

Astérisque

YVES COLIN DE VERDIÈRE

Distribution de points sur une sphère

Astérisque, tome 177-178 (1989), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 703, p. 83-93

http://www.numdam.org/item?id=SB_1988-1989__31__83_0

© Société mathématique de France, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DISTRIBUTION DE POINTS SUR UNE SPHÈRE

(D'après Lubotzky, Phillips et Sarnak)

par Yves COLIN DE VERDIÈRE

Le comportement asymptotique des orbites de l'action d'un groupe discret Γ d'isométries sur un espace euclidien ou hyperbolique X a été beaucoup étudié et conduit à des estimations asymptotiques de la fonction de dénombrement

$$N_{\Gamma}(x_0, x_1; R) = \#\{\gamma \in \Gamma \mid d(x_0, \gamma x_1) \leq R\}$$

(x_0, x_1 points de X ; d distance sur X) lorsque R tend vers l'infini.

Il est intéressant de faire une étude analogue concernant l'action (non discrète) d'un groupe discret Γ sur un espace compact X comme la sphère et de mesurer la régularité de la distribution des orbites, on peut par exemple s'intéresser à la fonction :

$$N_{\Gamma}(D, x_0; R) = \frac{1}{n} \#\{\gamma \in \Gamma \mid \|\gamma\| \leq R \text{ et } \gamma x_0 \in D\},$$

où $\|\gamma\|$ mesure la grandeur d'un élément de Γ (par exemple la longueur minimale des mots représentant γ par rapport à un système de générateurs de Γ), D est un domaine de X et $n = \#\{\gamma \in \Gamma \mid \|\gamma\| \leq R\}$.

Lubotzky, Phillips et Sarnak ont étudié le cas $X = S^2$ et montrent que pour certains Γ "arithmétiques" bien choisis, $N_{\Gamma}(D, x_0; R)$ converge vers $\frac{1}{4\pi}$ aire (D) avec une estimation précise du reste lorsque D est régulière.

Les majorations décisives, dans le cas arithmétique, proviennent des conjectures de Weil, prouvées par Deligne.

Les "opérateurs de Hecke" introduits dans ce contexte de l'analyse harmonique sur S^2 pourraient avoir des retombées intéressantes par l'utilisation de nouvelles bases d'harmoniques sphériques, moins sensibles au choix d'un axe de rotation que ne le sont les $Y_{l,m}$ usuelles.

Précisons un peu les notations, si $S = \langle a_1, b_1 = a_1^{-1}, \dots, a_l, b_l = a_l^{-1} \rangle$ est une partie finie symétrique du groupe des isométries X , on mesure l'uniformité de la distribution des orbites $S \cdot x_0$ ($x_0 \in X$) à l'aide de l'opérateur T_S défini sur $L^2(X)$ par :

$$(T_S f)(x) = \sum_{\gamma \in S} f(\gamma x).$$

L'opérateur T_S est symétrique, de norme $2l$ et $T_S(1) = 2l.1$, on en déduit que T_S laisse invariant l'espace $L_0^2(X) \subset L^2(X)$, formé des fonctions de moyenne nulle. On pose

$$\delta_S = \frac{1}{2l} \|T_S|_{L_0^2(X)}\| .$$

On a aussi

$$\delta_S = \frac{1}{2l} \sup\{|\lambda| \mid \lambda \text{ valeur propre de } T_S|_{L_0^2}\},$$

en effet, T_S commute avec le laplacien et admet donc une base orthonormée de fonctions propres communes avec lui. La bonne répartition moyenne des orbites est mesurée par la petitesse de δ_S .

On introduit un autre invariant de la façon suivante : soit G_S le sous-groupe de $\text{Isom}(X)$ engendré par S , soit

$$S^N = \{\gamma \in G_S \mid \gamma \text{ est un mot de longueur } \leq N \text{ en } S\} ,$$

on s'intéresse à la décroissance par rapport à N de δ_{S^N} .

Il n'est pas clair qu'on puisse trouver des S tels que $\delta_S < 1$, et en fait dans le cas des tores plats, c'est impossible.

