Astérisque

JEAN-PAUL THOUVENOT

La convergence presque sûre des moyennes ergodiques suivant certaines sous-suites d'entiers

Astérisque, tome 189-190 (1990), Séminaire Bourbaki, exp. n° 719, p. 133-153

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1989-1990__32__133_0>

© Société mathématique de France, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI novembre 1989
42ème année, 1989-90, n° 719

LA CONVERGENCE PRESQUE SÛRE DES MOYENNES ERGODIQUES SUIVANT CERTAINES SOUS-SUITES D'ENTIERS

[d'après **Jean Bourgain**]

par **Jean-Paul THOUVENOT**

1. INTRODUCTION

Étant donné un système dynamique $(X, \mathcal{A}, m, T)$ où T est une bijection bimesurable préservant la mesure de l'espace probabilisé $(X, \mathcal{A}, m)$, le théorème de Birkhoff dit que si $f \in L^1(X)$ alors $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(T^k x)$ converge p.s. quand $N \to +\infty$.

De nombreuses généralisations de ce résultat ont été données, notamment pour l'action de groupes plus généraux que $\mathbf{Z}$, ou pour des sous-suites des entiers de densité positive, avec des restrictions sur la nature de T (à spectre discret ou à spectre de Lebesgue, voir [B-K] et [B-L]). Mais on n'avait aucun exemple où le théorème était valable pour des sous-suites de densité supérieure nulle, notamment parce que les méthodes combinatoires utilisées sur les orbites pour établir le lemme maximal semblaient inadaptées à traiter cette situation. L'exemple le plus naturel à étudier dans ce cadre était la suite des carrés, car on savait, par la théorie spectrale, que si $f \in L^2$, $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(T^{k^2} x)$ converge L^2 quand $N \to +\infty$. La question se trouve explicitement posée dans [B] et [F2].

Bourgain, dans [B 1], a démontré d'abord le lemme maximal dans la situation précédente en introduisant une technique absolument nouvelle, la transformation de Fourier sur le modèle des orbites. Il a ensuite, dans [B 3], produit par la même technique suffisamment de fonctions f pour lesquelles il y avait convergence *p.s.* (les fonctions L^∞) et a étendu ses résultats à la suite n^d, $d \geq 2$ et aux nombres premiers.

Pour la suite n^d , il a montré [B 2] ensuite la convergence *p.s.* pour des fonctions $f \in L^p$, $p > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Il a considérablement développé sa méthode jusqu'à lui donner la forme d'un outil capable de s'adapter au cas de différentes suites de type arithmétique. Il a prouvé en particulier dans [B 6]

THÉORÈME.— *Soit $(X, \mathcal{A}, m, T)$ un système dynamique et $p(n)$ un polynôme à coefficients entiers. Soit $r > 1$ et $f \in L^r(X)$. Alors $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(T^{p(k)}x)$ converge p.s. quand $N \to +\infty$. Le même résultat est valable si $p(n)$ désigne le n-ième nombre premier.*
(Le cas des nombres premiers pour $f \in L^r$, $r > 1$, avait été résolu auparavant dans [W].)

Nous donnons une présentation de son travail en nous restreignant cependant au cas $f \in L^2(X)$ et $p(n) = n^d$, $d \geq 2$ et nous indiquons comment traiter le cas des nombres premiers (Théorème 5 et Théorème 6).

Dans la partie 6, nous donnons une liste des autres résultats de Bourgain qui ressortissent de la même théorie.

1. L'INÉGALITÉ MAXIMALE

THÉORÈME 1.— *Soit d un entier ≥ 2 . Soit $f \in \ell^2(\mathbf{Z})$ et Mf défini par*

$$Mf(n) = \sup_{N>0} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(n + k^d) \right| .$$

Alors il existe une constante C telle que

$$\|Mf\|_2 \leq C\|f\|_2$$

(C ne dépend que de d).

THÉORÈME 2.— *Soit $(X, \mathcal{A}, m, T)$ un système dynamique. Soit $d \geq 2$. Soit $f \in L^2(X)$. Soit $f^*(x) = \sup\limits_{N>0} \left|\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(T^{k^d}x)\right|$. Alors $\|f^*\|_2 \leq C\|f\|_2$. (C est exactement la constante du Théorème 1.)*

Démonstration du théorème 2 à partir du théorème 1 : Soit $\bar{N}$ un entier positif et

$$f_{\bar{N}}^*(x) = \sup_{\bar{N} \geq N > 0} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(T^{k^d} x) \right| .$$

Il suffit de démontrer $\|f_{\bar{N}}^*\|_2 \leq C\|f\|_2$ (indépendamment de $\bar{N}$). Soit $J \gg \bar{N}$. Soit $x \in X$ et $\varphi_x \in \ell^2(\mathbf{Z})$ défini par $\varphi_x(n) = f(T^n x)$, $n \in [0, J]$, $\varphi_x(n) = 0$ si $n \notin [0, J]$. Alors si on définit $M_{\bar{N}} f(n) = \sup_{\bar{N} \geq N > 0} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(n+k^d) \right|$, $\|M_{\bar{N}}\, \varphi_x\|_2 \leq \|M\, \varphi_x\|_2 \leq C\|\varphi_x\|_2$ (d'après le Théorème 1), ce qui se lit :

$$\sum_{k=0}^{J-\bar{N}} \left| f_{\bar{N}}^*(T^k x) \right|^2 \leq C^2 \sum_{k=0}^{J} \left| f(T^k x) \right|^2$$

et en intégrant, comme T préserve la mesure,

$$(J - \bar{N})\|f_{\bar{N}}^*\|_2^2 \leq C^2 \; J\|f\|_2^2 .$$

D'où le résultat puisque J peut être choisi arbitrairement grand.

Ce passage du modèle d'une seule orbite ($\mathbf{Z}$, le shift S) à une transformation apparaît dans [C]. L'inégalité maximale (le théorème 2) entraîne que pour tout système $(X, \mathcal{A}, m, T)$, l'ensemble des fonctions $f \in L^2(X)$ pour lesquelles il y a convergence presque sûre des sommes $S_N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(T^{k^d} x)$ est fermé dans L^2 . Tandis que, pour les sommes de Birkhoff usuelles, il est facile de produire une classe dense de fonctions pour lesquelles on a convergence *p.s.*, il n'y a aucune classe naturelle dans le cas des sommes $S_N f(x)$.

Cependant pour des transformations spécifiques, on a des classes denses naturelles : par exemple si T a un spectre de Lebesgue (les fonctions dont la densité spectrale est bornée), ou si T est isomorphe à une rotation irrationnelle (les fonctions continues).

