Astérisque

L. Clozel

# Nombres de Tamagawa des groupes semi-simples

*Astérisque*, tome 177-178 (1989), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 702, p. 61-82
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1988-1989__31__61_0>

© Société mathématique de France, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Novembre 1988
41ème année, 1988-89, n° 702

# NOMBRES DE TAMAGAWA DES GROUPES SEMI–SIMPLES
## (d'après Kottwitz)

L. Clozel (*)

## 1. Introduction.

Soient $F$ un corps de nombres, $G$ un groupe linéaire algébrique sur $F$. Soit $\omega$ une forme différentielle de rang maximal sur $G$, invariante à droite et à gauche, et définie sur $F$ ; une telle forme existe si, et seulement si, $G$ est **unimodulaire** comme groupe algébrique ; supposons–le.

Soient $v$ une place (finie ou infinie) de $F$, $F_v$ la complétion de $F$ en $v$, $G_v$ le groupe sur $F_v$ déduit de $G$ par extension des scalaires, $\omega_v$ la forme différentielle bi–invariante sur $G_v$ déduite de même de $\omega$. Si l'on choisit une mesure de Haar $\mu_v$ sur $F_v$, la densité $|\omega_v|$ associée à $\omega_v$ définit alors une mesure de Haar sur $G_v(F_v) = G(F_v)$. On choisit les mesures de Haar additives de la façon suivante : si $F_v$ est $p$–adique, $\mu_v$ donne la mesure 1 à $\mathcal{O}_v$ ; si $F_v = \mathbb{R}$, $\mu_v$ est la mesure de Lebesgue ; si $F_v \cong \mathbb{C}$, $\mu_v = i dz.d\bar{z}$.

Par ailleurs, soit $\mathbb{A} = \prod_v{}' F_v$ (produit restreint) l'anneau des adèles de $F$, et considérons le groupe adélique $G(\mathbb{A}) = \prod_v{}' G(F_v)$ ; en presque toute place finie $v$, $G_v$ peut être obtenu par extension des scalaires à partir d'un groupe linéaire algébrique sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_v$ de $F_v$ ($\equiv$ schéma en groupes affine réduit sur Spec $\mathcal{O}_v$) ; le produit restreint est pris par rapport aux sous–groupes compacts ouverts $G(\mathcal{O}_v)$ de $G(F_v)$.

La "mesure de Tamagawa" sur le groupe adélique $G(\mathbb{A})$ est, en première approximation, la mesure $dg = \prod_v |\omega_v|$ sur $G(\mathbb{A})$. Cela n'a de sens que si le produit est convergent, c'est–à–dire si le produit, portant sur presque toutes les places finies de $F$ :

$$\prod_{\substack{\text{presque}\\ \text{tout } v}} \int_{G(\mathcal{O}_v)} |\omega_v|$$

est convergent.

(*) Pendant la préparation de cet exposé, l'auteur était partiellement financé par la Sloan Foundation.

Ce produit peut diverger ; par exemple, si $F = \mathbb{Q}$ et $G$ est le groupe multiplicatif $G_m$, on obtient le produit $\prod_p (1-\frac{1}{p})$. On sait, en général, introduire des facteurs de convergence $(\lambda_v)$ tels que le produit $\prod_v \lambda_v |\omega_v|$ soit convergent [17]. On ne s'intéressera ici qu'aux cas suivants :

(a) $G$ semi–simple connexe : le produit $\prod |\omega_v|$ est alors convergent.

(b) $G = T$ est un tore anisotrope sur $F$. Soit $\bar{F}$ une clôture algébrique de $F$, $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$, $X^*T$ le groupe des caractères de $T$ (morphismes $T \longrightarrow G_m$ sur $\bar{F}$) ; $X^*T$ est alors, de façon naturelle, un $\Gamma$–module. Soit $r$ la représentation de $\Gamma$ sur $X^*T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, $L(s,r) = \prod_{v \text{ finie}} L_v(s,r)$ la fonction $L$ d'Artin de $r$. Alors le produit

$$\prod_{v \text{ infinie}} |\omega_v| \prod_{v \text{ finie}} L_v(1,r)^{-1} |\omega_v| \tag{1.1}$$

est convergent – ses facteurs finis sont égaux à 1. Par ailleurs, la représentation $r$ n'a pas de composantes triviales ; sa fonction $L$ n'a donc ni zéro ni pôle en 1 ; on considère la mesure sur $T(\mathbb{A})$ produit de $L(1,r)$ par le produit (1.1).

Dans les deux cas, on a construit une mesure canonique sur $G(\mathbb{A})$, qui ne dépend pas du choix de la forme rationnelle $\omega$ : deux telles formes diffèrent par un scalaire non nul $x \in F^\times$, et la formule du produit montre que $\prod_v \lambda_v |\omega_v| = \prod_v \lambda_v |x\,\omega_v|$. La mesure ainsi définie a encore le défaut de ne pas être invariante par restriction des scalaires à la Weil : on définit donc la **mesure de Tamagawa** sur $G$ comme le produit de la mesure précédemment définie par $|\Delta_F|^{-\frac{\dim G}{2}}$, où $\Delta_F$ est le discriminant de $F$. On vérifie que cette mesure est invariante par restriction des scalaires. (Pour la définition générale de la mesure de Tamagawa, cf. Ono [17]).

Limitons–nous désormais aux groupes semi–simples. On sait alors que la mesure de $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ – pour toute mesure de Haar sur $G(\mathbb{A})$ – est finie. On définit le **nombre de Tamagawa** $\tau(G)$ de $G$ comme le volume de $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ pour la mesure de Tamagawa.

Vers la fin des années 50, A. Weil remarqua que la notion de mesure de Tamagawa permettait de démontrer de nombreux résultats arithmétiques de Siegel (volumes de domaines fondamentaux de groupes arithmétiques ; nombres de classes de formes quadratiques). Il put montrer, pour de nombreux groupes classiques, que $\tau(G) = 1$ si $G$ est semi–simple et simplement connexe et conjectura que c'était vrai dans tous les cas.

**THEOREME** 1.1 (R. Kottwitz). ***Soit*** $G$ ***un groupe semi-simple simplement connexe.***
***Alors*** $\tau(G) = 1$ .

Notons que des travaux précédents d'Ono avaient réduit le calcul de $\tau(G)$ pour tout groupe semi–simple au cas simplement connexe. Sansuc [19] a étendu ceci à tous les groupes réductifs. Soit $\mathrm{Pic}(G)$ le groupe de Picard de $G$, $Ш(G)$ le noyau de l'application de restriction en cohomologie galoisienne :

$$H^1(F,G) \longrightarrow \bigoplus_v H^1(F_v,G) .$$

Rappelons que le **principe de Hasse** affirme que ce noyau est trivial si $G$ est semi–simple et simplement connexe. Jusqu'à une date récente, il n'était établi que si $G$ n'avait pas de facteurs de type $E_8$. Récemment, Tchernousov [22] a résolu le cas $E_8$ :

THEOREME 1.3 –(Tchernousov). ***Soit*** $G$ ***un groupe linéaire algébrique simple de type*** $E_8$ ***sur un corps de nombres*** $F$. ***Alors le principe de Hasse est vérifié pour*** $G$.

Plus précisément [23], Tchernousov démontre que si $G$ satisfait les hypothèses du théorème, et se déploie sur une extension cyclique $L/K$ de degré 5, il existe une extension finie $E/K$, qui est une tour d'extensions cubiques et quadratiques, et telles que $G$ contient un sous–groupe connexe propre, défini sur $E$, qui n'est pas un tore. D'après Harder [24], cela implique le principe de Hasse pour $G$, et les résultats antérieurs obtenus jusqu'à [24] montrent alors que le principe de Hasse est vrai en général... pour $G$ **semi–simple, simplement connexe**. En général, on peut donc considérer $Ш(G)$ comme le "défaut du principe de Hasse pour $G$".

