Astérisque

CHRISTIAN KASSEL

Le résidu non commutatif

Astérisque, tome 177-178 (1989), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 708, p. 199-229
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1988-1989__31__199_0>

Séminaire BOURBAKI
41ème année, 1988-89, n° 708

Mars 1989

LE RÉSIDU NON COMMUTATIF
[d'après M. Wodzicki]

par Christian KASSEL

Soit X une variété de classe C^∞, compacte et sans bord. A la suite de travaux sur les fonctions zêta des opérateurs elliptiques, M. Wodzicki définit dans sa thèse [24] le ***résidu non commutatif*** d'un opérateur pseudo-différentiel (classique) A opérant sur les sections d'un fibré au-dessus de X comme le résidu en $s = 0$ de la trace de l'opérateur $A\Delta^{-s}$:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{res}(A) = 2 \operatorname{Res}_{s=0} \operatorname{Tr}(A\Delta^{-s})$$

où Δ est un laplacien de X. Il montre que ce résidu non commutatif est une *trace* sur l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels :

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{res}(AB) = \operatorname{res}(BA) .$$

C'est même l'unique trace (à constante multiplicative près) si X est connexe de dimension > 1. Alors que la formule (2) se déduit analytiquement de (1) (voir 1.3), l'unicité de la trace fait, elle, appel à la géométrie et, plus précisément, à celle des cônes symplectiques. Guillemin [14] avait déjà utilisé cette géométrie pour donner une démonstration "soft" de la formule de Weyl sur la distribution asymptotique des valeurs propres, par opposition aux démonstrations antérieures fondées sur l'analyse "hard" (ce sont les termes mêmes de Guillemin). L'utilisation des cônes symplectiques donne un caractère essentiellement algébrique aux constructions et aux démonstrations de Wodzicki, dans l'esprit de la "géométrie différentielle non commutative" de Connes [7]. Ce rapprochement n'est pas fortuit puisque, comme nous le verrons au § 5, le résidu a des analogues supérieurs dans l'homologie cyclique de l'algèbre des symboles.

La géométrie des cônes symplectiques permet également à Wodzicki de donner une forme locale du résidu non commutatif, c'est-à-dire de construire sur X une densité $\operatorname{res}_x(A)$ telle que :

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{res}(A) = \int_X \operatorname{res}_x(A) .$$

La propriété de trace (2) a alors la formulation locale suivante : il existe $\rho(A,B)$ tel que

(4) $$\mathrm{res}_X[A,B] = d\rho(A,B) .$$

La densité $\rho(A,B)$ est décrite explicitement au § 4 à l'aide de ce que Wodzicki appelle le morphisme de résidu symplectique (décrit au § 3) et d'une déformation du crochet de Poisson faisant apparaître la série formelle qui définit le genre multiplicatif A . Par ailleurs, $\rho(A,B)$ est un 1-cocycle cyclique au sens de Connes.

Pour finir, nous présentons au § 6 quelques applications (également dues à Wodzicki). L'une d'elles est une formule pour "l'anomalie multiplicative" des déterminants régularisés.

Je remercie chaleureusement Mariusz Wodzicki pour les échanges que nous avons eus sur le résidu non commutatif comme sur d'autres sujets. Je remercie également Jean-Benoît Bost pour ses commentaires.

1. DÉFINITIONS ANALYTIQUES DU RÉSIDU NON COMMUTATIF

On fixe une variété X de classe C^∞ , de dimension pure n , compacte et sans bord, ainsi qu'un fibré vectoriel complexe E non nul au-dessus de X .

1.1. Rappels (voir [19] [20])

Soit P un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre $\mathrm{ord}\, P > 0$, opérant sur les sections C^∞ de E . On suppose que le spectre $\mathrm{Spec}(P)$ est discret et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{Spec}(P) \cap \{re^{i\varphi}, r > 0 \text{ et } |\varphi - \pi| < \varepsilon\} = \emptyset$. Seeley [19] définit les puissances complexes de P par l'intégrale curviligne

(1) $$P^s = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma \lambda^s (P - \lambda)^{-1} d\lambda$$

où Γ est un chemin convenable le long de la coupure $\{\mathrm{Arg}(\lambda) = \pi\}$ et λ^s est défini par

$$\lambda^s = |\lambda|^s e^{is\,\mathrm{Arg}(\lambda)}$$

avec $|\mathrm{Arg}(\lambda)| < \pi$. Lorsque $\mathrm{Re}(s) < -n/\mathrm{ord}\, P$, l'opérateur P^s est traçable. On définit alors la *fonction zêta* de P par

