JEAN-CLAUDE SIKORAV

Homologie associée à une fonctionnelle [d'après A. Floer]

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 733, p. 115-141

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__115_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 1990
43ème année, 1990-91, n° 733

HOMOLOGIE ASSOCIÉE À UNE FONCTIONNELLE [d'après A. FLOER]

par Jean Claude SIKORAV

INTRODUCTION

Commençons par rappeler une présentation de la théorie de Morse sur une variété M de dimension finie :

1) Toute fonction $f : M \to \mathbf{R}$ peut être perturbée pour n'avoir que des points critiques non dégénérés.

Si M est compacte, les points critiques sont alors en nombre fini et l'on peut construire un complexe donnant l'homologie de M, de la façon suivante :

2) C_i est engendré librement sur $\mathbf{Z}$ par les points critiques d'indice i.

3) L'opérateur bord $\partial : C_i \to C_{i-1}$ est défini par $\partial a = \sum \bar{m}(a,b)\, b$, où a est un point d'indice i, b décrit les points d'indice $i-1$ et $\bar{m}(a,b)$ compte algébriquement le nombre de lignes de gradient descendant de a à b pour une métrique générique.

L'existence du complexe est dûe à R. Thom en 1949 [Th] et la description du bord à S. Smale en 1960 [S], mais sa compréhension a été renouvelée en 1981 par E. Witten [Wi1], motivé par des considérations physiques. Ce dernier fait jouer le premier rôle à l'espace $\mathcal{M}(a,b)$ des lignes de gradient descendant de a à b. C'est génériquement une variété de dimension $ind(a) - ind(b)$, ce qui se voit classiquement en l'écrivant comme intersection de la variété stable $W^s(a)$ et de la variété instable $W^u(b)$. Mais Witten le considère comme un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{B}(a,b)$ des chemins $\gamma : \mathbf{R} \to M$ reliant a à b, formé des minima de l'énergie $E(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[|\dot\gamma(t)|^2 + |\nabla f(\gamma(t))|^2\right] dt$. Ces chemins sont aussi appelés "instantons".

S.P. Novikov [N] a indiqué une généralisation de cette construction pour une fonction à valeurs dans S^1 (ou plus généralement pour une forme fermée non exacte). L'anneau de base du complexe est alors un complété convenable de $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ (pour tenir compte des différents relevés des points critiques sur le revêtement d'intégration).

La présentation de Witten ouvrait la voie à une généralisation de ce complexe de "Thom-Smale-Witten" à la dimension infinie, pour des fonctionnelles dont les points critiques ont un indice et un co-indice infini. C'est ce qu'a fait Floer en 1986-87 dans deux cas particuliers, intéressants à deux titres très différents : la fonctionnelle d'aire (ou d'action) en géométrie symplectique [F2], dont nous dirons quelques mots au §6 (elle mériterait beaucoup plus !), et la fonctionnelle de Chern-Simons, qui donne naissance à *l'homologie d'instantons* [F3], à laquelle cet exposé sera essentiellement consacré.

Dans les deux cas, l'indice d'un point critique est d'abord défini de façon relative (différence d'indices entre deux points) en utilisant la notion de *flot spectral* de [APS III]. Un phénomène nouveau par rapport à la dimension finie apparaît : cette différence dépend de la donnée d'une classe d'homotopie de chemins entre les deux points (voir 1.5 et 6.1). Pour la fonctionnelle de Chern-Simons, qui est en fait à valeurs dans S^1, ceci implique que le complexe est défini sur $\mathbf{Z}$ (à la différence de l'homologie de Novikov), mais qu'il est gradué sur $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$.

Le point sans doute le plus intéressant de la théorie est l'interprétation des lignes de gradient. Pour la fonctionnelle de Chern-Simons, elles s'interprètent comme des connexions (modulo jauge) *autoduales* sur $\mathbf{R} \times M$ (voir 1.4). Une ligne de gradient joint deux points critiques si la connexion associée est asymptotiquement plate. La fonctionnelle d'énergie est celle de Yang-Mills : $E(A) = \int_{\mathbf{R}\times M} |F(A)|^2$. Rappelons que cette équation d'autodualité, considérée sur une variété W^4 fermée, est à la base des travaux de Donaldson [D1] [D2] [D3]. Son étude sur une variété ouverte a été commencée par Taubes [Ta1].

C'est cette généralisation de l'équation des lignes de gradient qui va fournir les propriétés les plus intéressantes de l'homologie d'instantons, notamment les propriétés de "Topological Quantum Field Theory" en dimension (3+1) : voir [At1],[At2] et [Wi2].

Dans le cas symplectique, l'équation des lignes de gradient s'interprète comme celle des courbes pseudo-holomorphes au sens de M. Gromov [Gr] (voir 6.1).

On se contentera ici d'exposer quelques résultats de cette théorie et de donner une idée des démonstrations. La seule référence publiée pour celles-ci reste l'article [F3], mais nous avons aussi utilisé des préprints de Jones-Rawnsley-Salamon [JRS] et de Fukaya [Fu]. Signalons que ce dernier donne une extension des résultats de Floer pour une variété de dimension trois quelconque.

1. LA FONCTIONNELLE DE CHERN-SIMONS

1.1. Rappels sur les connexions et l'action du groupe de jauge (*cf.* [FU], [DK])

Soit M une variété et $P \to M$ un G-fibré principal, où G est un groupe de Lie. L'espace $\mathcal{A}(P)$ des connexions sur P est affine sur $\Omega^1(M, ad(P))$. On notera $\Omega^i(M, ad(P)) = \Omega^i_{ad}(M)$ ou Ω^i_{ad} s'il n'y a pas de risque de confusion. La connexion a donne une dérivation covariante $d_a : \Omega^i_{ad} \to \Omega^{i+1}_{ad}$. Le composé $d_a \circ d_a$ est la multiplication (en utilisant le crochet dans l'algèbre de Lie) par la *courbure* $F(a) \in \Omega^2_{ad}$. Le groupe d'automorphismes de P ou *groupe de jauge*, noté $\mathcal{G}(P)$, agit naturellement sur $\mathcal{A}(P)$. Son algèbre de Lie s'identifie à Ω^0_{ad} et la différentielle de $a \mapsto g.a$ est d_a (en prenant l'action à droite). On note $\mathcal{B}(P) = \mathcal{A}(P)/\mathcal{G}(P)$ le quotient : il est séparé, et est une variété près des classes de connexions *irréductibles*. L'espace tangent $T_{[a]}\mathcal{B}^*(M)$ est $\Omega^1_{ad}/\ im\ d_a$.

Soit σ une métrique riemannienne sur M. En utilisant le produit scalaire naturel sur $su(2)$ on peut définir l'opérateur de Hodge $*_\sigma : \Omega^i_{ad} \to \Omega^{n-i}_{ad}$ et l'adjoint L^2,$d_a^* = *d_a*$, ce qui permet d' identifier

$$T_{[a]}\mathcal{B}^*(M) = ker\ d_a^* \subset \Omega^1_{ad}.$$

Le plus souvent, P sera trivial. Le choix d'une trivialisation permet alors d'identifier $\mathcal{A}(P) = \Omega^1(M, g)$ et l'on a $d_a\omega = d\omega + [a, \omega]$. Le groupe

$\mathcal{G}(P) = \mathcal{G}(M)$ est formé des applications de M dans G, et il agit sur $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(M)$ par: $g.a = g^{-1}dg + g^{-1}ag$. De plus, on supposera $G = SU(2)$ ou $SO(3)$ de sorte que : a irréductible $\Leftrightarrow \mathcal{G}_a = Z(G)$ (où $\mathcal{G}_a = \{g \in \mathcal{G}(M) \mid g \cdot a = a\}$ est le groupe d'isotropie et $Z(G)$ le centre) $\Leftrightarrow ker(d_a) = 0$.

Remarque.— Il faut travailler avec des espaces de Sobolev pour avoir des variétés banachiques auxquelles on peut appliquer le théorème des fonctions implicites. Par exemple on peut prendre pour $\mathcal{A}(P)$ des formes de classe L_1^p (une dérivée dans L^p) et pour $\mathcal{G}(P)$ des applications de classe L_2^p, avec $p > \frac{1}{2} dim\ M$ pour que $\mathcal{G}(P)$ soit formé d'applications continues. Au §2 on aura besoin de prendre $p > dim\ M$ pour que $\mathcal{A}(P)$ soit formé d'applications continues.