Modulo le Thm. 1.1, le résultat de Sansuc s'exprime alors ainsi :

THEOREME 1.2 (Sansuc, Kottwitz). ***Soit*** $G$ ***un groupe réductif connexe sur*** $F$. ***Alors***

$$\tau(G) = \frac{|\mathrm{Pic}\ G|}{|Ш(G)|} .$$

Dans cet exposé, on essaiera de donner une idée de la démonstration de Kottwitz. Elle repose sur une stratégie définie par R. Langlands. Tout d'abord, Langlands avait démontré la conjecture de Weil pour les groupes **déployés**. On ne décrira pas ici sa démonstration, qui date de 1966 : donnons seulement l'idée principale. Le calcul de $\tau(G)$ revient évidemment à calculer

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} 1\, dg .$$

Si $G$ est déployé (semi–simple) de rang $r$, la théorie, due à Langlands, des séries d'Eisenstein sur les groupes adéliques montre que la fonction constante 1 s'exprime comme résidu de rang $r$ (résidu itéré, le long de $r$ hyperplans transverses) des séries d'Eisenstein méromorphes formées à partir du sous–groupe de Borel de $G$. La théorie du terme constant permet de calculer explicitement ce résidu ; on en déduit le nombre de Tamagawa de $G$ ([14]). Cette démonstration a été étendue par Lai [13] aux groupes quasi–déployés.

L'idée suivante (Jacquet–Langlands [5]) est une illustration d'un principe général de la "philosophie de Langlands", suivant lequel l'arithmétique d'un groupe réductif $G$ devrait être, **grosso modo**, "contenue" dans l'arithmétique d'une forme intérieure quasi–déployée de $G_0$ de $G$ (voir §2). En particulier, on devrait avoir, si la conjecture de Weil est vérifiée, $\tau(G) = \tau(G_0)$. L'outil général pour exhiber de telles relations entre groupes liés par torsion intérieure est la formule des traces de Selberg, développée par Arthur dans le cas adélique. La conjecture de Weil s'exprime alors simplement par le fait que les "termes constants" des formules des traces pour les deux groupes – i.e., les distributions invariantes données par $f \longmapsto \tau(G)f(1)$, $f_0 \longmapsto \tau(G_0)f_0(1)$ où $f, f_0$ sont des fonctions sur $G(\mathbb{A})$ et $G_0(\mathbb{A})$ convenablement "associées" – doivent être égaux. Pour de telles fonctions associées, on doit avoir $f(1) = f_0(1)$, et l'égalité des termes constants implique alors que $\tau(G) = \tau(G_0)$.

Dès 1968, Jacquet–Langlands [5] avaient montré comment l'application de ce principe permettait de démontrer la conjecture de Weil pour (les groupes dérivés de) $GL(2)$ et une forme intérieure de $GL(2)$, c'est–à–dire le groupe multiplicatif d'une algèbre de quaternions sur $F$. Le cas général est, hélas, beaucoup plus difficile du fait de l'apparition des phénomènes de "$L$–indiscernabilité", découverts par Labesse et Langlands dans le cas $SL(2)$, et qui empêchent la comparaison directe des formules des traces. L'apport de Kottwitz est, dans plusieurs articles importants [6, 7, 8] et à la suite du mémoire fondamental de Langlands [15], d'avoir partiellement résolu les problèmes posés par la "$L$–indiscernabilité". On a essayé de donner une idée de ses constructions qui, rappelons–le, précisent et étendent celles de Langlands [15].

Le plan est le suivant. Dans le §2, on explique le formalisme général qui permet de relier les classes de conjugaison de deux groupes liés par torsion intérieure sur des corps locaux ou globaux ; on donne une expression simple de la formule des traces, due à Arthur ; on décrit succinctement la stratégie de démonstration. (Le lecteur que la "conjugaison stable" effraie verra ces notions illustrées dans le cas, plus simple, de $GL(n)$ et de ses formes intérieures). Le §3 est le plus technique : on y décrit la stabilisation du terme elliptique de la formule des traces.

Le point–clé est la définition de l'invariant de Kottwitz, qui relie conjugaison stable locale et globale (Lemmes 3.1, 3.2) : sa construction, très élégante (Lemme 3.1), simplifie grandement une définition antérieure de Langlands. Dans le §4, on expose sans démonstration les résultats de Kottwitz sur la comparaison d'intégrales orbitales de fonctions d'Euler–Poincaré. Enfin, dans le §5, on esquisse la démonstration du Thm. 1.1 à l'aide de la stabilisation et des résultats locaux.

Terminons par trois remarques. Tout d'abord, le Théorème 1.1 était déjà connu pour tous les groupes classiques (Weil, Mars) et de nombreux groupes exceptionnels (Demazure, Mars) ; avec les travaux d'Ono, Langlands, Lai déjà cités, cela donnait la valeur de $\tau(G)$ pour de très nombreux groupes. L'aspect important de la démonstration de Kottwitz est qu'elle repose sur un principe unique. Ensuite, les méthodes de stabilisation décrites aux §3–4 ne constituent qu'une petite partie de la théorie générale de la $L$–indiscernabilité : en particulier son aspect le plus frappant, le fait que l'on puisse regrouper les termes "instables" de la formule des traces pour obtenir les formules des traces stables d'autres groupes [15, 8], n'y apparaît pas. Enfin, mentionnons une suggestion de Langlands [16] : puisque le principe de Hasse apparaît partout dans ces questions (cf. le §3.3), ne pourrait–on le déduire de la formule des traces ?

Je voudrais remercier J.–J. Sansuc et J.–L. Colliot–Thélène, qui m'ont fait part du résultat de Tchernousov ; T.A. Springer, qui m'a communiqué sa rédaction de la démonstration ; et T. Zink, qui m'a fait remarquer deux erreurs dans la première rédaction de cet exposé.

## 2. Réduction au cas quasi–déployé : comparaison

2.1. Rappelons d'abord la notion de **forme intérieure**.

Soient $F$ un corps de caractéristique nulle, $G$ un groupe linéaire algébrique connexe défini sur $F$, $\bar{F}$ une clôture algébrique de $F$. Pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) = \Gamma$, soit $\sigma_G$ l'automorphisme $\sigma$–linéaire de $G(\bar{F})$ déduit de $\sigma$ et de la $F$–structure donnée par $G$.

Soit $G_0$ un autre groupe linéaire algébrique sur $F$. Supposons tout d'abord que $G_0$ et $G$ sont isomorphes sur $\bar{F}$. Identifions $G_0(\bar{F})$ et $G(\bar{F})$ à l'aide d'un $\bar{F}$–isomorphisme. Pour tout $\sigma \in \Gamma$, $\sigma_G(\sigma_{G_0})^{-1}$ est alors un automorphisme (de groupe algébrique) de $G(\bar{F}) = G_0'(\bar{F})$. On dit que $G$ est **forme intérieure** de $G_0$ si $\sigma_G(\sigma_{G_0})^{-1}$ est **intérieur** pour tout $\sigma \in \Gamma$ :

$$\sigma_G(\sigma_{G_0})^{-1} = \mathrm{Ad}(g_\sigma)$$

pour quelque $g_\sigma \in G(\bar{F})$. Il est clair que $g_\sigma$ n'opère que par sa classe dans $G_{\mathrm{ad}}(\bar{F}) = G(\bar{F})/Z(\bar{F})$, et que celle–ci est bien déterminée ; on obtient ainsi un élément de $H^1(F;G_{\mathrm{ad}})$ ; réciproquement, l'ensemble des $F$–formes d'un $F$–groupe $G$ (à $F$–isomorphisme près) forme un torseur sous $H^1(F,G_{\mathrm{ad}})$.

Supposons maintenant $G$ connexe réductif. Il est bien connu que $G$ est forme intérieure d'un groupe **quasi–déployé** $G_0$, i.e., un groupe $G_0$ ayant un sous–groupe de Borel défini sur $F$.

**Exemple 2.1.** $G_0 = GL(n)/F$. Les formes intérieures de $G_0$ sont les algèbres simples centrales de degré $n^2$ sur $F$.

Supposons que $F$ est un corps de nombres, et notons $F_v$ ses complétions locales. La forme intérieure $G_0$ de $G$ détermine alors une forme intérieure $G_{0,v}$ de $G_v = G \underset{\mathrm{Spec}\, F}{\times} \mathrm{Spec}\, F_v$, à toutes les places $v$ ; $G_{0,v}$ et $G_v$ sont isomorphes en presque tout $v$.