2. SUFFISAMMENT DE FONCTIONS POUR LESQUELLES ON A UNE CONVERGENCE PRESQUE SÛRE

THÉORÈME 3.— *Soit $f \in \ell^2(\mathbf{Z})$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $d \geq 2$. Posons $\mathbf{Z}_\varepsilon = [(1+\varepsilon)^n]$, $n \in \mathbf{N}$ ([ ] désigne la partie entière). Soit N_j une suite d'entiers telle que $N_{j+1} > 2N_j$ et soit*

$$M_j^\varepsilon f(n) = \sup_{\substack{N \in \mathbf{Z}_\varepsilon \\ N_j \leq N \leq N_{j+1}}} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(n+k^d) - \frac{1}{N_j} \sum_{\ell=1}^{N_j} f(n+\ell^d) \right| .$$

Alors $\sum_{1 \leq j \leq J} \| M_j^\varepsilon f \|_2 \leq A(J) \|f\|_2$ où $\frac{A(J)}{J}$ tend vers 0 avec une vitesse qui ne dépend que de ε (et pas de la suite N_j).

THÉORÈME 4.— *Le théorème 3 entraîne que si $(X, \mathcal{A}, m, T)$ est un système dynamique et si $f \in L^\infty(X)$, alors*

$$S_N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(T^{k^d}(x)) \quad \text{converge p.s. quand} \quad N \to +\infty .$$

Démonstration : Exactement la même démonstration que celle du théorème 2 dit que si on pose

$$M_j^\varepsilon f(x) = \sup_{\substack{N_j \leq N \leq N_{j+1} \\ N \in \mathbf{Z}_\varepsilon}} \left| S_N f(x) - S_{N_j} f(x) \right|$$

$$\text{alors (1)} \quad \frac{1}{J} \sum_{1 \leq j \leq J} \left\| M_j^\varepsilon f \right\|_2 \to 0 .$$

Mais si $S_N f$ ne converge pas p.s. suivant $\mathbf{Z}_\varepsilon$, il y a un nombre $a > 0$ et un ensemble E de X , $m(E) = a$, tels que $\overline{\lim}_{N \in \mathbf{Z}_\varepsilon} S_N f(x) - \underline{\lim}_{N \in \mathbf{Z}_\varepsilon} S_N f(x) > a$ pour tout x de E , et on peut alors choisir une suite N_j , satisfaisant $N_{j+1} \geq 2N_j$ telle que $\sup_{N_j < N \leq N_{j+1}} \left| S_N f(x) - S_{N_j} f(x) \right| > \frac{a}{2}$ pour tous les x d'une partie de E de mesure plus grande que $\frac{a}{2}$. Mais ceci contredit (1). Quand f est dans L^∞ , pour tout N , il existe N' dans $\mathbf{Z}_\varepsilon$ tel que $\left| S_N f(x) - S_{N'} f(x) \right| \leq 2\varepsilon \|f\|_\infty$ et par conséquent

$\overline{\lim}\, S_N f - \underline{\lim}\, S_N f \leq 4\varepsilon \, \|f\|_\infty$ *p.s.* et le résultat puisque (1) est vrai pour tout ε .

Comme corollaire des Théorèmes 2 et 4, on a le

THÉORÈME 5.— *Soit $(X, \mathcal{A}, m, T)$ un système dynamique $d \geq 2$ et $f \in L^2(X)$. Alors*

$$S_N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(T^{k^d} x) \quad \text{converge p.s. quand} \quad N \to +\infty \ .$$

Si le système est totalement ergodique (toutes les puissances de T ergodiques), la limite est $\int f dm$.

Ce dernier point se voit en remarquant que, d'après le théorème de Bochner, la convergence L^2 des sommes $S_N f(x)$ est équivalente à la convergence dans $L^2_{d\nu_f}$ sur $S_1 = \{z \in \mathbf{C} \ |z| = 1\}$ des polynômes $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} z^{k^d}$ où $d\nu_f$ est la mesure sur S_1 définie par $\int f T^n f dm = \int e^{inx} \, d\nu_f(x)$ $\forall n \in \mathbf{Z}$, $d\nu_f\{0\} = \int f dm$. Si T est totalement ergodique, $d\nu_f$ n'a pas de masse ponctuelle sur les points $e^{2i\pi \frac{p}{q}}$, $\frac{p}{q}$ rationnel différent de 0 , et $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e^{2i\pi k^d \theta}$ converge vers 0 pour tout θ irrationnel d'après le théorème de Weyl.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Comme f peut être supposée positive,

$$2 \ M_{2^{p+1}} f(n) \geq M_N f(n) \quad 2^p \leq N \leq 2^{p+1} \, , \ \left(M_N f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(n + k^d) \right)$$

et si $\bar{\mathbf{Z}} = \{2^k \ k \in \mathbf{N}\}$ il suffit de prouver le théorème pour

$$M f(n) = \sup_{N \in \bar{\mathbf{Z}}} \left| M_N f(n) \right| \ .$$

(1) Si K_N est la mesure sur $\mathbf{Z}$ définie par $K_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \delta_{\{k^d\}}$, alors $M_N f = f * K_N$.

La méthode, comme dans l'étude du problème de Waring par Hardy et Littlewood, est d'utiliser la transformation de Fourier. Soit $\hat{f}(\alpha) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n)\, e^{-2i\pi n\alpha}$, $\hat{K}_N(\alpha) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{-2i\pi\alpha k^d}$. Alors $M_N f(n) = \int_0^1 e^{2i\pi n\alpha} \hat{f}(\alpha)\, \hat{K}_N(\alpha)\, d\alpha$ et en utilisant la relation de Parseval, le théorème à démontrer devient :
Si $\hat{f}(\alpha) \in L^2[0,1]$

$$\text{(I)} \qquad \left\| \sup_{N\in\bar{\mathbf{Z}}} \left| \int_0^1 e^{2i\pi n\alpha}\ \hat{f}(\alpha)\ \hat{K}_N(\alpha)\ d\alpha \right| \right\|_{\ell^2(dn)} \leq C\|\hat{f}\|_2 .$$

(2) Nous introduisons un lemme qui sera démontré par la suite.

Lemme 5.— *Soient* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_K$ *K points sur le cercle* $S_1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ *et pour j un entier positif,* $Rj = \{\lambda | \lambda \in S_1$ et il existe $1 \leq r \leq k$ tel que $|\lambda - \lambda_r| < \frac{1}{2^j}\}$. *Soit* $s > 0$ *tel que* $|\lambda_i - \lambda_j| > \frac{1}{2^{s-1}}\ \forall i \neq j$. *Soit* $\hat{f} \in L^2[0,1]$ *et*

$$f^*(n) = \sup_{j\geq s} \left| \int_{R_j} e^{2i\pi n\alpha}\ \hat{f}(\alpha) d\alpha \right| .$$

Alors il existe une constante absolue C_2 *telle que*

$$\|f^*\|_{\ell^2(dn)} \leq C_2 (\text{Log } K)^3\ \|\hat{f}\|_2 .$$

Le but maintenant est de remplacer $\hat{K}_N(\alpha)$ par des approximations convenables auxquelles on pourra appliquer le lemme 5.