1.2. Fonctionnelle de Chern-Simons [CS] [APS]

On suppose maintenant M de dimension trois, fermée, orientée, et $G = SU(2)$. La courbure définit alors une 1-forme sur $\mathcal{A}(M)$: $\alpha(a) \cdot u = \int_M tr\big(F(a) \wedge u\big)$. Cette forme est fermée car $d\alpha(u, v) = \int_M tr\big(d_a(u \wedge v)\big) = \int_M d\big(tr(u \wedge v)\big)$. Comme $\mathcal{A}(M)$ est un espace vectoriel, elle a une primitive préférée qui est par définition la *fonctionnelle de Chern-Simons*. Si le fibré est trivial, on trouve en utilisant la formule pour la courbure :

$$CS(a) = \int_M tr(\frac{1}{2} a \wedge da + \frac{1}{3} a \wedge a \wedge a).$$

En utilisant Stokes, on trouve la définition originelle, issue de la théorie des classes caractéristiques secondaires :

$$CS(a) = \frac{1}{2} \int_{M \times I} tr\big(F(A) \wedge F(A)\big),$$

où $A \in \Omega^1_{ad}(M \times I)$, est telle que $A \mid M \times \{0\} = 0$ et $A \mid M \times \{1\} = a$.

La courbure étant équivariante sous l'action du groupe de jauge, descend en une 1-forme fermée sur $\mathcal{B}(M)$. Elle n'est alors plus exacte. Plus précisément, en considérant un fibré convenable sur $M \times S^1$, le fait que $\frac{1}{8\pi^2} tr(F(A) \wedge F(A))$ est l'intégrande donnant la deuxième classe de Chern implique

$$CS(g \cdot a) = CS(a) + 4\pi^2 deg(g).$$

Donc, si l'on note $\mathcal{G}_o(M) \subset \mathcal{G}(M)$ la composante connexe de id, formé des automorphismes de degré 0, et $\hat{\mathcal{B}}(M) = \mathcal{A}(M)/\mathcal{G}_o(M)$, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{B}}(M) & \xrightarrow{CS} & \mathbf{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}(M) & \xrightarrow{CS} & \mathbf{R}/4\pi^2\mathbf{Z} \end{array}$$

Remarque.— Les espaces $\mathcal{B}(M)$ et $\mathcal{B}^*(M)$ ont le type d'homotopie faible du classifiant $B\big(\mathcal{G}(M)/\{\pm id\}\big)$, donc $\pi_1\mathcal{B}(M) = \pi_o\big(\mathcal{G}(M)/\{\pm 1\}\big) = \mathbf{Z}$, donné par le degré, et $\hat{\mathcal{B}}(M)$ est le revêtement universel de $\mathcal{B}(M)$.

1.3. Points critiques

Par définition, les points critiques de CS sur $\mathcal{A}(M)$ sont les connexions plates. L' holonomie donne une identification canonique entre l'espace des connexions plates modulo jauge et l'espace $R(M) = Hom\big(\pi_1 M, SU(2)\big)$ /conjugaison. Cet espace a été étudié par de nombreux auteurs, en particulier c'est lui qui figure dans la définition de l'invariant de Casson [AM] [Ma]. Notons qu'il est compact puisque $\pi_1 M$ est de type fini. On note de même $R^*(M)$ correspondant aux connexions plates irréductibles, ce qui équivaut à l'irréductibilité de la représentation d'holonomie.

1.4. Lignes de gradient

Si M est munie d'une métrique riemannienne, on peut considérer $*_\sigma F(a) \in \Omega^1_{ad}(M)$ comme le *gradient* L^2 de CS sur $\mathcal{A}(M)$. Par passage au quotient, on obtient une section $\nabla_\sigma CS : \mathcal{B}^*(M) \to \hat{T}\mathcal{B}^*(M)$, où $\hat{T}\mathcal{B}^*(M)$ est un complété convenable du fibré tangent.

Soit $t \mapsto a(t)$ un chemin dans $\mathcal{A}(M)$. Notant A la connexion $\{a(t)\} \in \Omega^1_{ad}(\mathbf{R} \times M)$ (A est "en jauge temporelle", c'est-à-dire sans terme dt), on a

$$F(A) = \{F(a(t))\} + \partial a/\partial t \wedge dt.$$

On en déduit que l'équation des lignes de gradient descendantes $\partial a/\partial t + *_\sigma F\big(a(t)\big) = 0$ équivaut à *l'équation d'autodualité*

$$F^-(A) = \frac{1}{2}\big(F(A) - *F(A)\big) = 0,$$

où A est la connexion $\{a(t)\} \in \Omega^1_{ad}(\mathbf{R} \times M)$ et la métrique est le produit $dt^2 \times \sigma$. Notons quetoute connexion sur $\mathbf{R}\times M$ est équivalente modulo $\mathcal{G}(\mathbf{R}\times M)$ à une connexion $A = \{a(t)\}$ sans terme dt, ou "en jauge temporelle". En effet, posant $A = \{a(t)\} + \{b(t) \wedge dt\}$, il suffit de résoudre l'équation différentielle ordinaire $g^{-1}\frac{\partial g}{\partial t} + g^{-1}bg = 0$. Ceci prouve en fait qu'on a une identification naturelle

$$\mathcal{B}(\mathbf{R} \times M) = \mathcal{A}(\mathbf{R} \times M)/\mathcal{G}(\mathbf{R} \times M) = C^\infty(\mathbf{R}, \mathcal{A}(M))/\mathcal{G}(M)$$

A fortiori un élément de $\mathcal{B}(\mathbf{R} \times M)$ définit un chemin dans $\mathcal{B}(M)$. Notons que le caractère elliptique de l'équation d'autodualité modulo jauge implique qu'il n'y a pas de solution locale à partir d'une condition initiale arbitraire. Ceci est bien sûr lié au fait que le gradient L^2 n'est pas un vrai champ de vecteurs.

1.5. Indice d'un point critique [F3] [APS III]

Si M est munie d'une métrique riemannienne, le hessien de CS en un point critique $[a] \in R^*(M)$ s' identifie à $H_a = *d_a|ker\ d_a^*$. Cet opérateur est Fredholm d'indice 0 si on le considère de L^2_1 vers L^2_0. Considéré comme opérateur non borné sur L^2_0, il est auto-adjoint à spectre discret et non borné dans les deux sens.

Ceci empêche de définir l'indice d'un point critique comme le nombre de valeurs propres < 0 du hessien, mais si $[a(t)]$ est un chemin entre deux points critiques, on peut définir le *flot spectral* $SF(H_{a(t)})$ comme le nombre algébrique de valeurs propres qui passent de (< 0) à (≥ 0). Il ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin et pas de la métrique.

En fait, on aura besoin de traiter aussi les connexions plates réductibles, où $\mathcal{B}(M)$ n'est plus une variété. Pour cela, on remplace H_a par le "hessien équivariant"

$$D_a \in End(\Omega^0 \oplus \Omega^1),\ (u, v) \mapsto (d_a^* v, d_a u + *d_a v).$$

Un calcul simple montre que si a est plate on a $ker\ D_a = ker(d_a|\Omega^0) \oplus ker\ H_{[a]}$. On définit ainsi $SF(a,b) \in \mathbf{Z}$ pour a, b plates quelconques, nombre ne dépendant que des classes de a et b dans $\hat{R}(M)$.

En revanche, $SF(a,b)$ n'est défini que modulo 8 sur $R(M)$. Plus précisément :

PROPOSITION [APS III].— *Si a est plate et $g \in \mathcal{G}(M)$ on a $SF(ga,a) = 8\ deg(g)$.*

La preuve de cette proposition repose sur l'identification de $SF(ga,a)$ avec l'indice de l'opérateur d'autodualité sur le $SU(2)$-fibré $P_g \to S^1 \times M$ défini par g. Rappelons que l'indice sur une variété fermée vaut $8c_2(P) - 3(1 - b_1(W) + b_2^-(W))$ [FU] [DK].

On peut maintenant définir l'indice d'une (classe de) connexion plate en utilisant la connexion triviale privilégiée θ :

DÉFINITION.— *Si a est une connexion plate on pose $ind([a]) = SF(a,\theta)$. Ceci définit $ind(\alpha) \in \mathbf{Z}$ si $\alpha \in \hat{R}(M)$ et $ind(\alpha) \in \mathbf{Z}_{/8\mathbf{Z}}$ si $\alpha \in R(M)$.*

Précisons l'effet d'un changement d'orientation de M. Comme $CS(-M,a) = -CS(M,a)$ on a $SF(-M,a,b) = SF(M,b,a) - dim\ ker(D_a) + dim\ ker(D_b)$, d'où

$$ind(-M,a) = -ind(M,a) - dim\ ker(D_a) + dim\ ker(D_\theta).$$

Notations Si $a,b \in R(M)$, on note $\mathcal{B}(a,b) \in \mathcal{B}(\mathbf{R} \times M)$ le sous-espace correspondant aux chemins de a 'a b dans $\mathcal{B}(M)$. Ses composantes connexes $\mathcal{B}(a,b;i)$ sont paramétrées par les entiers i dans la classe modulo 8 de $ind(a) - ind(b)$ (valeurs du flot spectral).