1. Cas des tores

Soit $X = \mathbf{R}^n / \mathbf{Z}^n$ muni d'une métrique plate et S un sous-ensemble fini, symétrique de X , opérant par translation sur lui-même:

$$S = \{\pm a_i \mid 1 \leq i \leq l\} , \text{ avec } a_i \in \mathbf{R}^n .$$

Les valeurs propres de $T_S|_{L_0^2(X)}$ sont les nombres

$$\lambda_\nu = 2 \sum_{i=1}^l \cos(2\pi \langle \nu | a_i \rangle) ,$$

où $\nu \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$, la fonction propre e_ν étant l'exponentielle $e^{2\pi i \langle \nu | x \rangle}$. Alors ε étant donné, il existe $\nu \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$, tel que $\forall i, d(\langle \nu | a_i \rangle, \mathbf{Z}) \leq \varepsilon$.

On en déduit qu'il existe des ν non nuls, tels que λ_ν soit arbitrairement proche de $2l$, et donc $\delta_S = 1$.

2. Résultats de Lubotzky, Phillips et Sarnak

Dans les articles [LPS 1] et [LPS 2], les auteurs montrent que le cas de S^2 est très différent de celui des tores; ils prouvent en particulier les théorèmes suivants :

THÉORÈME A . — $\forall S \subset SO(3)$ avec $\#S = 2l$, on a

$$\delta_S \geq \sqrt{2l - 1} / l .$$

Pour tout nombre premier $p \equiv 1 \pmod{4}$, les auteurs exhibent un sous-ensemble S_p de $SO(3)$ à $p + 1 = 2l$ éléments, optimal par rapport au théorème A :

THÉORÈME B . — On a :

$$\delta_{S_p} = 2\sqrt{p} / (p + 1) .$$

De plus, si on pose $\#S_p^N = n$, on a :

THÉORÈME C. — $\delta_{S_p^N} = O(\text{Log } n/\sqrt{n})$.

Le théorème C s'écrit donc

$$\forall f \in L^2(S^2), \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(\gamma_j x) - \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f \right\|_{L^2} = O(\text{Log } n/\sqrt{n}),$$

où $\{\gamma_j | 1 \leq j \leq n\}$ est la liste des éléments de S_p^N .

Si on prend des f d'un type particulier, on peut obtenir des estimations ponctuelles. Par exemple le cas où D est un domaine à bord C^1 donne lieu au :

THÉORÈME D. — Si $x_0 \in S^2$, on a :

$$\left| \frac{1}{n} \#\{j | \gamma_j x_0 \in D\} - \frac{1}{4\pi} \text{aire}(D) \right| = O(\text{Log } n/n^{1/3}).$$

Le théorème A est comparativement facile et dépend de résultats de Kesten ([K]) sur le support de la mesure spectrale associée à un groupe de type fini. Le théorème B dépend des conjectures de Weil, démontrées par Deligne, via une majoration asymptotique des coefficients de Fourier de formes modulaires convenables. Le théorème C est une conséquence assez simple du théorème B.

Le théorème D résulte d'estimations précises sur les harmoniques sphériques zonales, plus précisément des multiplicateurs associés à la convolution par la fonction caractéristique d'un petit disque de S^2 .

3. Mesure spectrale d'un graphe homogène

Soit Γ un graphe homogène sous l'action d'un groupe G . On suppose Γ de degré (valence) $q+1$ et muni de la mesure qui donne la masse 1 à chaque sommet. Sur $l^2(\Gamma)$, on définit un opérateur T par la formule :

$$(Tf)(x) = \sum_{x' \sim x} f(x').$$

T est relié au laplacien combinatoire standard par $T = (q+1)\text{Id} - \Delta$.

L'exemple fondamental est le *graphe de Cayley* Γ_G , d'un groupe G associé à un système S *symétrique* de $2l = q+1$ générateurs : les sommets de Γ_G sont les points de G , il y a une arête entre g et g' chaque fois qu'il existe $\gamma \in S$ tel que $\gamma g = g'$. Γ est homogène sous l'action de G par translation à droite sur lui-même. Si G est libre, Γ est un arbre homogène.

On a une notion de *mesure spectrale* associée au graphe homogène Γ , qui est un cas particulier de la notion bien connue des physiciens de *densité d'états* (voir à ce sujet, par exemple [CV 1]).