Revenant à la situation générale, supposons que le groupe réductif $G$ soit forme intérieure du groupe quasi–déployé $G_0$. On n'identifiera plus $G(\bar{F})$ et $G_0(\bar{F})$ ; plutôt, on se donne un $\bar{F}$–isomorphisme $\psi : G_0 \longrightarrow G$. Une classe de conjugaison dans $G(\bar{F})$ est l'orbite d'un élément $\gamma$ par $G(\bar{F})$ opérant sur lui–même par conjugaison. C'est (l'ensemble des points à valeurs dans $\bar{F}$ d') une sous–variété de $G(\bar{F})$. On dit que la classe de conjugaison est définie sur $F$ ($F$–rationnelle) si elle l'est comme sous–variété. Si $\psi : G_0 \longrightarrow G$ est une torsion intérieure, on vérifie facilement que l'image $\psi(\Gamma)$ d'une classe de conjugaison $F$–rationnelle de $G(\bar{F})$ est une classe de conjugaison $F$–rationnelle de $G_0(\bar{F})$.

Supposons désormais que $G$ (ainsi que $G_0$) est **semi–simple** et **simplement connexe**. Un théorème fondamental de Steinberg affirme alors que toute classe de conjugaison $F$–rationnelle d'éléments semi–simples de $G_0$ contient un élément rationnel.

Si $\gamma \in G(F)$ est un élément $F$–rationnel et semi–simple, on peut alors considérer sa classe de conjugaison $\bar{O}$ dans $G(\bar{F})$, son image $\psi^{-1}(\bar{O})$ dans $G_0(\bar{F})$, et les éléments $F$–rationnels de celle–ci. Pour des groupes généraux, ceci ne définit pas d'application entre classes de conjugaison de $G(F)$ et $G_0(F)$ : en général, deux éléments $\gamma,\gamma'$ de $G(F)$ peuvent être conjugués par $G(\bar{F})$ sans l'être par $G(F)$, et il en est de même dans $G_0$.

**Exemple 2.2.** $G = \mathrm{SL}(2)/F$. Les tores maximaux de $G$ s'identifient aux tores $\mathbb{E}_1^\times = \mathrm{Ker}(N : \mathbb{E}^\times \longrightarrow \mathbb{F}^\times)$, où $\mathbb{E}^\times$ est le groupe algébrique associé au groupe multiplicatif d'une algèbre étale $E$ de degré 2 sur $F$ (y compris $F \times F$), $N$ la norme. Si $E$ est un corps et $\sigma$ engendre $\mathrm{Gal}(E/F)$, $x$ et $x^\sigma \in E_1^\times = \mathbb{E}_1^\times(F)$ sont conjugués par $G(\bar{F})$ sans l'être par $G(F)$ sauf si $x = \pm 1$.

On est donc amené à introduire la notion suivante :

**DEFINITION 2.3.** $\gamma,\gamma'$ ***semi-simples dans*** $G(F)$. $\gamma,\gamma'$ ***sont*** ***stablement conjugués si*** $\gamma' = g\gamma g^{-1}$ ***pour un*** $g \in G(\bar{F})$.

La **classe de conjugaison stable** de $\gamma \in G(F)$ se définit de façon évidente. Elle est réunion (finie dans le cas local, en général infinie dans le cas global) de classes de conjugaison ordinaires. On a alors :

**SCHOLIE 2.4.** $G$ ***forme intérieure de*** $G_0$ ***quasi-déployé***, $\psi : G_0 \longrightarrow G$. ***Alors*** $\psi^{-1}$ ***réalise une injection de l'ensemble des classes de conjugaison stable semi-simples de*** $G$ ***vers celles de*** $G_0$.

**Exemple 2.5.** Soit $D$ une algèbre simple centrale de degré $n^2$ sur $F$, $G = D^\times$, $G_0 = \mathrm{GL}(n,F)$. Dans ce cas, les classes de conjugaison stable (semi–simples) s'identifient aux classes de conjugaison, tant dans $G$ que dans $G_0$. Les tores maximaux de $G$ s'identifient aux tores $\mathbb{E}^\times$ où $E$ est une algèbre étale de degré $n$ sur $F$ déployant $D$. Ils se plongent dans $G_0$ de manière évidente.

Par passage au quotient, on obtient encore une injection des classes de conjugaison semi–simples entre $G = D^\times/F^\times$ et $G_0 = \mathrm{PGL}(n,F)$.

**2.2. Formule des traces.**

Rappelons d'abord la formule des traces de Selberg en son degré zéro. Soit $G$ un groupe **anisotrope** sur le corps des nombres $F$. On sait alors que $G(F)$ est cocompact dans $G(\mathbb{A})$. Soit $f$ une fonction $C^\infty$ à support compact sur $G(\mathbb{A})$ – ainsi $f = f_S \otimes f^S$, $S$ étant un ensemble fini de places contenant les places archimédiennes, la fonction $f_S$ étant dans $C_c^\infty(G(F_S))$ où $F_S = \prod_{v\in S} F_v$, et $f^S$ étant la fonction caractéristique de $\prod_{v\notin S} G(O_v)$, qui est bien défini pour $S$ assez grand. On considère l'action $r$ de $G(\mathbb{A})$ par translation à droite sur $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$.

Soit dg une mesure de Haar sur $G(\mathbb{A})$ ; si $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$, on peut définir

$$(r(f)\varphi)(x) = \int_{G(\mathbb{A})} \varphi(xg)f(g)dg$$

pour $\varphi \in L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ ; l'opérateur $r(f)$ est traçable, et l'on a

$$\text{(2.1)} \qquad \operatorname{trace} r(f) = \sum_{\substack{\gamma\in G(F)\\ \gamma \bmod G(F)}} \mathrm{vol}(G_\gamma(F)\backslash G_\gamma(\mathbb{A}))\, O_\gamma(f)$$

où

$$\text{(2.2)} \qquad O_\gamma(f) = \int_{G_\gamma(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} f(g^{-1}\gamma g)\frac{dg}{di}\,;$$

$di$ est une mesure de Haar sur $G_\gamma(\mathbb{A})$, qui apparaît à la fois dans la définition de $O_\gamma$ et dans le calcul du volume : le produit $\mathrm{vol}(\ )O_\gamma$ ne dépend pas du choix de $di$. Pour $f$ donnée, la somme (2.1) est finie ; les intégrales orbitales sont convergentes.

En général, la formule des traces pour un groupe semi–simple est plus compliquée et beaucoup plus difficile à établir (voir l'exposé de Labesse [10]). Les travaux d'Arthur impliquent néanmoins qu'elle se simplifie pour des fonctions particulières.

Rappelons que la composante neutre $G_\gamma^0$ du centralisateur $G_\gamma$ d'un élément semi–simple $\gamma \in G(F)$ est un groupe réductif (connexe). On dit que $\gamma$ est elliptique si le centre de $G_\gamma^0$ a même rang déployé que celui de $G$, ou, ce qui revient au même, si $Z(G_\gamma)^0/Z(G)^0$ est un tore anisotrope, $Z(H)$ désignant le centre d'un groupe $H$. (Dans notre cas – $G$ semi–simple simplement connexe – $G_\gamma$ est connexe et ceci revient à dire que $Z(G_\gamma)^0$ est un tore anisotrope). Dans l'énoncé qui suit, supposons $G$ semi–simple simplement connexe. On rappelle qu'une représentation **supercuspidale** de $G(F_v)$, $v$ étant finie, est une représentation irréductible dont les coefficients sont à support compact.

THEOREME 2.6 (Arthur). ***Soit*** $v_1 \neq v_2$ ***deux places de*** $F$, $v_1$ ***étant finie. Supposons que***

(i) $f_{v_1}$ ***est un coefficient d'une représentation supercuspidale de*** $G(f_{v_1})$.

(ii) ***Les intégrales orbitales de*** $f_{v_2}$ ***s'annulent sur les éléments*** $\gamma \in G(F_{v_2})$ ***qui ne sont pas semi-simples elliptiques. Alors*** :

(iii) $r(f)$ ***envoie*** $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ ***dans l'espace*** $L^2_{\mathrm{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ ***des formes paraboliques*** ; ***c'est un opérateur traçable.***

(iv) ***On a***

$$\operatorname{trace} r(f) = \sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \gamma \bmod G(F) \\ \gamma \text{ semi-simple elliptique}}} \operatorname{vol}(G_\gamma(F)\backslash G_\gamma(\mathbb{A}))\, O_\gamma(f)\,.$$

Ce résultat, difficile, nécessite une bonne partie des résultats d'Arthur. Pour la démonstration, cf. Kottwitz [9, §5].