(3) Soit s un entier positif et

$$R_s = \left\{\theta \in Q \cap [0,1] \mid \theta = \frac{a}{q}\ \ 2^s \leq q < 2^{s+1}\ (a,q) = 1\right\}$$

et soit ζ une fonction C^∞ définie sur $\mathbf{R}$, $|\zeta| \leq 1$, $\zeta = 1$ sur $\left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$ et $\zeta = 0$ en dehors de $\left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$.

Soit $\theta = \frac{a}{q}$; on pose $S(\theta) = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} e^{2i\pi k^d\theta}$. Pour β réel, et N entier positif, on pose

$$V_N(\beta) = \int_0^1 e^{-2i\pi\beta N^d y^d}\, dy$$

et on définit enfin pour $\alpha \in S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$

(4) $$\psi_{s,N}(\alpha) = \sum_{\theta \in R_s} S(\theta) V_N(\alpha - \theta) \zeta(10^s(\alpha - \theta)) .$$

Remarquons que les fonctions intervenant dans la somme ont des supports disjoints puisque si θ_1 et θ_2 sont dans R_s , $\theta_1 \neq \theta_2$; alors $|\theta_1 - \theta_2| > \frac{1}{2^{2s}}$. De l'estimation de H. Weyl ([V], p. 11), dès que $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$, $(a, q) = 1$,

(5) $$\left| \sum_{m=1}^{n} e^{2i\pi \alpha m^d} \right| \leq C_\varepsilon \, n^{(1+\varepsilon)} \left[\frac{1}{q} + \frac{1}{n} + \frac{q}{n^d} \right]^{\frac{1}{2^{d-1}}}$$

on va déduire qu'il existe un nombre $\delta_1 > 0$ tel que

(6) $$\left| \hat{K}_N(\alpha) - \sum_{s \geq 0} \psi_{s,N}(\alpha) \right| < \frac{C_3}{N^{\delta_1}}$$

(les constantes ou bien sont absolues ou bien ne dépendent que de d). Soit $\delta' = \frac{1}{100 2^{d-1}}$, $\delta = \frac{1}{100}$. Soit un rationnel $\frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$, $q < N^\delta$; l'ensemble

$$\mathcal{M}_N\left(\frac{p}{q}\right) = \left\{ \alpha \,\middle|\, \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{N^{d-\delta}} \right\}$$

est appelé un arc majeur.
On appelle $\mathcal{M}_{N,\delta}$ la réunion de tous les arcs majeurs qui sont deux à deux disjoints et on a les estimations classiques suivantes (7), (8) et (9) :

(7) Si $\alpha \in \mathcal{M}^c_{N,\delta}$, $|\hat{K}_N(\alpha)| < \frac{C_4}{N^{\delta'}}$ (une conséquence facile de (5) et du lemme des tiroirs de Dirichlet qui dit qu'il existe a et q , $(a, q) = 1$, tels que $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{N^{d-\delta} q}$, $q < N^{d-\delta}$, et comme α n'est pas dans un arc majeur, $q > N^\delta$).

(8) Si $\alpha \in \mathcal{M}_{N,\delta}$, alors $\alpha = \frac{p}{q} + \beta$, $(p, q) = 1$, $|\beta| < \frac{1}{N^{d-\delta}}$ et $\hat{K}_N(\alpha) = S(\frac{p}{q}) V_N(\beta) + 0(\frac{1}{\sqrt{N}})$ (on utilise les notations de (3)) par un calcul élémentaire utilisant uniquement que si $m = qs + r$ ($s < \frac{N}{q}$, $0 \leq r < q$) , $\left|\{\alpha m^d\} - (\frac{p}{q}) r^d - \beta (qs)^d\right| < \frac{d}{N^{1-2\delta}}$ et $\left|e^{2i\pi\beta q^d s^d} - e^{2i\pi\beta q^d y^d}\right| < \frac{C}{N^{d-2\delta}}$ dès que $|s - y| \leq 1$.

(9) Il y a trois minorations évidentes

(M1) $|V_N(\beta)| < \frac{C_5}{N|\beta|^{\frac{1}{d}}}$.

(M2) $|1 - V_N(\beta)| < C_6\,|\beta|\,N^d$.

(M3) Si $(p,q) = 1$, $2^s \leq q < 2^{s+1}$, $S(\frac{p}{q}) < C_7\ 2^{-s\delta'}$

((M3) est une conséquence de (5)).

(10) On peut maintenant démontrer (6).

(A) $\alpha \in \mathcal{M}_{N,\delta}$. Alors $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{N^{d-\delta}}$, $q < N^\delta$ et $\theta = \frac{p}{q} \in R_{s_0}$ avec $2^{s_0} < N^\delta$. Soit s_1 tel que $2^{s_1} \sim N^\delta$

$$\left|\hat{K}_N(\alpha) - \sum_{s\geq 0} \psi_{s,N}(\alpha)\right| \leq \sum_{\substack{s\leq s_1\\ s\neq s_0}} \sup_{\theta'\in R_s} |V_N(\alpha - \theta')| + \frac{C_8}{2^{s_1\delta}} .$$

(On a utilisé (8) et (M3).) Comme pour tout $\theta' \in R_s$ ($s \leq s_1$, $s \neq s_0$) $|\alpha - \theta'| > \frac{1}{2N^\delta}$, (M1) entraîne que la somme est bornée par $C_5 \frac{\operatorname{Log} N}{N^{1-2\delta}}$.

(B) Si $\alpha \notin \mathcal{M}_{N,\delta}$, conservant la définition de s_1 donnée en (A) ,

$$\left|\sum_{s\geq 0} \psi_{s,N}(\alpha)\right| \leq \sum_{s\leq s_1} |\psi_{s,N}| + \frac{C_9}{2^{s_1\delta}}$$

et comme pour tout $\frac{p}{q} \in R_s$, on a $\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| > \frac{1}{N^{d-\delta}}$, (M1) entraîne encore $\sum_{s\leq s_1} |\psi_{s,N}| \leq C_{10}\,\frac{\operatorname{Log} N}{N^{\frac{\delta}{d}}}$.

(10) (A), (B) et (7) entraînent bien (6) $\delta_1 = (\delta')^2$.

