Astérisque

JACQUES TITS

Groupes associés aux algèbres de Kac-Moody

Astérisque, tome 177-178 (1989), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 700, p. 7-31
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1988-1989__31__7_0>

Séminaire BOURBAKI
41ème année, 1988-89, n° 700

Novembre 1988

GROUPES ASSOCIÉS AUX ALGÈBRES DE KAC-MOODY

par Jacques TITS

1. PRÉLIMINAIRES ET POSITION DU PROBLÈME

1.1. Une matrice carrée $A = (A_{ij})_{i,j\in I}$ est appelée *matrice de Cartan généralisée* si I est un ensemble fini (hypothèse souvent superflue), $A_{ii} = 2$ pour tout $i \in I$, $A_{ij} \in -\mathbf{N}$ si $i \neq j$ et $A_{ij} = 0$ implique $A_{ji} = 0$. Si, de plus, A est produit d'une matrice diagonale par une matrice symétrique (resp. symétrique définie positive), elle est dite *symétrisable* (resp. appelée *matrice de Cartan*). On sait, depuis W. Killing et E. Cartan, que les classes d'isomorphisme d'algèbres de Lie complexes semi-simples sont en correspondance bijective naturelle avec les matrices de Cartan : une présentation simple de l'algèbre correspondant à la matrice A consiste en un système générateur $(e_i, f_i, h_i)_{i\in I}$ de 3 card I éléments assujettis aux relations suivantes, où $i,j \in I$:

$$[h_i,h_j] = 0 \ ,$$

$$[h_i,e_j] = A_{ij}e_j \ , \quad [h_i,f_j] = -A_{ij}f_j \ ,$$

$$[e_i,f_i] = -h_i \ ,$$

$$\text{si} \quad i \neq j \ , \quad [e_i,f_j] = (\mathrm{ad}\ e_i)^{-A_{ij}+1}(e_j) = (\mathrm{ad}\ f_i)^{-A_{ij}+1}(f_j) = 0$$

(*cf.* p. ex. [Ser 1]). Pour toute matrice de Cartan généralisée, on note $\mathfrak{g}(A)$ l'algèbre de Lie définie par cette même présentation ; si A n'est pas une matrice de Cartan, $\dim \mathfrak{g}(A) = \infty$. Les algèbres $\mathfrak{g}(A)$, appelées *algèbres de Kac-Moody*, ont fait récemment l'objet de nombreux travaux ; la référence de base en ce qui les concerne est [Kac 2].

Les algèbres de Lie (de dimension finie) n'étaient, à l'origine, qu'un outil commode pour l'étude de ce que Lie, Killing et Cartan appelaient "groupes continus finis", et il est naturel de se demander si l'on peut aussi obtenir des groupes intéressants par "intégration" des algèbres $\mathfrak{g}(A)$. C'est la version la plus simple du problème qui fait l'objet du présent exposé.

S.M.F.
Astérisque 177-178 (1989)

1.2. Plus généralement, soit $\mathcal{D} = (I,\Lambda,(\alpha_i)_{i\in I}, (\alpha_i^\vee)_{i\in I})$ la donnée constituée par un ensemble fini I, un groupe abélien libre Λ, dont le $\mathbf{Z}$-dual est noté $\Lambda^\vee$, et des systèmes indexés par I d'éléments $\alpha_i \in \Lambda$ et $\alpha_i^\vee \in \Lambda^\vee$. Ces notations seront conservées tout au long de l'exposé et l'on supposera toujours que la matrice $A = (A_{ij})$, avec $A_{ij} = \alpha_j(\alpha_i^\vee)$, est une matrice de Cartan généralisée.

Lorsque A est une matrice de Cartan, un résultat fondamental de C. Chevalley ([Ch 2]), précisé par M. Demazure ([De]), attache à $\mathcal{D}$ un *schéma en groupes réductifs déployés* $\mathfrak{G}_\mathcal{D}$: Λ est le groupe des caractères d'un tore déployé maximal, $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une base du système de racines relatif à ce tore et $\alpha_i^\vee$ est la coracine associée à α_i. L'importance des schémas en groupes $\mathfrak{G}_\mathcal{D}$ réside notamment dans le fait que, si K est un corps algébriquement clos, la correspondance $\mathcal{D} \longleftrightarrow \mathfrak{G}_{\mathcal{D},K}$ met les systèmes $\mathcal{D}$ du type envisagé en bijection avec les K-groupes réductifs connexes.

La question se pose de généraliser la construction de $\mathfrak{G}_\mathcal{D}$ à un système $\mathcal{D}$ quelconque (sans restriction sur la matrice de Cartan généralisée A). L'exemple du numéro 1.3 ci-après laisse prévoir l'existence de plusieurs façons d'aborder ce problème, conduisant à des solutions de nature différentes quoique liées entre elles. Le présent exposé sera principalement consacré à la description de deux objets, notés $\mathfrak{E}_\mathcal{D}$ ($\mathfrak{E}$ pour "élémentaire") et $\hat{\mathfrak{G}}_\mathcal{D}$. Le premier, que l'on pourrait appeler le "foncteur minimal" associé à $\mathcal{D}$, est un foncteur en groupes sur la catégorie des anneaux ; il ne généralise pas à proprement parler $\mathfrak{G}_\mathcal{D}$ (rappelons que les schémas en groupes sont des foncteurs en groupes particuliers !), mais si A est une matrice de Cartan, il existe un homomorphisme canonique $\mathfrak{E}_\mathcal{D} \longrightarrow \mathfrak{G}_\mathcal{D}$ qui est un isomorphisme sur tout anneau euclidien (par exemple, sur tout corps). Quant à $\hat{\mathfrak{G}}_\mathcal{D}$, c'est un ind-schéma en groupes qui se réduit précisément à $\mathfrak{G}_\mathcal{D}$ lorsque A est une matrice de Cartan. Sur un corps K, le groupe $\hat{\mathfrak{G}}_\mathcal{D}(K)$ est le complété de $\mathfrak{E}_\mathcal{D}(K)$ pour une topologie convenable. A un détail de définition près, le foncteur $\mathfrak{E}_\mathcal{D}$ a été introduit dans [Ti 6] (et même déjà, en substance, dans [Ti 2]). La construction, beaucoup plus subtile, de $\hat{\mathfrak{G}}_\mathcal{D}$, est due à O. Mathieu (*cf.* [Mat 5], [Mat 7]).

A une matrice de Cartan généralisée A donnée sont associées canoniquement plusieurs données $\mathcal{D}$; les plus importantes sont :

– la *donnée adjointe* $\mathcal{D}_{ad}$, obtenue en prenant pour α_j le vecteur $(A_{ij})_{i\in I}$ de $\mathbf{Z}^I$ et pour Λ le sous-groupe de $\mathbf{Z}^I$ engendré par les α_j, ce qui détermine $\Lambda^\vee$ et les $\alpha_i^\vee$ (lorsque A est inversible, on a $\Lambda = \coprod_{j\in I} \mathbf{Z}\,\alpha_j$) ;

– la *donnée simplement connexe* $\mathcal{D}_{sc}$, caractérisée par la relation $\Lambda^\vee = \coprod_{i\in I} \mathbf{Z}\,\alpha_i^\vee$;

– la *donnée universelle* $\mathcal{D}_{un}$, obtenue en prenant pour Λ, $\Lambda^\vee$ deux copies de $\mathbf{Z}^{2\,\mathrm{Card}\,I}$, dont les bases canoniques sont notées $(u_j,v_j)_{j\in I}$, $(u_i',v_i')_{i\in I}$, en posant $\alpha_j = u_j$, $\alpha_i^\vee = v_i'$, et en mettant Λ et $\Lambda^\vee$ en $\mathbf{Z}$-dualité par la forme bilinéaire représentée par la matrice $\begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$, où $n = \mathrm{Card}\, I$.

Nous simplifierons les notations en écrivant $\mathfrak{E}_{A,ad}$, $\mathfrak{E}_{A,sc}$, $\hat{\mathfrak{G}}_{A,ad}$, $\hat{\mathfrak{G}}_{A,sc}$ pour $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}_{ad}(A)}$, etc. Les *groupes adjoints* $\mathfrak{E}_{A,ad}(\mathbf{C})$, $\hat{\mathfrak{G}}_{A,ad}(\mathbf{C})$, et *simplement connexes* $\mathfrak{E}_{A,sc}(\mathbf{C})$, $\hat{\mathfrak{G}}_{A,sc}(\mathbf{C})$, fournissent des réponses - parmi d'autres - au problème posé à la fin du n° 1.1.

1.3. Exemple

Soient $\mathcal{H}$ un schéma de Chevalley quasi-simple, simplement connexe, Λ le groupe des caractères d'un tore déployé maximal, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ une base du système de racines relatif à ce tore, α_0 l'opposée de la plus grande racine, I l'ensemble $\{0, 1, \ldots, \ell\}$, $\alpha_i^\vee \in \Lambda^\vee$ la coracine de $\mathcal{H}$ correspondant à α_i pour $i \in I$ et $\mathcal{D} = (I, \Lambda, (\alpha_j)_{j\in I}, (\alpha_i^\vee)_{i\in I})$. La matrice $A = (\alpha_i^\vee(\alpha_j))$ est la matrice de Cartan généralisée décrite par le graphe de Dynkin complété de $\mathcal{H}$ (*cf.* [Bo], VI.4.3). Si $\mathfrak{h}$ désigne l'algèbre de Lie du groupe algébrique complexe $\mathcal{H}(\mathbf{C})$, on sait (voir p. ex. [Kac 2], chap. 7) que $\mathfrak{g}(A)$ est extension centrale de $\mathfrak{h} \otimes \mathbf{C}[t,t^{-1}]$ par $\mathbf{C}$. Ce fait, en plus d'autres considérations que nous ne développons pas ici, suggère que, pour la donnée $\mathcal{D}$ qui vient d'être décrite, une solution naturelle du problème posé au n° 1.2 est le foncteur en groupes $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}} : R \longmapsto \mathcal{H}(R[t,t^{-1}])$, où R désigne un anneau (la disparition de l'extension centrale est due au choix que nous avons fait pour Λ : si l'on remplaçait $\mathcal{D}$ par $\mathcal{D}_{sc}(A)$, on aurait plutôt à considérer une extension centrale de $\mathcal{H}(R[t,t^{-1}])$ par $R^\times$). Il s'avère que $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}}$ coïncide effectivement avec $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}$ sur les corps (*cf.* le § 4 ci-dessous) ; comme foncteur sur la catégorie de tous les anneaux, $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}}$ est sans doute plus naturel que $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}$.

Une variante du foncteur précédent, et qui se prête mieux à une interprétation algébro-géométrique, est son "complété à l'infini" $R \longmapsto \mathcal{H}(R((t)))$. Soient K un corps parfait et B un sous-groupe d'Iwahori de $\mathcal{H}(K((t)))$ (*cf.* [BrT 2]). On sait (*loc. cit.*) que B est le groupe des points entiers d'un $K[[t]]$-schéma en groupes lisse de fibre générique $\mathcal{H}_{K((t))}$. Par application du foncteur de Greenberg, on obtient sur B une structure de groupe proalgébrique (sur K) et il est indiqué dans l'introduction de [BrT 1] que, via la décomposition en doubles classes modulo B , on devrait pouvoir en déduire une structure de groupe ind-proalgébrique sur $\mathcal{H}(K((t)))$. Cette structure n'a jamais été explicitée jusqu'ici, mais il me semble très probable que l'ind-schéma de Mathieu fournit la solution de ce problème (sans rien dire toutefois du cas d'inégale caractéristique, qui est aussi considéré dans [BrT 1]).