### 2.3. Comparaison.

Soient $G$ semi–simple sur $F$, $G_0$ la forme intérieure quasi–déployée de $G$. Rappelons que pour $v \notin S$, $S$ étant un ensemble fini de places, on a $G_v \cong G_{0,v}$. On peut adjoindre à $S$ une place finie $v_1$ telle que $G_{v_1} \cong G_{0,v_1}$ soit **déployé** : c'est donc un groupe de Chevalley sur $F_{v_1}$ et l'on sait, d'après Gérardin [3] qu'il a des représentations supercuspidales.

Posons
$$\begin{aligned} f &= f_S \otimes f^S \in C_c^\infty(G(\mathbb{A})), \\ f_0 &= f_{0,S} \otimes f_0^S \in C_c^\infty(G_0(\mathbb{A})). \end{aligned}$$

Augmentant $S$, on peut supposer qu'il contient les places archimédiennes. A la place $v_1 \in S$, on suppose que $f_{v_1} = f_{o,v_1}$ est un coefficient de représentation supercuspidale. On supposera de plus qu'il existe une place $v_2 \in S$ telle que $f_{v_2}$ et $f_{o,v_2}$ vérifient la condition (ii) du Thm. 2.6 ; on verra dans le §4 que cela est licite. Pour $v \notin S$, $G_v \cong G_{o,v}$ et l'on suppose, après avoir identifié les deux groupes, que $f_v = f_{o,v}$.

On a alors, des mesures de Haar $dg$ et $dg_o$ étant choisies sur les groupes adéliques :

(2.3)
$$\operatorname{trace} r_{\mathrm{cusp}}(f) = \operatorname{vol}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) \sum_{\zeta \in Z(F)} f(\zeta) + \sum_{\substack{\gamma \in G(F)-Z(F) \\ \gamma \text{ elliptique} \\ \bmod G(F)}} \operatorname{vol}(G_\gamma(F)\backslash G_\gamma(\mathbb{A}))\, O_\gamma(f)$$

(2.4)
$$\operatorname{trace} r_{\mathrm{cusp}}(f_o) = \operatorname{vol}(G_o(F)\backslash G_o(\mathbb{A})) \sum_{\zeta \in Z_o(F)} f_o(\zeta) + \sum_{\substack{\gamma_o \in G(F)-Z_o(F) \\ \gamma_o \text{ elliptique} \\ \bmod G(F)}} \operatorname{vol}(G_{\gamma_o}(F)\backslash G_{\gamma_o}(\mathbb{A}))\, O_{\gamma_o}(f_o).$$

L'idée de la démonstration consiste à comparer les formules des traces (2.3) et (2.4) en supposant qu'aux places de $S$ les fonctions $f_v$ et $f_{o,v}$ sont "associées", i.e., ont des intégrales orbitales convenablement associées pour des éléments associés comme en 2.1.

Considérons tout d'abord le cas, particulièrement simple, de $G = D^\times/F^\times$, $G_o = \mathrm{PGL}(n)$ (Exemple 2.5). Il a été étudié en détail par Deligne, Kazhdan et Vignéras [2]. Dans ce cas, la conjugaison stable coïncide avec la conjugaison, donc l'ensemble des classes de conjugaison semi–simples de $G(F)$ s'injecte dans celui des classes de conjugaison semi–simples de $G_o(F)$. On vérifie aisément que les éléments elliptiques sont envoyés vers les éléments elliptiques. (Ce sont les éléments images dans $D^\times/F^\times$ ou $\mathrm{GL}(n)/F^\times$ d'éléments $\gamma$ appartenant à un **corps** de degré $n$ sur $F$ plongé dans $M_n(F)$ ou l'algèbre $D$). De plus, tout élément elliptique de $G_o(F)$ provient, dans ce cas, d'un élément elliptique de $G(F)$ : les sommes (2.3) et (2.4) portent sur les mêmes ensembles. (*)

(*) Les formules (2.3), (2.4) ne sont pas exactes pour des groupes tels que $\mathrm{PGL}(n)$, qui ne sont pas simplement connexes ; les groupes $G_\gamma$ ne sont pas connexes, et il apparaît des indices $|G_\gamma^o\backslash G_\gamma|$. Voir [7], [8, §9.1] pour la formule correcte. On néglige ici ce détail (important).

Jusqu'ici, nous n'avons pas précisé le choix des mesures dg et di sur les groupes $G(\mathbb{A})$, $G_\gamma(\mathbb{A})$ et leurs analogues dans $G_0$. On prend, bien sûr, les mesures de Tamagawa. On remarquera que ces groupes sont des extensions de groupes des types (a), (b) considérés dans l'Introduction : la construction qu'on a donnée des mesures de Tamagawa s'étend aisément. Par récurrence – et par des "dévissages" simples dus à Ono, cf. aussi Sansuc [19] – on peut supposer que les nombres de Tamagawa sont connus pour tous les groupes $G_\gamma$ avec $\gamma$ non central. Négligeant pour l'instant le problème de stabilisation – par exemple dans le cas de $D^\times/F^\times$ – on voit que les termes non centraux des membres de droite de (2.3) et (2.4) seront égaux si l'on peut choisir les fonctions $f$ et $f_0$ telles que

(2.5) $$O_\gamma(f,\mathrm{dg},\mathrm{di}) = O_{\gamma_0}(f_0,\mathrm{dg}_0,\mathrm{di}_0)$$

pour tout élément elliptique $\gamma \in G(F)$ associé à $\gamma_0 \in G_0(F)$. (On a rappelé dans la notation les mesures définissant les intégrales orbitales : ce sont les mesures de Tamagawa). Bien sûr, l'égalité (2.5) ne concerne maintenant que les places de $S$, puisque les fonctions coïncident en–dehors. **A priori**, on ne doit pour l'instant supposer (2.5) qu'en les éléments non centraux. Il résulte cependant de la théorie des **germes de Shalika** [4,21] que les intégrales orbitales des éléments non centraux – en fait, les éléments semi–simples réguliers suffisent – déterminent les intégrales orbitales pour **toutes** les orbites. Pour certaines fonctions (voir §4), Kottwitz obtient une forme très précise de ce résultat, et ceci impliquera que (2.5) est vrai partout. (Pour les groupes $D^\times/F^\times$ et $\mathrm{PGL}(n)$, on aurait pu le déduire de résultats de Deligne–Kazhdan–Vignéras et Rogawski [2, 18]).

Faisons maintenant une hypothèse supplémentaire sur $f, f_0$ : à une place $v \notin S$, on suppose que $f_v(\zeta) = f_{0,v}(\zeta) = 0$ pour $\zeta \neq 1$, $= 1$ pour $\zeta = 1$. On a alors, prenant la différence de (2.3) et (2.4) pour des fonctions associées :

(2.6) $$(\tau(G)-\tau(G_0))f(1) = \mathrm{trace}\ r_{\mathrm{cusp}}(f) - \mathrm{trace}\ r_{\mathrm{cusp}}(f_0)\ .$$

Choisissons encore une place $v \notin S$, non utilisée jusqu'ici, et telle que $G_v = G_{0,v}$ soit non compact. Considérons l'identité (2.6) comme une identité de formes linéaires sur l'espace des fonctions $f_v \in C_c^\infty(G)$ et supposons que $f_w(1) \neq 0$ pour tout $w \neq v$. Puisque les espaces de formes paraboliques se décomposent discrètement sous l'action des groupes adéliques, l'identité (2.6) exprime alors $f_v(1)$ comme somme discrète de traces $\Sigma\, c_i$ trace $\pi_i(f_v)$, les $\pi_i$ étant des représentations unitaires de $G(F_v) = G_0(F_v)$. Pour un groupe non compact, la formule de Plancherel contient des termes continus. Des arguments bien connus d'analyse harmonique locale montrent alors que l'égalité (2.6) n'est possible que si le coefficient de $f_v(1)$ est nul, i.e., si $\tau(G)-\tau(G_0) = 0$. On en déduit le Théorème 1.1 pour $G$, puisqu'il est connu pour le groupe quasi–déployé $G_0$ !