(11) On pose $\psi_N(\alpha) = \sum_{s\geq 0} \psi_{s,N}(\alpha)$ et on montre qu'il suffit de prouver (I) en changeant $\hat{K}_N(\alpha)$ en $\psi_N(\alpha)$. En effet

$$\sup_{N\in\bar{\mathbf{Z}}}\left|\int_0^1 e^{2i\pi n\alpha}\ \hat{f}(\alpha)\,\hat{K}_N(\alpha)\,d\alpha\right| \leq \sup_{N\in\bar{\mathbf{Z}}}\left|\int_0^1 e^{i\pi n\alpha}\ \hat{f}(\alpha)\,\psi_N(\alpha)\,d\alpha\right|$$
$$+\left\{\sum_{N\in\bar{\mathbf{Z}}}\left|\int_0^1 e^{2i\pi n\alpha}\,\hat{f}(\alpha)\left(\hat{K}_N(\alpha) - \psi_N(\alpha)\right)d\alpha\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

et prenant les normes $\| \ \|_{\ell^2}$, on obtient

$$\left\| \sup_{N\in\bar{\mathbf{Z}}} \left| \int_0^1 e^{2i\pi n\alpha}\, \hat{f}(\alpha)\, \hat{K}_N(\alpha)\, d\alpha \right| \right\|_{\ell^2(dn)}$$

$$\leq \left\| \sup_{N\in\bar{\mathbf{Z}}} \left| \int_0^1 e^{2i\pi n\alpha}\, \hat{f}(\alpha)\, \psi_N(\alpha)\, d\alpha \right| \right\|_{\ell^2(dn)}$$

$$+ \left\{ \sum_{N\in\bar{\mathbf{Z}}} \int_0^1 |\hat{f}(\alpha)|^2 \left|\hat{K}_N(\alpha) - \psi_N(\alpha)\right|^2 d\alpha \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

La dernière expression se majore par

$$\left(\sum_{N\in\bar{\mathbf{Z}}} \|\hat{K}_N(\alpha) - \psi_N(\alpha)\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\hat{f}\|_2 \leq C_{11}\, \|\hat{f}\|_2 \ .$$

(On a utilisé (6).)

(12) On introduit les fonctions $\widetilde{\psi}_{N,s}(\alpha) = \sum_{\theta\in R_s} S(\theta)\ \chi[N^d(\alpha-\theta)]$ $\times\zeta(10^s(\alpha-\theta))$ (χ la fonction caractéristique de l'intervalle $[-1,1]$) et on prouve l'estimation

$$S_s(\alpha) = \sum_{N\in\bar{\mathbf{Z}}} \left|\widetilde{\psi}_{N,s} - \psi_{N,s}\right| \leq C_{12}\ 2^{-s\delta} \ . \tag{13}$$

Comme d'après (4) il n'y a au plus qu'un θ de R_s qui donne une contribution, on a

$$S_s(\alpha) \leq \sum_{\substack{N\in\bar{\mathbf{Z}} \\ |\beta|\,N^d\leq 1}} \sup_{\theta\in R_s} |S(\theta)|\,|1-V_N(\beta)| + \sum_{\substack{|\beta|\,N^d>1 \\ N\in\bar{\mathbf{Z}}}} \sup_{\theta\in R_s} |S(\theta)|\,|V_N(\beta)|$$

($\beta = \alpha-\theta$) et on a la majoration en utilisant (M3) et (M2) pour la première somme, (M3) et (M1) pour la deuxième.

$$\left\| \sup_{N\in\bar{\mathbf{Z}}} \left| \int_0^1 e^{2i\pi n\alpha}\, \hat{f}(\alpha)\, \psi_N(\alpha)\, d\alpha \right| \right\|_{\ell^2(dn)} \tag{14}$$

$$\leq \sum_{s\geq 0} \left\| \sup_{N\in\bar{\mathbf{Z}}} \left| \int_0^1 e^{2i\pi n\alpha}\, \hat{f}(\alpha)\, \psi_{N,s}(\alpha)\, d\alpha \right| \right\|_{\ell^2(dn)}$$

le même argument que (11), utilisant (13), donne

$$\left\| \sup_{N\in\bar{\mathbf{Z}}} \left| \int_0^1 e^{2i\pi n\alpha}\, \hat{f}(\alpha)\, \psi_{N,s}(\alpha)\, d\alpha \right| \right\|_{\ell^2(dn)}$$

$$\leq \left\| \sup_{N\in\bar{\mathbf{Z}}} \left| \int_0^1 e^{2i\pi n\alpha}\, \hat{f}(\alpha)\, \widetilde{\psi}_{N,s}(\alpha) \right| \right\|_{\ell^2(dn)} \tag{15}$$

$$+ C_{12} 2^{-s\delta} \|\hat{f}(\alpha)\|_2 \, .$$

Soit $\hat{f}_s(\alpha) = \sum_{\theta\in R_s} \hat{f}(\alpha)\, S(\theta)\, \zeta(10^s(\alpha-\theta))$. On peut appliquer le lemme 5. En prenant $\{\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_K\} = R_s$, et en remarquant que, pour $N \in \bar{\mathbf{Z}}$, $\frac{1}{N^d} = \frac{1}{2^j}$, on obtient, notant $R_{s,u}$ le u voisinage de R_s ,

$$(15) = \left\| \sup_{N\in\bar{\mathbf{Z}}} \left| \int_{R_{s,\frac{1}{N^d}\wedge\frac{1}{510^s}}} e^{2i\pi n\alpha}\, \hat{f}_s(\alpha)\, d\alpha \right| \right\|_{\ell^2(dn)}$$

$$\leq \left\| \sup_{j\geq 2s} \left| \int_{R_{s,\frac{1}{2^j}}} e^{2i\pi n\alpha}\, \hat{f}_s(\alpha)\, d\alpha \right| \right\|_{\ell^2(dn)}$$

$$\leq C_2 (\mathrm{Log\,Card}(R_s))^3\, \|\hat{f}_s\|_2$$

$$\leq C_2\, s^3\, 2^{-s\delta}\, \|\hat{f}\|_2 \, . \tag{16}$$

(On a utilisé (M3)).
La sommation de (11), (14) et (16) donne (I).

4. DÉMONSTRATION DU LEMME 5

On utilise maintenant certains résultats de la théorie des martingales.

DÉFINITION.— *Soit $a = \{a_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, une suite. Soit $s > 0$. On pose*

$$\|\{a_n\}\|_{v_s} = \sup_{\substack{J \\ n_1 < n_2 \cdots < n_J}} \left(\sum_{k=1}^{J-1} \left| a_{n_{k+1}} - a_{n_k} \right|^s \right)^{\frac{1}{s}} .$$

Le lemme suivant est dû à Lépingle [Lep].

Lemme 6.— *Soit* $(X, \mathcal{A}, m)$ *un espace probabilisé,* $f \in L^2(X)$, *et* $\mathcal{A}_n \uparrow \mathcal{A}$. *Soit* $s > 2$. *Alors il existe une constante absolue* C *telle que*

$$\| \, \|\{E^{\mathcal{A}_n} f\}\|_{v_s} \|_{L^2} \stackrel{\text{def}}{=} \|\{E^{\mathcal{A}_n} f\}\|_{L^2_{v_s}} \leq \frac{C}{s-2} \, \|f\|_2 \ .$$

Nous ne démontrerons pas ce lemme que Bourgain obtient par interpolation à partir des estimations de Doob sur l'espérance du nombre de sauts d'amplitude donnée dans une martingale.

La généralisation au cas continu est immédiate (avec l'extension évidente de la définition de $\| \ \|_{v_s}$ à ce cas). Si f est une fonction réelle, on pose $f_t(x) = \frac{1}{t} f\left(\frac{x}{t}\right)$, $(\hat{f}_t(\lambda) = \hat{f}(t\lambda))$.