1.4. Quoiqu'il en soit, l'exemple précédent fait apparaître deux différences essentielles entre les foncteurs $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}$ et $\hat{\mathfrak{G}}_{\mathcal{D}}$: le premier est de nature plutôt arithmétique et fait jouer un rôle symétrique aux e_i et aux f_i , donc aux racines positives et négatives, tandis que le second, qui est de nature algébro-géométrique, privilégie les e_i , ce qui correspond au choix de l'un des deux points à l'infini de Spec $K[t,t^{-1}]$.

De manière générale, la plupart des solutions données dans la littérature au problème de l'"intégration" des algèbres de Kac-Moody peuvent se classer en solutions *de type minimal*, qui coïncident avec $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}$ sur les corps (mais peuvent en différer sur des anneaux plus généraux, comme le foncteur $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}}$ du n° 1.3 par exemple), et solutions *de type formel*, qui sont des complétées des précédentes. (Nous ne chercherons pas à donner un sens plus précis à ces expressions, utilisées au paragraphe suivant dans un but descriptif.) Echappent à cette classification les solutions *de type analytique*, de R. Goodman et N. Wallach (pour des matrices A de type affine standard : *cf.* [GoW]), et les groupes de R. Marcuson [Mar], qu'on peut voir comme un premier pas vers une complétion mais qui sont cependant encore de nature purement algébrique (non topologique).

1.5. L'intérêt des groupes associés aux algèbres de Kac-Moody dépasse celui d'une simple généralisation formelle du cas classique à la dimension infinie. Cela ressort notamment des observations suivantes.

Conservons les notations de 1.3. Il résulte facilement de la définition et des propriétés élémentaires de $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}$ que, si K est un corps, le groupe $\mathfrak{E}_{A,sc}(K)$ est une extension centrale non triviale de $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(K) = \mathcal{H}(K[t,t^{-1}])$ par $K^\times$. Par complétion, on en déduit une extension centrale non triviale de $\mathcal{H}(K((t)))$ par $K^\times$, laquelle est sans aucun doute le groupe $\hat{\mathfrak{G}}_{A,sc}(K)$. L'existence de ces extensions centrales est loin d'être évidente d'un point de vue classique (voir les références du n° 1.6).

La théorie de Kac-Moody semble bien être le cadre naturel pour l'étude des *variétés de Schubert* qui sont toujours, quelle que soit la matrice A , des variétés *de dimension finie* (ou, dans la version de Mathieu, des schémas de type fini). La remarque suivante est significative à cet égard. Rappelons d'abord que les surfaces algébriques complexes compactes réglées rationnelles et non singulières, ou "surfaces de Hirzebruch", traditionnellement notées Σ_n , sont classées par un invariant entier positif n (*cf.* p. ex. [BaPV], p. 141). Il s'avère que si G désigne le groupe $\hat{\mathfrak{G}}_{\mathcal{D}}(\mathbf{C})$ (ou, indifféremment, $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(\mathbf{C})$) et B un sous-groupe de Borel, la sous-variété de Schubert de G/B correspondant à l'élément $r_i r_j$ du groupe de Weyl $(i,j \in I\ ,\ i \neq j)$ est une surface Σ_n pour $n = -A_{ij}$ (*cf.* [Ti 1], 4.2, ou [Ti 2], 8.3.e)). Ainsi, les variétés de Schubert de dimension 2 des quotients G/B de "groupes de Kac-Moody" ne sont autres que les surfaces Σ_n , mais si l'on considère seulement les groupes simples G de dimension finie, seules les surfaces d'invariant $n \leq 3$ apparaissent, et si l'on accepte en outre les matrices A de type affine, on ne gagne que les surfaces Σ_4 .

Ajoutons que, bien qu'introduits plus récemment que les algèbres de Kac-Moody, les groupes qui leur sont associés ont déjà eu, eux aussi, des applications intéressantes dans plusieurs domaines : cf. notamment [IDGA], [ReS], [SegW] (et aussi la référence [5] de [SegW]), [Sl 1].

1.6. Dans cet exposé, on s'intéressera surtout aux aspects de la théorie qui concernent des matrices de Cartan généralisées quelconques (ou éventuellement supposées symétrisables). Pour cette raison, et aussi faute de temps et de compétence, je laisserai de côté la théorie des groupes de lacets, me bornant à dire ici, en deux mots, en quoi celle-ci est liée au sujet qui nous occupe. Reprenons les notations du n° 1.3. Les points du groupe $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}}(\mathbf{C}) = \mathfrak{H}(\mathbf{C}[t,t^{-1}])$ sont les morphismes $\varphi : \mathbf{C}^{\times} \longrightarrow \mathfrak{H}(\mathbf{C})$. La restriction de φ au cercle $\{z \mid |z| = 1\}$ est un lacet $\mathbf{S}_1 \longrightarrow \mathfrak{H}(\mathbf{C})$ qui détermine φ ; ainsi $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}}(\mathbf{C})$ est un espace de lacets, que certains appellent "algébriques", dans $\mathfrak{H}(\mathbf{C})$. En changeant la catégorie dans laquelle sont prises les applications, on obtient d'autres groupes de lacets dont l'étude relève de la géométrie algébrique, la topologie, l'analyse ou l'analyse fonctionnelle selon la catégorie envisagée. Ces groupes et les extensions centrales non triviales par $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ qu'ils possèdent dans tous les cas intéressants, peuvent aussi être considérés comme des groupes de Kac-Moody de type affine ; ils ont fait l'objet de nombreux travaux : cf. notamment [GoW], [Le], [PS], [Seg 1], [Seg 2], [SegW] et la référence [5] de SegW .

2. APERÇU HISTORIQUE

L'article de N. Iwahori et H. Matsumoto sur les groupes de Chevalley p-adiques [IM], suivi peu après par ceux de H. Hijikata [Hi] et de Bruhat-Tits (p. ex. [BrT 1]), marque l'apparition dans la littérature des groupes qui nous intéressent. Il précède de trois ans l'introduction par V. Kac [Kac 1] (voir aussi I.L. Kantor, [Kan 1] et [Kan 2]) et R. Moody [Moo 1] des algèbres qui portent leurs noms.

La première construction de groupes à partir d'algèbres de Kac-Moody est due à R. Moody et K. Teo [MooT] ; ils associent à une algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$ sur un corps K de caractéristique 0 le sous-groupe de $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}(A)$ engendré par les $\exp te_i$ et $\exp tf_i$ pour $t \in K$. Le groupe qu'ils obtiennent ainsi et dont ils prouvent certaines propriétés (notamment l'existence d'un "système de Tits" de groupe de Weyl W) est le groupe noté ici $\mathfrak{E}_{A,ad}(K)$. Une construction indirecte, basée sur un procédé de réduction mod p à partir d'un corps valué de caractéristique 0 , leur permet aussi de définir des groupes sur un corps quelconque de caractéristique $p > \sup \{|A_{ij}| \mid i,j \in I\}$.

R. Marcuson [Mar] se place en caractéristique 0 et, au lieu de la représentation adjointe utilisée par Moody et Teo, il définit (indépendamment de V. Kac) et utilise les $\mathfrak{g}(A)$-modules à poids dominants. Il prend pour générateurs non seulement les exponentielles des e_i et f_i mais celles de tous les vecteurs propres de l'algèbre de Cartan $\Sigma\, K\,.\,h_i$ correspondant aux racines positives ("réelles ou imaginaires" au sens de Kac). Il laisse ouvert le problème des liens entre les groupes obtenus à partir de poids dominants différents.

Dans [Ga 2], H. Garland considère seulement le cas des matrices A de type affine (standard). Sa méthode s'apparente assez à celle de Marcuson mais il pousse plus loin l'analyse des groupes obtenus, ce qui lui permet notamment de définir des groupes sur un corps K quelconque et de les relier aux groupes de la forme $\mathcal{H}(K((t)))$, où $\mathcal{H}$ est un schéma de Chevalley. Il aborde aussi l'étude de certains sous-groupes arithmétiques (sur $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}[i]$).

La question est reprise d'un point de vue différent dans [Ti 1] et [Ti 2], dont l'objectif premier est de s'affranchir de toute restriction de caractéristique et de donner une construction "intrinsèque", indépendante du choix d'une représentation linéaire de $\mathfrak{g}(A)$. La méthode adoptée, une définition par générateurs (les groupes B et N d'une BN-paire) et relations, fournit non pas un mais une famille de groupes, parmi lesquels un groupe minimal - le groupe $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(K)$ du présent exposé - et un groupe maximal (de type formel), dont la structure en caractéristique 0 a été ultérieurement précisée par O. Mathieu [Mat 1]. Les données $\mathcal{D}$ du n° 1.2 ci-dessus sont introduites dans [Ti 1] (*cf.* aussi [Ti 3]) ; diverses spécialisations de cette notion ont été utilisées par la suite sous le nom de "réalisations de A " (*cf.* notamment [Kac 2], [Mat 5]). Parmi les contributions de [Ti 2], citons la description "concrète" d'un foncteur en groupes associé à une matrice A de type affine - standard ou tordu - pour un choix particulier de $\mathcal{D}$ évitant le problème de l'extension centrale (*cf.* aussi l'appendice 2 de [Ti 3] et, pour le cas d'un corps de base de caractéristique 0 , J. Morita [Mor 1]), la définition des variétés de Demazure et de Schubert sur $\mathbf{C}$ et la conjecture que, au moins sur $\mathbf{C}$ et pour un choix convenable du groupe $\hat{\mathfrak{G}}_{\mathcal{D}}$ associé à une donnée $\mathcal{D}$, les images réciproques des variétés de Schubert dans $\hat{\mathfrak{G}}_{\mathcal{D}}(\mathbf{C})$ sont des variétés proalgébriques, ce qui ferait de $\hat{\mathfrak{G}}_{\mathcal{D}}(\mathbf{C})$ un groupe ind-proalgébrique : cela a été établi récemment par O. Mathieu sous des hypothèses beaucoup plus générales (voir ci-dessous). Les variétés de Schubert avaient d'ailleurs été considérées déjà - notamment du point de vue de leur cohomologie d'intersection - par D. Kazhdan et G. Lusztig dans [KL 1] et [KL 2], où cependant seul le cas affine est envisagé, bien que les auteurs aient sans doute eu connaissance du cas général.

Dans cet aperçu qui se veut à peu près chronologique, c'est ici que doivent être mentionnés les premiers travaux de G. Segal [Seg 1] sur les groupes de lacets (voir ci-dessus, n° 1.6). Citons aussi un manuscrit inédit de R. Moody [Moo 2] donnant la preuve d'un théorème de simplicité (en caractéristique 0) pour des groupes adjoints complétés, définis comme dans MooT mais à partir d'un complété de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(A)$.

Plusieurs articles de V. Kac et D. Peterson ([KacP 1], [KacP 2], [KacP 3], [KacP 4], [PK] ; voir aussi [Kac 3]) concernent les groupes attachés aux algèbres de Kac-Moody. Les groupes qu'ils considèrent sont, avec nos notations, les groupes $\mathfrak{E}_{A,sc}(K)$ sur un corps K , en général supposé de caractéristique nulle. Comme R. Marcuson, ils utilisent les modules à poids dominants mais leur définition est conçue de façon que le résultat soit indépendant du poids dominant choisi : en termes imagés, on peut dire, en se plaçant sur $\mathbf{C}$ pour fixer les idées, que le groupe qu'ils introduisent est engendré par des éléments notés $\exp te_i$ et $\exp tf_i$ pour $t \in \mathbf{C}$, qu'il opère sur tout $\mathfrak{g}(A)$-module à poids dominant (et même sur tout module "intégrable", en un sens convenable) de telle façon que ces éléments soient effectivement les exponentielles de te_i et tf_i , et qu'il est "universel" pour ces propriétés. L'étude algébro-géométrique des groupes en question est abordée dans [KacP 1] : les auteurs y considèrent deux anneaux de fonctions - dites "régulières" et "fortement régulières" - sur le groupe et prouvent un "théorème de Peter-Weyl" pour les fonctions fortement régulières (voir le n° 5.3 ci-dessous). D'autres résultats de V. Kac et D. Peterson seront mentionnés au § 7.

