[5] J.-B. BOST - *$K$-théorie des produits croisés et principe d'Oka*, C.R.A.S. Paris **301**, Ser. I (1985), n° 5, 189-192.

[6] D. BURGHELEA - *The cyclic homology of groups*, Comment. Math. Helvetici **60** (1985), 354-365.

[7] S.E. CAPPELL - *On homotopy invariance of higher signatures*, Invent. Math. **33** (1976), 171-179.

[8] P. CARTIER - *Homologie cyclique : Rapport sur des travaux récents de Connes, Karoubi, Loday, Quillen, ...*, Sém. Bourbaki, Février 1984, exposé n° 621, Astérisque **121-122** (1985), 123-146.

[9] A. CONNES - *Non commutative differential geometry. Chapter I : The Chern character in $K$-homology. Chapter II : De Rham homology and non commutative algebra*, Publ. Math. I.H.E.S. **62** (1986), 257-360.

[10] A. CONNES - *Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation*, **in** Geometric methods in operator algebras. H. Araki and E.G. Effros éd., Pitnam Research Notes in Math. Series **123**, Longman Wiley (1986), 52-144.

[11] A. CONNES - *Entire cyclic cohomology of Banach algebras and the character of $\theta$-summable Fredholm modules*, $K$-theory **1** (1988), 519-548.

[12] A. CONNES, M. GROMOV et H. MOSCOVICI - *Conjecture de Novikov et fibrés presque plats*, C.R.A.S. Paris **310** Ser. I (1990), 273-277.

[13] A. CONNES and H. MOSCOVICI - *Cyclic cohomology, the Novikov

*conjecture and fundamental groups*, Topology **29** (1990), 345-388.

[14] T. FACK - *$K$-théorie bivariante de Kasparov*, Sém. Bourbaki Février 1983, exposé n° 605, Astérisque **105-106** (1983), 149-166.

[15] F.T. FARRELL et W.C. HSIANG - *On Novikov's conjecture for non-positively curved manifolds.* I, Ann. Math. **113** (1981), 199-209.

[16] B.L. FEIGIN et B.L. TSYGAN - *Additive $K$-theory*

[17] E. GETZLER - *Pseudodifferential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem*, Comm. Math. Phys. **92** (1983), 163-176.

[18] É. GHYS - *L'invariant de Godbillon-Vey*, Sém. Bourbaki, mars 1989, Exposé n° 706, Astérisque **177-178** (1989), 155-182.

[19] É. GHYS - *Les groupes hyperboliques*, Sém. Bourbaki Mars 1990, exposé n° 722, à paraître dans Astérisque **189-190**.

[20] M. GROMOV - *Hyperbolic groups*, **in** Essays in group theory. M.S.R.I. Publ. **8** (1987), 75-263.

[21] M. GROMOV et H.B. LAWSON - *Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds*, Publ. Math. I.H.E.S. **58** (1983), 83-196.

[22] P. de la HARPE - *Groupes hyperboliques, algèbres d'opérateurs et un théorème de Jolissaint*, C.R.A.S. Paris **307** Ser. I (1988), 771-774.

[23] M. HILSUM et G. SKANDALIS - *Invariance par homotopie de la signature à coefficients dans un fibré presque plat (d'après Connes-Gromov-Moscovici)*, à paraître dans J. für Crelle und Ang. Math.

[24] F. HIRZEBRUCH - *Topological methods in algebraic geometry*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1965).

[25] W.C. HSIANG, H.D. REES - *Miscenko's work on Novikov's conjecture*, Contemp. Math. **72** (1982), 77-98.

[26] P. JOLISSAINT - *$K$-groups of reduced $C^*$-algebras and rapidly decreasing functions on groups*, $K$-theory **2** (1989), 723-735.

[27] J. KAMINKER and J.G. MILLER - *Homotopy invariance of the analytic signature operators over $C^*$-algebras*, J. Operator Theory **14** (1985), 113-127.

[28] M. KAROUBI - *$K$-theory, an introduction*, Grund. des Mat. Wis., Springer-Verlag (1978).

[29] G.G. KASPAROV - *Topological invariants of elliptic operators* I : *K-homology*, Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. Ser. Mat. **39** (1975), 796-838 ; English transl. in Math. U.S.S.R. Izv. **9** (1975), 751-792.

[30] G.G. KASPAROV - *Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture*, Inv. Math. **91** (1988), 147-201 ; (*cf.* aussi : *K-theory, group $C^*$-algebras and higher signatures*, Conspectus Parts 1 and 2, preprint Chernogolovka (1981).

[31] G.G. KASPAROV - *Operator K-theory and its applications : elliptic operators, group representations, higher signatures, $C^*$-extensions*, in Proc. I.C.M. conf. Warsaw 1983, PWN Elsevier (1984), 987-1000.

[32] G.G. KASPAROV and G. SKANDALIS - *Groups acting on buildings, Operator K-theory and Novikov's conjecture*, $K$-theory **4** (1991), 303-337.

[33] G. LUSZTIG - *Novikov's higher signature and families of elliptic operators*, J. of Diff. Geometry **7** (1971), 229-256.

[34] A.S. MISHCHENKO - *Homotopy invariance of non simply connected manifolds*, I : *Rational invariance*, Math. U.S.S.R. Izv. **4** (1970), 509-519, traduit de Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. Ser. Math. **34** (1970), 501-514.

[35] A.S. MISHCHENKO - *Infinite dimensional representations of discrete groups and higher signatures*, Izv. Akad. S.S.S.R. Ser. Mat. **38** (1974), 81-106.

[36] A.S. MISHCHENKO - *$C^*$-algebras and K-theory*, Springer Lect. Notes in Math. vol. **763** (1979), 262-274.

[37] A.S. MISHCHENKO and Yu.P. SOLOV'JEV - *Représentations of Banach algebras and Hirzebruch type formulae*, Mat. Sbornic **111** (1980), 209-226.

[38] H. MOSCOVICI - *Cyclic cohomology and invariants of non-simply connected manifolds*, Proc. I.C.M. Kyoto (1990), à paraître.

[39] S.P. NOVIKOV - *Analogues hermitiens de la K-théorie*, Actes, Congrès Intern. Math. **2** (1970), 39-45.

[40] M. PIMSNER - *KK-groups of crossed products by groups acting on trees*, Inv. Math. **86** (1986), 603-634.

[41] H.D. REES - *Special manifolds and Novikov's conjecture*, Topology **22**

(1983), 365-378.

[42] J. ROSENBERG - *$C^*$-algebras, positive scalar curvature and the Novikov conjecture*, Publ. Math. I.H.E.S. **58** (1983), 409-424.

[43] Yu.P. SOLOV'EV - Uspekhi Matem. Nauk. **31** n° 1 (1976), 261-262.

[44] Yu.P. SOLOV'EV - Thèse. Université de Moscou (1976).

[45] S. WEINBERGER - *Aspects of the Novikov conjecture*, Contemp. Math. **105** (1990), 281-297.

Georges SKANDALIS

UNIVERSITÉ DE PARIS 7
UFR de Mathématiques
UA 212 du CNRS
Tour 45-55 - 5e étage
2 place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05