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue; par le calcul fonctionnel, est associé à f un opérateur $f(T)$ sur $l^2(\Gamma)$, qui admet une matrice $[f(T)]_{x,x'}$. A cause de l'homogénéité de Γ , on a évidemment :

$$\forall x, x' \quad [f(T)]_{x,x} = [f(T)]_{x',x'}.$$

On considère alors, pour $x_0 \in \Gamma$ fixé, la forme linéaire sur $C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ définie par :

$$L(f) = [f(T)]_{x_0, x_0} .$$

L est une forme linéaire positive ($f \geq 0 \Rightarrow f(T) \geq 0 \Rightarrow [f(T)]_{x_0, x_0} \geq 0$); $L(1) = 1$ et donc L définit une mesure de probabilité μ sur \mathbf{R} , c'est la mesure spectrale de Γ .

Dégageons quelques propriétés de μ :

i) Si Γ a $N < \infty$ sommets, on a : $\mu = 1/N \sum_{i=1}^N \delta(\lambda_i)$, où $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ sont les valeurs propres de T ; en effet, on a :

$$\text{Tr} f(T) = \sum_{x \in \Gamma} [f(T)]_{x, x} = N \int f d\mu .$$

ii) Support (μ) = spectre (T) .

En effet :

a) si $]a, b[\cap \text{Spectre}(T) = \emptyset$ et $f \in C_0(]a, b[, \mathbf{R})$, on a $f(T) = 0$ et donc $]a, b[\cap \text{Supp}(\mu) = \emptyset$.

b) Réciproquement, si $]a, b[\cap \text{Supp}(\mu) = \emptyset$, on a, pour toute f à support dans $]a, b[$,

$$[f^2(T)]_{x, x} = 0$$

et comme

$$[f^2(T)]_{x, x} = \sum_{x' \in \Gamma} ([f(T)]_{x, x'})^2 ,$$

$f(T) = 0$. En particulier $\text{Supp} \mu \subset [-2l, 2l]$.

iii) $\int t^s d\mu = m_s$ est le nombre de lacets d'origine x et de longueur s , où la longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes parcourues. En particulier, on a : $m_s(\Gamma) \geq m_s(A_q)$, où A_q est l'arbre homogène de degré $q + 1$.

iv) $\|T\| = \limsup (m_s)^{1/s}$. En effet, soit $F(\lambda) = \int (\lambda - t)^{-1} d\mu(t)$, c'est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} - \text{Spectre}(T)$, la relation précédente découle du calcul du rayon de convergence de la série de Laurent de F .

v) Calcul de μ à partir de la résolvante; on a :

$$\mu = \frac{1}{2i\pi} [(t + i0 - T)^{-1} - (t - i0 - T)^{-1}]_{x, x} .$$

vi) Soit G_n une suite décroissante de sous-groupes de G , d'indices finis et dont l'intersection est $\{e\}$, on a :

$$\mu_G = \lim \mu_{G_n \setminus G}$$

La preuve consiste à regarder la limite des $m_s(G_n)$. Cette égalité permet de retrouver une définition usuelle de la densité d'état : densité limite des valeurs propres dans de grands domaines dont le bord devient "négligeable".

Venons-en au théorème de Kesten, concernant le cas du graphe de Cayley d'un groupe G de générateurs S :

THÉORÈME (KESTEN 1959) . — Soit (G, S) , avec $\#S = 2l$ et $d_{G, S}$ la norme de l'opérateur T associé, $\delta_{G, S} = \frac{1}{2l} d_{G, S}$, on a :

$$\frac{\sqrt{2l-1}}{l} \leq \delta_{G, S} \leq 1$$

avec :

$$\delta_{G,S} = \frac{\sqrt{2l-1}}{l} \iff (G, S) \text{ libre}$$

$$\delta_{G,S} = 1 \iff G \text{ moyennable .}$$

Preuve. — La majoration de $\delta_{G,S}$ est évidente par définition de T_S qui est somme de $2l$ opérateurs de norme 1; la minoration résulte de iii) et iv) : en effet ces relations prouvent que $\|T\|$ est minimale à l fixé, lorsque Γ est un arbre. Il reste à prouver que $\delta = \sqrt{2l-1}/l$ lorsque (G, S) est libre, ce qui sera fait au §4.