1.6. DÉFINITION.— *Un point critique $[a] \in R(M)$ est non dégénéré si $ker\ H_{[a]} = 0$.*

(C'est la notion naturelle pour une fonctionnelle équivariante.)

Cette propriété s'écrit $ker(d_a) \cap ker(d_a^*) = 0$ soit $H^1(\Omega^*, d_a) = 0$ par théorie de Hodge. Or on a $H^1(\Omega^*, d_a) = H^*_{[a]}(M, su(2)) = H^*_{[a]}(\pi_1, M, su(2))$, cohomologies à coefficients tordus par $[a] : \pi_1 M \longrightarrow SU(2)$ (définie modulo conjugaison). L'espace $H_{[a]}(\pi_1 M, su(2))$ est l'espace tangent de Zariski à

$R(M)$. Donc si $[a]$ est non dégénéré il est isolé dans $R(M)$. Comme $R(M)$ est compact, il sera fini si tous ses points sont non dégénérés. Notons que, si a est plate, on a $ker(D_a) = 0$ si et seulement si a est irréductible et non dégénérée.
La connexion triviale est non dégénérée si et seulement si $H^1(M; su(2)) = 0$ soit si M est une *sphère d'homologie rationnelle.* On a alors $dim\ ker(D_\theta) = dim\ ker(d_\theta) = 3$, donc si a est un point critique non dégénéré on a :

$$ind\ (-M, a) = 3 - ind(M, a) - dim\ \mathcal{G}_a.$$

Si M est de plus une sphère d'homologie entière, le seul morphisme réductible $\pi_1 M \to SU(2)$ est trivial : en effet, il prend ses valeurs dans un $S^1 \subset SU(2)$, et $Hom(\pi_1 M, S^1) = H^1(M, S^1) = 0$.

2. PERTURBATIONS [Ta4]

2.1. Espace des perturbations

On fixe une 2-forme ω_0 sur D^2, à support compact, positive ou nulle et d'intégrale 1. Pour un plongement $S^1 \times D^2 \to M$, on définit $\tau_\gamma : \mathcal{B}(M) \to \mathbf{R}$:

$$\tau_\gamma(a) = \int_{D^2} tr\big(h_a(z)\big)\omega_0$$

où $h_a(z)$ est l'holonomie de a le long des $\gamma(S^1 \times \{z\})$. Une perturbation sera de la forme $\pi = \sum_i v_i \tau_{\gamma_i}$ où $v_i \in \mathbf{R}$. On définit ainsi un espace Π paramétré par (Γ, v) où Γ est une famille $(\gamma_1, \cdots, \gamma_N)$ et $v \in \mathbf{R}^N$. On a alors la

PROPOSITION.— 1) *La fonctionnelle perturbée a les mêmes propriétés que CS (perturbation "compacte"). En particulier l'ensemble critique reste compact et chaque point critique a un indice dans $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$.*

2) *Si M est une sphère d'homologie entière, il existe $\gamma_1, \cdots, \gamma_N$ tels que pour presque tout $v \in \mathbf{R}^N$ les points critiques de $CS_{\Gamma,v}$ sont non dégénérés.*

Démonstration.— 1) C'est essentiellement parce que τ_γ (donc π), a un gradient L^2 qui est un vrai champ de vecteurs sur $\mathcal{B}(M)$. Il est donné par :

$$\nabla_\sigma \tau_\gamma(a) = h_a \cdot \big(*_\sigma \omega_0(z)\big) \text{ sur } \gamma(S^1 \times D^2), \text{ 0 ailleurs.}$$

2) L'hypothèse sur M fait que $[\theta] \in R(M)$ est non dégénéré et $R^*(M) = R(M) - \{[\theta]\}$. De plus, la régularité elliptique donne la compacité de l'ensemble (que l'on veut rendre vide)

$$K = \Big\{ \big(a, [u]\big) \in T\mathcal{B}^*(M) \mid [a] \in R^*(M), H_a \cdot u = 0 \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^2} = 1 \Big\}.$$

Comme un élément de $\mathcal{B}(M)$ est défini par la trace de l'holonomie de *tous* les lacets $S^1 \to M$ ayant un vecteur tangent fixe à l'origine, la compacité de K implique qu'il existe $\gamma_1, \cdots, \gamma_N$ tels que, si l'on pose $\tau = (\tau_{(\gamma_i)}) : \mathcal{B}(M) \to \mathbf{R}^N$, alors $d\tau : TK \to \mathbf{R}^N$ est injectif sur toute fibre de K. Il en résulte que l'application $\big(v, [a]\big) \longrightarrow \nabla(CS+ < v, \tau >)\big([a]\big)$ de $\mathbf{R}^N \times \mathcal{B}^*$ dans $T\mathcal{B}^*$ est transverse à la section nulle, son hessien par rapport à la seconde variable définissant un opérateur Fredholm d'indice N. Le théorème de Sard "classique" permet de conclure (pas besoin de Sard-Smale).

2.2. Interprétation de l'invariant de Casson en théorie de jauge

Rappelons la définition de l'invariant de Casson $\lambda(M)$ pour une sphère d'homologie entière de dimension 3 (*cf.* [AM], [Ma]) : si $M = M_1 \cup_\Sigma M_2$ est un scindement de Heegaard de M, c'est la moitié du nombre d'intersection $R^*(M_1) \cdot R^*(M_2)$ où $R^*(M_i) \subset R^*(\Sigma)$ sont les espaces de représentations non triviales de π_1 dans $SU(2)$ (modulo conjugaison). Notons que $R^*(M_1) \cap R^*(M_2) = R^*(M)$.

Pour une perturbation $\pi \in \Pi$ générique au sens de 2.1, l'ensemble $R^*_\pi = crit\big(CS + \pi \mid \mathcal{B}^*(M)\big)$ est fini. De plus à chaque point est associé un indice $ind_\pi\big([a]\big) \in \mathbf{Z}_{/8\mathbf{Z}}$, de sorte que $(-1)^{ind_\pi(a)}$ est bien défini.

THÉORÈME.— [Ta4] *La "caractéristique d'Euler"*

$$n(\pi) = \sum_{[a] \in R^*_\pi} (-1)^{ind_\pi\left([a]\right)}$$

ne dépend pas de π, et est égale à $2\lambda(M)$. Dans le cas où $R^*(M)$ est non dégénéré, on a en fait l'énoncé plus précis $\big(R^*(M_1)\cdot R^*(M_2)\big)_{[a]} = (-1)^{ind(a)}$..

2.3. Le gradient de CS_π donne naissance à une application $F_\pi : \mathcal{A}(\mathbf{R}\times M) \to \Omega^{2,-}_{ad}(\mathbf{R}\times M)$ qui est une perturbation équivariante de F^-. Pour a, b dans R_π on note $\mathcal{M}_\pi(a,b) \subset \mathcal{B}(a,b)$ l'espace des modules de solutions qui donnent un chemin de a à b. Il se décompose en $\mathcal{M}_\pi(a,b;i)$ pour $i \equiv ind(\alpha) - ind(b)$ $mod.$ 8.

3. HOMOLOGIE D'INSTANTONS

3.1. Soit M une 3-sphère d'homologie entière, munie d'une métrique riemannienne σ. Les objets introduits au §2 permettent maintenant de d'éfinir l'homologie associée à la fonctionnelle de Chern-Simons. Pour cela, considérons les espaces $\mathcal{M}(a,b;i) = \mathcal{M}_{\sigma\pi}(a,b;i)$ et $\bar{\mathcal{M}}(a,b;i) = \mathcal{M}(a,b;i)/\mathbf{R}$. où $a, b \in R^*_\pi$ et $i \equiv ind(a) - ind(b)(mod.8)$. Si $a = b$ on suppose $i \neq 0$.

THÉORÈME 1.— *Pour une perturbation $\pi \in \Pi$ générique on a les propriétés suivantes :*

a) *L'espace $\mathcal{M}(a,b;i)$ est une variété lisse orientée de dimension i. Donc $\bar{\mathcal{M}}(a,b;i)$ est une variété orientée de dimension $i-1$.*

b) *Si $ind(a) - ind(b) \equiv 1$ $(mod$ $8)$, la variété orientée de dimension zéro $\bar{\mathcal{M}}(a,b;1)$ est compacte, donc on peut définir son nombre algébrique de points $\bar{m}(a,b)$*
$\in \mathbf{Z}$.

c) *Si $ind(a) - ind(b) \equiv 2$ $(mod$ $8)$, la variété orientée de dimension un $\bar{\mathcal{M}}(a,b;2)$ se compactifie de façon orientée par*

$$\partial\bar{\mathcal{M}}(a,b;2) = \bigsqcup_c \bar{\mathcal{M}}(a,c;1)\times\bar{\mathcal{M}}(c,b;1),$$

où c décrit les points d'indice $ind(a)-1$. Le bord algébrique étant nul, on a $\sum_c \bar{m}(a,c)\bar{m}(c,b) = 0$. Donc si l'on définit $C_i, i \in \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$, comme le groupe abélien libre engendré par les $a \in R^*_\pi$ d'indice i et $\partial : C_i \to C_{i-1}$ par la *formule* $\partial a = \sum_b \bar{m}(a,b)b$, *on a* $\partial \circ \partial = 0$. *Donc* (C_*, ∂) *est un complexe, dont l'homologie est notée* $H(\sigma, \pi)$.

d) *Si* (σ, π) *et* (σ', π') *sont deux choix admissibles on a un isomorphisme canonique de* $H(\sigma, \pi)$ *sur* $H(\sigma', \pi')$.