(2) $$\zeta(P,s) = \mathrm{Tr}(P^{-s})$$

(Tr désigne la trace des opérateurs). Dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > n/\mathrm{ord}\, P$, la fonction $\zeta(P,s)$ est holomorphe en s et on a :

(3) $$\zeta(P,s) = \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}(P) \\ \lambda \neq 0}} \lambda^{-s} .$$

Rappelons aussi que, plus généralement, en se servant d'une coupure quelconque $\{\mathrm{Arg}(\lambda) = \theta\}$ du plan, on peut définir une fonction zêta $\zeta_\theta(P,s)$ à condition qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{Spec}(P) \cap \{re^{i\varphi}, r > 0 \text{ et } |\varphi - \theta| < \varepsilon\} = \emptyset$.

On montre ensuite, à l'aide d'une bonne "paramétrix à paramètre" pour P, que $\zeta(P,s)$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ tout entier, holomorphe en 0, dont les seules singularités sont des pôles simples aux points $s_j = (n - j)/(\mathrm{ord}\, P)$ $(j \in \mathbf{N} - \{n\})$. Dans *loc. cit.*, Seeley donne une formule locale pour le résidu de la fonction zêta en s_j (voir aussi [20], chap. II).

1.2. On considère, de plus, un opérateur pseudo-différentiel quelconque A opérant sur E. On choisit un opérateur elliptique P comme ci-dessus tel que $\mathrm{ord}\, P > \mathrm{ord}\, A$. La fonction zêta de $P + uA$ est bien définie (u paramètre réel). Dans sa thèse [24], Wodzicki définit alors le *résidu non commutatif* de l'opérateur A par la formule

$$\mathrm{res}(A) = \mathrm{ord}\, P \,.\, \frac{d}{du}\left(\mathrm{Res}_{s=-1}\, \zeta\,(P + uA, s)\right)\Big|_{u=0} \,. \tag{4}$$

En utilisant [19], on montre que le membre de droite de (4) ne dépend pas de l'opérateur elliptique P et que $\mathrm{res}(A)$ est linéaire en A.

1.3. PROPOSITION [24].- *Le résidu non commutatif est une trace* : $\mathrm{res}(AB) = \mathrm{res}(BA)$.

Démonstration.- On suppose d'abord A elliptique et inversible. Alors la proposition résulte de (4) et des égalités

$$\mathrm{Tr}\left((P + u\,AB)^{-s}\right) = \mathrm{Tr}\left(A^{-1}(P + u\,AB)^{-s} A\right) = \mathrm{Tr}\left(\left(A^{-1} PA + u\,BA\right)^{-s}\right).$$

Dans le cas général, on munit X d'une métrique riemannienne, le fibré E d'une connexion et d'une métrique hermitienne, ce qui permet de définir un laplacien Δ. L'opérateur $A(z) = A + z(1 + \Delta)^{\mathrm{ord}\, A/2}$ est inversible si $|z|$ est assez grand. On est ramené au cas particulier précédent, d'où : $\mathrm{res}(A(z)B) = \mathrm{res}(BA(z))$ $(|z| >> 0)$. Comme les deux membres sont de degré 1 en z, l'égalité est encore vraie pour $z = 0$.

On a également la formulation suivante du résidu de Wodzicki :

1.4. THÉORÈME [25] [26].- *L'opérateur* P *satisfaisant les hypothèses de* 1.1, *la fonction* $\mathrm{Tr}(AP^{-s})$ *définie pour* $\mathrm{Re}(s) >> 0$ *admet un prolongement méromorphe à* $\mathbf{C}$ *avec un pôle simple en* 0. *On a* :

$$\mathrm{res}(A) = \mathrm{ord}\, P \,.\, \mathrm{Res}_{s=0}\, \mathrm{Tr}\left(AP^{-s}\right). \tag{5}$$

Ce résidu en 0 a également été considéré par Guillemin [14]. Si T est un opérateur régularisant, alors TP^{-s} est traçable pour tout $s \in \mathbf{C}$ et, par conséquent, $\mathrm{res}(T) = 0$. L'égalité $\mathrm{res}(A + T) = \mathrm{res}(A)$ montre que $\mathrm{res}(A)$ ne dépend que du symbole (total) de A.