La structure de groupes proalgébriques des sous-groupes de Borel et, plus généralement, des sous-groupes paraboliques "de type fini" (i.e. à groupe de Weyl fini) est explicitée pour la première fois - sur $\mathbf{C}$ et dans une version complétée de $\mathfrak{E}_{A,ad}$ - par P. Slodowy [Sl 1] (*cf.* aussi [Sl 2]) qui utilise ces résultats en théorie des singularités. L'homologie de la variété de drapeaux (espace homogène G/B) sur $\mathbf{C}$ est étudiée notamment dans [GuS], [Kac 3] (voir pp. 197-207) et [KoK].

La présentation des groupes "minimaux" $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(R)$ exposée au paragraphe suivant, présentation différente de celle de [Ti 1] et [Ti 2] et beaucoup plus élémentaire, provient de [Ti 6] (*cf.* aussi [Ti 5]). Pour les groupes définis à la façon de Moody-Teo ou de Kac-Peterson en caractéristique 0 , une présentation très semblable avait été conjecturée par E. Abe (*cf.* [Mor 2]) et par Kac-Peterson ([KacP 3]), et prouvée par J. Morita [Mor 2] et Kac-Peterson [KacP 3] en rang 2 ; une caractérisation axiomatique de $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}$ donnée dans [Ti 6] (voir ci-dessous, n° 3.6) entraîne cette conjecture dans le cas général.

Plusieurs notes et articles récents de O. Mathieu ([Mat 2] à [Mat 7]) sont consacrés à une étude approfondie des variétés de Schubert des "groupes de Kac-

Moody" (*cf.* aussi S. Kumar [Ku 1] à [Ku 3]) ; cela le conduit notamment à la définition des ind-schémas $\hat{\mathfrak{G}}_{\mathcal{D}}$ dont il a été question plus haut et qui font l'objet du § 6 ci-dessous.

Signalons enfin que dans [AT] (reçu depuis la rédaction du présent exposé) E. Abe et M. Takeuchi donnent un procédé général de construction (en caractéristique 0) de groupes ind-proalgébriques à partir de certaines algèbres de Lie de dimension infinie, comprenant les algèbres de Kac-Moody.

D'autres références à la littérature seront encore données au § 7.

3. LE FONCTEUR $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}$

Les résultats exposés dans ce paragraphe sont démontrés, pour la plupart, dans [Ti 6].

3.1. On reprend les notations du § 1, notamment celles du n° 1.2, et l'on note $\widetilde{\Lambda}$ le groupe $\mathbf{Z}^I$, dont la base canonique est désignée par $(\widetilde{\alpha}_i)_{i\in I}$. Soient $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathfrak{g}(A))$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}(A)$ et $\mathcal{U}_{\mathbf{Z}}$ le sous-anneau de $\mathcal{U}$ engendré par les éléments $e_i^{(n)} = e_i^n/n!$, $f_i^{(n)} = f_i^n/n!$ et $\binom{h_i}{m} = h_i(h_i-1)\ldots(h_i-m+1)/m!$ pour $n,m \in \mathbf{N}$. (Pour l'histoire de cette définition, *cf.* [Ko], [Ga], [Ti 1], [Mi], [Ti 6].)

Pour $i,j \in I$, $i \neq j$, posons $m_{ij} = 2 , 3 , 4 , 6$ ou ∞ selon que $A_{ij}A_{ji} = 0 , 1 , 2 , 3$ ou ≥ 4 ; soient $\widetilde{W}$ le groupe défini par la présentation

$$\langle \widetilde{r}_i \mid i \in I \text{ et pour } j,k \in I \text{ tels que } j \neq k \text{ et } m_{jk} \neq \infty$$
$$\widetilde{r}_j\widetilde{r}_k\widetilde{r}_j \ldots = \widetilde{r}_k\widetilde{r}_j\widetilde{r}_k \ldots \text{, où les deux membres ont } m_{jk} \text{ facteurs}\rangle ,$$

W le *groupe de Weyl*, quotient de $\widetilde{W}$ par le plus petit sous-groupe normal contenant les $\widetilde{r}_i^2$, et r_i l'image canonique de $\widetilde{r}_i$ dans $\widetilde{W}$. Le groupe $\widetilde{W}$ opère sur Λ , $\Lambda^\vee$, $\widetilde{\Lambda}$ par $\widetilde{r}_i(\lambda) = \lambda - \lambda(\alpha_i^\vee)\alpha_i$, $\widetilde{r}_i(\lambda^\vee) = \lambda^\vee - \lambda^\vee(\alpha_i)\alpha_i^\vee$, $\widetilde{r}_i(\widetilde{\alpha}_j) = \widetilde{\alpha}_j - A_{ij}\widetilde{\alpha}_i$ (ces trois opérations se factorisent évidemment à travers W), et sur $\mathfrak{g}(A)$ (donc sur $\mathcal{U}$ et, comme on peut le vérifier, sur $\mathcal{U}_{\mathbf{Z}}$) par

$$\widetilde{r}_i \longmapsto \exp \operatorname{ad} e_i . \exp \operatorname{ad} f_i . \exp \operatorname{ad} e_i = \exp \operatorname{ad} f_i . \exp \operatorname{ad} . e_i . \exp \operatorname{ad} f_i .$$

Soit Φ l'ensemble des transformés des $\widetilde{\alpha}_i$ par les éléments de $\widetilde{W}$; on les appelle *racines réelles* (sic) ou *principales*. Posons $\Phi_+ = \Phi \cap (\Sigma\,\mathbf{N}\,\widetilde{\alpha}_i)$ et $\Phi_- = -\Phi_+$; les éléments de Φ_+ (resp. Φ_-) sont dits *positifs* (resp. *négatifs*).

On montre que, pour $i \in I$ et $w \in W$, le $\mathbf{Z}$-module libre $w(\mathbf{Z}e_i)$ ne dépend que de la racine $\alpha = w(\widetilde{\alpha}_i)$; notons-le $\mathfrak{g}_{\alpha,\mathbf{Z}}$ et soit $\mathfrak{U}_\alpha$ le $\mathbf{Z}$-schéma en groupes additifs dont il est l'algèbre de Lie. Le groupe $\mathfrak{U}_\alpha(\mathbf{C})$ s'identifie canoniquement à son algèbre de Lie ; celle-ci est une sous-algèbre de dimension 1 de $\mathfrak{g}(A)$ qui se plonge dans $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}(A)$ par l'application $\exp \operatorname{ad}$. Ainsi, les $\mathfrak{U}_\alpha(\mathbf{C})$

peuvent être vus comme des sous-groupes de $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}(A)$; il est clair qu'ils sont permutés entre eux par $\widetilde{W}$ qui opère même, plus généralement, sur la réunion des $\mathfrak{U}_\alpha$ $(\alpha \in \Phi)$.

3.2. Relations de commutation

Une paire α, β d'éléments (non nécessairement distincts) de Φ est dite *prénilpotente* si elle possède les propriétés suivantes, dont on montre qu'elles sont équivalentes :

- il existe $w, w' \in W$ tels que $w(\alpha)$, $w(\beta)$ soient positifs et que $w'(\alpha)$, $w'(\beta)$ soient négatifs ;
- toute racine, au sens de Kac et Moody (racine "réelle" ou "imaginaire"), qui est combinaison linéaire à coefficients positifs de α et β appartient à Φ (donc est "réelle").

Soit $\{\alpha,\beta\}$ une telle paire ; posons $\Theta(\alpha,\beta) = (\mathbf{N}^*\alpha + \mathbf{N}^*\beta) \cap \Phi$. On montre que, moyennant le choix (d'ailleurs quelconque) d'un ordre sur $\Theta(\alpha,\beta)$, il existe un $\mathbf{Z}$-morphisme unique $\psi : \mathfrak{U}_\alpha \times \mathfrak{U}_\beta \longrightarrow \prod \mathfrak{U}_\gamma$, où γ parcourt $\Theta(\alpha,\beta)$ dans l'ordre prescrit, tel que l'application commutateur $[\,,\,] : \mathfrak{U}_\alpha(\mathbf{C}) \times \mathfrak{U}_\beta(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}(A)$ soit la composée de $\psi(\mathbf{C})$ et de l'application produit $\prod \mathfrak{U}_\gamma(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}(A)$: cela généralise le théorème fondamental de Chevalley sur l'intégralité des coefficients dans les relations de commutation. (Signalons que, selon J. Morita [Mor 4], ou bien α et β engendrent un système de racines fini, auquel cas les relations de commutation de Chevalley s'appliquent, ou bien l'on a $\Theta(\alpha,\beta) = \{\alpha+\beta\}$ et, pour des "paramétrisations entières" $x_\alpha : \mathrm{A\grave{d}\grave{d}} \longrightarrow \mathfrak{U}_\alpha$, $x_\beta : \mathrm{A\grave{d}\grave{d}} \longrightarrow \mathfrak{U}_\beta$, $x_{\alpha+\beta} : \mathrm{A\grave{d}\grave{d}} \longrightarrow \mathfrak{U}_{\alpha+\beta}$,

$$[x_\alpha(u)\,, x_\beta(v)] = x_{\alpha+\beta}(\pm(p+1)uv) \ ,$$

où p est le plus grand entier tel que $\alpha - p\beta \in \Phi$.)

3.3. Définition du foncteur $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}$

Pour tout $i \in I$, donnons-nous une copie $\mathfrak{SL}_2^{(i)}$ du schéma en groupes $\mathfrak{SL}_2$, et soit $\varphi_i : \mathfrak{U}_{\widetilde{\alpha}_i} \longrightarrow \mathfrak{SL}_2^{(i)}$ le monomorphisme dont la dérivée à l'élément neutre envoie e_i sur l'élément de l'algèbre de Lie de $\mathfrak{SL}_2^{(i)}$ représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout anneau R , on définit le groupe $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(R)$ par une présentation "à la Steinberg". Le système générateur est la réunion disjointe des groupe $\mathfrak{U}_\alpha(R)$ $(\alpha \in \Phi)$, $\mathfrak{SL}_2^{(i)}(R)$ $(i \in I)$ et $\mathfrak{T}(R) = \mathrm{Hom}(\Lambda, R^\times)$; quant aux relations, pour éviter l'introduction de notations encombrantes, nous les décrirons en langage courant :

a) les applications canoniques de $\mathfrak{U}_\alpha(R)$, $\mathfrak{SL}_2^{(i)}(R)$, $\mathfrak{T}(R)$ dans $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(R)$ sont des homomorphismes ;

b) l'homomorphisme canonique $\mathfrak{U}_{\tilde{\alpha}_i}(R) \longrightarrow \mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(R)$ est le composé de $\varphi_i(R)$ et de l'homomorphisme canonique $\mathcal{SL}_2^{(i)}(R) \longrightarrow \mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(R)$;

c) pour $x \in R^\times$ et $i \in I$, l'image dans $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(R)$ de l'élément $\lambda \longmapsto x^{\lambda(\alpha_i^\vee)}$ de $\mathfrak{T}(R)$ coïncide avec celle de l'élément de $\mathcal{SL}_2^{(i)}(R)$ représenté par la matrice $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$;

pour énoncer les relations suivantes, on se permettra l'abus de langage audacieux (mais justifié *a posteriori* : *cf.* 3.4) consistant à identifier les $\mathfrak{U}_\alpha(R)$ et $\mathfrak{T}(R)$ avec leurs images dans $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(R)$, et l'on note que $\widetilde{W}$ (et même W) opère sur $\mathfrak{T}(R)$ de façon évidente ;

d) par conjugaison, l'image dans $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(R)$ de l'élément de $\mathcal{SL}_2^{(i)}(R)$ représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ - image que nous noterons r_i^* - opère sur les $\mathfrak{U}_\alpha(R)$ et $\mathfrak{T}(R)$ comme $\tilde{r}_i$;

e) par conjugaison, un élément η de $\mathfrak{T}(R) = \mathrm{Hom}(\Lambda, R^\times)$ opère sur $\mathfrak{U}_{\tilde{\alpha}_i}(R)$, identifié à R, par multiplication par $\eta(\alpha_i)$;

f) si $\{\alpha,\beta\}$ est une paire prénilpotente d'éléments de Φ, l'application commutateur $[\,,\,] : \mathfrak{U}_\alpha(R) \times \mathfrak{U}_\beta(R) \longrightarrow \mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(R)$ est composée de $\psi(R)$ (*cf.* 3.2) et de l'application produit $\prod \mathfrak{U}_\gamma(R) \longrightarrow \mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(R)$, où γ parcourt $\theta(\alpha,\beta)$ comme en 3.2.