La caractérisation des groupes libres comme un minimum absolu de $\delta_{G,S}$ est faite dans [K]; elle est délicate, mais cette caractérisation n'est pas utile pour ce qui suit.

L'autre extrême, le cas moyennable, est plus accessible. Rappelons qu'un groupe est *moyennable* s'il existe une moyenne invariante définie sur toute fonction bornée de G dans \mathbf{R} , positive sur les fonctions positives, telle que la fonction 1 soit de moyenne 1.

La propriété de moyennabilité admet une interprétation géométrique, c'est la condition de Følner :

(F) G est dit de Følner si $\forall \varepsilon > 0$, il existe une partie finie $A \subset G$ telle que $\#bA \leq \varepsilon \#A$, où $\#bA$ est le nombre d'arêtes joignant A au complémentaire de A dans le graphe de Cayley de G . Cette propriété est indépendante du système de générateurs, c'est une propriété isopérimétrique.

On a alors le :

THÉORÈME . — G , de type fini, est moyennable si et seulement si G est de Følner.

La preuve se trouve dans [GL].

Il est alors facile de relier la condition (F) et la condition spectrale $\delta_{G,S} = 1$, en effet cette condition se traduit sur le laplacien par $\inf(\text{Spectre } \Delta) = 0$: l'équivalence résulte alors du minimax appliqué à la fonction caractéristique de A dans un sens et de l'inégalité de Cheeger dans l'autre ([DK]).

4. Cas des arbres

Ici Γ est un arbre homogène de degré $2l = q + 1$.

4a. *Spectre et résolvante.* — La matrice de la résolvante s'obtient par résolution de :

$$(\lambda - T)f = \delta(x_0), \quad f \in L^2(\Gamma).$$

Par symétrie, $f(x)$ est une fonction u_n de la distance n de x à x_0 . Cette suite doit satisfaire

$$\lambda u_0 - (q+1)u_1 = 1 \tag{1}$$

$$\lambda u_n - (u_{n-1} + qu_{n+1}) = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 (q+1)q^{n-1} < +\infty \tag{3}$$

On est amené à chercher u_n sous la forme $u_n = C\alpha^n$, où α est solution de

$$q\alpha^2 - \lambda\alpha + 1 = 0 \quad \text{et} \quad u_0 = \frac{1}{\lambda - (q+1)\alpha}.$$

L'équation caractéristique n'a de solution vérifiant (3) que si $\lambda \notin I_q = [-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}]$.

Dans ce cas, on obtient pour $\lambda \notin \text{Spectre}(T)$:

$$[(\lambda - T)^{-1}]_{x,x} = \frac{2q}{(q-1)\lambda - (q+1)F(\lambda)},$$

où $F(\lambda)$ est la détermination de $\sqrt{\lambda^2 - 4q}$ dans $\mathbf{C} - I_q$ équivalente à λ lorsque λ est grand. Les propriétés 3.iii et 3.v montrent alors que : $\text{spectre}(T) = I_q$ et donc $d_\Gamma = 2\sqrt{q}$. On a aussi par le calcul de μ dans 3.v :

$$d\mu = \frac{(q+1)\sqrt{4q-t^2}}{2\pi((q+1)^2 - t^2)} dt.$$

On vérifie en particulier que $\int d\mu = 1$.

4b. Calcul fonctionnel. — On définit des opérateurs T_n par $(T_n f)(x) = \sum_{d(x,x')=n} f(x')$. Il est clair que les T_n sont donnés par des polynômes $T_n = P_n(T)$.

Par exemple :

$$P_0 = 1, P_1 = t, P_2 = t^2 - (q+1), \dots$$

On a le résultat suivant :

$$a_{n,m} = \int P_n(t)P_m(t)d\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ (q-1)q^{n-1} & \text{si } n = m \end{cases}$$

Preuve. — D'après la définition de μ , on a : $a_{n,m} = [P_n P_m(T)]_{x,x}$; comme $P_n P_m(T) = P_n(T) \circ P_m(T)$, on a :

$$a_{n,m} = \sum_{d(x,x')=n} \sum_{d(x',x)=m} 1.$$

Les polynômes $P'_n = ((q-1)q^{n-1})^{-1/2} P_n$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbf{R}, \mu)$.