1.5. Cas particulier

Prenons $A = P^{-s}$ où s_j est un pôle de $\zeta(P,s)$. On déduit immédiatement de (5) la formule suivante pour le résidu de $\zeta(P,s)$ en s_j :

(6)
$$\mathrm{Res}_{s=s_j} \zeta(P,s) = \frac{\mathrm{res}\left(P^{-s_j}\right)}{\mathrm{ord}(P)}.$$

1.6. Développement du noyau de la chaleur à la Minakshisundaram

On conserve les notations précédentes. On sait que l'opérateur e^{-tP} $(t > 0)$ est régularisant et donc que

(7)
$$\mathrm{Tr}\left(e^{-tP}\right) = \sum e^{-t\lambda} \qquad (\lambda \in \mathrm{Spec}(P)\,,\ \lambda \neq 0)$$

converge pour $t > 0$. La représentation de la fonction zêta comme transformée de Mellin

(8)
$$\zeta(P,s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \mathrm{Tr}\left(\int_0^\infty t^s e^{-tP}\, dt/t\right)$$

permet de montrer que, lorsque $t \downarrow 0$, la fonction $\mathrm{Tr}(e^{-tP})$ admet un développement asymptotique de la forme

(9)
$$\mathrm{Tr}\left(e^{-tP}\right) \quad \alpha_n(P) + \sum_{n \neq j \geq 0} \alpha_j(P)\, t^{-s_j} + \sum_{k \geq 1} \beta_k(P)\, t^k \,\mathrm{Log}\, t \quad (t \downarrow 0)$$

(voir [11] [25]). Notons que les termes logarithmiques disparaissent $(\beta_k = 0)$ lorsque P est un opérateur différentiel. En utilisant les propriétés classiques de la fonction Γ et la formule

(10)
$$\int_0^1 t^s\, t^k (\mathrm{Log}\, t)^l\, dt/t = \frac{(-1)^l\, l\,!}{(s+k)^{l+1}}$$

pour $l \in \mathbf{N}$ et $\mathrm{Re}(s + k) > 0$, on obtient les relations :

(11) $$\alpha_n(P) = \zeta(P,0)$$

(12) $$\alpha_j(P) = \Gamma(s_j)\,\mathrm{Res}_{s=s_j}\,\zeta(P,s) \qquad \text{si } s_j \notin \mathbf{Z} \text{ ou } s_j > 0$$

(13) $$\beta_k(P) = \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\mathrm{Res}_{s=-k}\,\zeta(P,s)\ .$$

Pour être complet, exprimons les coefficients des puissances entières positives de t dans le développement asymptotique (9). Si φ est une fonction méromorphe ayant un pôle simple en p, on désigne par

$$\mathrm{Pf}.\varphi = \lim_{s\to p}\left(\varphi(s) - \frac{\mathrm{Res}_{s=p}\,\varphi(s)}{s-p}\right)$$

sa "partie finie" en p. La formule (10) et le développement

$$\Gamma(s) = \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{1}{s+k} + \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k} - C\right)\right) + O(s+k)$$

de la fonction Γ au voisinage du pôle $s=-k$ (C est la constante d'Euler) donnent :

$$\alpha_j = \frac{(-1)^k}{k!}\left(\mathrm{Pf}.\zeta(P,-k) + \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k} - C\right)\mathrm{Res}_{s=-k}\,\zeta(P,s)\right)$$

lorsque $s_j = -k$ est un entier strictement négatif.

En dérivant $e^{-t(P+uA)}$ par rapport à u, on voit que $\mathrm{Tr}(A\,e^{-tP})$ admet également un développement asymptotique (quand $t \downarrow 0$) avec un terme en $\mathrm{Log}\,t$ dont le coefficient est égal à

$$-\frac{d}{du}\beta_1(P+uA)_{|u=0}\ .$$

Il résulte alors de (4) et de (13) une autre formule pour le résidu non commutatif de A. Nous l'énonçons ainsi.

1.7. THÉORÈME [25].- *Quand* $t \downarrow 0$, $\mathrm{Tr}(A\,e^{-tP})$ *admet un développement asymptotique. Le coefficient du terme en* $\mathrm{Log}\,t$ *de ce développement est égal à* $-\mathrm{res}(A)/\mathrm{ord}(P)$.