Cette présentation étant fonctorielle en R, l'homomorphisme $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(f)$ correspondant à un homomorphisme d'anneaux f se définit de façon évidente.

Examinons d'emblée les deux questions qui se posent presque toujours lorsqu'un groupe est défini par générateurs et relations : le groupe n'est-il ni trop petit (par exemple réduit à l'élément neutre !), ni trop gros (en particulier, dans le cas présent, est-il raisonnable de n'imposer aucune relation de commutation entre $\mathfrak{U}_\alpha(R)$ et $\mathfrak{U}_\beta(R)$ lorsque la paire $\{\alpha,\beta\}$ n'est pas prénilpotente) ? Les deux numéros suivants y donnent une réponse.

3.4. Le groupe $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(R)$ n'est "pas trop petit", au moins lorsque R est intègre, ce que nous supposons dans ce numéro (bien que cette hypothèse soit sans doute superflue) ; c'est ce que montre la proposition suivante. Notons U_α et T les images canoniques de $\mathfrak{U}_\alpha(R)$ et $\mathfrak{T}(R)$ dans $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(R)$. Pour $w \in W$, posons $\psi(w) = \Phi_+ \cap w^{-1}(\Phi_-)$ et soient U_w (resp. U_+ ; resp. U_-) le groupe engendré par les U_α pour $\alpha \in \psi(w)$ (resp. Φ_+ ; resp. Φ_-), N le groupe engendré par les r_i^* et B le groupe TU_+. On montre que l'application $r_i^* \longmapsto r_i$ se prolonge en un homomorphisme $\nu : N \longrightarrow W$ de noyau $N \cap T$. Soit $C(w)$ la double classe $B\nu^{-1}(w)B$.

PROPOSITION 1.- (i) *Les homomorphismes canoniques* $\mathfrak{U}_\alpha(R) \longrightarrow U_\alpha$ $(\alpha \in \Phi)$ *et* $\mathfrak{T}(R) \longrightarrow T$ *sont des isomorphismes. Les applications produit* $U_- \times T \times U_+ \longrightarrow U_-B$ *et* $\prod_{\alpha \in \psi(w)} U_\alpha \longrightarrow U_w$ *sont bijectives. Si* $\{\alpha,\beta\}$ *est une paire non nilpotente d'éléments de* Φ, U_α *et* U_β *engendrent leur produit libre dans* $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(R)$. *Les doubles* *classes* $C(w)$ *sont deux à deux disjointes (pour* $w \in W$).

(ii) *Si* R *est un corps,* (B,N) *est une* BN-*paire dans* $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}(R)$ *qui est donc, en particulier, la réunion des* $C(W)$.

3.5. *Si* R *est un corps, on ne peut ajouter d'autres relations à celles définissant* $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}(R)$ *sans que cela entraîne une "dégénérescence indésirable" du groupe.* De façon précise :

PROPOSITION 2.- *Si* R *est un corps et si* $\pi : \mathcal{E}_{\mathcal{D}}(R) \longrightarrow G$ *est un homomorphisme de groupes, surjectif et non injectif, dont le noyau intersecte* T *trivialement, alors il existe* $i \in I$ *tel que* $\pi(r_i^*)$ *soit contenu dans* $\pi(U_+) \cup \pi(U_-)$.

La preuve de cette proposition est géométrique et s'inspire de la démonstration de Serre d'un théorème de Nagao ([Ser 2], II.1.6) ; elle utilise de façon essentielle l'existence de *deux* BN-paires (en général non conjuguées) (B,N) et (TU_-,N) , et la simple connexité des immeubles de rang ≥ 2 .

3.6. La proposition 2 n'est pas contenue telle quelle dans [Ti 6] mais résulte de la preuve du théorème 1 de cet article. Ce théorème fournit une caractérisation axiomatique du foncteur $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$: plus exactement, il montre que tout foncteur en groupes satisfaisant à cinq conditions, qu'on ne rappellera pas ici mais qu'il semble naturel d'imposer aux groupes (de type minimal) attachés à $\mathcal{D}$, coïncide avec $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$ *sur les corps.* Cela justifie *a posteriori* les choix faits dans la définition de $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$, par exemple celui de la $\mathbf{Z}$-forme $\mathcal{U}_{\mathbf{Z}}$ de $\mathcal{U}$ (il n'était pas évident, *a priori*, qu'une autre $\mathbf{Z}$-forme ne pourrait convenir et donner des groupes différents). Notons enfin que, si A est une matrice de Cartan, $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$ coïncide évidemment, *sur les corps*, avec le schéma de Chevalley - Demazure.

4. CAS DES MATRICES DE TYPE AFFINE

Lorsque la matrice de Cartan généralisée A est produit d'une matrice symétrique semi-définie et d'une matrice diagonale, la caractérisation axiomatique dont il vient d'être question permet d'identifier les groupes $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}(R)$ sur un anneau R intègre. Si A est de type affine standard, c'est-à-dire représentée par un graphe de Dynkin complété usuel, le résultat est sans surprise : supposons par exemple $\mathcal{D}$ choisi comme au n° 1.3 et reprenons les notations introduites là ; $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}(R)$ est alors le sous-groupe de $\mathcal{H}(R[t,t^{-1}])$ engendré par les points à coefficients dans $R[t,t^{-1}]$ des sous-groupes radiciels de $\mathcal{H}$.

Le cas des matrices de type affine tordu est plus amusant. Donnons un exemple tiré de [Ti 2] (sauf que là, le point de vue adopté était formel et non, comme ici, minimal). Supposons que A soit la matrice représentée par le graphe de Dynkin

(*)  ($n+1$ sommets)

et que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{ad}(A)$: cela veut dire que pour une base convenable $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de Λ, dont la base duale est notée (e_i'), on a $I = \{0,1,\ldots,n\}$,
$(\alpha_j)_{0\leq j\leq n} = (e_1\,,\,-e_1+e_2\,,\,-e_2+e_3\,,\,\ldots\,,\,-e_{n-1}+e_n\,,\,-2e_n)$ et
$(\alpha_j^\vee)_{0\leq j\leq n} = (2e_1'\,,\,-e_1'+e_2'\,,\,-e_2'+e_3'\,,\,\ldots\,,\,-e_{n-1}'+e_n'\,,\,-e_n')$. On sait (*cf.* p. ex. [Kac 2], chap. 8) que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(A)$ est l'algèbre de Lie du groupe unitaire $SU_{n+1}(\mathbf{C}[t,t^{-1}])$ relatif à l'involution $t \longmapsto -t$ et à la forme hermitienne déployée standard. Il est donc naturel de conjecturer que sur un corps K *de caractéristique différente de* 2, $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(K) = SU_{2n+1}(K[t,t^{-1}])$ pour les mêmes choix de l'involution et de la forme hermitienne (passant au groupe de type formel correspondant, à savoir $SU_{2n+1}(K((t)))$, on se souvient d'ailleurs que (*) est précisément son graphe de Dynkin résiduel : *cf.* [BrT 1], § 7). Mais qu'arrive-t-il lorsque car $K=2$? La réponse est donnée par la description suivante de $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(K)$, valable pour tout corps K.

Soit V le $\mathbf{Z}[t^2,t^{-2}]$-module libre $\mathbf{Z}[t^2,t^{-2}]^{4n+2}$ dans lequel on introduit les coordonnées x_i, y_i $(i=-n,\ldots,n)$, et dont on fait aussi un $\mathbf{Z}[t,t^{-1}]$-module libre de rang $2n+1$ en posant $t.(x_i,y_i) = (t^2y_i,x_i)$. Soit $\mathfrak{H}$ le sous-$\mathbf{Z}[t^2,t^{-2}]$-schéma en groupes de $\mathfrak{GL}(V)$ dont les points à valeurs dans une $\mathbf{Z}[t^2,t^{-2}]$-algèbre Y sont les automorphismes de déterminant 1 de $V\otimes Y$, *considéré comme* $Y(t)$*-module*, qui conservent la forme quadratique (*sur* Y)
$q : (x_i,y_i) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} (x_{-i}x_i - t^2y_{-i}y_i)$ et la forme alternée
$a : ((x_i,y_i)\,,\,(x_i',y_i')) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} (x_{-i}y_i' - y_ix_{-i}' - y_{-i}x_i' + x_iy_{-i}')$. On montre alors, à l'aide de la caractérisation axiomatique de $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}$ dont il a été question en 3.6, que

si K *est un corps, on a* $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(K) = \mathfrak{H}(K[t^2,t^{-2}])$.

Observons que si R est un anneau dans lequel 2 est inversible et si s désigne la forme bilinéaire symétrique associée à q, alors $\mathfrak{H}(R[t^2,t^{-2}])$ n'est autre que le groupe $SU_{2n+1}(R[t,t^{-1}])$ relatif à l'involution $t \longmapsto -t$ et à la forme hermitienne $s+ta$ et l'on retrouve, dans le cas d'un corps K de caractéristique différente de 2, l'assertion conjecturée plus haut.

On a envie de dire, comme en 1.3, que dans le cas présent, le foncteur $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}} : R \longmapsto \mathfrak{H}(R[t,t^{-1}])$ est, plutôt que $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}$, la solution "naturelle" du problème qui nous intéresse (du point de vue minimal).

On trouvera dans l'appendice 2 de [Ti 3] un énoncé à peu près uniforme s'appliquant à toute matrice A de type affine tordu (le cadre adopté dans [Ti 3] est le cadre formel, mais la forme du résultat suggère aussitôt quel est le bon énoncé dans le cadre minimal).

5. MODULES A POIDS DOMINANT ET MODULE ADJOINT

5.1. Dans tout ce paragraphe, λ désigne un élément de Λ que l'on suppose *dominant*, c'est-à-dire tel que $\lambda(\alpha_i^\vee) \geq 0$ pour tout i. (Notons que 0 peut être le seul élément dominant de Λ, mais que cela n'arrive pas si $\mathrm{Card}\, I \geq \mathrm{rg}\Lambda > 0$.) Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}(A)$ engendrée par les h_i et les e_i. Pour tout λ, on note $\mathbf{C}_\lambda$ le $\mathfrak{h}$-module constitué par $\mathbf{C}$ sur lequel e_i opère par 0 et h_i par $\lambda(\alpha_i^\vee)$, V_λ le *module de Verma* $\mathcal{U} \otimes_{U(\mathfrak{h})} \mathbf{C}_\lambda$ (où $\mathcal{U}(\ )$ signifie "algèbre enveloppante" et l'on pose, comme plus haut, $\mathcal{U}(\mathfrak{g}(A)) = \mathcal{U}$), L_λ le quotient de V_λ par le sous-$\mathcal{U}$-module engendré par les $f_i^{\lambda(\alpha_i^\vee)+1} \otimes 1$, v_λ l'élément de L_λ image de $1 \otimes 1$ par l'application canonique $V_\lambda \longrightarrow L_\lambda$ et $L_{\lambda,\mathbf{Z}}$ (resp. $\mathfrak{g}(A)_\mathbf{Z}$) le sous-$\mathcal{U}_\mathbf{Z}$-module de L_λ (resp. $\mathfrak{g}(A)$) engendré par v_λ (resp. par les e_i). Dans le cas symétrisable, L_λ est un $\mathfrak{g}(A)$-module simple (*cf.* [Kac 2], 10.4.6) ; on ne sait pas si cela reste vrai en général mais les travaux de Mathieu font ressortir l'importance des modules L_λ quelle que soit la matrice A. Pour tout anneau R, on pose $L_{\lambda,R} = L_{\lambda,\mathbf{Z}} \otimes R$, $\mathfrak{g}(A)_R = \mathfrak{g}(A)_\mathbf{Z} \otimes R$ et l'on note encore v_λ, e_i, f_i, h_i les éléments $v_\lambda \otimes 1$, $e_i \otimes 1$, etc. de ces modules. L'endomorphisme de L_λ ou $L_{\lambda,R}$ représentant un élément u de $\mathcal{U}$ ou de $\mathcal{U}_\mathbf{Z} \otimes R$ est noté $u|L_\lambda$ ou $u|L_{\lambda,R}$.