Calcul des P_n : ce calcul est fait par les auteurs, on trouve :

$$P_n = Q_n - Q_{n-2} \text{ où } Q_n(2\sqrt{q} \cos \theta) = q^{n/2} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}.$$

5. Preuve du théorème A

Comme T_S commute avec le laplacien, il préserve les espaces propres du laplacien canonique Δ de S^2 , les espaces H_n d'harmoniques sphériques. Rappelons (cf [BGM]) que H_n est l'espace vectoriel des restrictions à S^2 des polynômes homogènes de degré n , harmoniques dans \mathbf{R}^3 et qu'on a $\dim(H_n) = 2n+1$. et

$$H_n = \text{Ker}(\Delta - n(n+1)).$$

Définissons des mesures μ_n sur \mathbf{R} à support dans $[-2l, 2l]$ par

$$\mu_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} \delta(\lambda_{n,j}),$$

où $\lambda_{n,1} \leq \dots \leq \lambda_{n,2n+1}$ sont les valeurs propres de $T_S|_{H_n}$.

Le théorème A est alors une conséquence immédiate du :

THÉORÈME . — Lorsque $n \rightarrow \infty$, les mesures μ_n convergent vaguement vers une mesure μ qui est la mesure spectrale du groupe G_S relativement aux générateurs de S .

(Le théorème A s'en déduit immédiatement puisque visiblement tout point du support de μ est un point du spectre essentiel de T_S , car point d'accumulation de valeurs propres de T_S).

Preuve. — Le théorème précédent est conséquence d'une mini-formule de traces qui s'écrit ainsi :

$$(*) \quad \text{Tr}(T_S^s|_{H_n}) = \sum_{\gamma}^{(s)} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta_{\gamma}}{\sin \frac{\theta_{\gamma}}{2}},$$

où $\sum^{(s)}$ est la somme sur les mots de longueur s par rapport à S et si γ est un tel mot considéré comme une rotation, $\theta_{\gamma} \in [0, \pi]$ est l'angle de cette rotation.

La formule (*) est élémentaire, on a :

$$(T_S^s f)(z) = \sum_{\gamma}^{(s)} f(\gamma z)$$

et donc si T_{γ} est défini par :

$$T_{\gamma} f(z) = f(\gamma z),$$

on a $T_S^s = \sum_{\gamma}^{(s)} T_{\gamma}$, et :

$$\text{Tr} T_S^s|_{H_n} = \sum_{\gamma}^{(s)} \text{Tr}(T_{\gamma}|_{H_n}),$$

puis la trace de $T_{\gamma}|_{H_n}$ (valeur du caractère χ_n de la représentation naturelle de $SO(3)$ dans H_n sur γ) se calcule en diagonalisant T_{γ} par rapport à la base usuelle des harmoniques sphériques relative à l'axe de la rotation γ (les $Y_{l,n}$).

$$\text{Tr} T_{\gamma}|_{H_n} = \chi_n(\gamma) = \sum_{|l| \leq n} e^{il\theta_{\gamma}} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta_{\gamma}}{\sin \frac{\theta_{\gamma}}{2}}.$$

Cela conclut la preuve de (*). Il serait intéressant d'étendre cette formule à un contexte plus général (espaces symétriques compacts, espaces homogènes).

Considérons maintenant les μ_n , on a :

$$\int t^s d\mu_n = \frac{1}{2n+1} \text{Tr}(T_S^s|_{H_n}),$$

et donc, en appliquant (*) :

$$\int t^s \mu_n \rightarrow \#\{\gamma | \theta_{\gamma} = 0\} = m_s,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. On en déduit le résultat cherché. Il est remarquable que μ ne dépend pas la représentation de G_S dans $SO(3)$, mais seulement du groupe abstrait G_S et de son système de générateurs S .