1.8. Formule locale

Il résulte des travaux de Seeley [19] (voir aussi Wodzicki [23], § 7) que le résidu $\mathrm{res}(A)$ a une forme locale, c'est-à-dire qu'il existe sur X une densité $\mathrm{res}_x(A)$ redonnant $\mathrm{res}(A)$ par intégration. Localement cette densité est décrite par la formule

$$\operatorname{res}_x(A) = \frac{1}{(2\pi)^n}\left(\int_{|\xi|=1} \operatorname{Tr} a_{-n}(x,\xi)\, |d\xi|\right)|dx| . \tag{14}$$

Ici a_{-n} est la composante de degré $-n = -\dim(X)$ du symbole (total) $a = \sum_i a_i$ de A. Nous donnerons une définition intrinsèque et plus précise de cette densité au § 4.

1.9. Remarques

a) La formule locale (14) montre que $\operatorname{res}(A) = 0$ si $a_{-n} = 0$. C'est le cas, par exemple, si A est un opérateur différentiel, un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre non entier ou si $\operatorname{ord} A < -n$.

b) Lorsque l'ordre de A est exactement égal à $-n = -\dim X$, alors le résidu de A ne dépend que du symbole principal de A. Dans ce cas, il a également été défini par Guillemin [14]. Connes [8] a montré que, sur les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre $-n$, le résidu de Wodzicki coïncide (à une constante de normalisation près) avec une trace construite par Dixmier [9] sur l'idéal L^{1+} des opérateurs compacts T sur $L^2(X,E)$ tels que

$$\sup_{N>1} \frac{1}{\operatorname{Log} N} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(|T|) < \infty . \tag{15}$$

Connes (*loc. cit.*) utilise cette reformulation du résidu non commutatif pour étudier l'analogue de l'action de Yang-Mills en géométrie différentielle non commutative.

2. CALCULS ALGÉBRIQUES EN DIMENSION UN

En dimension un, le résidu non commutatif a été introduit par Adler [1] et Manin [17] pour l'étude de certains systèmes intégrables. Le résidu se définit alors algébriquement à partir d'une algèbre associative munie d'une dérivation.

2.1. Symboles pseudo-différentiels formels

On se donne une algèbre associative unifère A (non nécessairement commutative) sur un corps k de caractéristique nulle ainsi qu'une dérivation D de A. L'algèbre des *opérateurs différentiels formels* $A[\xi]$ de (A,D) est définie comme l'algèbre associative unifère engendrée par A, la variable indépendante ξ et la relation

$$[\xi,a] = \xi a - a\xi = D(a)$$

pour tout $a \in A$. Comme tout élément de $A[\xi]$ s'écrit de manière unique comme un polynôme en

ξ de la forme

$$a = \sum_{i=0}^{N} a_i \xi^i ,$$

on peut identifier l'espace vectoriel sous-jacent à $A[\xi]$ à l'espace vectoriel des polynômes en ξ. Moyennant cette identification, le produit $a \circ b$ de deux éléments a et b de $A[\xi]$ se réécrit à l'aide du produit usuel des polynômes sous la forme

$$a \circ b = \sum_{l \geq 0} \frac{1}{l!} \partial_\xi^l(a)\, \partial_D^l(b) \tag{1}$$

où ∂_ξ et ∂_D sont les dérivations définies par

$$\partial_\xi\left(\sum_i a_i \xi^i\right) = \sum i\, a_i\, \xi^{i-1}$$

et

$$\partial_D\left(\sum_i a_i \xi^i\right) = \sum_i D(a_i)\, \xi^i .$$

On observe que le membre de droite de (1) est encore défini lorsque a et b sont des séries de la forme

$$\sum_{-\infty < i \leq N} a_i \xi^i .$$

De telles expressions seront appelées des *symboles pseudo-différentiels formels*. La formule (1) munit l'espace vectoriel $A((\xi^{-1}))$ de ces symboles d'une structure d'algèbre associative avec $A[\xi]$ comme sous-algèbre. L'intérêt de cette extension de $A[\xi]$ vient de la possibilité d'inverser dans $A((\xi^{-1}))$ les symboles dont le coefficient de plus haut degré est inversible dans A.