Une opération "classique" de passage des martingales aux convolutions donne le

Lemme 7.— *Soit* $s > 2$ *et* $f \in L^2(\mathbf{R})$. *Alors* $\left\|\{f * \chi_t\} \,\middle|\, t > 0\right\|_{L^2_{v_s}} \leq \frac{C}{s-2} \, \|f\|_2$ *(où* χ *est la fonction indicatrice de l'intervalle* $[0,1]$ *).*

La démonstration de ce lemme repose sur le fait que si P_t désigne le semi-groupe de Poisson sur $\mathbf{R}$, le lemme de dilatation de Rota et le lemme précédent entraînent $\left\|\{P_t f \,|\, t > 0\}\right\|_{L^2_{v_s}} \leq \frac{C}{s-2} \, \|f\|_2$. Posant $K = \chi - P_1$ qui vérifie $|\lambda| \, |(\hat{K})'(\lambda)| < C_1$, $|(\hat{K})(\lambda)| < C_2 \min(|\lambda|, |\lambda|^{-1})$, ces deux dernières propriétés suffisent pour entraîner $\left\|\{f * K_t \,|\, t > 0\}\right\|_{L^2_{v_2}} \leq C \, \|f\|_2$.

Nous ne donnons pas les détails de cette preuve.

La version discrète de ce résultat pour $f \in \ell^2(\mathbf{Z})$, $\|f * \frac{1}{N} \chi[0\, N]\|_{\ell^2_{v_s}} \leq \frac{C}{s-2} \, \|f\|^2$ sera aussi utilisée dans la suite.

Soit φ une fonction différentiable sur $[0, \infty[$ tendant vers 0 à l'∞ . Alors

$$\varphi(x) = -\int_0^\infty \chi_t(x) \ t\varphi'(t) \, dt \ .$$

Comme corollaire du lemme 7, par convexité, on a, si φ vérifie les hypothèses ci-dessus le

Lemme 9.— $\|\{f * \varphi_t \,|\, t > 0\}\|_{L^2_{v_s}} \leq \frac{C}{s-2} \left(\int_0^\infty |x| \, |\varphi'(x)| \, dx\right) \|f\|_2$.

On pose $\frac{C}{s-2} \int_0^\infty |x|\,|\varphi'(x)|\,dx = C_\varphi$.

Si E est une partie d'un espace métrique et $\lambda > 0$, on définit $M_\lambda(E)$ comme le cardinal du plus petit ensemble de boules de rayon λ qui recouvrent E . Si $\operatorname{diam}(E) < \lambda$, on pose $M_\lambda(E) = 0$.

Lemme 10.— *Soit* φ *comme ci-dessus,* H *un espace de Hilbert,* $f \in L^2_{\mathbf{R}}(H)$, $s > 2$. *Alors* $\big\|\sup_{\lambda>0} (\lambda\, M_\lambda^{\frac{1}{s}}(x))\big\|_2 \leq \frac{C_\varphi}{s-2}\, \|f\|_2$ *où* $M_\lambda(x) = M_\lambda\left(\{f * \varphi_t(x)\,|\, t > 0\}\right)$.

Démonstration.— Si on définit par récurrence $t_j = \min t > t_{j-1}$ tels que $\big\|f * \varphi_t(x) - f * \varphi_{t_{j-1}}(x)\big\|_H > \lambda$, alors $\lambda\, M_\lambda(x)^{\frac{1}{s}} \leq \{\sum_j \|f * \varphi_{t_j}(x) - f * \varphi_{t_{j-1}}(x)\|_H^s\}^{\frac{1}{s}} \leq \|\{f * \varphi_t(x)\}\|_{v_s}$. Si e_n est une base orthogonale de H , $f = \sum_n (f\,|\,e_n)\, e_n$ et $\big\|\sup_{\lambda>0} (\lambda\, M_\lambda^{\frac{1}{s}})\big\|_2 \leq [\sum_n \big\|\{(f\,|\,e_n) \star \varphi_t\}\big\|^2_{L^2_{v_s}}]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C_\varphi}{s-2}\, \|f\|_2$ d'après le lemme 9.

Conservant les mêmes hypothèses et les mêmes notations, on a le

Corollaire 11.— *Si* $f \in L^2_H(\mathbf{R})$, *et si* $K > 0$, *alors*

$$\text{(M)} \qquad \Big\|\int_0^\infty \min\left(K, M_\lambda(x)\right)^{\frac{1}{2}} d\lambda\Big\|_2 \leq C'_\varphi\, (\operatorname{Log} K)^2\, \|f\|_2 \ .$$

Démonstration.— Soit $f_n = (f\,|\,e_n)$ et $f_n^* = \sup_{t>0} |f_n * \varphi_t|$, $\|f_n^*\|_2 \leq C_\varphi\, \|f_n\|_2$ (Inégalité maximale de Hardy-Littlewood). Si $F(x) = \left[\sum_n (f_n^*)^2\right]^{\frac{1}{2}}$, $F(x) > \operatorname{diam}\{f * \varphi_t(x)\,|\, t > 0\}$ et

$$\int_0^\infty \min\left(K, M_\lambda(x)\right)^{\frac{1}{2}} d\lambda = \int_0^{F(x)} \min\left(K, M_\lambda(x)\right)^{\frac{1}{2}} d\lambda$$

$$\text{(s>2)} \qquad \leq \int_0^{\frac{F(x)}{\sqrt{K}}} \sqrt{K}\, d\lambda + \int_{\frac{F(x)}{\sqrt{K}}}^{F(x)} K^{\frac{1}{2}-\frac{1}{s}}\, M_\lambda^{\frac{1}{s}}(x)\, d\lambda$$

$$\leq F(x) + 2^{-1}\, K^{\frac{1}{2}-\frac{1}{s}}\, \operatorname{Log} K \sup_{\lambda>0} \lambda\, M_\lambda^{\frac{1}{s}}(x) \ .$$

Prenant les normes$\|\ \|_2$, choisissant s vérifiant $\frac{1}{2} - \frac{1}{s} = \frac{1}{\operatorname{Log} K}$, le lemme 10 donne (M).