6. Construction des S_p

Soit $H = \{x + yi + zj + tk | x, y, z, t \in \mathbf{R}\}$ le corps des quaternions, E le sous-espace vectoriel de dimension 3 sur \mathbf{R} des quaternions purement imaginaires ($x = 0$) muni de la structure euclidienne induite par la norme des quaternions $N(q) = q\bar{q}$. A tout quaternion $q \in H \setminus \{0\}$, on associe la rotation $\rho_q \in SO(E)$ définie par :

$$\rho_q(\zeta) = \frac{1}{N(q)} q\zeta\bar{q}.$$

Cela définit un homomorphisme surjectif du groupe multiplicatif de H sur $SO(E)$.

L'idée est maintenant d'utiliser des quaternions à coordonnées entières, *i.e.* dans $H(\mathbf{Z}) = \{x + yi + zj + tk | x, y, z \in \mathbf{Z}\}$. Si p est premier, il y a $8(p+1)$ quaternions entiers de norme p . Lorsque $p \equiv 1 \pmod{4}$, il est facile de voir par action du groupe des 8 unités de $H(\mathbf{Z})$ qu'il existe $p+1$ de ces quaternions tels que $x > 0$, et impair, y, z, t sont pairs, qui se regroupent par paires conjuguées, on désigne par Σ_p l'ensemble de ceux-ci.

$$\Sigma_p = \{\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \alpha_l, \bar{\alpha}_l\} \text{ avec } l = p+1.$$

Les rotations associées sont 2 à 2 distinctes, on note :

$$S_p = \{\rho_{\alpha_1}, \rho_{\bar{\alpha}_1}, \dots, \rho_{\alpha_l}, \rho_{\bar{\alpha}_l}\},$$

et Γ_p le sous-groupe de $SO(3)$ engendré par S_p . Par exemple :

$$\Sigma_5 = \{1 \pm 2i, 1 \pm 2j, 1 \pm 2k\}$$

et S_5 est l'ensemble des rotations d'angle $\pm\alpha$ autour de Oy, Oz et Ot avec :

$$\cos \alpha = -\frac{3}{5}.$$

Par la suite, on notera encore, pour $n \in \mathbf{N}$:

$$\Sigma_n = \{q \in H(\mathbf{Z}) | q \equiv 1 \pmod{2}, x(q) > 0, N(q) = n\}$$

et on notera :

$$T_n f(\zeta) = \sum_{q \in \Sigma_n} f(\rho_q \zeta)$$

l'opérateur de Hecke associé. Si $p \equiv 1 \pmod{4}$, $T_{S_p} = T_p$.

LEMME (arithmétique de $H(\mathbf{Z})$). — Soient p, q deux nombres premiers $p, q \equiv 1 \pmod{4}$, alors

(i) L'application $(q_1, q_2) \mapsto \varepsilon q_1 q_2$ (ε unité telle que $\varepsilon q_1 q_2 \in \Sigma_{pq}$) de $\Sigma_p \times \Sigma_q$ dans Σ_{pq} est une bijection;

(ii) Tout élément $r \in \Sigma_{p^*}$ s'écrit de façon unique $r = \varepsilon p^l R_m(\alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_l)$, avec $\{\alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_l\} = \Sigma_p$, R_m est un mot réduit (sans succession de $\alpha_i \bar{\alpha}_i$ ou $\bar{\alpha}_i \alpha_i$) de longueur m , avec $2m + l = k$.

COROLLAIRE 1. — Γ_p est un groupe libre, admettant S_p comme système libre de générateurs.

COROLLAIRE 2. — Soit A l'ensemble des entiers dont tous les diviseurs sont congrus à 1 modulo 4, alors les T_n ($n \in A$) commutent entre eux et pour p premier, on a :

$$T_{p^k} = l_k(T_p), \text{ avec } l_k \text{ le polynôme de degré } k$$

défini par $l_k(2\sqrt{p} \cos \theta) = 2p^{k/2}(\sin(k+1)\theta / \sin \theta)$.

Remarque. — Pour cette arithmétique, consulter par exemple [HW], pp. 303-310, mais prendre garde que les quaternions entiers de cette référence sont les éléments de $H'(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}\rho \oplus \mathbf{Z}i \oplus \mathbf{Z}j \oplus \mathbf{Z}k$ avec $\rho = \frac{1}{2}(1+i+j+k)$. Cet anneau est facile à utiliser, car il est euclidien. On obtient les résultats précédents à partir de là, car tout élément de $H'(\mathbf{Z})$ est à une unité près équivalent à un élément de $H(\mathbf{Z})$.