2.2. *Exemple*.- Si a est inversible dans A, alors $a\,\xi^N$ est inversible dans $A((\xi^{-1}))$ d'inverse

$$\xi^{-N} a^{-1} = a^{-1} \xi^{-N} + \sum_{l \geq 1} (-1)^l \frac{N(N+1)\ldots(N+l-1)}{l!} D^l(a^{-1})\, \xi^{-N-l} . \tag{2}$$

2.3. Par analogie avec le résidu de Cauchy pour les séries de Laurent usuelles et la formule locale (14) de 1.8, on définit, dans ce contexte algébrique, le résidu non commutatif comme l'application linéaire

$$\mathrm{res} : A((\xi^{-1})) \longrightarrow A/([A,A] + \mathrm{Im}\, D)$$

définie par

(3) $$\operatorname{res}\left(\sum_{-\infty<i\leq N} a_i \xi^i\right) = a_{-1} \mod([A,A] + \operatorname{Im} D).$$

Ce résidu est une trace sur $A((\xi^{-1}))$, ce qui signifie qu'il s'annule sur tous les commutateurs $[a,b] = a \circ b - b \circ a$.

2.4. LEMME.- *Pour tout* $a,b \in A((\xi^{-1}))$, *on a* : $\operatorname{res}[a,b] = 0$.

Démonstration. Vu la formule (1), il suffit de démontrer que, pour tout $a,b \in A((\xi^{-1}))$, on a

(4) $$[a,b] \in \operatorname{Im} \partial_\xi + \operatorname{Im} \partial_D + [A,A]((\xi^{-1})).$$

En effet, le résidu s'annule par définition sur $\operatorname{Im} \partial_D$ et sur $[A,A]((\xi^{-1}))$. Il est également nul sur $\operatorname{Im} \partial_\xi$, car $\partial_\xi a$ n'a pas de coefficient non nul en ξ^{-1}.

Avant de démontrer (4), rappelons que si δ est une dérivation sur une algèbre, on a :

$$a\delta(b) + \delta(a)b = \delta(ab) \equiv 0 \mod \operatorname{Im} \delta.$$

On a donc modulo $(\operatorname{Im} \partial_\xi + \operatorname{Im} \partial_D)$:

$$\begin{aligned} \partial_\xi^l(a)\, \partial_D^l(b) &\equiv -\partial_\xi^{l-1}(a)\, \partial_\xi\left(\partial_D^l(b)\right) \equiv \dots \equiv (-1)^l a\, \partial_\xi^l\left(\partial_D^l(b)\right) \\ &\equiv (-1)^l a\, \partial_D^l\left(\partial_\xi^l(b)\right) \qquad (\partial_\xi \text{ et } \partial_D \text{ commutent}) \\ &\equiv \partial_D^l(a)\, \partial_\xi^l(b). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a modulo $(\operatorname{Im} \partial_\xi + \operatorname{Im} \partial_D + [A,A]((\xi^{-1})))$:

$$\partial_\xi^l(a)\, \partial_D^l(b) - \partial_\xi^l(b)\, \partial_D^l(a) \equiv 0,$$

ce qui, avec (1), établit (4).

2.5. *Remarques*.- a) Drinfeld et Sokolov [10], lemme 2.6, construisent sur $A((\xi^{-1}))$ une forme bilinéaire g, continue pour la topologie (ξ^{-1})-adique, à valeurs dans A, telle que, pour tout $P,Q \in A((\xi^{-1}))$, on a :

(5) $$\operatorname{res}[P,Q] \equiv Dg(P,Q) \mod [A,A].$$

La forme g est déterminée par

$$g\left(a\xi^{l}, b\xi^{m}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } l+m<0 \\ \dfrac{l(l-1)\ldots(-m)}{(l+m+1)!} \displaystyle\sum_{i=0}^{l+m} (-1)^{i} D^{i}(a)\, D^{l+m-i}(b) & \text{si } l+m \geq 0\,. \end{cases} \tag{6}$$

b) Il existe une extension du résidu (3) aux superalgèbres attachées aux super-courbes de dimension $1|1$ (voir Manin-Radul [18]).

c) L'algèbre des symboles pseudo-différentiels et le résidu non commutatif (tels que définis dans ce paragraphe) ont également été utilisés par Beilinson-Manin-Shechtmann [3] pour construire des faisceaux d'algèbres de Virasoro sur des courbes algébriques. Le but de cette construction est de relier deux approches mathématiques très différentes de la théorie des cordes, l'approche algébrique fondée sur les représentations de certaines algèbres de Lie de dimension infinie et l'approche géométrique par les surfaces de Riemann.