Ceci rend licite la

DÉFINITION.— *On appelle homologie d'instantons de* M, *et l'on note* $I_*(M)$, *le groupe abélien* $\mathbf{Z}/_{8\mathbf{Z}}$*−gradué* $H(\sigma, \pi)$.

On déduit immédiatement du résultat de [Ta4] (cf. 2.2) la

Propriété. *La caractéristique d'Euler* $\sum_{i=0}^{7} (-1)^i rg\ I_i(M)$ *est égale au double de l'invariant de Casson* $\lambda(M)$.

La dépendance de l'indice envers l'orientation (1.5) donne immédiatement la

Propriété. $I_*(-M)$ *est dual à* $I_{3-*}(M)$ *c'est-à-dire engendré par un complexe dual. On a donc un accouplement* $I_*(M) \otimes I_{3-*}(-M) \to \mathbf{Z}$.
(Cette dualité n'est pas celle de Poincaré mais de la forme de Killing sur $SU(2)$.)

Dans le reste de cette section on donne quelques indications sur la preuve du théorème 1.

3.2. Propriété de variété

Pour prouver le a) du théorème, on définit d'abord des espaces convenables $\mathcal{B}(a,b)$. Choisissant des représentants lisses a,b et une connexion lisse A_0 quelconque valant a pour $t \leq -1$ et b pour $t \geq 1$, on pose $\mathcal{A}(a,b) = A_0 + L_1^4(\Omega^1_{ad})$ (où $\Omega^i_{ad} = \Omega^i_{ad}(\mathbf{R} \times M)$). Cet espace admet une action lisse de

$$\mathcal{G}(\mathbf{R} \times M) =$$
$$\{g \in L^4_{2,loc}((\mathbf{R} \times M, su(2)) \mid \exists \xi \in L^4_2(\Omega^2_{ad}) \text{ tel que } g = exp(\xi) \text{ si } |t| \geq 1\}.$$

Comme dans le cas fermé, le quotient $\mathcal{B}(a,b) = \mathcal{A}(a,b)/\mathcal{G}(\mathbf{R} \times M)$ est une variété, d'espace tangent $T_{[A]}\mathcal{B} = ker\ d_A^*$ (remarquer que A est toujours irréductible). Il est clair qu'il ne dépend que des classes dans $R(M)$ et est la réunion des $\mathcal{B}(a,b;i)$.

Ensuite, l'application $F_{\sigma\pi} : \mathcal{A}(a,b) \to \Omega^{2,-}_{ad}$ passe au quotient par $\mathcal{G}(\mathbf{R}\times M)$ pour définir une section $\bar{F} : \mathcal{B}(a,b) \to \mathcal{L}(a,b)$ d'un certain fibré de fibre $\Omega^{2,-}_{ad}$. La dérivée covariante $D\bar{F}_{[A]} : T_{[A]}\mathcal{B} \to \mathcal{L}_{[A]}$ s'identifie à la restriction à $ker\ d^*_A$ de la différentielle $dF_{\sigma\pi} : \Omega^1_{ad} \to \Omega^{2,-}_{ad}$.

PROPOSITION.— [APSIII] *L'opérateur $D\bar{F}_{[A]}$ est Fredholm, et son indice est i sur la composante $\mathcal{B}(a,b;i)$.*
Pour le démontrer supposons pour simplifier $\pi = 0$. Alors $D\bar{F}_{[A]}$ a mêmes noyau et conoyau que $\partial/\partial t + D_{a(t)}$ sur un espace de chemins de a à b. Comme D_a et D_b sont non dégénérés l'indice vaut $SF(D_{a(t)})$ (fait général).

On achève la preuve du a) (sauf l'orientation) en montrant que pour π générique l'opérateur $D\bar{F}_{[A]}$ est surjectif, ce qui se fait de façon analogue à 2.2.

En fait, on doit aussi considérer le cas a ou b sont réductibles, et pour cela utiliser la théorie de [LM] pour les opérateurs elliptiques sur une variété non compacte. Celle-ci fait intervenir des objets à décroissance exponentielle vers les bouts. On obtient alors :

PROPOSITION.— *Génériquement $\mathcal{M}(a,b;i)$ est une variété orientée si si a ou b est irréductible, de dimension*

$$dim\mathcal{M}(a,b;i) = -dim\ \mathcal{G}_b.$$

COROLLAIRE. *On a $\mathcal{M}(a,b;i) = \emptyset$ si $i - dim\ \mathcal{G}_b \leq 0$ sauf si $i = 0$ et $a = b$.*
(Le corollaire vient de l'action de $\mathbf{R}$.)

On fixe maintenant une perturbation générique en ce sens. En fait pour simplifier on supposera que $\pi = 0$ convient.

Disons quelques mots de l'orientation. L'orientabilité se prouve comme dans [D1] : il suffit de voir que le fibré déterminant $det(kerD\bar{F}_{[A]}\otimes cokerD\bar{F}_{[A]}$ est trivial sur $\mathcal{B}(a,b)$. En stabilisant de $SU(2)$ à $SU(3)$, on montre que c'est la restriction d'un fibré sur $\mathcal{B}(SU(3),a,b)$ (analogue de $\mathcal{B}(a,b)$ où l'on a remplacé $SU(2)$ par $SU(3)$). Or ce dernier espace est simplement connexe, d'où le résultat. Pour faire un choix "cohérent" pour les orientations des divers espaces, on doit utiliser les constructions de recollement définis en 3.5.

3.3. Le gros morceau de la preuve est la compactification des $\bar{\mathcal{M}}(a,b;i)$. Celle-ci fait intervenir deux phénomènes distincts :

1) Interprétant les éléments comme des lignes de gradient non paramétrées de a à b, celles-ci peuvent "accrocher" des points critiques intermédiaires : une suite de telles lignes peut converger vers une réunion finie $\ell_1, \ldots \ell_n$ où ℓ_i joint c_i à c_{i+1}, avec $c_0 = a$ et $c_n = b$. En dimension finie, c'est la seule possibilité. Une construction de recollement de trajectoires permet alors de décrire le complémentaire d'un compact dans $\bar{\mathcal{M}}(a,b)$ comme la réunion disjointe d'ouverts

$$\mathcal{O}(a, c_1, \ldots, c_{n-1}, b) = \bar{\mathcal{M}}(a, c_1) \times \mathbf{R}_+ \times \bar{\mathcal{M}}(c_1, c_2) \ldots \times \mathbf{R}_+ \times \bar{\mathcal{M}}(c_{n-1}, b)$$

Les cas particuliers où la différence d'indice est zéro ou un permettent de définir le complexe de l'Introduction. Pour une fonctionnelle équivariante on a des résultats analogues sur le quotient en tenant compte des groupes d'isotropie des c_i.

2) Revenant à $\mathcal{M}(a,b)$ et interprétant les éléments comme des (modules de) connexions autoduales, on a le phénomène d'apparitions de "bulles", ou instantons découvert par K. Uhlenbeck [U2]. Pour une variété fermée, Taubes et Donaldson ont montré que ceci suffit à décrire la compactification. Sur une variété ouverte, il s'agit d'une compactification faible (convergence sur tout compact).

Nous allons d'abord préciser le 2) puis montrer qu'il ne se produit pas si $dim\mathcal{M}(a,\beta) \leq 8$. Pour cela, on considère l'espace $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathbf{R} \times M)$ onnées par les connexions autoduales dont l'énergie $e(A) = \int_{(\mathbf{R}\times M)} |F(A_n)|^2$ est bornée. Cela équivaut à dire que sur la ligne de gradient associée la variation de $CS(a(t))$ reste bornée (rappelons que $|F(A)|^2 = 2(d/dt)(CS(a(t)))$. Donc $\mathcal{M}$ contient les $\mathcal{M}(a,b)$.

PROPOSITION.— *1) Soit $[A_n]$ une suite dans $\mathcal{M}$ telle que l'énergie $e(A_n)$ reste bornée. Alors, quitte à passer à une sous suite, il existe un* *nombre fini de points* $x_1, \cdots, x_k \in \mathbf{R} \times M$, *des entiers positifs* $n_1, \cdots, n_k$ *et un élément* $[B]$ *de* $\mathcal{M}$ *tels que, en prenant des représentants convenables, on ait :*

a) $A_n \to B$ *dans* C^∞ *sur tout compact de* $\mathbf{R} \times M - \{x_1, \cdots, x_k\}$

b) En x_j *apparaît un instanton sur* $\mathbf{R}^4$ *d'énergie* $8\pi^2 n_j$.

c) $e(B) + 4\pi^2 \sum_{j=1}^{k} n_j \leq \limsup_{n\to\infty} e(A_n)$.