7. Preuve du théorème B

Soit u un polynôme homogène harmonique de degré m sur E , espace des quaternions purement imaginaires, on introduit, pour chaque ζ de la sphère unité S^2 de E , la fonction de variable complexe :

$$\theta(z) = \sum_{\alpha \equiv 2 \pmod{4}} u(\alpha \zeta \bar{\alpha}) \exp(2\pi i N(\alpha)z/16),$$

où la somme est prise sur les quaternions entiers $\alpha \equiv 2 \pmod{4}$.

On a alors le :

LEMME. — θ est une forme modulaire parabolique de poids $2+2m$ pour le groupe de congruence $\Gamma(4) \subset PSL(2; \mathbf{Z})$.

Preuve. — On utilise un résultat dû à Schoenberg (voir [OG]). Pour appliquer ce résultat, il suffit de savoir que $\alpha \mapsto u(\alpha \zeta \bar{\alpha})$ est un polynôme homogène harmonique de degré $2m$ sur H , ce qui n'est pas difficile à vérifier; par exemple pour un argument de représentation de groupe : le groupe $S^3 = SU(2)$ agit naturellement sur H_m (harmoniques sphérique de degré m) et la représentation est irréductible. La multiplication des quaternions induit une action de $S^3 \subset H$ sur les polynômes homogènes de degré $2m$ sur H et l'application

$$v(z) \mapsto v(\alpha \zeta \bar{\alpha})$$

est équivariante pour les actions; il suffit donc de vérifier le résultat pour une seule harmonique de H_m , par exemple $(y+iz)^m$, ce qui est facile.

Soit maintenant u une fonction propre de T_p , $u \in H_m$ ($m \neq 0$), on peut écrire :

$$T_p u = 2\sqrt{p} \cos \theta u,$$

avec $\theta \in \mathbf{C}$ bien choisi. Il nous suffit alors de montrer que θ est réel et donc que les valeurs propres de $T_p \upharpoonright H_m$ ($m \neq 0$) sont situées dans l'intervalle $[-2\sqrt{p}, 2\sqrt{p}]$.

On a, d'après le §6,

$$T_{p^k} u = p^{k/2}(\sin(k+1)\theta / \sin \theta)u.$$

Développons θ en série de Fourier, il vient :

$$\theta(z) = \sum_{\nu \in 4\mathbf{N}} a_\nu e^{2\pi i \nu z/16},$$

avec

$$a_\nu = 2\nu^m (T_{\nu/4} u)(\zeta) .$$

Soit

$$a_{4p^k} = 4^{m+1} \cdot p^{(m+\frac{1}{2})k} (\sin(k+1)\theta / \sin \theta) u(\zeta) .$$

D'après les résultats de Deligne (preuve des conjectures de Weil [D]), il vient

$$a_\nu = O_\varepsilon(\nu^{m+\frac{1}{2}+\varepsilon}) ,$$

ce qui n'est possible pour $\nu = 4p^{k'}$ que si θ est réel, lorsque ζ est tel que $u(\zeta) \neq 0$.

8. Preuve du théorème C

Soit S_p^N l'ensemble des éléments de Γ_p qui s'écrivent comme mots de longueur $\leq N$ par rapport aux $p+1$ générateurs de $S_p = S_p^1 \setminus \text{Id}$. Désignons par n le cardinal de S_p^N , i.e. :

$$n = (p^{N+1} + p^N - 2)/(p-1) ,$$

et par $T_{p,N}$ l'opérateur de Hecke sur $L^2(S^2)$ associé à S_p^N . Il est clair que $T_{p,N}$ est un polynôme de T_p :

$$T_{p,N} = R_N(T_p) ,$$

avec :

$$R_N(2\sqrt{p} \cos \theta) = p^{N/2} (\sin(N+1)\theta + (1/\sqrt{p}) \sin(N\theta)) / \sin \theta .$$

Le théorème B assure que les valeurs propres de T_p correspondent à des valeurs réelles de θ , et donc :

$$\|T_{p,N}\| \leq 2N p^{N/2} = O(\sqrt{n} \text{Log } n) ,$$

on en déduit :

$$\delta_{S_p^N} = O(\text{Log } n / \sqrt{n}) .$$

9. Problèmes

Dans [LPS3] et [LPS4], les mêmes auteurs appliquent des méthodes du même type pour construire des graphes explicites de degré $q+1$ ayant un λ_1 le plus grand possible relativement au nombre de sommets.