2.6. Application

Soit C l'algèbre locale en un point d'une courbe algébrique affine lisse au-dessus d'un corps de caractéristique nulle. Les dérivations de C forment un C-module libre de rang un. On choisit un générateur D de ce module. Par universalité des différentielles de Kähler, on peut associer à D son produit intérieur $i_D : \Omega_C \to C$, uniquement défini par $i_D(a_0 da_1) = a_0 D(a_1)$, qui, dans ce cas, est un isomorphisme de C-modules. On identifie, à l'aide de i_D, C/DC à Ω^1_C/dC. Ce dernier espace est isomorphe au groupe $H^1_{DR}(C)$ de cohomologie de Rham de C. Soit A l'algèbre des matrices $A = M_n(C)$. La dérivation D s'étend naturellement en une dérivation de A. Le résidu non commutatif fournit dans ce cas un homomorphisme surjectif défini sur l'homologie cyclique de $A((\xi^{-1}))$:

$$\text{res} : HC_0(A((\xi^{-1}))) = A((\xi^{-1})) / \left[A((\xi^{-1})), A((\xi^{-1}))\right] \longrightarrow H^1_{DR}(C)\,.$$

Nous verrons plus loin comment étendre ce résidu ainsi que la formule (5) en dimension > 1.

3. LE RÉSIDU SYMPLECTIQUE

Dans ce paragraphe, nous mettons en place les outils géométriques qui nous permettront au § 4 de donner une définition locale intrinsèque du résidu de Wodzicki.

Le cadre est ici celui des cônes symplectiques, déjà utilisé par Guillemin [14] pour définir le résidu symplectique. Wodzicki [26] construit un morphisme de complexes grâce auquel la propriété de trace du résidu de Guillemin devient évidente.

3.1. Une caractérisation des variétés symplectiques

Le complexe de de Rham des formes différentielles sur une variété Y de classe C^∞ peut se voir de deux manières différentes. On a tout d'abord le complexe de cochaînes

$$\Omega^*(Y) = \Gamma(Y, \Lambda^* \Omega^1(Y)), d$$

qui est un sous-complexe du complexe de Chevalley-Eilenberg des cochaînes de l'algèbre de Lie $\mathcal{T}Y$ des champs de vecteurs à coefficients dans le $\mathcal{T}Y$-module à gauche $C^\infty(Y)$. On a également un complexe de chaînes, qu'on peut appeler le complexe de Spencer de Y, à savoir

$$S_*(Y) = \Gamma(Y, \Omega^{vol}(Y) \otimes \Lambda^* \mathcal{T}Y), \partial$$

qui est un quotient du complexe des chaînes de $\mathcal{T}Y$ à coefficients dans le $\mathcal{T}X$-module à droite $\Omega^{vol}(Y)$ des formes de degré maximal.

Le complexe $S\ (Y)$ est canoniquement isomorphe à $\Omega^*(Y)$ *via* le morphisme de complexes

$$R : \nu \otimes \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_q \longmapsto i_{\eta_1} \ldots i_{\eta_q} \nu$$

où ν est une forme volume et $\eta_1, \ldots, \eta_q$ sont des champs de vecteurs. Selon l'usage, i_η désigne le produit intérieur associé à η.

Les considérations suivantes sont dues à Wodzicki [28], § 27. Le choix d'une forme volume ν permet d'identifier $C^\infty(Y)$ à $\Omega^{vol}(Y)$ par $f \to f\nu$. On identifie également $\mathcal{T}X$ à $\Omega^1(Y)$ par

$$\eta \longmapsto \omega(-, \eta)$$

où ω est une différentielle quadratique non dégénérée. On obtient ainsi un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués :

$$I(\omega, \nu) : \Omega^*(Y) \longrightarrow S_*(Y).$$

En transportant la différentielle ∂ de $S\ (Y)$ sur $\Omega^*(Y)$ *via* $I(\omega,\nu)$, on obtient sur $\Omega^*(Y)$ une différentielle de degré -1 donnée par

$$\partial^{(\omega,\nu)} = I(\omega,\nu)^{-1} \circ \partial \circ I(\omega,\nu).$$

Sous les hypothèses précédentes, on a la caractérisation suivante des variétés symplectiques.

3.2. LEMME.- *Les différentielles* d *et* $\partial^{(\omega,\nu)}$ *anticommutent sur* $\Omega^*(Y)$

$$\partial^{(\omega,v)} \circ d + d \circ \partial^{(\omega,v)} = 0$$

si et seulement si ω *est une* 2*-forme symplectique, i.e. antisymétrique et fermée, et* v *est proportionnelle à* $\omega^{\dim Y/2}$.