Lemme 12.— *Soient* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_K \in \mathbf{R}$, $(\lambda_1 < \lambda_2 \cdots < \lambda_K)$. *Soient* $f_1, f_2, \cdots f_K$, *K fonctions de* $L^2(\mathbf{R})$. *Soit* $\tau > 0$ *tel que* $|\lambda_{k+1} - \lambda_k| > \tau$, $k = 1, 2 \cdots K-1$. *Soit* φ *une fonction différentiable telle que* $\hat{\varphi}$ *ait son support dans* $[-1,1]$. *Alors*

$$(1) \qquad \left\| \sup_{t>\frac{1}{\tau}} \left| \sum_{k=1}^{K} e^{2i\pi\lambda_k x} \left(f_k * \varphi_t\right) \right| \right\|_2 < C\,(\operatorname{Log} K)^3 \left(\sum_{k=1}^{K} \|f_k\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

(C ne dépend que de φ*).*

Démonstration.— Comme $|\lambda_k - \lambda_\ell| > |k-\ell|\,\tau$, $\int_0^{\frac{1}{\tau}} e^{2i\pi(\lambda_k - \lambda_\ell)u}\,du$ est $0\left(\frac{1}{|k-\ell|}\right)$ et

$$(2) \qquad \left\| \sum_{k \leq K} a_k\, e^{2i\pi\lambda_k u} \right\|_{L^2\left[0,\frac{1}{\tau}\right]} \leq \frac{C'}{\sqrt{\tau}} \operatorname{Log} K \left(\sum_{k=1}^{K} |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Il y a une meilleure constante $B < +\infty$ telle que (1) soit vraie ($C_\varphi \sqrt{K}$ convient d'après le lemme maximal de Hardy-Littlewood). Soit $u > 0$. On pose $\sigma_u f(x) = f(x+u)$. Alors

$$\left\| \sup_{t>\frac{1}{\tau}} \left| \sum_{k=1}^{K} e^{2i\pi\lambda_k x} \left(f_k * \varphi_t\right) \right| \right\|_2$$

$$(\mathrm{S}_1)(\mathrm{u}) \qquad \leq \left\| \sup_{t>\frac{1}{\tau}} \left| \sum_{k=1}^{K} e^{2i\pi\lambda_k x} \sigma_u \left(f_k * \varphi_t\right) \right| \right\|_2$$

$$(\mathrm{S}_2) \qquad + \left\| \sup_{t>\frac{1}{\tau}} \left| \sum_{k=1}^{K} e^{2i\pi\lambda_k x} \left((f_k - \sigma_u f_k) * \varphi_t\right) \right| \right\|_2$$

l'hypothèse sur φ et $t > \frac{1}{\tau}$ entraînent qu'on peut supposer $\operatorname{supp} \hat{f}_k \subset [-\tau, \tau]$, $1 \leq k \leq K$ et on a par Parseval une estimation uniforme

$$\left\| f_k - \sigma_u f_k \right\|_2 < \frac{1}{2} \left\| f_k \right\|_2 \quad k = 1, 2 \cdots K \quad |u| < \frac{1}{100\,\tau} .$$

(S_2) est alors majorée par $\frac{1}{2} B \left(\sum \left\| f_k \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Pour estimer (S_1), on regarde l'ensemble $A_x = \{f_1 * \varphi_t(x), f_2 * \varphi_t(x), \cdots f_K * \varphi_t(x) \,|\, t > 0\}$ et on remarque qu'on peut décrire tout point de cet ensemble par une somme

$$\sum_{s\in\mathbf{Z}} b_s \qquad b_s \in \mathbf{R}^K \quad , \qquad |b_s| = \left(\sum_{i=1}^{K} |b_{s,i}|^2\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

où $|b_s| < 2^{s+1}$, et où chaque b_s appartient à un ensemble B_s (qui dépend de $b_{s'}$, $s' > s$ tel que $\mathrm{Card}(B_s) < M_{2^s}(x)$ et où presque sûrement il n'y a qu'un nombre fini de b_s , $s > 0$ non nuls). (On a utilisé les notations du lemme 10 et du corollaire 11 où H est de dimension K et $f = (f_1, f_2, \cdots f_K)$.)

Alors : (on n'a plus besoin de se restreindre à $t > \frac{1}{\tau}$)

$$\sup_{t>0} \left|\sum_{k=1}^{K} e^{-2i\pi\lambda_k(u-x)} f_k * \varphi_t(x)\right| \leq \sum_{s\in\mathbf{Z}} \operatorname*{Max}_{b\in B_s} \left|\sum_{k=1}^{K} e^{-2i\pi\lambda_k(u-x)} b_k\right| \quad (b = (b_1, b_2, \cdots b_K)) .$$

$$(3) \qquad \operatorname*{Max}_{b\in B_s} \left|\sum_{k=1}^{K} e^{-2i\pi\lambda_k(u-x)} b_k\right| < \min\left(\sqrt{K}\, 2^{s+1}, \left(\sum_{b\in B_s} \left|\sum_{k=1}^{K} e^{-2i\pi\lambda_k(u-x)} b_k\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) .$$

On peut remplacer $(\mathrm{S}_1)(\mathrm{u})$ par

$$10\sqrt{\tau}\, \|S_1(u)\|_{L^2\left(0,\frac{1}{100\tau}\right)} \leq \left\|10 \sum_s \min\left(2^{s+1}\sqrt{K}, C' \operatorname{Log} K\, 2^{s+1} M_{2^s}^{\frac{1}{2}}(x)\right)\right\|_{L^2(dx)}$$

(on a changé l'ordre des intégrations, et utilisé (3) et (2)). Par le corollaire 11, cette dernière expression est majorée par $10\, C'\, C'_\varphi (\operatorname{Log} K)^3 \left(\sum_{k=1}^{K} \|f_k\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$, d'où $B \leq \frac{1}{2} B + 10\, C'\, C'_\varphi\, (\operatorname{Log} K)^3$, ce qui donne (1).

On a maintenant une version $L^2(\mathbf{R})$ du lemme 5.

Lemme 13.— *Soient* $\lambda_1 < \lambda_2 \cdots < \lambda_K \in \mathbf{R}$ *avec* $\left|\lambda_{k+1} - \lambda_k\right| > 2^{-s}$. *Soit* R_j *le* $\frac{1}{2^j}$ *voisinage de l'ensemble* $\left\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_K\right\}$. *Alors, si* $f \in L^2(\mathbf{R})$

$$(1) \qquad \left\|\sup_{j\geq s}\left|\int_{R_j} e^{2i\pi\lambda x}\,\hat{f}(\lambda)\,d\lambda\right|\right\|_2 \leq C(\operatorname{Log} K)^3\,\|\hat{f}\|_2$$

(C est absolu).

Pour démontrer ce lemme, on prend une fonction φ telle que $\operatorname{Supp}\hat{\varphi} \subset [-1,1]$, $\hat{\varphi} = 1$ sur $\left[-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right]$ et l'inégalité (1) s'obtient en appliquant le lemme 12 avec $f_k = \left(f\,.\,e^{-2i\pi\lambda_k x}\right) * \varphi_{2^{s-1}}$ et en remarquant que $\sup\limits_{\lambda\in\mathbf{R}}\left[\sum_{j\geq s}\left|\chi_{R_j}(\lambda) - \sum_{i=1}^{K}\hat{\varphi}\left(2^j(\lambda-\lambda_i)\right)\right|\right]$ est fini.

Fin de la démonstration du lemme 5.— Soit $B = C\,(\operatorname{Log} K)^3$. Le lemme 13 dit que

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\sup_j\left|\int_{R_j} e^{2i\pi x\alpha}\,\hat{f}(\alpha)\,d\alpha\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq B\,\|\hat{f}\|_2\ ,$$

$R_j \subset [0,1]$ et $\hat{f}(\alpha)$ considérée comme une fonction sur $\mathbf{R}$ de support $[0,1[$.