2) On a $\mathcal{M} = \cup_{a,b} \mathcal{M}(a,b)$. *De plus, la topologie de chaque* $\mathcal{M}(a,b;i)$ *est donnée par la convergence sur tout compact (convergence faible).*

Démonstration. 1) Le lemme de compacité d'Uhlenbeck [U2] affirme l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que, si $U \subset \mathbf{R} \times M$ est un ouvert où $\int_U |F(A_n)|^2 < \varepsilon$, alors (en passant à une sous-suite et dans une jauge convenable) A_n converge dans C^∞ sur tout compact de U. En particulier $|F(A_n)|$ est uniformément borné sur tout compact de U. Disons que $x \in \mathbf{R} \times M$ est un *mauvais point* si $\liminf_{n\to\infty} \int_{B(x,r)} |F(A_n)|^2 > \varepsilon$ pour tout $r > 0$. Il est clair qu'il y a au plus $\left[\frac{e}{\varepsilon}\right]$ tels points où e est la borne sur l'énergie. Soient $x_1, \cdots, x_k$ ces mauvais points. Alors sur $\mathbf{R} \times M - \{x_1, \cdots, x_k\}$, $|F(A_n)|$ est uniformément borné sur tout compact donc [U1] implique l'existence de $B \in \mathcal{A}\big(\mathbf{R} \times M - \{x_1, \cdots, x_k\}\big)$ tel que a) soit vérifié. De plus on a $e(B) \leq e < \infty$ donc [U2] implique que B se prolonge à $\mathbf{R} \times M$, et est clairement auto-duale.

Enfin, choisissons des boules disjointes $B_1, \cdots, B_k$ centrées en $x_1, \cdots, x_k$. La courbure $|F(A_n)|$ reste bornée sur chaque bord ∂B_j, et on a $M_{j,n} = \sup_{B_j} |F(A_n)| \longrightarrow +\infty$ quand $n \longrightarrow \infty$. Soit $x_{j,n} \in B_j$ un point où $|F(A_n)|$ est maximum, alors une "renormalisation" convenable transforme $A_n|B(x_{j,n}, \varepsilon_{jn})$ en une connexion $C_{j,n}$ sur $B(0, R_{j,n}) \subset \mathbf{R}^4$, avec $R_{j,n} \longrightarrow \infty$ et $|F(C_{j,n})| \leq |F(C_{j,n})(0)| = 1$. De plus $C_{j,n}$ est autoduale. Donc [U1] et [U2] impliquent le b). Le c) est évident.

2) Considérons une suite $A + t_n$ où $t_n \to +\infty$. D'après le 1), le fait que l'énergie tend vers zéro sur tout compact implique qu'une sous-suite converge faiblement vers une connexion B qui est nécessairement plate, donc donne un chemin dans $R(M)$. Comme $R(M)$ est discret d'après

l'hypothèse de non-dégénérescence, ce chemin est constant. On en déduit $\lim_{t\to+\infty} a(t) = a \in R(M)$. La propriété sur la topologie se prouve par "bootstrap" elliptique (cf. [FU]).

3.4. PROPOSITION.— *On suppose a ou b irréductible et $i \leq 8$. Alors si $[A_n]$ une suite dans $\mathcal{M}(a,b;i)$ on a les propriétés suivantes en passant à une sous-suite. Il existe $c_0 = a, c_1, c_2, .., c_n = b$ et des lignes de gradient $\gamma_\ell \in \mathcal{M}(c_i, c_{i+1})$ tels que $[a_n(t)]$ s'approche uniformément de la réunion des lignes de gradient $im(\gamma_\ell)$ dans $\mathcal{B}(M)$. Si $i \leq 4$ les c_ℓ sont irréductibles pour $1 \leq i \leq n-1$.*

Démonstration. L'énergie est bornée puisque $e(A_n) = CS(a) - CS(b)$ pour des relevés dans $\mathcal{A}(M)$ convenables, qu'on peut prendre fixes puisque i est fixe. Donc on peut appliquer 3.3 ainsi qu'à toutes les suites translatées $[A_n + t_n]$. Considérons toutes les limites $[\bar{B}] \in \mathcal{M}$ non triviales. En utilisant la finitude du nombre de valeurs critiques dans $[CS(b), CS(a)]$, il est facile de trouver une sous-suite ayant un nombre "maximal" de telle limites. Plus précisément, pour une telle suite les limites se rangent en une suite finie $[\bar{B}_\ell] \in \bar{\mathcal{M}}(c_\ell, c_{\ell+1})$, $0 \leq \ell \leq n-1$, avec $\beta_0 = a$ et $b_n = b$. De plus on peut choisir les relevés c_ℓ de sorte que $c_0 = a$ et $c_n = gb$ pour un certain $g \in \mathcal{G}(M)$.

Il faut aussi considérer tous les instantons sur $\mathbf{R}^4$ qui apparaissent pour les suites translatées : la borne sur l'énergie fait qu'il y en a un nombre fini $c_1, \cdots c_k$. Notons $n_1, \cdots, n_k$ leurs "charges". Comme on a pris toutes les limites possibles on a la formule d'énergie

$$CS(a) - CS(b) = \sum_{\ell=0}^{n-1} (CS(c_\ell) - CS(c_{\ell-1})) + 4\pi^2 \sum_{j=1}^{k} n_j.$$

En utilisant les formules $CS(ga) - CS(a) = 4\pi^2 deg(g)$, $ind(ga) - ind(a) = 8\ deg(g)$ et $i = ind(a) - ind(b) - dim\ \mathcal{G}_b$, il vient la formule d'indice

$$i = \sum_{\ell=0}^{n-1} i_\ell + \sum_{\ell=1}^{n-1} dim \mathcal{G}_{c_\ell} + 8 \sum_{j=1}^{k} n_j,$$

où $i_\ell = ind\,(c_\ell) - ind\,(c_{\ell+1}) - dim\mathcal{G}_{c_\ell}$. Or d'après 3.2 on a $i_\ell \geq 1$ donc $i \leq 8$ on a $k = 0$. La convergence de $a_n(t)$ est alors dûe au fait qu'on apris toutes les limites possibles (raisonner par l'absurde). Si $i \leq 4$ l'irréductibilité de c_ℓ résulte de la formule d'indice.

Remarque Notre le rôle capital joué par la proportionnalité entre la différence d'indice et la variation de la fonction ("monotonie", pour employer le langage de [F4]). C'est ce qui fait que chaque bulle "coûte" de l'indice, donc peut être évitée sous certaines hypothèses.

3.5. Faisant $i = 0$ dans la proposition 3.4, on a forcément $n = 0$ donc la proposition 3.3.(2) donne la compacité. Pour prouver le c) du théorème, et plus généralement pour donner une description de l'infini de $\bar{\mathcal{M}}(a,b)$ analogue à la dimension finie (cf. 3.2), il faut définir une construction de recollement de trajectoires donnant un difféomorphisme local (dans le cas de deux trajectoires)

$$(*) \qquad \bar{\mathcal{M}}(a,c;i) \times \mathbf{R}_+ \times \bar{\mathcal{M}}(c,b;j) \to \bar{\mathcal{M}}(a,b;i+j).$$

Ceci se fait par une construction analogue à celle de Taubes [Ta1] [Ta2] en définissant d'abord une connexion "presque" autoduale puis en en utilisant le théorème des fonctions implicites pour la rendre autoduale.

3.6. Preuve du d)

Pour prouver l'indépendance de l'homologie par rapport aux choix, on construit un morphisme $C(\sigma,\pi) \to C(\sigma',\pi')$ en considérant une métrique Σ sur $\mathbf{R} \times M$ qui vaut σ pour $t < 0$ et σ' pour $t > 1$. Supposant pour simplifier $\pi = \pi' = 0$ on définit l'espace de modules $\mathcal{M}_\sigma(a,a')$ des connexions autoduales reliant a à a', où $a, a' \in R^*$. Il se décompose en $\mathcal{M}_\Sigma(a,a';i)$ où i est un relevé de $ind\ (a) - ind\ (a')$.

Des raisonnements tout à fait analogues aux précédents montrent que $\mathcal{M}_\Sigma(a,a';i)$ est génériquement une variété orientée de dimension i, qui est compacte si $i = 0$. Notons qu'il n'y a plus d'action de $\mathbf{R}$, de sorte que $\mathcal{M}_\Sigma(a,a';0)$ n'a pas de raison d'être vide. Ceci permet de définir $m_\Sigma(a,a') \in \mathbf{Z}$ et le morphisme $\varphi_\Sigma : C(\sigma) \to C(\sigma')$ par $\varphi(a) = \sum_{a'} m_\Sigma(a,a')_0 a'$.