5.2. Un endomorphisme f d'un espace vectoriel est dit *localement nilpotent* si $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Ker}\, f^n$ est l'espace entier. On montre que les $\mathrm{ad}\, e_i$, $\mathrm{ad}\, f_i$ ($\in \mathrm{End}\, \mathfrak{g}(A)$) et les $e_i|L_\lambda$, $f_i|L_\lambda$ sont localement nilpotents. Pour $x \in R$, cela donne un sens aux expressions $\exp x\, \mathrm{ad}\, e_i$, $\exp x\, \mathrm{ad}\, f_i$, $\exp xe_i|L_{\lambda,R}$, $\exp xf_i|L_{\lambda,R}$, lesquelles représentent, selon le cas, des automorphismes de $\mathfrak{g}(A)_R$ ou de $L_{\lambda,R}$. Pour $i \in I$, l'algèbre de Lie du schéma en groupes $\mathfrak{U}_{\tilde{\alpha}_i}$ (resp. $\mathfrak{U}_{-\tilde{\alpha}_i}$) s'identifie à $\mathbf{Z}e_i$ (resp. $\mathbf{Z}f_i$) et nous notons $\exp$ l'isomorphisme canonique du schéma en groupes additif de cette algèbre de Lie sur le schéma en groupes en question ; ainsi, pour $x \in R$, $\exp xe_i$ (resp. $\exp xf_i$) désigne un élément de $\mathfrak{U}_{\tilde{\alpha}_i}(R)$ (resp. $\mathfrak{U}_{-\tilde{\alpha}_i}(R)$). La proposition suivante est facile.

PROPOSITION 3.- *Les espaces* $\mathfrak{g}(A)_R$ *et* $L_{\lambda,R}$ *possèdent des structures de* $\mathfrak{E}_\mathcal{D}(R)$-*modules caractérisées par les propriétés suivantes :*

- *pour* $i \in I$ *et* $x \in R$, $\exp xe_i$ (*resp.* $\exp xf_i$) *opère sur* $\mathfrak{g}(A)_R$ *et* $L_{\lambda,R}$ *par* $\exp x\, \mathrm{ad}\, e_i$ *et* $\exp xe_i|L_{\lambda,R}$ (*resp.* $\exp x\, \mathrm{ad}\, f_i$ *et* $\exp xf_i|L_{\lambda,R}$) ;
- *un élément* τ *de* $\mathfrak{T}(R) = \mathrm{Hom}(\Lambda, R^\times)$ *multiplie l'élément* e_i (*resp.* f_i) *de* $\mathfrak{g}(A)_R$ *par* $\tau(\alpha_i)$ (*resp.* $\tau(\alpha_i)^{-1}$) *et l'élément* v_λ *de* $L_{\lambda,R}$ *par* $\tau(\lambda)$.

L'élément v_λ *de* $L_{\lambda,R}$ *est fixé par* $\mathfrak{U}_\alpha(R)$ *pour toute racine* $\alpha \in \Phi_+$ (*cf.* 3.1).

On montre que l'application $\tilde{r}_i \longmapsto r_i^*$ (*cf.* 3.3 d)) se prolonge en un homomorphisme de $\widetilde{W}$ dans $\mathfrak{E}_\mathcal{D}(R)$; par le truchement de cet homomorphisme, $\widetilde{W}$ opère sur $\mathfrak{g}(A)_R$ et $L_{\lambda,R}$. L'homomorphisme $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(R) \longrightarrow \mathrm{Aut}\ \mathfrak{g}(A)_R$ défini par la proposition précédente est appelé la *représentation adjointe* de $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(R)$ ("dans l'algèbre de Lie du groupe simplement connexe").

5.3. Nous énoncerons à présent deux résultats de V. Kac et D. Peterson [KacP 1] qui donnent une idée de la nature algébro-géométrique du groupe $\mathfrak{E}_{A,sc}(\mathbf{C})$. Dans ce numéro, on suppose A symétrisable, on pose $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{sc}$, $G = \mathfrak{E}_{A,sc}(\mathbf{C})$, $U_\alpha = \mathfrak{U}_\alpha(\mathbf{C})$ et l'on reprend les notations Φ, U_+, U_- du n° 4 pour $R = \mathbf{C}$. Une fonction $f : G \longrightarrow \mathbf{C}$ est dite *faiblement régulière* si, pour toute suite $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ d'éléments de Φ, l'application produit $U_{\beta_1} \times U_{\beta_2} \times \ldots \times U_{\beta_m} \longrightarrow G$ composée avec f est une fonction régulière (i.e. un polynome) sur $U_{\beta_1} \times U_{\beta_2} \times \ldots \times U_{\beta_m}$. La fonction f est dite *fortement régulière* si elle est faiblement régulière et s'il existe des sous-groupes X_+, X_- de G, intersections d'un nombre fini de conjugués de U_+, resp. U_-, tels que f soit constante sur les doubles classes $X_- g X_+$ pour $g \in G$ (on note que cette définition n'est pas symétrique en $+$ et $-$, c'est-à-dire en les e_i et les f_i).

A tout élément μ de Λ prenant des valeurs *négatives* sur les $\alpha_i^\vee$ (éléments "antidominants"), on associe, comme en 5.1 et 5.2 mais en intervertissant les e_i et les f_i, un G-module L_μ et un point $v_\mu \in L_\mu - \{0\}$ fixé par U_- (de même que v_λ est fixé par U_+). On montre que, pour tout λ (dominant), il existe une et une seule forme bilinéaire G-invariante $(\ ,\ ) : L_{-\lambda} \times L_\lambda \longrightarrow \mathbf{C}$ telle que $(v_{-\lambda}, v_\lambda) = 1$; elle identifie $L_{-\lambda}$ à un sous-espace du dual de L_λ. Soit φ_λ l'application linéaire de $L_{-\lambda} \otimes L_\lambda$ dans l'espace des fonctions $G \longrightarrow \mathbf{C}$ définie par $\varphi_\lambda(\ell \otimes \ell')(g) = (\ell, g\ell')$ (ainsi, $\varphi_\lambda(L_{-\lambda} \otimes L_\lambda)$ est un espace de coefficients de la représentation de G dans L_λ). Voici à présent les résultats de Kac-Peterson annoncés plus haut :

PROPOSITION 4 ("Théorème de Peter-Weyl").- *La somme directe des* φ_λ, *où* λ *parcourt l'ensemble des éléments dominants de* Λ, *est une bijection de la somme directe* $\bigoplus_\lambda (L_{-\lambda} \otimes L_\lambda)$ *sur l'algèbre* $FR(G)$ *des fonctions fortement régulières sur* G.

PROPOSITION 5.- $FR(G)$ *est un anneau factoriel.*

6. L'IND-SCHÉMA EN GROUPES $\hat{\mathfrak{G}}_{\mathcal{D}}$ DE MATHIEU

Les résultats esquissés dans ce paragraphe proviennent de [Mat 5] et de [Mat 7].

6.1. Pour motiver ce qui suit, commençons par décrire la situation que l'on a en vue : cette situation sera effectivement réalisée *in fine*, mais la construction qui y conduira suivra un ordre à peu près inverse de la présente description.

Pour simplifier, on travaillera sur l'anneau des entiers $\mathbf{Z}$ mais le passage à un anneau quelconque par changement de base ne pose pas de problème. On va construire un ind-schéma en groupes (en un sens que la construction rendra clair), noté $\hat{\mathfrak{G}}_D$ ou, simplement, $\hat{\mathfrak{G}}$. Celui-ci possède un sous-schéma en groupes "de Borel" $\mathfrak{B}_D = \mathfrak{B}$, et une famille $(\mathfrak{G}(w))_{w\in W}$, indexée par le groupe de Weyl W, de sous-schémas fermés qui sont "moralement" les adhérences des doubles classes de $\mathfrak{B}$ dans $\hat{\mathfrak{G}}$ et dont $\hat{\mathfrak{G}}$ est la réunion. Le schéma en groupes $\mathfrak{B}$ opère sur chaque $\mathfrak{G}(w)$ "par translations à droite" ; cette opération fait de $\mathfrak{G}(w)$ un fibré localement trivial dont la base, notée $\mathfrak{S}(w)$, est un schéma projectif normal. Ces $\mathfrak{S}(w)$ sont cas particuliers des *schémas de Schubert*. On voit en particulier qu'il existe un *ind-schéma des drapeaux* $\hat{\mathfrak{G}}/\mathfrak{B}$, réunion des $\mathfrak{S}(w)$.

6.2. La notation $\mathfrak{T} = \mathrm{Hom}(\Lambda,?)$ est reprise du n° 3.3. Soit $\mathfrak{u}_+$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}(A)$ engendrée par les e_j $(j \in I)$. Pour $i \in I$, elle est produit semi-direct de $\mathbf{C}e_i$ et d'une sous-algèbre $\mathfrak{u}_i^!$ invariante par $\mathfrak{T}(\mathbf{C})$ (qui opère sur $\mathfrak{g}(A)$ par la représentation adjointe : *cf.* 5.2) ; cela caractérise $\mathfrak{u}_i^!$. Pour $x = \mathfrak{u}_+$ ou $\mathfrak{u}_i^!$, soient $U(x)$ l'algèbre enveloppante de x et $H(x)$ le sous-espace du dual $U(x)^*$ de $U(x)$ formé des fonctions linéaires sur $U(x)$ qui sont combinaisons linéaires de vecteurs propres de $\mathfrak{T}(\mathbf{C})$ (pour l'action évidente de $\mathfrak{T}(\mathbf{C})$ sur $U(x)^*$) et dont les translatées (à gauche ou à droite : on montre que cela revient au même) par $U(x)$ engendrent un sous-espace de dimension finie de $U(x)^*$. Soit $H_{\mathbf{Z}}(x)$ l'ensemble des éléments de $H(x)$ qui appliquent $U(x) \cap U_{\mathbf{Z}}$ dans $\mathbf{Z}$. On montre que la loi naturelle d'algèbre commutative de $U(x)^*$ (*cf.* [Di], 2.7.5) et les applications $U(x)^* \longrightarrow (U(x) \otimes U(x))^*$, $U(x)^* \longrightarrow U(x)^*$, $U(x)^* \longrightarrow \mathbf{C}$, transposées de la multiplication $U(x) \otimes U(x) \longrightarrow U(x)$, de l'anti-automorphisme principal $U(x) \longrightarrow U(x)$ (ibid. 2.7.6) et de l'injection canonique $\mathbf{C} \longrightarrow U(x)$, induisent sur $H_{\mathbf{Z}}(x)$ une structure de bigèbre cosymétrique, faisant de $\mathrm{Spec}\, H_{\mathbf{Z}}(x)$ un schéma en groupes $\mathfrak{X}$. Pour $x = \mathfrak{u}_+$ (resp. $\mathfrak{u}_i^!$), on pose $\mathfrak{X} = \mathfrak{U}_+$ (resp. $\mathfrak{U}_i^!$). Le tore $\mathfrak{T}$ opère sur $\mathfrak{U}_+$ de façon naturelle et $\mathfrak{B}$ est défini comme le produit semi-direct de ces deux schémas en groupes. De même, le schéma de Chevalley - Demazure de rang semi-simple 1 défini par la donnée $(\{i\}, \Lambda, \{\pm\alpha_i\}, \{\pm\alpha_i^\vee\})$ opère sur $\mathfrak{U}_i^!$ et l'on désigne par $\mathfrak{P}_i$ (sous-groupe *parabolique* de rang semi-simple 1) leur produit semi-direct. Le schéma $\mathfrak{B}$ se plonge dans $\mathfrak{P}_i$ comme sous-schéma en groupes fermé.