On veut montrer qu'il y a une constante C telle que

$$\left(\sum_{n\in\mathbf{Z}}\sup_j\left|\int_{R_j} e^{2i\pi n\alpha}\,\hat{f}(\alpha)\,d\alpha\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq CB\,\|\hat{f}\|_2\ .$$

On montre en fait qu'il existe C indépendante de N telle que

$$(1) \qquad \left(\sum_{|n|<N}\sup_j\left|\int_{R_j} e^{2i\pi n\alpha}\,\hat{f}(\alpha)\,d\alpha\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq CB\,\|\hat{f}\|_2\ .$$

Soit C_N la meilleure constante telle que (1) soit vraie $\left(C_N \leq \sqrt{2N+1}\right)$. Soit ρ un nombre < 1 et $0 < u < \rho$, alors

$$\int_{R_j} e^{2i\pi n\alpha}\,\hat{f}(\alpha)\,d\alpha = \int_{R_j} e^{2i\pi(n+u)\alpha}\,\hat{f}(\alpha)\,d\alpha + \int_{R_j} e^{2i\pi n\alpha}\left[1 - e^{+2i\pi u\alpha}\right]\hat{f}(\alpha)\,d\alpha\ .$$

$$\left(\sum_{|n|<N} \sup_j \left| \int_{R_j} e^{2i\pi n\alpha} \hat{f}(\alpha)\, d\alpha \right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(\mathrm{S}_1)(\mathrm{u}) \qquad \leq \left(\sum_{|n|<N} \sup_j \left| \int_{R_j} e^{2i\pi(n+u)\alpha} \hat{f}(\alpha)\, d\alpha \right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(\mathrm{S}_2) \qquad + \left(\sum_{|n|<N} \sup_j \left| \int_{R_j} e^{2i\pi n\alpha} \left(1 - e^{2i\pi u\alpha}\right) \hat{f}(\alpha)\, d\alpha \right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(S_2) est majorée par $C_N\, C_1\, \rho\, \|\hat{f}\|_2$, tandis que $\frac{1}{\sqrt{\rho}}\, \|S_1(u)\|_{L^2(0,\rho)} \leq \frac{1}{\sqrt{\rho}}\, B\, \|\hat{f}\|_2$, $C_N \leq \frac{B}{\sqrt{\rho}} + C_N\, C_1\, \rho$ et le résultat en prenant ρ assez petit.

5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3

$$\|M_j^\varepsilon\, f\|_2 = \left\| \sup_{\substack{N_j < N \leq N_{j+1} \\ N \in \mathbf{Z}_\varepsilon}} \left| \int_0^1 e^{2i\pi n\alpha}\, \hat{f}(\alpha) \big(\hat{K}_N(\alpha) - \hat{K}_{N_j}(\alpha)\big)\, d\alpha \right| \right\|_{\ell^2(dn)}$$

l'estimation (6) du théorème 1 permet de remplacer $\hat{K}_N(\alpha) - \hat{K}_{N_j}(\alpha)$ par $\psi_N(\alpha) - \psi_{N_j}(\alpha)$ et l'estimation (16), en considérant maintenant M_j^ε défini par ψ_N , pour $s_0 > 0$, donne

$$\|M_j^\varepsilon\, f\|_2 \leq \sum_{s \leq s_0} \left\| \sup_{\substack{N_j < N \leq N_{j+1} \\ N \in \mathbf{Z}_\varepsilon}} \left| \int_0^1 e^{2i\pi n\alpha}\, \hat{f}(\alpha) \big(\psi_{N,s}(\alpha) - \psi_{N_j,s}(\alpha)\big)\, d\alpha \right| \right\|_2$$
$$+ \frac{C}{\varepsilon}\, 2^{-\delta s_0}\, \|f\|_2$$

Redéfinissant

$$(1) \qquad M_j^\varepsilon\, f(n) = \sup_{\substack{N_j < N \leq N_{j+1} \\ N \in \mathbf{Z}_\varepsilon}} \left| \int_0^1 e^{2i\pi n\alpha}\, \hat{f}(\alpha) \big(V_N(\alpha) - V_{N_j}(\alpha)\big)\, d\alpha \right|$$

on ne modifie pas le comportement de $\frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} \|M_j^\varepsilon\, f\|_2$.

Si χ est la fonction indicatrice de $[0,1]$, (M1) et (M2) donnent $|V_N(\alpha) - \hat{\chi}(N^d\alpha)| < C(\min(|\alpha|\,N^d, \frac{1}{N(\alpha)^{\frac{1}{d}}})$ et $\sup_\alpha \sum_{N\in \mathbf{Z}_\varepsilon} |V_N(\alpha) - \hat{\chi}(N^d\alpha)|^2 < C_\varepsilon$. Par conséquent, si on définit $\bar{M}_j\, f(n) = \sup_{N_j<N\leq N_{j+1}} \left|f * \left(\chi_{N^d} - \chi_{N_j^d}\right)\right|$, où $\chi_N = \frac{1}{N}\,\chi_{[0,N]}$, on aura

$$\sum_{j=1}^{J} \|M_j^\varepsilon\, f\|_2^2 \leq C_\varepsilon\, \|f\|_2^2 + \sum_{j=1}^{J} \|\bar{M}_j\, f\|_2^2\,. \tag{2}$$

Mais $\left|\sum_{j=1}^{J} (\bar{M}_j\, f)^2\right|^{\frac{1}{2}} \leq J^{\frac{1}{4}}\, \|\{f * \chi_N \,|\, N > 1\}\|_{v_4}$ et le lemme 7 donne

$$\sum_{j=1}^{J} \|\bar{M}_j\, f\|_2^2 < C\,\sqrt{J}\, \|f\|_2^2 \tag{3}$$

et (2) et (3) entraînent le Théorème 3.

La méthode est assez souple pour s'appliquer avec des modifications convenables et donner le

THÉORÈME 6.— *Soit $(X, \mathcal{A}, m, T)$ un système dynamique. Soit $f \in L^2(X)$ si p_n désigne le n-ième nombre premier $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(T^{p_k}x)$ converge p.s. quand $N \to +\infty$.*

Si toutes les puissances de T sont ergodiques, la limite est $\int f\, dm$.

La démonstration se fonde sur deux estimations de $S_N(\alpha) = \sum_{n\leq N} \Lambda(n)\, e^{2i\pi n\alpha}$ ($\Lambda(n) = \operatorname{Log} p$ si n est une puissance du nombre premier p, $\Lambda(n) = 0$ sinon) (voir [V], p. 26, 29).

1) Si $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$, où $(a,q) = 1$

$$\left|S_N(\alpha)\right| < C\left(\frac{N}{\sqrt{q}} + N^{\frac{4}{5}} + N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}\right)(\operatorname{Log} N)^4\,.$$

2) Si $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{(\operatorname{Log} N)^c}{N}$ où $(a,q) = 1$ et $q \leq (\operatorname{Log} N)^c$, alors

$$S_N(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\phi(q)} \sum_{1\leq k\leq N} e^{2i\pi k\left(\alpha - \frac{a}{q}\right)} + O\left(N\, e^{-c\sqrt{\operatorname{Log} N}}\right),$$

valable pour $c > 0$ où $\mu(q)$ désigne la fonction de Möebius et $\phi(q)$ le nombre d'entiers plus petits que q premiers avec q .