Reste à montrer :

1) C'est un morphisme de complexes, soit $\partial \circ \varphi_\sigma - \varphi_W \circ \partial' = 0$. Ceci résulte de la compactification de $\mathcal{M}_\Sigma(a, a'; 1)$ par

$$\partial \mathcal{M}(W, a, a'; 1) = \coprod_{b \in R^*_\pi} \bar{\mathcal{M}}(a, b; 0) \times \mathcal{M}_\Sigma(b, a') - \coprod_{b' \in R^*_{\pi'}} \mathcal{M}_\Sigma(a, b') \times \bar{\mathcal{M}}(b', a').$$

2) Le morphisme induit en homologie est indépendant du choix de Σ. Pour cela, on considère une famille à un paramètre $\Sigma_\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ reliant Σ à Σ', et l'on pose

$$\tilde{\mathcal{M}}(a, a') = \{(A, \lambda) \mid A \in \mathcal{M}_{\Sigma_\lambda}(a, a')\} \subset \mathcal{B}(\mathbf{R} \times M) \times [0, 1].$$

Cet espace se décompose en $\tilde{\mathcal{M}}(a, a'; i)$. Génériquement $\tilde{\mathcal{M}}(a, a'; i)$. est une variété orientée de dimension $i + 1$, compacte si $i = -1$. Donc $\tilde{\mathcal{M}}(a, a'; -1)$ permet de définir un morphisme $H : C \to C'$ de degré -1, de plus la compactification de $\tilde{\mathcal{M}}(a, a'; 0)$ donne une homotopie de chaînes entre les morphismes associés à Σ et Σ'.

3) C'est un isomorphisme : ceci vient d'une formule de composition $\varphi_{\Sigma_R} = \varphi'_\Sigma \varphi_\Sigma$ pour une métrique Σ_R qui vaut $\Sigma(t + R)$ pour $t < 0$ et $\Sigma'(t + R)$ pour $t > 0$, R étant assez grand.

Remarques 1) En dimension finie cette méthode est nouvelle (me semble-t-il) : d'habitude on prouve que l'homologie est celle de la variété sans comparer directement deux choix. Il serait intéressant de décrire le morphisme en termes d'accidents (naissance ou mort de points critiques, attachement d'anses). Elle devrait pouvoir s'appliquer à l'homologie de Novikov.

2) Cette construction se généralise pour associer à un cobordisme entre deux sphères d'homologie un morphisme de $I_*(M)$ vers $I_*(N)$ (voir 4.2).

4. THÉORIE DE JAUGE SUR UNE VARIÉTÉ OUVERTE DE DIMENSION QUATRE [At1]

4.1. Espaces de modules

Soit W^4 une variété ouverte orientée connexe. On supposera toujours que W est l'intérieur d'une variété compacte, de sorte que le "bout" de W

a la forme $\infty_W =]0, +\infty[\times \partial W$, où ∂W est une réunion finie de variétés M_j^3, $1 \leq j \leq N$. On la munit d'une métrique σ_W qui est un produit sur le bout. On dira que la variété est "à bouts cylindriques". Notons que Taubes [Ta3] utilise la notion plus générale de variété à bouts périodiques.

On peut définir un espace Π_W de perturbations $\mathcal{G}(W)$-équivariantes $F_\pi : \mathcal{A}(W) \to \Omega^{2,-}_{ad}(W)$ de l'opérateur d'autodualité qui étendent les perturbations déjà définies sur les bouts. La construction est analogue à celle de 2.3.

On va étudier l'espace des solutions de $F_\pi(A) = 0$ modulo l'action de $\mathcal{G}(W)$. Pour avoir une théorie intéressante, c'est-à-dire trouver des espaces de dimension finie, on se restreint aux solutions d'énergie finie. D'après 3.3, cela revient à exiger que sur chaque bout le chemin de connexions associé tende vers un point critique de CS_{π_j}. On définit ainsi des espaces de modules

$$\mathcal{M}(W, a) = \mathcal{M}(W, a_1, \cdots, a_N)$$

où $a_j \in R_{\pi_j}$. **Variante.** Il est souvent conceptuellement important de diviser le bout ∞_W en une partie positive $\infty_W^+ =]0, +\infty[\times \partial^+ W$ et une partie négative $\infty_W^- =]-\infty, 0[\times \partial^- W$., commme on l'a fait pour $\mathbf{R} \times M$. En particulier si $\partial^- W$ et $\partial^+ W$ sont non vides et connexes, $W - \infty_W$ est alors un cobordisme de $\partial^- W$ à $\partial^+ W$. On définit alors de façon évidente les espaces $\mathcal{M}(W, a^-, a^+)$. Notons que $\partial^- W$ est munie d'une orientation opposée à celle habituelle.

On suppose dorénavant que les ensembles critiques R_{π_j} sont non dégénérés. Rappelons que si les M_j sont des sphères d'homologie entière cette propriété des π_i est générique. D'un autre côté, elle implique que les M_j sont des sphères d'homologie rationnelle. Notons $b_i(W) = dim H^i(W; \mathbf{R})$ et $b_2^-(W)$ l'indice de la forme d'intersection sur $H^2(W; \mathbf{R})$, qui est bien définie dès que ∂W est une réunion de sphères d'homologie rationnelle.

PROPOSITION.— *On suppose que les R_{π_j} sont non dégénérés et que l'un des a_i est irréductible. Alors pour une perturbation π_W étendant (π_j) et générique, l'espace $\mathcal{M}(W, a)$ se décompose en variétés lisses orientées*

$\mathcal{M}(W, a; i)$ *de dimensions*

$$dim\mathcal{M}(W, a; i) = i + 3(N - 1 + b_1(W) - b_2^-(W)) - \sum_{j=1}^{N} dim\mathcal{G}_{a_j}$$

où $i \equiv -\sum_{j=1}^{N} ind(a_j)$ mod. 8.

Si l'on distingue un bout positif et un bout négatif, il faut pour trouver la dimension se rappeler que les M_j sont des sphères d'homologie rationnelle, de sorte qu'on a $ind(-M_j, a_j) = 3 - ind(M_j, a_j))$. En particulier, si $\partial^- W$ et $\partial^+ W$ sont non vides et connexes, on a

$$dim\mathcal{M}(W, a^-, a^+; i) = 3(b_1(W) - b_2^-(W)) - dim\ \mathcal{G}_{a+}).$$

Notation. On note $\mathcal{M}(W, a)_i$ la partie de dimension i de $\mathcal{M}(W, a)$ si elle existe.

4.2. Définitions d'invariants. Foncteur sur les cobordismes

Des raisonnements tout à fait analogues à ceux du §3 donnent le

THÉORÈME 2. *On suppose que les M_j sont des sphères d'homologie entière. Alors pour (σ_W, π_W) générique on a les propriétés suivantes :*

a) Chaque $\mathcal{M}(W, a)_0$ est compacte. On peut donc définir $m(W, a) \in \mathbf{Z}$.

b) Chaque $\mathcal{M}(W, a)_1$ peut être compactifiée comme variété orientée en lui ajoutant

$$\partial\mathcal{M}(W, a)_1 = \bigsqcup_b \mathcal{M}(W, b)_0 \times \bar{\mathcal{M}}(b, a)_0,$$

où $b = (b_j)$ décrit $\prod_j R_{\pi_j}$ et $\bar{\mathcal{M}}(b, a)_0 = \prod_j \bar{\mathcal{M}}(b_j, a_j)$.. Donc l'élément $z(W)$ de $\bigotimes_{j=1}^{j=N} C(\pi_j)$ défini par

$$z(W) = \sum_a m(W, a) a_1 \otimes ... \otimes a_N$$

est un cycle.

c) La classe d'homologie de $z(W)$ ne dépend pas de σ_W, π_W.

On définit ainsi $z(W) \in I_*(\partial W) = \bigotimes_{j=1}^{j=N} I_*(M_j)$. Si les homologies $I_*(M_j)$ sont sans torsion (on n'a aucun exemple où ce n'est pas le cas, cf.

le §5), on ne perd rien par rapport au théorème. Si l'on distingue un bout positif et un bout négatif, la classe $z(W)$ permet de définir un morphisme $\varphi_W : I_*(\partial^- W) \to I_*(\partial^+ W)$. Si les deux bouts sont connexes, il est de degré $3(b_1(W) - b_2^-(W)$. Une construction de recollement convenable donne alors :

THÉORÈME 3.— *L'application* $W \mapsto \varphi_W$ *est fonctorielle pour la composition des cobordismes : si* $W = UV$ *on a* $\varphi_W = \varphi_V \varphi_U$.