6.3. Soient $M(I)$ le monoïde libre sur I, $\omega : M(I) \longrightarrow W$ l'application $i_1 \dots i_m \longmapsto r_{i_1} \dots r_{i_m}$ et $\omega_{\text{réd}} : M(I) \longrightarrow W$ l'application définie inductivement par la propriété suivante : $\omega_{\text{réd}}(\emptyset) = 1$ et pour $\mathbf{i} \in M(I)$ et $i \in I$, $\omega_{\text{réd}}(\mathbf{i}i)$ est celui des deux éléments $\omega_{\text{réd}}(\mathbf{i})$ et $\omega_{\text{réd}}(\mathbf{i}).r_i$ de W dont la longueur dans W est la plus grande. Pour $w \in W$, on note $\rho(w)$ l'ensemble $\{\mathbf{i} \in M(I) \,|\, \omega(\mathbf{i}) = \omega_{\text{réd}}(\mathbf{i}) = w\}$ des $i_1 \dots i_m$ tels que $(r_{i_1}, \dots, r_{i_m})$ soit une décomposition réduite de w. Rappelons que, pour $w,w' \in W$, on écrit $w' \leq w$ s'il existe $\mathbf{i} = i_1 \dots i_m \in \rho(w)$ et $\mathbf{i}' = i'_1 \dots i'_{m'} \in \omega^{-1}(w')$ tels que $(i'_1, \dots, i'_{m'})$ soit une suite extraite de $(i_1, \dots i_m)$, auquel cas $\mathbf{i}'$ existe pour tout $\mathbf{i} \in \rho(w)$ et peut être pris dans $\rho(w')$. On montre que, pour $w,w' \in W$ et $\mathbf{i} \in \rho(w)$, $\mathbf{i}' \in \rho(w')$, l'élément $\omega_{\text{réd}}(\mathbf{ii}')$ de W ne dépend que de w et w' ; on le désigne par $w * w'$.

6.4. Si $\mathcal{B}$ opère à droite sur un schéma $\mathfrak{X}$ et à gauche sur un schéma $\mathfrak{Y}$, on note $\mathfrak{X} \times_{\mathcal{B}} \mathfrak{Y}$ le schéma quotient $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}/\mathcal{B}$ pour l'action $b.(x,y) = (xb^{-1}, by)$ de $\mathcal{B}$ sur $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$, *lorsque ce quotient existe.* Pour tout $\mathbf{i} = i_1 \dots i_m \in M(I)$, les schémas $\widetilde{\mathcal{D}}(\mathbf{i}) = \mathcal{P}_{i_1} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{P}_{i_2} \times_{\mathcal{B}} \dots \times_{\mathcal{B}} \mathcal{P}_{i_m}$ et $\mathcal{D}(\mathbf{i}) = \widetilde{\mathcal{D}}(\mathbf{i})/\mathcal{B}$ existent.

Rappelons que dans le cas classique des groupes réductifs (de dimension finie), si $\mathbf{i} \in \rho(w)$, $\mathcal{D}(\mathbf{i})$ est, selon Demazure, une désingularisation de la variété de Schubert associée à w. Cela sera encore vrai (par décret !) dans le cas général.

6.5. Dorénavant et jusqu'à la fin du n° 6.7, nous ferons l'hypothèse que les $\alpha_i^\vee$ sont linéairement indépendants et que le quotient $\Lambda^\vee/\Sigma\, \mathbf{Z}\, \alpha_i^\vee$ est sans torsion. Pour être en conformité avec les articles de Mathieu auxquels nous nous référons, nous supposerons aussi que les α_i sont linéairement indépendants et que $\mathrm{rg}\Lambda = \mathrm{Card}\, I + \mathrm{corang}\, A$, mais cela ne joue sans doute aucun rôle dans ce que nous avons à dire.

Soient λ un élément dominant de Λ, w un élément de W, $\mathbf{i} = i_1 \dots i_m$ un élément de $\rho(w)$, $\widetilde{w} \in \widetilde{W}$ le produit $\widetilde{r}_{i_1} \dots \widetilde{r}_{i_m}$ et J l'ensemble $\{i \in I \mid \lambda(\alpha_i^\vee) = 0\}$. On définit de façon naturelle, facile à imaginer mais trop longue à expliquer ici en détail, des opérations morphiques de $\mathcal{B}$ et des $\mathcal{P}_i$ sur $L_{\lambda,\mathbf{Z}}$. L'orbite du point $\widetilde{w}.v_\lambda$ (*cf.* 9.2) sous l'action de $\mathcal{B}$ engendre un sous-module $L_{\lambda,w,\mathbf{Z}}$ de rang fini de $L_{\lambda,\mathbf{Z}}$. Soient $\bar{v}$ (resp. $\overline{wv}_\lambda$) le point du schéma projectif $\mathbf{P}L_{\lambda,w,\mathbf{Z}}$ représentant $\mathbf{Z}v$ (resp. $\mathbf{Z}\widetilde{w}v_\lambda$) et $\bar{\mathcal{S}}_{w,\lambda}$ l'adhérence dans $\mathbf{P}L_{\lambda,w,\mathbf{Z}}$ de l'orbite de $\overline{wv}_\lambda$ sous $\mathcal{B}$. Faisant usage des opérations des $\mathcal{P}_i$ sur $L_{\lambda,\mathbf{Z}}$, on peut faire opérer $\widetilde{\mathcal{D}}(\mathbf{i})$ sur v_λ puis $\mathcal{D}(\mathbf{i})$ sur $\bar{v}_\lambda$, et l'on observe que l'image de cette dernière opération n'est autre que $\bar{\mathcal{S}}_{w,\lambda}$, ce qui définit un morphisme $\pi : \mathcal{D}(\mathbf{i}) \longrightarrow \bar{\mathcal{S}}_{w,\lambda}$. La proposition suivante est cruciale :

PROPOSITION 4.- *L'espace annelé* $(\bar{\mathcal{S}}_{w,\lambda}, \pi_*(\mathcal{O}(\mathcal{D}(\mathbf{i}))))$ *(où la notation* $\mathcal{O}$ *signifie "faisceau structural") est un schéma dépendant seulement de* w *et* J.

On le note $\mathcal{S}_{w,J}$: c'est le *schéma de Schubert* correspondant à w et J. Mathieu montre que $\bar{\mathcal{S}}_{w,\lambda} = \mathcal{S}_{w,J}$.

6.6. Pour la construction de l'ind-schéma $\hat{\mathcal{G}}$, on n'a besoin que des schémas $\mathcal{S}_{w,\emptyset}$, que l'on note $\mathcal{S}_w$.

Le schéma en groupes $\mathfrak{B}$ opère à droite sur $\widetilde{\mathfrak{D}}(\mathbf{i})$ et en fait un fibré localement trivial de fibre $\mathfrak{B}$ et de base $\widetilde{\mathfrak{D}}(\mathbf{i})/\mathfrak{B}$. D'autre part, $\mathfrak{B}$ opère sur son propre anneau affine par la représentation régulière à gauche, et l'on en déduit un faisceau d'anneaux associé $\widetilde{F}$ sur $\widetilde{\mathfrak{D}}(\mathbf{i})/\mathfrak{B}$. Soit F le faisceau d'anneaux sur $\mathfrak{S}_w$, image directe de $\widetilde{F}$ par le morphisme canonique $\widetilde{\mathfrak{D}}(\mathbf{i})/\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{S}_w$. Ce faisceau ne dépend que de w et non du choix de $\mathbf{i}$. Finalement, nous définissons le schéma $\mathfrak{G}(w)$ (*cf.* 6.1) comme étant le spectre de F : c'est donc un *schéma affine au-dessus de* $\mathfrak{S}_w$ (Mathieu montre même qu'il est affine en tant que schéma), sur lequel $\mathfrak{B}$ opère à droite de façon "localement libre", faisant de $\mathfrak{G}(w)$ un fibré localement trivial de fibre $\mathfrak{B}$ et de base $\mathfrak{S}_w$.

6.7. Pour $w,w' \in W$ tels que $w' \leq w$, il existe des morphismes naturels $\mathfrak{S}_{w'} \longrightarrow \mathfrak{S}_w$ et $\mathfrak{G}(w') \longrightarrow \mathfrak{G}(w)$ qui s'avèrent être des immersions fermées. Les ind-schémas limites inductives des systèmes $(\mathfrak{S}_w)_{w\in W}$ et $(\mathfrak{G}(w))_{w\in W}$ sont notés $\mathfrak{S}$ et $\hat{\mathfrak{G}}$. (Pour une définition formelle de la catégorie des ind-schémas, *cf.* [Mat 5], § 2.)

Pour tout $\mathbf{i} \in \omega_{\text{réd}}^{-1}(w)$, on a un morphisme surjectif canonique $\widetilde{\mathfrak{D}}(\mathbf{i}) \longrightarrow \mathfrak{G}(w)$. D'autre part, pour $\mathbf{i},\mathbf{i}' \in \rho(W)$ et posant $\mathbf{i}^* = i_m \dots i_1$ si $\mathbf{i} = i_1 \dots i_m$, on définit de façon évidente un morphisme produit $\widetilde{\mathfrak{D}}(\mathbf{i}) \times \widetilde{\mathfrak{D}}(\mathbf{i}') \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{D}}(\mathbf{i}\mathbf{i}')$ et un morphisme de passage à l'inverse $\widetilde{\mathfrak{D}}(\mathbf{i}) \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{D}}(\mathbf{i}^*)$. On montre alors que, si l'on pose $w = \omega(\mathbf{i})$ (d'où $w^{-1} = \omega(\mathbf{i}^*)$) et $w' = \omega(\mathbf{i}')$, il existe des morphismes

$$\mu_{w,w'} : \mathfrak{G}(w) \times \mathfrak{G}(w') \longrightarrow \mathfrak{G}(w * w') \ ,$$

$$\iota_w : \mathfrak{G}(w) \longrightarrow \mathfrak{G}(w^{-1}) \ ,$$

dépendant seulement de w et w' et non du choix de $\mathbf{i} \in \rho(w)$ et $\mathbf{i}' \in \rho(w')$, tels que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathfrak{D}}(\mathbf{i}) \times \widetilde{\mathfrak{D}}(\mathbf{i}') \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathfrak{D}}(\mathbf{i}\mathbf{i}') \arrow[d] \\ \mathfrak{G}(w) \times \mathfrak{G}(w') \arrow[r, "\mu_{w,w'}"] & \mathfrak{G}(w*w') \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \widetilde{\mathfrak{D}}(\mathbf{i}) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathfrak{D}}(\mathbf{i}^*) \arrow[d] \\ \mathfrak{G}(w) \arrow[r, "\iota_w"] & \mathfrak{G}(w^{-1}) \end{tikzcd}$$

soient commutatifs, ce qui caractérise $\mu_{w,w'}$ et ι_w univoquement. La collection des $\mu_{w,w'}$ et la collection des ι_w définissent le morphisme produit et le morphisme de passage à l'inverse de l'ind-schéma en groupes $\mathfrak{G}$, dont la construction est ainsi achevée.