Que faut-il pour étendre cette esquisse de démonstration à un groupe quelconque ? Tout d'abord, ce ne sont pas les éléments elliptiques qui sont en bijection, mais leurs classes de conjugaison stable. Pour pouvoir utiliser la comparaison des intégrales orbitales, on est ainsi amené à "stabiliser", au moins partiellement, la formule des traces. Nous décrivons en partie la stabilisation de Langlands et Kottwitz dans le paragraphe qui suit. Il faut ensuite trouver des fonctions vérifiant la condition (2.5), correctement reformulée pour tenir compte de la stabilisation. C'est un problème local, résolu par Kottwitz : ses résultats sont donnés dans le §4. Enfin, dans le §5, on esquissera la fin de la démonstration dans le cas général.

## 3. Une stabilisation partielle de la formule des traces.

3.1. Dorénavant, nous supposons que $G$ est un groupe **semi-simple, simplement connexe** sur le corps de nombres $F$ ; $G_0$ est une forme intérieure quasi-déployée de $G$.

On considère le membre de droite de (2.3), qui est la somme des termes

$$A = \sum_{\zeta \in Z(F)} \mathrm{vol}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))f(\zeta)$$

$$B = \sum_{\substack{\gamma \in G(F)-Z(F) \\ \gamma \text{ elliptique} \\ \gamma \bmod G(F)}} \mathrm{vol}(G_\gamma(F)\backslash G_\gamma(\mathbb{A}))O_\gamma(f;\mathrm{dg},\mathrm{d}i)\ .$$

Les mesures dg sur $G(\mathbb{A})$ et di sur $G_\gamma(\mathbb{A})$ sont les mesures de Tamagawa ; $G$ étant simplement connexe, on sait que $G_\gamma$ est un groupe réductif connexe ; $\gamma$ étant elliptique, le centre de $G_\gamma$ est anisotrope.

On veut comparer les termes $A$ et $B$, pour des fonctions convenables, avec les termes analogues $A_0$ et $B_0$ de (2.4). D'après le § 2.1, il est clair que cela ne sera possible que si l'on regroupe, à tout le moins, les termes de $B$ selon la conjugaison stable.

En d'autres termes, on cherche à remplacer la formule des traces (simplifiée) pour $G$ par une formule des traces stable. Ce problème de stabilisation de la formule des traces a été considéré pour la première fois par Labesse [11] dans le cas où $G = \mathrm{SL}(2)$ (*) ; il est résolu, dans le cas de SL(2), par Labesse et Langlands [12] ; Langlands [15] a formulé le problème général à l'aide de constructions de cohomologie galoisienne dans le groupe dual, et la formulation de Langlands a été précisée et complétée par Kottwitz.

(*) Dans l'approche originale de Labesse, la conjugaison stable était plutôt la conjugaison par $\mathrm{GL}(2,F) \supset \mathrm{SL}(2,F)$. Cette notion est équivalente, pour SL(2) ou SL($n$), à celle que nous avons définie.

Nous allons décrire la stabilisation de Kottwitz pour le terme $B$ de la formule des traces. Soit donc $G_0$ une forme intérieure quasi–déployée de $G$, $\psi : G_0 \longrightarrow G$ un homomorphisme (sur $\bar{F}$) réalisant $G$ comme forme intérieure de $G_0$. Notons $E_0^*$ l'ensemble des classes de conjugaison **stable** d'éléments elliptiques non centraux de $G_0(F)$. On peut écrire, d'après les propriétés de la conjugaison stable,

$$(3.1) \qquad B = \sum_{\gamma_0 \in E_0^*} \sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ g \underset{st}{\sim} \gamma_0}} \tau(G_\gamma) O_\gamma(f) .$$

La deuxième somme est prise sur les $\gamma \in G(F)$ (modulo conjugaison) stablement conjugués à $\psi(\gamma_0)$.

L'expression (B) a deux défauts : elle n'est pas stable (les intégrales orbitales $O_\gamma(\varphi)$ pour $\gamma \underset{st}{\sim} \gamma_0$ ne sont pas toutes égales) et n'est donc pas comparable a priori à l'expression analogue $(B_0)$ pour $G_0$ ; elle n'est pas locale (l'expression $\Sigma\, \tau(I_\gamma) O_\gamma(f)$ n'est pas un produit de termes locaux) et ne peut être évaluée simplement contre les fonctions que nous voulons considérer, qui seront des produits de fonctions locales. Tous ces problèmes sont résolus par l'introduction de **l'invariant de Kottwitz.**

### 3.2. L'invariant de Kottwitz (cas régulier).

Commençons par des rappels de cohomologie galoisienne. Soit d'abord $F$ un corps local de caractéristique nulle, dont on se fixe une clôture algébrique $\bar{F}$. Soit $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. Soit $T$ un tore sur $F$, $X^*T$ son groupe des caractères (rationnels, définis sur $\bar{F}$) ; $T(\bar{F})$ et $X^*(T)$ sont alors des $\Gamma$–modules ; de l'application naturelle

$$X^*T \times T(\bar{F}) \longrightarrow G_m(\bar{F}) = (\bar{F})^\times$$

on déduit un accouplement non–dégénéré :

$$H^1(F,X^*T) \times H^1(F,T) \longrightarrow H^2(F,G_m) = \begin{cases} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & (F\ p\text{–adique}) \\ \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} & (F \text{ réel}) \\ 0 & (F \cong \mathbb{C}) \end{cases}$$

Kottwitz reformule cette dualité de la façon suivante. Soit $\hat{T} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_*T, \mathbb{C}^\times)$ le **tore dual** de $T$, $X_*T$ étant le réseau des groupes à un paramètre $G_m \longrightarrow T/\bar{F}$. On vérifie alors facilement ([7, §2]) que

$$H^1(F, X^*T) = \pi_0(\hat{T}^\Gamma) ,$$

$\hat{T}^\Gamma$ étant le groupe des invariants de $\Gamma$ pour son action naturelle sur $\hat{T}$, et $\pi_0(\ )$ désignant le groupe des composantes connexes.

On a donc

$$(3.2) \qquad H^1(F,T) = \pi_0(\hat{T}^\Gamma)^D ,$$

$D$ désignant la dualité des groupes finis.

De façon analogue, dans le cas global, on obtient un isomorphisme

$$(3.3) \qquad H^1(F, T(\bar{\mathbb{A}})/T(\bar{F})) = \pi_0(\hat{T}^\Gamma)^D ,$$

où $\bar{\mathbb{A}}$ est la limite inductive $\varinjlim_L \mathbb{A}_L$ , $L$ parcourant les extensions finies de $F$ dans $\bar{F}$.

Soit maintenant $\psi : G_0 \longrightarrow G$ la torsion intérieure fixée ; soit $\gamma_0 \in G_0(F)$, et supposons $\gamma_0$ semi–simple **régulier** : son centralisateur, sous nos hypothèses, est alors un $F$–tore maximal $I_0$ de $G_0$. Si $\gamma \in G(\mathbb{A})$ est conjugué à $\psi(\gamma_0)$ dans $G(\bar{\mathbb{A}})$ – stablement conjugué à $\gamma_0$ à toutes les places – Kottwitz lui associe un élément $\mathrm{obs}(\gamma) \in H^1(F, I_0(\bar{\mathbb{A}})/I_0(\bar{F}))$.

La construction est la suivante. Soit $X_0$ l'ensemble des paires $(i,g)$, avec

(3.4)
- (a) $g \in G(\bar{\mathbb{A}})$
- (b) $i : I_0 \longrightarrow G/\bar{F}$, conjugué à $\psi|_{I_0}$ sous $G(\bar{F})$
- (c) $i(\gamma_0) = g\gamma g^{-1}$.

Par définition, $X_0$ n'est pas vide : il contient un élément $(i_0, g)$ avec $i_0 = \psi|_{I_0}$ ; il est muni d'actions de $\Gamma$ , $G(\bar{F})$ et $I_0(\bar{\mathbb{A}})$ :

- ($\alpha$) $\sigma(i,g) = (\sigma i, \sigma g)$ — $\sigma \in \Gamma$
- ($\beta$) $h.(i,g) = (\mathrm{Int}(h) \circ i, hg)$ — $h \in G(\bar{F})$
- ($\gamma$) $(i,g)t = (i, i(t^{-1})g)$ — $t \in I_0(\bar{\mathbb{A}})$ .