4.3. Relations avec les variétés fermées

Considérons une variété fermée W^4 simplement connexe, admettant une décomposition $W = U \cup_M V$ où M est une sphère d'homologie entière. Un théorème de Freedman et Taylor [FT] donne une telle décomposition différentiable pour toute décomposition algébrique de la forme d'intersection. Par ailleurs, un théorème de Freedman dit qu'on a toujours (sous l'hypothèse algébrique) une décomposition *topologique* en somme connexe le long d'une sphère. Donaldson [D4] a défini des invariants qui donnent une obstruction à l'existence d'une décomposition différentiable. Dans un travail en cours (décrit par Atiyah dans [At1]), il raffine ce résultat en décomposant ces invariants dans l'homologie de Floer de M.

Les invariants sont toujours obtenus en comptant le nombre de points d'un espace de modules de dimension zéro. Décrivons le plus simple, que nous noterons $z(W)$ (c'est l'extension naturelle du cas à bord). Pour cela, rappelons que si $P \to W$ est un $SU(2)$-fibré, l'espace $\mathcal{M}(P)$ des modules de connexions autoduales est génériquement une variété orientée de dimension $n(k) = 8k - 3(1 + b_2^-(W))$ [FU] [DK]. S'il existe k tel que $n(k) = 0$, elle est compacte ce qui fournit $z(W) \in \mathbf{Z}$ qui est un invariant de W. Sinon on pose $z(W) = 0$.

Le résultat suivant (implicite dans [F4]) se démontre sans doute comme le théorème 4 : si W^4 (fermée simplement connexe) est la réunion $U \cup_M V$ le long d'une sphère d'homologie entière, on a

$$z(W) = < z(U), z(V) >$$

où l'on utilise la dualité entre $I_*(M)$ et $I_*(-M)$.

En général, Donaldson décrit un moyen de trouver des espaces de modules de dimension zéro en imposant des conditions supplémentaires sur les connexions. Il obtient ainsi, sous l'hypothèse que $b_2^-(W)$ est impair et > 1, des polynômes $p_{W,d} : H_2(W;\mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$, de degrés d assez grands. Pour une variété dont le bord est une sphère d'homologie, on obtient des polynômes $p_{W,d}$ à valeurs dans $I_*(\partial W)$. Pour une décomposition $W = U \cup_M V$ comme ci-dessus (et sous certaines conditions supplémentaires à préciser), le résultat annoncé dans [At1] est alors :

$$p_{W,d} = \sum_{\ell} p_{W,\ell} \cdot p_{W,d-\ell},$$

en utilisant la décomposition $H_2(W) = H_2(U) \oplus H_2(V)$.

5. AUTRES RÉSULTATS [FS] [O1] [F5]

5.1. Pour l'instant, les seules variétés pour lesquelles $I_*(M)$ a été calculé sont les sphères d'homologie qui sont des fibrations de Seifert [FS] [O1] : pour ces variétés,la fonctionnelle $CS|\mathcal{B}^*(M)$ est non dégénérée au sens de Bott, donc $R^*(M)$ est une réunion finie de variétés connexes compactes. De plus toute fonction de Morse f sur $R^*(M)$ permet de construire une perturbation π telle que les points critiques de $CS_\pi|\mathcal{B}^*(M)$ sont non dégénérés, en bijection avec ceux de f, avec une formule explicite reliant les indices des points critiques des deux fonctions : cette formule est de la forme $ind_\pi(\alpha) = ind_f(\alpha) + (entier\ pair)$. (la preuve repose sur [APSIII]). Enfin on peut montrer par diverses méthodes que $R^*(M)$ admet toujours une fonction de Morse n'ayant que des points d'indice pair. En mettant ensemble ces résultats, on obtient que $I_*(M)$ est concentré en les indices pairs et est libre sur les points critiques. De plus tout est algorithmiquement calculable.

5.2. Récemment Floer [F5] a indiqué une méthode qui semble donner un algorithme de calcul de $I_*(M)$ sur le modèle de celui qui existe pour l'invariant de Casson, c'est-à-dire en décrivant M comme obtenue par chirurgie sur un entrelacs dans S^3. En tout cas ses constructions expliquent de nouveau pourquoi la caractéristique d'Euler est paire, c'est-à-dire pourquoi l'invariant de Casson est entier.

L'idée de départ est de décrire le morphisme $\varphi_W : I_(M) \to I_*(N)$ si N est obtenue par chirurgie sur un nœud $K \subset M$. Floer décrit un diagramme commutatif exact

$$\begin{tikzcd} I_*(M) \arrow[rr] & & I_*(N) \arrow[dl] \\ & I'_*(\overline{M-K}) \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, $\overline{M-K}$ est l'unique variété ayant l'homologie de $S^1 \times S^2$ que l'on peut obtenir en recollant un tore solide au complémentaire du nœud. Le groupe $I'_*(\overline{M-K})$ est une homologie d'instantons obtenue à partir du $S0(3)$−fibré non trivial sur $\overline{M-K}$. La construction de cette dernière utilise l'inexistence de connexions réductibles. Elle est graduée sur $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ ($= 2\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ dans le diagramme), ce qui implique la conservation de la parité de la caractéristique d'Euler.

6. HOMOLOGIE SYMPLECTIQUE

Soient (V, ω) une variété symplectique et $L, L' \subset V$ deux sous-variétés lagrangiennes. L'étude de l'intersection $L \cap L'$ est motivée par les conjectures faites par V.I. Arnold dans les années 60 (voir [Ar]). L'une d'elles énonce qui si L et L' sont fermées et hamiltoniennement isotopes et sous certaines hypothèses supplémentaires, par exemple $[\omega] \mid \pi_2(V, L) = 0$ cette intersection a au moins autant de points qu'une fonction sur L a de points critiques : $\#(L \cup L') \geq c(L)$. En particulier, si (P, ω) est une variété symplectique compacte et $\varphi \in Diff(P, \omega)$ un difféomorphisme hamiltonien, Arnold conjecture que les points fixes de P, qui sont en bijection avec $\triangle_p \cap (id \times \varphi)(\triangle_p)$ où $\triangle_p \subset P \times P$ est lagrangienne pour la structure $\omega \oplus (-\omega)$, vérifient : $\#Fix(P) \geq c(P)$. Les travaux de Floer [F2] et [F4] donnent à ce jour les résultats les plus généraux connus sur ces questions. Comme on va le voir, ils sont basés sur la définition d'une homologie sur le modèle mentionné dans l'Introduction. L'analogue de l'équation d'autodualité est celle des courbes pseudo-holomorphes de M. Gromov [Gr].

6.1. Définissons d'abord la fonctionnelle d'aire, dont les points critiques seront les points de $L \cap L'$. En fait on va voir qu'on a en général une 1-forme fermée, qui sous certaines hypothèses admet une primitive à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou dans S^1.

L'espace fonctionnel $\mathcal{B} = \mathcal{B}(V, L, L')$ est celui des chemins $\gamma : (I, 0, 1) \longrightarrow (V, L, L')$, et la 1-forme annoncée est définie par $\alpha(\gamma) \cdot \xi = \int_0^1 \omega(\xi, \dot{\gamma})dt$. Un vecteur tangent $\xi \in T_\gamma \mathcal{B}$ est bien sûr un champ de vecteurs sur V le long de γ. Cette 1-forme est fermée car elle admet une primitive locale $(\gamma) = \int_R \omega$ où R est un petit rectangle quelconque entre γ_0 et γ : la primitive est bien définie car ω est fermée et L, L' lagrangiennes. Pour voir si α est exacte, notons que le groupe fondamental de $\mathcal{B}$ est isomorphe à $[S^1 \times I, S^1 \times 0, S^1 \times 1; V, L, L']$, le morphisme $[\alpha] : \pi_1 \mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{R}$ étant donné par l'intégration de ω. On en déduit par exemple que α est exacte si L' est hamiltoniennement isotope à L et si $[\omega] \mid \pi_2(V, L) = 0$.

Les zéros de α sont les chemins constants dans $L \cap L'$. Si $L \cap L'$ est discret, ce qui est le cas si L et L' sont transverses, on a donc une bijection $crit(\alpha) \longleftrightarrow L \cap L'$. De plus on peut toujours munir (V, ω) d'une structure presque kählérienne, c'est-à-dire d'une métrique $<,>$ et d'une structure presque complexe J telles que $\omega(X, Y) = < JX, Y >$. Il est alors clair que le gradient L^2 est $\nabla(\gamma) = -J\dot{\gamma}$. Donc une ligne de gradient $u \mapsto \gamma_u$ est donnée par l'équation $\partial \gamma_u / \partial u = -J\dot{\gamma}_u$, ce qui s'écrit $\partial \Gamma / \partial t = J \partial \Gamma / \partial u$ en notant $\gamma_u(t) = \Gamma(u, t)$. Autrement dit, $\Gamma(u + it)$ est pseudo-holomorphe sur $\mathbf{R} + i[0, 1] \subset \mathbf{C}$.