6.8. Pour donner un sens à certaines assertions du § 1, il faut définir l'ind-schéma en groupes $\hat{\mathfrak{G}}_{\mathcal{D}}$ pour toute donnée $\mathcal{D} = (I , \Lambda , (\alpha_i) , (\alpha_i^\vee))$, remplissant ou non les conditions posées en 6.5. Pour cela, considérons une donnée $\mathcal{D}' = (I , \Lambda' , (\alpha_i') , (\alpha_i'^\vee))$ satisfaisant à ces conditions et un homomorphisme

$\gamma : \Lambda \longrightarrow \Lambda'$ tel que $\gamma(\alpha_i) = \alpha'_i$ et ${}^t\gamma(\alpha'^\vee_i) = \alpha^\vee_i$ (il est facile de voir que de tels $\mathcal{D}'$ et γ existent). La construction précédente donne lieu à un schéma en groupes $\mathfrak{B}_{\mathcal{D}'} = \mathfrak{T}_{\mathcal{D}'}.\mathfrak{U}_+$, des schémas $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}'}(w)$ et un ind-schéma en groupes $\hat{\mathfrak{G}}_{\mathcal{D}'}$, réunion des $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}'}(w)$. D'autre part, les définitions du n° 6.2 s'appliquent à la donnée $\mathcal{D}$ et fournissent un schéma en groupes $\mathfrak{B}_{\mathcal{D}} = \mathfrak{T}_{\mathcal{D}}.\mathfrak{U}_+$. L'homomorphisme γ induit de façon évidente un homomorphisme $\gamma_* : \mathfrak{B}_{\mathcal{D}'} \longrightarrow \mathfrak{B}_{\mathcal{D}}$. Les schémas $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}'}(w)$ sont des fibrés localement triviaux de bases $\mathfrak{S}_w$ et de fibre $\mathfrak{B}_{\mathcal{D}'}$; il leur est donc associé, par γ_*, des fibrés $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}}(w)$ de bases $\mathfrak{S}_w$ et de fibre $\mathfrak{B}_{\mathcal{D}}$. Les immersions fermées $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}'}(w') \longrightarrow \mathfrak{G}_{\mathcal{D}'}(w)$ (pour $w' \leq w$) "induisent" des immersions fermées $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}}(w') \longrightarrow \mathfrak{G}_{\mathcal{D}}(w)$ et l'on définit l'ind-schéma $\hat{\mathfrak{G}}_{\mathcal{D}}$ comme la limite inductive des $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}}(w)$ relative à ces immersions. Le morphisme produit, faisant de $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}}(w)$ un ind-schéma en groupes, se déduit aisément du morphisme produit de $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}'}$.

7. COMMENTAIRES ET QUESTIONS DIVERSES

7.1. Au § 6, il n'a été rendu compte que d'une petite partie des travaux d'Olivier Mathieu sur les groupes associés aux algèbres de Kac - Moody : la définition de l'ind-schéma $\hat{\mathfrak{G}}_{\mathcal{D}}$ n'est en réalité qu'un sous-produit de ses résultats (*cf.* notamment [Mat 6]) sur les variétés de Schubert et leurs applications, résultats qu'il n'est pas possible de résumer en quelques lignes. Citons seulement, parmi beaucoup d'autres :

- une généralisation (en toute caractéristique) de la formule Weyl-Demazure donnant le caractère du module L_λ (*cf.* 6.1), résultat obtenu précédemment par V. Kac dans le cas symétrisable ;
- des généralisations du théorème de Borel - Weil - Bott (en caractéristique 0) et du théorème de nullité de Kempf (sur un anneau quelconque) ;
- un théorème de normalité des variétés de Schubert sur un anneau normal quelconque.

7.2. Il serait intéressant de définir pour toute donnée $\mathcal{D}$ un foncteur en groupes "naturel" $\mathfrak{G}_{\mathcal{D}}$ généralisant ceux du n° 1.3 et du § 4 et qui seraient, en un sens à préciser, l'intersection de deux foncteurs de Mathieu $R \longmapsto \hat{\mathfrak{G}}_{\mathcal{D}}(R)$, celui du § 6 et celui obtenu de façon analogue en permutant les e_i et les f_i.

7.3. Les groupes considérés dans cet exposé généralisent les groupes réductifs *déployés* ; ils possèdent des *formes tordues* que l'on peut définir par exemple par descente galoisienne. La théorie de ces groupes non déployés reste à faire, mais il est un cas déjà considéré à plusieurs reprises dans la littérature, celui des formes "unitaires", ou "compactes" : *cf.* notamment [Ga 2], [KacP 2], [KacP 3], [Ti 4]. A toute donnée $\mathcal{D}$ est associé un "groupe compact" $K_{\mathcal{D}}$ (qui n'est évidemment pas compact au sens topologique !). Ce groupe possède une présentation simple comme somme amalgamée de groupes de Lie compacts $T = \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$, L_i $(i \in I)$, S_{ij} $(i,j \in I$ et $m_{ij} \neq \infty)$: les L_i sont de rang semi-simple 1 et contiennent T (en vertu de l'amalgamation), et S_{ij} est un groupe semi-simple de rang 2 , de type correspondant à la matrice de Cartan $\begin{pmatrix} A_{ii} & A_{ij} \\ A_{ji} & A_{jj} \end{pmatrix}$, contenant les groupes dérivés de L_i et L_j . (*Cf.* [KacP 3] et [Ti 4] ; ce dernier article donne une preuve "immobilière" du fait que la somme amalgamée en question n'est ni trop petite ni trop grande .) L'étude générale des *formes réelles* dans le *cas affine* a été entreprise récemment par G. Rousseau [Ro].

7.4. Dans [KacP 1] et [KacP 4], V. Kac et D. Peterson prouvent entre autres choses plusieurs théorèmes de conjugaison. Le suivant est particulièrement frappant et a de nombreuses applications (conjugaison des tores maximaux par exemple) :

Si H *est un sous-groupe de* $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(\mathbf{C})$ *tel que la restriction à* H *de la représentation adjointe* $\mathfrak{E}_{\mathrm{D}}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\, \mathfrak{g}(A)$ (*cf.* 5.2) *se décompose en somme directe de représentations irréductibles de dimensions finies, alors* H *est conjugué à un sous-groupe d'un "sous-groupe réductif standard", c'est-à-dire de la forme* $\langle \mathfrak{T}(\mathbf{C}) , \mathfrak{U}_{\tilde{\alpha}_i}(\mathbf{C}) , \mathfrak{U}_{-\tilde{\alpha}_i}(\mathbf{C}) \mid i \in J \rangle$, *où* $J \subset I$ *est tel que* $(A_{ij})_{i,j \in J}$ *soit une matrice de Cartan.*

Pour d'autres théorèmes de conjugaison, plus particuliers, voir aussi J. Bausch [Bau] et J. Morita [Mor 3].

7.5. L'énoncé précédent est obtenu dans [KacP 4] par application de méthodes introduites là pour adapter aux groupes $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(\mathbf{C})$ le théorème de Hilbert - Mumford. Dans son énoncé classique, celui-ci devient trivial pour des groupes $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(\mathbf{C})$ de dimension infinie, mais il est possible de poser le problème sous une forme plus précise qui lui redonne de l'intérêt dans ce cas général : cela a été fait primitivement par R. Slodowy [Sl 2] à l'occasion de ses travaux sur les singularités.

7.6. Le théorème de Chevalley sur l'existence d'isogénies dites "spéciales" entre groupes réductifs a été étendu aux groupes $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(K)$, sur un corps K , par J.-Y. Hée (non publié). Soient $\mathcal{D}$ la donnée du n° 1.2, $\mathcal{D}' = (I , \Lambda' , (\alpha_i')_{i \in I} , (\alpha_i'^{\vee})_{i \in I})$ une autre donnée de même nature, p un nombre entier, $q : I \longrightarrow p^{\mathbf{N}^*}$ une application et $\delta : \Lambda' \longrightarrow \Lambda$ un homomorphisme tel que $\delta(\alpha_i') = q(i).\alpha_i$ et $({}^t\delta)(\alpha_i^{\vee}) = q(i).\alpha_i'^{\vee}$. Alors, Hée montre qu'il existe un homomorphisme de foncteurs $\delta_* : \mathfrak{E}_{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathfrak{E}_{\mathcal{D}'}$, *restreints aux* $\mathbf{F}_p$ - *algèbres*, caractérisé par les propriétés suivantes : sa restriction à $\mathfrak{T} = \mathrm{Hom}(\Lambda, ?)$ est la composition avec δ et $\delta_*(\mathfrak{U}_{\pm\alpha_i}) = \mathfrak{U}_{\pm\alpha_i'}$ pour tout $i \in I$. Cela permet de définir des groupes "à la Rimhak Ree" dans le cadre de la théorie de Kac - Moody.

7.7. Supposons que A n'est pas somme directe (en un sens évident) de deux matrices de Cartan généralisées non vides. Alors, R. Moody ([Moo 2]) montre qu'un certain complété du groupe $\mathfrak{E}_{A,ad}(K)$ (complété qui coïncide probablement avec $\hat{\mathfrak{G}}_{A,ad}(K)$) est *algébriquement simple* pour tout corps K de caractéristique nulle (Moody suppose également que A n'est pas de type affine, mais cette restriction peut être levée grâce à [Mor 1], [Ti 2], [Ti 3]). Il serait intéressant de savoir si ce résultat reste vrai en toute caractéristique.

7.8. Reprenons les notations des numéros 3.4, 3.5, en supposant que R est un corps K . L'existence des BN-paires "opposées" (B,N) , (TU_-,N) (en général non conjuguées) est une caractéristique importante des groupes $\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(K)$ (*cf.* notamment [KacP 3], [KacP 4], [Ti 2], [Ti 5], [Ti 6]). A ces paires correspondent deux immeubles I_+ , I_- qui ont entre eux une relation non triviale : à tout couple formé d'une chambre de I_+ et d'une chambre de I_- est associé un invariant, élément de W , qu'on peut appeler la *codistance* des deux chambres (cela résulte de la "décomposition de Birkhoff", mettant en bijection canonique l'ensemble de doubles classes $B\backslash\mathfrak{E}_{\mathcal{D}}(K)/TU_-$ et le groupe de Weyl W : *cf.* p. ex. [Ti 2], 6.3, ou [KacP 3], Prop. 3.3). Cette situation peut être axiomatisée et les "immeubles doubles" ainsi définis sont susceptibles de classifications complètes dans des cas assez généraux (par exemple en rang ≥ 3 , lorsque le graphe de Coxeter de W est connexe et à coefficients finis). On peut en déduire de nouvelles caractérisations (géométriques) des groupes $\mathfrak{E}_{A,ad}(K)$ correspondant à ces cas. (Ce dernier commentaire fait allusion à des recherches en cours, en collaboration avec M. Ronan).

BIBLIOGRAPHIE

[AT] E. ABE and M. TAKEUCHI - *Groups associated with some types of infinite dimensional Lie algebras*, preprint, University of Tsukuba, 1988 (revised 1989).

[BaPV] W. BARTH, C. PETERS, A. VAN DE VEN - *Compact complex surfaces*, Ergebnisse d. Math.. 3. Folge, Bd. 4, Springer-Verlag, 1984.

[Bau] J. BAUSCH - *Étude et classification des automorphismes d'ordre fini et de première espèce des algèbres de Kac-Moody affines*, thèse, Université de Nancy I, septembre 1985.

[BauR] J. BAUSCH et G. ROUSSEAU - *Algèbres de Kac-Moody affines (automorphismes et formes réelles)*, Publications de l'Institut Elie Cartan, n° 11, 1989.

[Bo] N. BOURBAKI - *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. IV, V, VI, Actu. Sci. et Ind. n° 1337, Hermann, Paris, 1968.

[BrT 1] F. BRUHAT ET J. TITS - *Groupes algébriques simples sur un corps local*, Proc. Conf. local fields (Driebergen, 1966), Springer-Verlag, 1967, 23-36.