Comme l'indique la notation, les actions de $G(\bar{F})$ et $I_0(\bar{\mathbb{A}})$ commutent ; on a $\sigma(hx) = \sigma(h)\sigma(x)$, $\sigma(xt) = \sigma(x)\sigma(t)$. Soit $X = G(\bar{F})\backslash X_0$ . Puisque $G(\bar{F})$ opère transitivement sur l'ensemble des $i$, $X$ s'identifie au quotient de $\{g \in G(\bar{\mathbb{A}}) : g i_0(\gamma_0) g^{-1} = i_0(\gamma_0)\}$ par le stabilisateur $I_0(\bar{F})$ de $i_0$ dans $G(\bar{F})$ : $X$ est un $F$–torseur sous l'action de $I_0(\bar{\mathbb{A}})/I_0(\bar{F})$.

LEMME 3.1. *$\gamma$ est conjugué sur $G(\mathbb{A})$ à un élément $\delta \in G(F)$ si et seulement si $X^\Gamma \neq \emptyset$* .

**Démonstration** : Supposons $X^\Gamma \neq \emptyset$ , et construisons $\delta \in G(F)$, laissant la réciproque au lecteur. Soit donc $(i,g) \in X_0$ tel que pour tout $\sigma \in \Gamma$ , $\sigma(i,g) = (\sigma i, \sigma g) = (\mathrm{Int}\ h_\sigma) \circ i, h_\sigma g)$ , $h_\sigma \in G(\bar{F})$. On a donc $h_\sigma = {}^\sigma g g^{-1}$ , $g \in G(\bar{\mathbb{A}})$ . Autrement dit, c'est un un–cocycle de $\Gamma$ à valeurs dans $G(\bar{F})$, d'image triviale dans $H^1(\Gamma, G(\bar{\mathbb{A}}))$. Le principe de Hasse (§1) donne alors $h_\sigma = {}^\sigma \nu \nu^{-1}$ , $\nu \in G(\bar{F})$. Remplaçant $g$ par $\nu^{-1} g$, on est ramené au cas où $g = {}^\sigma g$ $(\forall \sigma)$ d'où $\sigma(i,g) = (\sigma i, g) = (\mathrm{Int}\ (h_\sigma) \circ i, h_\sigma g)$ . Ceci implique $h_\sigma = 1$ d'où $\sigma(i,g) = (i,g)$ . Mais alors on a exhibé un couple $i,g$ satisfaisant (c) avec $i$ défini sur $F$ et $g \in G(\mathbb{A})$. On a alors $\delta = i(\gamma_0) \in G(F)$, et $\delta = g \gamma g^{-1}$ , q.e.d !

Définissons alors $\mathrm{obs}(\gamma) \in H^1(I_0(\bar{\mathbb{A}})/I_0(\bar{F}))$ comme la classe du $F$–torseur $X$ . Il est clair que $X^\Gamma$ est non vide si et seulement si $\mathrm{obs}(\gamma) = 1$ . Par conséquent on a montré :

LEMME 3.2. *$\gamma$ est conjugué sur $G(\mathbb{A})$ à un élément $\delta \in G(F)$ si et seulement si* $\mathrm{obs}(\gamma) \in H^1(F, I_0(\bar{\mathbb{A}})/I_0(F))$ *est égal à* 1.

On peut reformuler ceci en utilisant l'isomorphisme (3.3) : $H^1(F, I_0(\bar{\mathbb{A}})/I_0(F)) \cong (\pi_0(\hat{I}_0)^\Gamma)^D$ : on considérera $\mathrm{obs}(\gamma)$ comme un élément du groupe dual de

$$\mathfrak{K}(I_0/F) = \pi_0(\hat{I}_0{}^\Gamma) . \tag{3.5}$$

Sous cette forme, Kottwitz montre que sa construction s'étend au cas général : pour $\gamma_0$ semi–simple, et $\gamma$ satisfaisant aux conditions précédentes, on définit $\mathrm{obs}(\gamma) \in \pi_0(Z(\hat{I}_0)^\Gamma)^D = \mathfrak{K}(I_0/F)^D$ ; $\hat{I}_0$ est maintenant le **groupe dual** de $I_0$ au sens de Langlands ($I_0$ est un groupe réductif), que l'on n'a pas défini ici : voir Borel [1]. Le lemme 3.2 est vrai sous ces hypothèses.

Revenons à l'expression (3.1), dont nous considérons un terme régulier :

$$\sum_{\substack{\gamma \in G(F) \\ \gamma \underset{st}{\sim} \gamma_0}} \tau(G_\gamma) O_\gamma(f) . \tag{3.6}$$

Si $\gamma$ est semi–simple régulier dans $G(F)$, $F$ local ou global, on vérifie aisément (exercice !) que l'ensemble des classes de conjugaison stable de $\gamma$ modulo conjugaison s'identifie à

(3.7) $\mathfrak{D}(I/F) = \mathrm{Ker}(H^1(F,I) \longrightarrow H^1(F,G))$,

$I$ étant le centralisateur de $\gamma$: si $\gamma' = x\gamma x^{-1}$, $\gamma' \in G(F)$, $x \in G(\bar{F})$, $\sigma \in \Gamma$, on a $\sigma(x)^{-1}x = c_\sigma \in I(\bar{F})$ et $(c_\sigma)$ définit un 1–cocycle de $\Gamma$ dans $I$.

Dans l'expression (3.6), on voit alors que le nombre de termes $G(\mathbb{A})$–conjugués à un élément fixé $\gamma \in G(F)$ est égal à

$$|\mathrm{Ker}(\text{Ш}(I) \longrightarrow \text{Ш}(G))|$$

le groupe Ш étant défini comme dans le §1 ; d'après le principe de Hasse, il est donc égal à $|\text{Ш}(I)|$ ; d'après un résultat d'Ono [17],

$$\tau(I) = |H^1(F,X^*I)|\,|\text{Ш}(I)|^{-1};$$

ceci n'est autre que le Thm. 1.2, car Pic $I = H^1(F,\hat{I})$ : cf. Sansuc [19, Lemme 6.9]) et, puisque $\mathfrak{K}(I_0/F) = \pi_0(\hat{I}_0{}^\Gamma) = H^1(F,X^*I_0)^D$ ne dépend que du groupe dual $\hat{I}_0$, ces objets sont isomorphes pour tous les groupes $I = I_\gamma$ avec $\gamma$ stablement conjugué à $\gamma_0$ : les centralisateurs de deux éléments stablement conjugués sont, on le vérifie aisément, forme intérieure l'un de l'autre ; s'il s'agit de tores, ils sont isomorphes. Finalement, on réécrit (3.6) comme

$$(3.7) \qquad \sum_{\substack{\gamma \in G(\mathbb{A}) \\ \gamma \underset{st}{\sim} \gamma_0 \\ \gamma \bmod G(\mathbb{A}) \\ \gamma \text{ venant de } G(F)}} |\mathfrak{K}(I_0/F)|\, O_\gamma(f)$$

où $\gamma \underset{st}{\sim} \gamma_0$ veut maintenant dire que $\gamma_v$ est stablement conjugué à $\psi(\gamma_0)$ pour tout $v$.

Notons maintenant que (3.7) a un sens même si l'on ne suppose pas que $\gamma \in G(\mathbb{A})$ a un représentant dans $G(F)$. D'après le §3.2, obs $\gamma \in \mathfrak{K}(I_0/F)^D$ est alors non trivial. Pour **tout** élément régulier $\gamma_0 \in E_0^*$, on peut donc considérer

$$(3.8) \qquad \sum_{\substack{\gamma \in G(\mathbb{A}) \\ \gamma \underset{st}{\sim} \gamma_0 \\ \gamma \bmod G(\mathbb{A})}} \ \sum_{\kappa \in K(I_0/F)} <\kappa, \text{obs } \gamma> O_\gamma(f)\,.$$

Le terme associé à $\gamma$ est égal à celui de (3.7) si $\gamma$ est associé à un élément de $G(F)$, à 0 sinon – analyse de Fourier sur le groupe abélien $K(I_0/F)$ ! On vérifie [9] que la même expression reste correcte pour les termes non–réguliers (*), et l'on obtient enfin

$$(3.9)\qquad B = \sum_{\gamma_0 \in E_0^*} \sum_{\substack{\gamma \underset{st}{\sim} \gamma_0 \\ \gamma \bmod G(\mathbb{A})}} \sum_{\kappa \in K(I_0/F)} <\kappa,\text{obs }\gamma> O_\gamma(f)\ .$$

On fait subir à cette formule une dernière transformation. Kottwitz a défini dans [6] des signes $e(I) = \pm 1$ associés à tout groupe réductif $I$ sur un corps local ; ils interviennent, on le verra, dans l'étude des intégrales orbitales. Ils vérifient une formule du produit : si $I/F$ est global, $\prod_v e(I_v) = 1$ .