On considère P l'ensemble des nombres premiers ; on pose $P_N = P \cap [1, N]$ et $K_N = \frac{1}{|P_N|} \sum_{p \in P_N} \delta_{\{p\}}$.

Il y a une estimation

$$\left\| \frac{\operatorname{Log} N}{N} \sum_{p \in P_N} \delta_{\{p\}} - \frac{1}{N} \sum_{k \leq N} \Lambda(k)\, \delta_{\{k\}} \right\|_1 < \frac{C}{\operatorname{Log} N} ,$$

ce qui entraîne

$$\left| \hat{K}_N(\alpha) - \frac{1}{N} S_N(-\alpha) \right| < \frac{C}{\operatorname{Log} N} . \tag{3}$$

On peut remplacer $\hat{K}_N(\alpha)$ par $\frac{1}{N} S_N(-\alpha)$ et on utilise (1) et (2) exactement de la même manière que (5) et (8) dans la démonstration du Théorème 1.

6. LES AUTRES RÉSULTATS

Dans le même travail [B6], Bourgain démontre le

THÉORÈME 6.1.— *Soit $(X, \mathcal{A}, m, T)$ un système dynamique et $p(n)$ un polynôme à coefficients réels dont le terme de plus haut degré a un coefficient positif. Soit $f \in L^r(X)$, $r > 1$.*

Alors $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(T^{[p(k)]}x\right)$ converge p.s. quand $N \to +\infty$.

Il y a aussi une version de son théorème pour le cas d'une action de $\mathbf{Z}^\ell$ ([B1], [B6]).

THÉORÈME 6.2.— *Soient $T_1, T_2, \cdots T_\ell$ ℓ transformations préservant la mesure sur $(X, \mathcal{A}, m)$ et commutant deux à deux, et soient $p_1(n), p_2(n), \cdots p_\ell(n)$ ℓ polynômes à coefficients entiers. Soit $f \in L^r(X)$, $r > 1$. Alors*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T_1^{p_1(n)}\, T_2^{p_2(n)} \cdots T_\ell^{p_\ell(n)} f \quad \text{converge p.s. quand} \quad N \to +\infty .$$

Dans le cas de suites de densité positive où on a facilement le lemme maximal, sa technique peut être utilisée pour produire suffisamment de fonctions .

THÉORÈME 6.3 [B4][B5][B6].— *Soit* $(X, \mathcal{A}, m, T)$ *un système dynamique et* $A \in \mathcal{A}$, $m(A) > 0$. *Soit* $x \in X$ *et* $\Lambda_x = \{n \in \mathbf{N} \,|\, T^n x \in A\}$. *Alors, pour presque tout* x , Λ_x *est une suite sommante universelle i.e. : si* $\Lambda_x^N = \Lambda_x \cap [1, N]$, *pour tout système dynamique* $(Y, \mathcal{B}, \mu, S)$ *pour tout* $g \in L^1(Y)$

$$\frac{1}{|\Lambda_x^N|} \sum_{k \in \Lambda_x^N} g(S^k y) \quad \text{converge p.s. quand} \quad N \to +\infty \, .$$

Une démonstration “élémentaire” a été donnée par la suite par Furstenberg, Katznelson et Ornstein et se trouve en appendice dans [B6].

Répondant à une question de Furstenberg [F1], Bourgain a montré dans [B7] le

THÉORÈME 6.4.— *Si* T_1 *et* T_2 *sont deux puissances d'une même transformation* T *de* $(X, \mathcal{A}, m)$ *et* f_1 *et* f_2 *deux fonctions de* $L^2(X)$, *alors*

$$(1) \qquad \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} f_1(T_1^n x)\, f_2(T_2^n x) \quad \text{converge p.s. quand} \quad N \to +\infty \, .$$

(Dans [Les], Lesigne avait démontré (1) dans les deux cas extrêmes où T est un K-système et où T est à spectre discret.)

BIBLIOGRAPHIE

[B] A. BELLOW - *Two problems* <u>in</u> Measure Theory, Oberwolfach 1981, Springer L.N.M., Vol. 945, 429-431.

[B-L] A. BELLOW and V. LOSERT - *The weighted pointwise ergodic theorem and the individual ergodic theorem along subsequences*, T.A.M.S. 1985, Vol. 288, 307-345.

[B1] J. BOURGAIN - *On the maximal ergodic theorem for certain subsets of the integers*, Israel Journal of Mathematics, Vol. 61, n° 1, 1988, 39-72.

[B2] J. BOURGAIN - *On the pointwise ergodic theorem on L^p for arithmetic sets*, Israel Journal of Mathematics, Vol. 61, n° 1, 1988, 73-84.

[B3] J. BOURGAIN - *An approach to pointwise ergodic theorems*, Springer L.N.M., Vol. 1317, 204-223.

[B4] J. BOURGAIN - *Return time sequences of dynamical systems*, preprint I.H.E.S., 1988.

[B5] J. BOURGAIN - *Temps de retour pour les systèmes dynamiques*, C.R.A.S., t. 306, Série I, 1988, 483-485.

[B6] J. BOURGAIN - *Pointwise ergodic theorems on arithmetic sets, with an appendix on return time sequences (jointly with H. Furstenberg, Y. Katznelson, D. Ornstein)*, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. n° 69, 1989, 5-45.

[B7] J. BOURGAIN - *Double recurrence and almost sure convergence*, preprint, 1988.

[C] R.P. CALDERON - *Ergodic theory and translation invariant operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 59, 1968, 349-353.

[B-K] A. BRUNEL and M. KEANE - *Ergodic theorems for operator sequences*, Z.F.W. 12 , 1969, 231-240.

[F1] H. FURSTENBERG - *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton U.P., 1981.

[F2] H. FURSTENBERG - Proceedings of the Durham Conference, June 1982.

[Lep] D. LÉPINGLE - *La variation d'ordre p des semi-martingales*, Z.F.W. 36, 1976, 295-316.

[Les] E. LESIGNE - *Sur la convergence ponctuelle de certaines moyennes ergodiques*, C.R.A.S., Paris, t. 298, série I (1984).

[V] R.C. VAUGHAN - *The Hardy-Littlewood circle method*, Cambridge University Press, 1981.

[W] M. WIERDL - *Pointwise ergodic theorem along the prime numbers*, Israel Journal of Mathematics, Vol. 64, n° 3, 1988, 315-336.

Jean-Paul THOUVENOT

U.A. 224 du C.N.R.S.
Université Pierre et Marie Curie
Laboratoire de Probabilités
Tour 56 (3e étage)
4 place Jussieu
F-75252 PARIS CEDEX 05