[BrT 2] F. BRUHAT et J. TITS - *Groupes réductifs sur un corps local*, II, Publ. Math. I.H.E.S. 60 (1984), 5-184.

[Ch 1] C. CHEVALLEY - *Séminaire sur la classification des groupes de Lie algébriques* 1956-1958, 2 vol. multigraphiés, Inst. H. Poincaré, Paris, 1958.

[Ch 2] C. CHEVALLEY - *Certains schémas de groupes semi-simples*, Sém. Bourbaki, exposé n° 219, mai 1961, Benjamin, New York, 1966.

[De] M. DEMAZURE - *Schémas en groupes réductifs*, Bull. Soc. Math. Fr. 93 (1965), 369-413.

[Di] J. DIXMIER - *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[Ga 1] H. GARLAND - *The arithmetic theory of loop algebras*, J. Algebra, 53 (1978), 480-551.

[Ga 2] H. GARLAND - *The arithmetic theory of loop groups*, Publ. Math. I.H.E.S. 52 (1980), 5-136.

[GoW] R. GOODMAN and N.R. WALLACH - *Structure and unitary cocycle representations of loop groups and the group of diffeomorphisms of the circle*, Jour. r. angew. Math. 347 (1984), 69-133.

[GuS] E. GUTKIN et P. SLODOWY - *Cohomologie des variétés de drapeaux infinies*, C.R. Acad. Sci. Paris, 296 (1983), Sér. I, 425-427.

[Hi] H. HIJIKATA - *On the arithmetic of* p*-adic Steinberg groups*, preprint, Yale University, 1964.

[IDGA] *Infinite dimensional groups with applications*, V. Kac ed., MSRI publications n° 4, Springer-Verlag, 1985.

[IM] N. IWAHORI and H. MATSUMOTO - *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of* p*-adic Chevalley groups*, Publ. Math. I.H.E.S. 25 (1965), 5-48.

[Kac 1] V.G. KAC - *Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth*, Izvestija Akad. Nauk. S.S.S.R. (Ser. mat.) 32 (1968), 1923-1967 ; Math. U.S.S.R. Izvestija 2 (1968), 1271-1311.

[Kac 2] V.G. KAC - *Infinite dimensional Lie algebras*, Progr. Math. n° 44, Birkhäuser, Boston, 1983 ; 2nd edition, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.

[Kac 3] V.G. KAC - *Constructing groups associated to infinite-dimensional Lie algebras*, in [IDGA], 167-216.

[KacP 1] V.G. KAC and D. PETERSON - *Regular functions on some infinite-dimensional groups*, in Arithmetic and Geometry, M. Artin and J. Tate ed., Birkhäuser, Boston, 1983, 141-166.

[KacP 2] V.G. KAC and D. PETERSON - *Unitary structure in representations of infinite-dimensional groups and a convexity theorem*, Inventiones Math. 76 (1984), 1-14.

[KacP 3] V.G. KAC and D. PETERSON - *Defining relations of certain infinite dimensional groups*, in Élie Cartan et les Mathématiques d'aujourd'hui, Astérisque, n° hors série, 1985, 165-208.

[KacP 4] V.G. KAC and D. PETERSON - *On geometric invariant theory for infinite dimensional groups*, in Algebraic groups, Utrecht 1986, A. Cohen, W. Hesselink, W. van der Kallen, J. Strooker ed., Springer Lecture Notes 1271 (1987), 109-142.

[Kan 1] I.L. KANTOR - *Infinite dimensional simple graded Lie algebras*, Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R. 179 (1968), 534-537 ; Sov. Math. Dokl. 9 (1968), 409-412.

[Kan 2] I.L. KANTOR - *Graded Lie algebras*, Trudy sem. Vect. Tens. Anal. 15 (1970), 227-266.

[KL 1] D. KAZHDAN and G. LUSZTIG - *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Inv. Math. 53 (1979), 165-184.

[KL 2] D. KAZHDAN and G. LUSZTIG - *Schubert varieties and Poincaré duality*, Proc. Symp. Pure Math. A.M.S. 36 (1980), 185-203.

[Ko] B. KOSTANT - *Groups over* $\mathbf{Z}$, in Algebraic groups and discontinuous subgroups (Boulder, 1965), Proc. Symp. Pure Math. 9, A.M.S. 1966, 90-98.

[KoK] B. KOSTANT and S. KUMAR - *The nil Hecke ring and cohomology of* G/P *for a Kac-Moody group* G , Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 83 (1986), 1543-1545.

[Ku 1] S. KUMAR - *Cohomology algebra of Schubert varieties associated to Kac-Moody groups*, Proc. Conf. Algebraic Geom., Vancouver, 1984, C.M.S. Conf. Proc. 6 (1986), 277-299.

[Ku 2] S. KUMAR - *Demazure character formula in arbitrary Kac-Moody setting*, Inventiones Math. 89 (1987), 395-423.

[Ku 3] S. KUMAR - *Proof of the Partarasarathy-Ranga Rao-Varadarajan conjecture*, Preprint, 1987.

[Le] J. LEPOWSKY - *Generalized Verma modules, loop space cohomology and Macdonald type identities*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 12 (1979), 169-234.

[Mar] R. MARCUSON - *Tits' systems in generalized nonadjoint Chevalley groups*, J. of Algebra 34 (1975), 84-96.

[Mat 1] O. MATHIEU - *Sur la construction de groupes associés aux algèbres de Kac-Moody*, C.R. Acad. Sci. Paris 299 (1984), Sér. I, 161-164.

[Mat 2] O. MATHIEU - *Formules de Demazure-Weyl et généralisation du théorème de Borel-Weil-Bott*, C.R. Acad. Sci. Paris 303 (1986), Sér. I, 391-394.

[Mat 3] O. MATHIEU - *Fibrés en droites sur les variétés de Schubert associées aux algèbres de Kac-Moody*, Proc. Symp. on topological methods in field theory, Helsinki, 1986, Scientific World 1987, 111-115.

[Mat 4] O. MATHIEU - *Classes canoniques des variétés de Schubert et algèbres affines*, C.R. Acad. Sci. Paris 305 (1987), Sér. I, 105-107.

[Mat 5] O. MATHIEU - *Construction du groupe de Kac-Moody et applications*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 306 (1988), 227-230.

[Mat 6] O. MATHIEU - *Formules de Weyl et de Demazure et théorème de Borel-Weil-Bott pour les algèbres de Kac-Moody générales*, I, II, prépublications, 1986, 1988. *Formules de caractères pour les algèbres de Kac-Moody générales*, Astérisque n° 159-160, 1988.

[Mat 7] O. MATHIEU - *Construction d'un groupe de Kac-Moody et applications*, Compositio Math. 69 (1989), 37-60.

[Mi] D. MITZMAN - *Integral bases for affine Lie algebras and their applications*, Contemporary Math. 40, Amer. Math. Soc., 1985.

[Moo 1] R.V. MOODY - *A new class of Lie algebras*, J. Algebra 10 (1968), 211-230.

[Moo 2] R.V. MOODY - *A simplicity theorem for Chevalley groups defined by generalized Cartan matrices*, preprint, april 1982.

[MooT] R.V. MOODY and K. TEO - *Tits' systems with crystallographic Weyl groups*, J. Algebra 21 (1972), 178-190.

[Mor 1] J. MORITA - *On adjoint Chevalley groups associated with completed Euclidean Lie algebras*, Comm. in Algebra 12 (1984), 673-690.

[Mor 2] J. MORITA - *Coverings, generators and relations of certain infinite-dimensional groups*, preprint, 1983.

[Mor 3] J. MORITA - *Conjugate classes of three dimensional simple Lie subalgebras of the affine Lie algebra* $A_\ell^{(1)}$, in Algebraic and topological theories (to the memory of T. Miyata), 1985, 113-126.

[Mor 4] J. MORITA - *Commutator relations in Kac - Moody groups*, Proc. Japan Acad. 63 (1987), sér. A, 21-22.

[PK] D. PETERSON and V. KAC - *Infinite flag varieties and conjugacy theorems*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 80 (1983), 1778-1782.

[PS] A. PRESSLEY and G. SEGAL - *Loop groups*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1986.

[ReS] A. REIMAN and M. SEMENOV-TJAN-SHANSKII - *Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations*, I, Invent. Math. 54 (1979), 81-100 ; II, ibid. 63 (1981), 423-432.

[Ro] G. ROUSSEAU - *Formes réelles presque compactes des algèbres affines*, prépublication, Nancy, 1988.

[Seg 1] G.B. SEGAL - *Unitary representations of some infinite dimensional groups*, Comm. Math. Phys. 80 (1981), 301-342.

[Seg 2] G.B. SEGAL - *Loop groups*, in Arbeitstagung, Bonn 1984, Lecture Notes in Math. Nr. 1111, Springer-Verlag 1985, 155-168.

[SegW] G.B. SEGAL and G. WILSON - *Loop groups and equations of* KdV *type*, Publ. Math. I.H.E.S. 61 (1985), 5-65.

[Ser 1] J.-P. SERRE - *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, W.A. Benjamin, New York, 1966.

[Ser 2] J.-P. SERRE - *Arbres, amalgames*, Sl_2 , Astérisque n° 46, Soc. Math. Fr., 1977.

[Sl 1] P. SLODOWY - *Singularitäten, Kac-Moody Liealgebren, assoziierte Gruppen und Verallgemeinerungen*, Habilitationsschrift, Bonn, 1984.

[Sl 2] P. SLODOWY - *An adjoint quotient for certain groups attached to Kac-Moody algebras*, in [IDGA], 307-333.

[Su 1] K. SUTO - *Groups associated with compact type subalgebras of Kac-Moody algebras*, Proc. Japan Acad. 62 A (1986), 392-395.

[Su 2] K. SUTO - *Groups associated with unitary forms of Kac-Moody algebras*, J. Math. Soc. Japan 40 (1988), 85-104.

[Su 3] K. SUTO - *Exponentials of certain completions of the unitary form of a Kac-Moody algebra*, Proc. Japan Acad. 64 A (1988), 208-211.

[Ti 1] J. TITS - Résumé de cours, Annuaire du Collège de France, 81^e année (1980-1981), 75-86.

[Ti 2] J. TITS - Résumé de cours, Annuaire du Collège de France, 82^e année (1981-1982), 91-105.

[Ti 3] J. TITS - *Groups and group functors attached to Kac-Moody data*, in Arbeitstagung, Bonn 1984, Springer Lecture Notes Nr. 1111, 1985, 193-223.

[Ti 4] J. TITS - *Buildings and group amalgamations*, in Groups, St. Andrews 1985, Lecture Notes Series n° 121, Lond. Math. Soc., 1986, 110-127.

[Ti 5] J. TITS - *Ensembles ordonnés, immeubles et sommes amalgamées*, Bull. Soc. Math. (Sér. A) 38 (1986), 367-387.

[Ti 6] J. TITS - *Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields*, J. of Algebra, 105 (1987), 542-573.

[Note ajoutée le 21.09.89. Cet exposé a été rédigé en avril-mai 1988 : il était en effet prévu pour le Séminaire du mois de juin mais a dû être reporté à novembre pour cause de maladie. Il s'est ainsi écoulé près d'un an et demi entre la rédaction de ce texte et sa publication définitive. Une mise à jour sérieuse en eût certes été souhaitable mais aurait pris trop de temps pour être envisagée ; aussi me suis-je contenté d'apporter quelques corrections et précisions bibliographiques qui m'ont été aimablement signalées par G. Lusztig, O. Mathieu et P. Slodowy - je tiens à les en remercier ici - et de compléter la bibliographie en y rajoutant notamment un petit nombre de références récentes, auxquelles il n'est donc pas renvoyé dans le corps du texte.]

Jacques TITS

Collège de France
11 place Marcelin-Berthelot
F-75231 PARIS CEDEX 05