On ne change donc rien en remplaçant (3.9) par

$$(3.10)\qquad B = \sum_{\gamma_0 \in E_0^*} \sum_{\gamma \underset{st}{\sim} \gamma_0} \sum_{\kappa} e(\gamma) <\text{obs }\gamma,\kappa> O_\gamma(f)\ ,$$

où l'on a posé $e(\gamma) = \prod_v e(G_{v,\gamma})$. Enfin, Kottwitz a démontré dans [8] des résultats de finitude d'où il appert que (3.10) n'a qu'un nombre fini de termes non nuls dès que la ramification de $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ – le sous–groupe compact–ouvert $K$ de $G(\mathbb{A})$ fixant $f$ – et le support de $f$ sont fixés. Cela permettra d'intervertir les sommations.

**4. Comparaison d'intégrales orbitales.**

On va maintenant comparer l'expression (3.10) de $B$ à son analogue pour $G_0$ . On doit pour cela pouvoir identifier les intégrales orbitales (stables, cf. § 5) de certaines fonctions sur $G_v$ et $G_{0,v}$ pour $v \in S$.

Pour simplifier les notations, écrivons dorénavant $G$, $G_0$ plutôt que $G_v$, $G_{0,v}$ : ce sont des groupes sur le corps $F$, que nous supposerons $p$–adique. Soit $\gamma \in G$ stablement conjugué à $\psi(\gamma_0)$, $\gamma_0 \in G_0$. Puisque les groupes $G_\gamma = I$, $(G_0)_{\gamma_0} = I_0$ sont formes intérieures l'un de l'autre, on vérifie aisément qu'une $F$–forme différentielle invariante, de degré maximal, sur $I$ en définit une sur $I_0$. Il en est de même, bien sûr, pour $G$ et $G_0$; enfin, revenant aux groupes

(*) Le lecteur méfiant, qui serait surpris de la disparition des nombres de Tamagawa $\tau(I_\gamma)$ entre les formules (3.1) et (3.9) vérifiera bien sûr ([ , p. 394]) que l'on doit ici utiliser la conjecture de Weil – on le peut par récurrence – dans les centralisateurs $I_\gamma$ .

globaux, si deux formes $F$–rationnelles sur $G$ et $G_0$ sont ainsi associées, il en est de même pour leurs composantes locales. Nous dirons que les mesures de Haar déduites de deux formes ainsi associées sont **associées** : c'est donc vrai des composantes locales de deux mesures de Tamagawa.

Si $G$ est un groupe réductif $p$–adique de centre anisotrope, Serre [20] a défini la **mesure d'Euler–Poincaré** $dg_{\mathrm{EP}}$ sur $G$ : elle est caractérisée par le fait que, pour $\Lambda \subset G$ un sous–groupe discret, cocompact, sans torsion, la mesure de $\Lambda \setminus G$ est égale à la caractéristique d'Euler–Poincaré de $H^{\cdot}(\Lambda,\mathbb{Q})$. Elle peut être positive ou négative; elle n'est pas nulle. La comparaison d'intégrales orbitales se fait en deux étapes. Rappelons que nous supposons $G$ semi–simple et simplement connexe sur $F$.

THEOREME 4.1. ***Il existe une** <u>fonction d'Euler-Poincaré</u>* $f_{\mathrm{EP}} \in C_c^{\infty}(G(F))$ ***telle que***

(1) ***Les intégrales orbitales de*** $f_{\mathrm{EP}}$ ***s'annulent aux éléments non elliptiques de*** $G(F)$.

(2) ***Si*** $\gamma \in G(F)$ ***est elliptique, de centralisateur*** $I(F)$,

$$O_\gamma(f_{\mathrm{EP}}; dg_{\mathrm{EP}}; di_{\mathrm{EP}}) = 1.$$

Kottwitz, en fait, construit explicitement la fonction $f_{\mathrm{EP}}$, et démontre ses propriétés, à l'aide d'arguments cohomologiques dans l'immeuble de Tits de $G(F)$. L'existence d'une fonction $f_{\mathrm{EP}}$ ayant les intégrales orbitales désirés aux éléments **semi–simples réguliers** de $G(F)$ était bien connue des experts ("pseudo–coefficients de la représentation de Steinberg"); le fait nouveau est le calcul de **toutes** ses intégrales orbitales.

On connaît maintenant les intégrales orbitales de $f_{\mathrm{EP}}$, mais pour des mesures qui ne sont pas les mesures de Tamagawa locales. On doit donc relier les mesures d'Euler–Poincaré à celles–ci dans le cas de formes intérieures. C'est l'objet du théorème suivant :

THEOREME 4.2. ***Soit*** $G$, $G_0$ ***deux groupes (semi-simples, simplement connexes) forme intérieure l'un de l'autre sur*** $F$, $dg$, $dg_0$ ***des mesures associées,*** $dg_{\mathrm{EP}}$, $dg_{0,\mathrm{EP}}$ ***les mesures d'Euler-Poincaré. Alors***

$$e(G)\,\frac{dg}{dg_{\mathrm{EP}}} = e(G_0)\,\frac{dg_0}{dg_{0,\mathrm{EP}}}.$$

Les signes $e(G)$ sont ceux introduits à la fin du § 3; il y a un énoncé analogue, que nous ne détaillerons pas, dans le cas réel. On renvoie à [9, Thm 1] pour cet énoncé et pour la démonstration.

**5. Fin de la démonstration.**

Reprenons l'expression (3.10) de la partie non centrale de la formule des traces pour $G$, où l'on a échangé les sommations :

(5.1)
$$B = \sum_{\gamma_0 \in E_0^*} \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}(I_0)} \sum_{\substack{\gamma \widetilde{\approx}_{st} \gamma_0 \\ \gamma \in G(\mathbb{A})}} e(\gamma)\langle \text{obs } \gamma, \kappa \rangle O_\gamma(f).$$

Rappelons qu'on a fixé un ensemble $S$ de "mauvaises places", contenant une place $v_1$ telle que $G_{v_1} \cong f_{0,v_1}$ est un coefficient supercuspidal. Si $v \in S - \{v_1\}$ est une place finie, on prend pour composantes $f_v$ et $f_{0,v}$ des fonctions $f$ et $f_0$ les fonctions d'Euler–Poincaré du § 4. Les conditions (i) – (ii) du Théorème 2.6 sont donc satisfaites. On admettra qu'il est aussi possible de choisir, aux places archimédiennes, des fonctions sur $G$ et $G_0$ ayant les propriétés de comparaison nécessaires : cela résulte des travaux de Harish–Chandra, Shelstad, Delorme et de l'auteur de ce rapport (cf. [9, § 4]).