Dans le cas d'une variété symplectique, la différentielle $\partial^{(\omega,v)}$ est connue depuis longtemps (voir Ehresmann-Libermann [12] ou Libermann [15]).

3.3. Nous appliquons ce qui précède au cas où Y est munie d'une 2-forme symplectique ω. On sait que, dans ce cas, $C^\infty(Y)$ est une algèbre de Poisson dont le crochet de Poisson est donné par

$$\{f,g\} = \omega(H_f, H_g)$$

où H_f est le champ hamiltonien défini par

$$i_f \omega = -df.$$

Pour simplifier, on a posé : $i_f = i_{H_f}$. On sait aussi que

$$H_{\{f,g\}} = [H_f, H_g],$$

ce qui signifie que $f \to H_f$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie de l'algèbre $C^\infty(Y)$ munie du crochet de Poisson dans $\mathcal{T}Y$. Posons $\dim(Y) = 2n$. Le choix de la forme volume $v = \omega^n$ détermine alors le morphisme de complexes

$$C_*(C^\infty(Y), \mathrm{ad}) \xrightarrow{H} C_*(\mathcal{T}Y, \Omega^{\mathrm{vol}}(Y)).$$

Ici $C_*(\mathbf{g},M)$ désigne le complexe de chaînes standard de l'algèbre de Lie $\mathbf{g}$ opérant à droite sur le $\mathbf{g}$-module M. La représentation adjointe est notée ad. En composant le morphisme H avec la projection canonique

$$C_*(\mathcal{T}Y, \Omega^{\mathrm{vol}}(Y)) = \Omega^{\mathrm{vol}}(Y) \otimes \Lambda^* \mathcal{T}Y \to \Omega^{\mathrm{vol}}(Y) \otimes_{C^\infty(Y)} \Lambda^*_{C^\infty(Y)} \mathcal{T}T$$

obtenue par $C^\infty(Y)$-linéarisation et avec le morphisme R de 3.1, on a pour toute variété symplectique (Y,ω) un morphisme canonique de complexes

$$\mathrm{Tr} : C_*(C^\infty(Y), \mathrm{ad}) \to \Omega_*(Y)$$

où on a posé : $\Omega_q(Y) = \Omega^{2n-q}(Y)$.

3.4. Cône symplectique

Nous supposons de plus que (Y,ω) est un cône symplectique de base Z, *i.e.* qu'il existe une fibration principale $\pi : Y \to Z$ de groupe structural le groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ des réels positifs tel que, pour tout $t > 0$, on a :

$$\rho_t^*(\omega) = t\omega .$$

Ici ρ désigne l'action de $\mathbf{R}_+^*$ sur Y. On note ξ le champ d'Euler

$$\xi = \rho_*\left(t\frac{d}{dt}\right)$$

qui engendre le flot $\varphi_t = \rho_{\exp(t)}$. Introduisons également la 1-forme canonique $\alpha = i_\xi\omega$ et $\mu = \alpha_\wedge(d\alpha)^{n-1}$. On vérifie aisément (voir [14] [26]) les relations

(1) $$\rho_t(\alpha) = t\alpha \quad , \quad \rho_t(\mu) = t^n \mu$$

et

(2) $$L_\xi\alpha = \alpha \ , \ L_\xi\omega = \omega = d\alpha \ \text{et} \ L_\xi\mu = n\mu .$$

On définit maintenant l'*algèbre de Poisson graduée* $P(Y)$ de Y comme la sous-algèbre de Poisson de $C^\infty(Y)$ définie par

$$P(Y) = \bigoplus_{l\in\mathbf{Z}} P^l(Y)$$

où $P^l(Y) = \{f \in C^\infty(Y) \mid L_\xi f = lf\}$. Un élément de $P^l(Y)$ sera dit homogène de degré $|f| = l$.