L'indice d'un zéro de α est encore donné par le flot spectral du hessien. Cette fois il s'exprime en termes homotopiques : un chemin entre deux points critiques donne naissance à une application $D^2 \to V$ qui envoie le bord inférieur dans L et le bord supérieur dans L'. On obtient donc un fibré symplectique sur D^2 muni de deux sous-fibrés lagrangiens sur les deux moitiés du bord. Dans cette situation, on peut définir un indice de Maslov [V] qui est justement le flot spectral [F1].

Par une construction analogue à celle exposée dans l'Introduction, Floer construit une homologie $I_*(V, L, L')$ sous certaines hypothèses [F2] [F4]. Par exemple :

THÉORÈME [F2].— *Si L' est hamiltoniennement isotope à L et si $\pi_2(V,L)=0$, $I_*(V,L,L')$ est bien défini et est isomorphe à $H_*(L)$.*

Remarque. Floer n'énonce ses résultats qu'avec des coefficients $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ mais il n'y a sans doute pas de difficultés à orienter les espaces de modules pour avoir des coefficients $\mathbf{Z}$.

6.2. Il y a une relation entre l'homologie d'instantons et l'homologie symplectique, expliquée par Atiyah dans [At1]. Si M^3 est une sphère d'homologie avec un scindement de Heegaard $M = M_1 \bigcup_\Sigma M_2$, on a vu au 2.2 que $R(M) = R(M_1) \cap R(M_2) \subset R(\Sigma)$. Or le fait que Σ est une surface implique que $R(\Sigma)$ est une variété symplectique, non singulière près des connexions irréductibles [Go]. De plus les $R(M_i)$ sont deux sous-variétés lagrangiennes. Donc l'homologie d'instantons est basée sur les points d'intersection de deux sous-variétés lagrangiennes (en supposant pour simplifier que cette intersection est transverse). Le problème est que ces variétés sont singulières, et que si l'on enlève la singularité elles ne sont plus compactes. Atiyah demande si l'homologie symplectique peut malgré tout être définie, et donner ainsi une nouvelle interprétation de l'homologie d'instantons. Notons que les fonctionnelles de Chern Simons et d'action symplectique ont les mêmes points critiques mais que leurs lignes de gradient sont différentes.

BIBLIOGRAPHIE

[AM] S. ABKULUT, J. Mc CARTHY - *Casson's invariant for oriented homology three-spheres : an exposition.* Math. Notes 36, Princeton U.P., 1990.

[Ar] V.I. ARNOLD - *First steps in symplectic topology*, Russian Math. Surv. 41 (1986), 1-21

[A1] M.F. ATIYAH - *New invariants of three and four-dimensional manifolds*, in the mathematical heritage of Hermann Weyl, Proc. Symp. Pure Math. 48, Amer. Math. Soc. (1988), 285-299.

[A2] M.F. ATIYAH - *Topological quantum field theory,* Publ. Math. IHES

70 (1990), 175-186.

[APS] M.F. ATIYAH, V.K. PATODI and I.M. SINGER - *Spectral asymmetry and Riemannian geometry,* I : Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 77 (1975), 43-69. II : id., 78 (1975), 405-432. III : id., 79 (1976), 71-99.

[Br] P.J. BRAAM - *Floer homology groups for homology three-spheres,* Adv. in Math. (1991)

[CS] S.S. CHERN, J. SIMONS - *Characteristic forms and geometric invariants,* Ann. of Math. 99 (1974), 48-69.

[D1] S.K. DONALDSON - *An application of gauge theory to the topology of four-manifolds,* J. Diff. Geom. 18 (1983), 279-315.

[D2] S.K. DONALDSON - *Connections, cohomology and the intersection form of four-manifolds,* J. Diff. Geom. 24 (1986), 275-341.

[D3] S.K. DONALDSON - *The orientation of Yang-Mills moduli spaces and four-manifold topology,* J. Diff. Geom. 26 (1987) 397-428.

[D4] S.K. DONALDSON - *Polynomial invariants for smooth four-manifolds,* Topology 29 (1990), 257-315.

[DK] S.K. DONALDSON et P.B. KRONHEIMER - *Geometry of four-manifolds*, Oxford U.P., 1990.

[F1] A. FLOER - *A relative Morse index for the symplectic action,* Comm. Pure and Appl. Math. 41 (1988), 393-407.

[F2] A. FLOER - *Morse theory for Lagrangian intersections,* J. Diff. Geom. 28 (1988), 513-547.

[F3] A. FLOER - *An instanton invariant for three-manifolds,* Comm. Math. Phys. 118 (1988), 215-240.

[F4] A. FLOER -*Symplectic fixed points and holomorphic spheres*, Comm. Math. Phys. 120 (1989), 335-356.

[F5] A. FLOER - *Instanton homology, Dehn surgery, and knots,* in Geometry of Low-Dimensional Manifolds 1 (S.K. Donaldson and C.B. Thomas editors), London Math. Soc. Lect. Notes **150**, Cambridge U.P. (1990).

[FS] R. FINTUSHEL and R. STERN - *Instanton homology of Seifert fibered homology three spheres,* Proc. London Math. Soc.(1990).

[FT] M. FREEDMAN - L. TAYLOR - *Λ-splitting four-manifolds*, Topology 16 (1977), 181-184

[FU] D.S. FREED, K. UHLENBECK - *Instantons and four-manifolds,* Springer, 2e éd. (1990).

[Fu] K. FUKAYA - *Floer homology oriented three-manifolds,* préprint (1990).

[Go] W. GOLDMAN - *The symplectic nature of the fundamental group of surfaces*, Adv. in Math. 54 (1984), 200-225.

[Gr] M. GROMOV - *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Inv. Math. 82 (1985), 307-347.

[JRS] J.D.S. JONES, J.H. RAWNSLEY and D.A. SALAMON - *Instanton homology and the êta invariant,* préprint 1990.

[K] D. KOTSCHICK - *Instanton homology* (after A. Floer), in Geometry of Low-Dimensional Manifolds 1 (S.K. Donaldson and C.B. Thomas editors), London Math. Soc. Lect. Notes **150**, Cambridge U.P. (1990).

[LM] R.B. LOCKHARDT, R.C. Mc OWEN - *Elliptic differential operators on compact manifolds,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa IV-12 (1985), 409-446.

[Ma] A. MARIN - *Un nouvel invariant pour les sphères d'homologie de dimension trois* (d'après A. Casson), Sém. Bourbaki n° 693 (février 1988), Astérisque 161-162 (1989), 151-164.

[Mi] J. MILNOR - *Lectures on the h-cobordism theorem,* Princeton U.P., 1965.

[N] S.P. NOVIKOV - *Multivalued functions and functionals, an analogue of the Morse theory*, Soviet Math. Dokl. 24 (1981), 222-226.

[O1] C. OKONEK - *On the Floer homology of Seifert-fibered homology three-spheres,* préprint 1990.

[O2] C. OKONEK - *Instanton invariants and algebraic surfaces*, préprint 1990.

[S] S.SMALE - *On gradient dynamical systems*, Annals of Math. 74 (1961), 199-206.

[Ta1] C.H. TAUBES - *Self-dual connections on non self-dual manifolds,* J. Diff. Geom. 17 (1982), 139-170.

[Ta2] C.H. TAUBES - *Self-dual connections on four-manifolds with indefinite intersection matrix,* J. Diff. Geom. 19 (1984), 517-560.

[Ta3] C.H. TAUBES - *Gauge theory on asymptotically periodic four-manifolds,* J. Diff. Geom. 25 (1987), 363-430.

[Ta4] C.H. TAUBES - *Casson's invariant and gauge theory,* J. Diff. Geom. 31 (1990), 547-599.

[Th] R. THOM - *Sur une partiition en cellules associée à une fonction sur une variété*, C..R. Acad.Sci. Paris 228 (1949),973-975

[U1] K. UHLENBECK - *Removable singularities in Yang-Mills fields,* Comm. Math. Phys. 83 (1982), 11-29.

[U2] K. UHLENBECK - *Connections with L^p-bounds on curvature,* Comm. Math. Phys. 83 (1982), 31-42.

[Vi] C. VITERBO - *Intersections de sous-variétés lagrangiennes, fonctionnelles d'action et indice des systèmes hamiltoniens*, Bull. Soc. Math. Fr. (1987)

[W1] E. WITTEN - *Supersymmetry and Morse theory,* J. Diff. Geom.17 (1982), 661-692.

[W2] E. WITTEN - *Topological quantum field theory,* Comm. Math. Phys. 117 (1988), 353-386.

Jean-Claude SIKORAV

Université Paul-Sabatier
URA 1408 du CNRS
UFR de Mathématiques
118 route de Narbonne
F-31062 TOULOUSE CEDEX