Je mentionne ici en conclusion quelques problèmes d'analyse harmonique sur S^2 reliés aux T_p .

Les T_p , ($p \equiv 1 \pmod{4}$) commutent entre eux. On met ainsi en évidence une base orthonormée spéciale des harmoniques sphériques : les $W_{n,j}$ ($n = 0, 1, \dots ; 1 \leq j \leq 2n+1$). Quelles sont leurs propriétés?

a) Du point de vue du développement d'une fonction arbitraire en série de Fourier?

b) A-t-on $\|W_{n,j}\|_{L^\infty} \leq \text{constante}$?

c) A-t-on des propriétés d'ergodicité analogue à celles de [CV2], c'est à dire, si $\mu_{j,n} = |W_{n,j}|^2 \sigma_0$, est-ce-que les $\mu_{j,n}$ convergent vers σ_0 lorsque $n \rightarrow \infty$?

Il est en effet vraisemblable que pour beaucoup de problèmes la base $(W_{n,j})$, ne privilégiant plus une des directions des axes de \mathbb{R}^3 , a de meilleures propriétés que la base usuelle des $(Y_{l,n})$.

10. Bibliographie

- [BGM] BERGER M., GAUDUCHON P., MAZET E. — *Le spectre d'une variété riemannienne compacte*, LNM 194, Springer, 1974.
- [C] CARTIER P. — *Harmonic analysis on trees*, Proc. Symp. Pure Math., **26** (1973), 419-424.
- [CV1] COLIN DE VERDIÈRE Y. — *Minoration des sommes de valeurs propres d'un domaine et conjecture de Polya*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Chambéry- Grenoble, **3** (1984-1985), VII-VIII.
- [CV2] COLIN DE VERDIÈRE Y.. — *Ergodicité et fonctions propres du laplacien*, Comm. Math. Phys., **102** (1985), 497-502.
- [D] DELIGNE P. — *La conjecture de Weil I*, Publ. Math. IHES, **43** (1974), 273-307.
- [DK] DODZIUK J. — *Difference equations, isoperimetric inequalities and transience of certain random walks*, Trans. AMS, **284** (1984), 787-794.
- [GF] GREENLEAF. — *Invariant means on topological groups*, Van Nostrand, 1969.
- [GV] GROMOV M. — *Structures métriques pour les variétés riemanniennes, rédigé par Lafontaine et Pansu*, Cedric-Nathan, 1980.
- [HW] HARDY G., WRIGHT E. — *An introduction to number theory*, Oxford U.P., 1962.
- [K] KESTEN A. — *Symmetric random walks on groups*, Trans. AMS, **92** (1959), 336-354.
- [LPS1] LUBOTZKY A., PHILLIPS R., SARNAK P. — *Hecke operators and distributing points on the sphere I*, CPAM, **39** (1987), 149-186.
- [LPS2] LUBOTZKY A., PHILLIPS R., SARNAK P. — *Hecke operators and distributing points on the sphere II*, CPAM, **40** (1987), 401-420.
- [LPS3] LUBOTZKY A., PHILLIPS R., SARNAK P. — *Explicit expanders and the Ramanujan conjectures*, Proc. 18th ACM, Symp. of theory of computing, (1986), 204-246.
- [LPS4] LUBOTZKY A., PHILLIPS R., SARNAK P. — *Ramanujan graphs*, Combinatorica, 1986.
- [OG] OGG A. — *Modular forms and Dirichlet series*, Benjamin Inc. NY, 1969.
- [SÖ] SZEGÖ G. — *Orthogonal polynomials*, AMS Coll. Publ., vol.XXIII, 1939.

- ♦ -

Institut Fourier
B.P.74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex
(France)

(13 décembre 1988)