Considérons un terme de (5.1) avec $\kappa \neq 1$ (un terme "instable"). Montrons que

(5.2)
$$\sum_{\substack{\gamma \widetilde{\approx}_{st} \gamma_0 \\ \gamma \in G(\mathbb{A})}} e(\gamma)\langle \text{obs } \gamma, \kappa \rangle O_\gamma(f) = 0.$$

Cette somme est non vide seulement s'il existe $\delta \in G(\mathbb{A})$ tel que $\delta \widetilde{\approx}_{st} \delta_0$ (conjugaison stable locale). Nous le supposons donc. Supposons de plus $\delta_0$ **régulier**. Puisque la condition sur $\gamma$ est locale, on vérifie que (5.2) se réécrit comme un produit :

(5.3)
$$\langle \text{obs } \delta, \kappa \rangle \prod_v O_{\delta_v}^{\kappa_v}(f_v) \qquad \text{où}$$

(i) $\kappa_v \in \mathfrak{K}(I_0/F_v) = \pi_0(\hat{I}_0^{\Gamma_v})$ est l'image de $\kappa \in K(I_0/F)$

(ii) $O_{\delta_v}^{\kappa_v}$ est donnée, au moins dans le cas $p$–adique où $H^1(F_v, G) = \{1\}$, par

(5.4)
$$O_{\delta_v}^{\kappa_v}(f_v) = \sum_{x \in \mathscr{D}(I_0/F_v)} \langle \kappa_v, x \rangle e(x\delta_v) O_{x\delta_v}(f_v).$$

On rappelle (§ 3.3) que $\mathscr{D}(I_0/F_v) \cong H^1(F_v,I_0)$ paramètre la conjugaison stable, modulo conjugaison, dans l'orbite de $\delta_v$; il est dual à $\mathfrak{K}(I_0/F_v)$; on note $x\delta_v$ le transformé de $\delta_v$ par $x \in \mathscr{D}(I_0/F_v)$.

Soit alors $v$ une place finie de $S-\{v_1\}$ : $f_v$ est une fonction d'Euler–Poincaré; ses intégrales orbitales sont nulles si $\delta_v$ n'est pas elliptique; s'il l'est, on vérifie que la restriction $\mathfrak{K}(I_0/F) \longrightarrow \mathfrak{K}(I_0/F_v)$ est injective, et par ailleurs toutes les intégrales orbitales de (5.4), prises pour les mesures de Tamagawa, sont égales (Théorèmes 4.1 et 4.2). Donc (5.4) s'annulle.

Les termes non réguliers se traitent de façon similaire. On a donc montré :

(5.5)
$$\begin{aligned} B &= \sum_{\gamma \in E_0^*} \sum_{\gamma \sim_{st} \gamma_0} e(\gamma)\, O_\gamma(f) \\ &= \sum_\gamma SO_\gamma(f), \end{aligned}$$

où $\gamma$ parcourt un ensemble de représentants des classes de conjugaison stable de $G(\mathbb{A})$ provenant de $E_0^*$, et où l'on a posé :

(5.6)
$$SO_\gamma(f) = \sum_{\gamma'} e(I_{\gamma'})\, O_{\gamma'}(f),$$

$\gamma'$ parcourant l'ensemble des classes de conjugaison dans la classe de conjugaison stable (localement partout) de $\gamma$. Le terme analogue pour $G_0$ est

(5.7)
$$B_0 = \sum_{\gamma \in E_0^*} SO_{\gamma_0}(f_0).$$

A l'aide des Théorèmes 4.1 et 4.2, on montre alors que (pour les mesures de Tamagawa) $SO_\gamma(f) = SO_{\gamma_0}(f_0)$ si $\gamma \in G(\mathbb{A})$ provient de $\gamma_0 \in E_0^*$, et, en particulier, si $\gamma = 1$, $\gamma_0 = 1$ : dans ce cas, l'intégrale orbitale stable n'est autre que $f(1) = f_0(1)$; si $\gamma_0 \in E_0^*$ n'est stablement conjugé à aucun élément de $G(\mathbb{A})$ – une condition locale – $SO_{\gamma_0}(f) = 0$. On a donc $B = B_0$. On en déduit enfin, les fonctions $f$ et $f_0$ étant fixées (§ 2.3) de sorte que $f(\zeta) = f_0(\zeta) = 0$ si $\zeta \in Z(F) = Z_0(F)$ est différent de 1 :

$$(\tau(G)-\tau(G_0))f(1) = (\tau(G)-\tau(G_0))f(1) = \sum_\pi \operatorname{trace} \pi(f) - \sum_{\pi_0} \operatorname{trace} \pi_0(f_0),$$

les sommes du membre de droite portant sur une décomposition complète de $L^2_{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ et $L^2_{\text{cusp}}(G_0(F)\backslash G_0(\mathbb{A}))$ en irréductibles. L'argument donné à la fin du § 2.3 (cf. [9, § 4]) montre alors que $\tau(G) = \tau(G_0)$, ce qui démontre le Théorème 1.1.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] A. Borel.– *Automorphic L-functions, in* ***Automorphic Forms, Representations and L-functions***, A. Borel and W. Casselman eds., Proc. Symp. Pure Math. **33** (II), AMS, Providence, 1979.

[2] P. Deligne, D. Kazhdan, M.–F. Vignéras.– *Représentations des algèbres centrales simples p-adiques, in* ***Représentations des Groupes Réductifs sur un Corps Local***, Hermann, Paris, 1984, 33–117.

[3] P. Gérardin.– *Construction de séries discrètes p-adiques*, Springer LN 462, Berlin, 1975.

[4] Harish Chandra.– *Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups*, Queen's Papers in Pure Appl. Math. **48** (1978), 281–347.

[5] H. Jacquet, R.P. Langlands.– ***Automorphic Forms on*** $GL(2)$, Springer LN 114, 1970.

[6] R. Kottwitz.– *Sign Changes in Harmonic analysis on Reductive Groups*, Transactions AMS **278** (1983), 289–297.

[7] ————.– *Stable Trace Formula : Cuspidal Tempered Terms*, Duke Math. J. **51** (1984), 611–650.

[8] ————.– *Stable Trace Formula : Elliptic Singular Terms*, Math. Ann. 275 (1986), 365–399.

[9] ————.– *Tamagawa Numbers*, Ann. of Math. **127** (1988), 629–646.

[10] J.–P. Labesse.– *La formule des traces d'Arthur-Selberg*, Séminaire Bourbaki, 37ème année, n° 636, Astérisque 133–134 (1986).

[11] ——————.– *L-indistinguishable representations and the trace formula for* $SL(2)$, in Lie groups and their representations, Proc. of the Budapest Conference, J. Wiley, 1975.

[12] ——————, R.P. Langlands.– *L-indistinguishability for* $SL(2)$, Canad. J. Math. **31** (1979), 726–785.

[13] K.F. Lai.– *Tamagawa numbers of reductive algebraic groups*, Compos. Math. **41** (1980), 153–188.

[14] R.P. Langlands.– *The volume of the fundamental domain for some arithmetic subgroups of Chevalley groups, in* ***Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups***, Proc. Symp. Pure Math. 9, 1966, 143–148.

[15] ——————.– *Les Débuts d'une formule des traces stables,* Publ. Math. Univ. Paris 7, Paris, 1983.

[16] ——————.– *Eisenstein Series, the Trace Formula, and the Modern Theory of Automorphic Forms,* Proc. Selberg Colloquium, à paraître.

[17] T. Ono.– *On Tamagawa Numbers, in* ***Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups***, Proc. Symp. Pure Math. **9** (1966), 122–132.

[18] J. Rogawski.– *Representations of* $GL(n)$ *and division algebras over a* $p$*-adic field,* Duke Math. J. **50** (1983), 161–169.

[19] J.–J. Sansuc.– *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres,* J. de Crelle **327** (1981), 12–80.

[20] J.–P. Serre.– *Cohomologie des groupes discrets, in* ***Prospects in Math.***, Ann. of Math. Studies, 70, Princeton U.P., 1971.

[21] M.–F. Vignéras.– *Caractérisation des intégrales orbitales sur un groupe réductif p-adique*, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sec. IA, **28** (1981), 945–962.

**Addendum**

Après l'exposé oral, J.–J. Sansuc et J.–L. Colliot–Thélène m'ont informé que V.I. Tchernousov avait démontré le "principe de Hasse pour $E_8$" :

[22] V.I. Tchernousov.– *Sur le principe de Hasse pour les groupes de type* $E_8$ (en russe), à paraître.

J'ai utilisé une rédaction en anglais de la démonstration par T.A. Springer ; enfin, la validité générale du principe de Hasse, à partir du travail de Tchernousov, résulte de l'article classique de Harder :

[23] T.A. Springer.– *The Hasse principle for groups of type* $E_8$ (after Cernousov), preprint.

[24] G. Harder.– *Ueber die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizengruppen* I, Math. Z. **90** (1965) 404–428 ; II **ibid, 92** (1966), 396–415.

Laurent CLOZEL
Département de Mathématiques, Bât. 425
Unité Associée n° 752 du CNRS
Université de Paris–Sud
91405 ORSAY CEDEX