La restriction du morphisme de complexes Tr (défini en 3.3) au sous-complexe $C_*(P(Y),ad)$ envoie celui-ci dans le sous-complexe

$$\Omega_{**}(Y) = \bigoplus_{l\in\mathbf{Z}} \Omega_{*l}(Y)$$

des formes différentielles sur Y, homogènes le long des fibres. On a posé

$$\Omega_{*l}(Y) = \{\theta \in \Omega_*(Y) \mid L_\xi(\theta) = l\theta\} .$$

Nous complexifions maintenant le cône Y en posant

$$Y^c = Y \times_{\mathbf{R}_+^*} \mathbf{C}^* .$$

L'espace Y^c est un fibré principal au-dessus de Z de groupe structural $\mathbf{C}^*$. De ce fait, $\Omega_{**}(Y)$ se plonge dans le complexe $\Omega_*^{hol}(Y^c)$ des formes différentielles sur Y^c, holomorphes le long des fibres. En appliquant le résidu de Cauchy à chaque fibre, on obtient un morphisme de complexes

$$C : \Omega_*^{hol}(Y^c) \to \Omega_*(Z)$$

où $\Omega_q(Z) = \Omega^{2n-1-q}(Z)$.

Avec Wodzicki [26], nous définissons maintenant le *morphisme de résidu symplectique* associé au cône symplectique Y comme le composé des morphismes de complexes

$$\mathrm{Res}_* : C_*(P(Y),\mathrm{ad}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \Omega_{**}(Y) \longrightarrow \Omega_*^{hol}(Y^c) \xrightarrow{C} \Omega_*(Z) .$$

3.5. <u>Une formule explicite</u> ([26])

Soit $f_0,\dots,f_q$ des fonctions homogènes de $P(Y)$. Considérons la forme différentielle de degré $2n - q - 1$

(3) $$\beta(f_0,\dots,f_q) = f_0\, i_{f_1} \cdots i_{f_q} \mu ;$$

elle est horizontale, c'est-à-dire annulée par i_ξ. Par ailleurs, on a

(4) $$\rho_\tau^* \beta(f_0,\dots,f_q) = t^{(|f_0|+\dots+|f_q|-q+n)} \beta(f_0,\dots,f_q)$$

et, par conséquent, $\beta(f_0,\dots,f_q)$ est invariante sous l'action de $\mathbf{R}_+^*$ si et seulement si $|f_0| + \dots + |f_q| = q - n$. Si cette dernière relation est satisfaite, il existe sur Z une unique forme différentielle $\mu(f_0,\dots,f_q)$ de degré $2n - q - 1$ telle que

(5) $$\pi^* \mu(f_0,\dots,f_q) = \beta(f_0,\dots,f_q) .$$

On notera que l'expression $\mu(f_0,\dots,f_q)$ est, quand elle est définie, multilinéaire en toutes les variables et antisymétriques en les q dernières.

On peut vérifier que le morphisme de résidu symplectique défini plus haut est donné sur les fonctions homogènes de $P(Y)$ par

(6) $$\mathrm{Res}_q(f_0 \otimes f_1 \wedge \dots \wedge f_q) = \begin{cases} \mu(f_0,f_1,\dots,f_q) & \text{si } |f_0| + |f_1| + \dots + |f_q| = q - n \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

3.6. <u>Le résidu symplectique de Guillemin</u>

La base d'un cône symplectique a une orientation canonique. En utilisant ce qui précède, on peut réécrire le *résidu symplectique* $\mathrm{Res}(f)$ associé par Guillemin [14], § 6 à une fonction homogène f sur Y (telle que le support $\mathrm{supp}(f)$ ait une projection compacte dans Z) sous la forme

(7) $$\mathrm{Res}(f) = \int_Z \mathrm{Res}_0(f) .$$

D'après (6), on a : $\mathrm{Res}(f) = 0$ si $|f| \neq -n$. L'existence du morphisme de résidu symplectique permet de donner une démonstration courte du résultat suivant, démontré partiellement par Guillemin et dans le cas général par Wodzicki.

3.7. PROPOSITION.- *Soit* f *et* $g \in P(Y)$ *tels que* $\pi(\mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(g))$ *soit compact dans* Z . Alors

(8) $$\mathrm{Res}\,\{f,g\} = 0 .$$

Démonstration.- Puisque Res_* est un morphisme de complexes, on a

$$\mathrm{Res}\,\{f,g\} = \int_Z \mathrm{Res}_0(\partial(f \otimes g)) = \int_Z d\,\mathrm{Res}_1(f \otimes g) = 0 .$$

3.8. Structure de l'algèbre de Lie $P(Y)$

Pour terminer ce paragraphe, considérons la structure d'algèbre de Lie de $P(Y)$ donnée par le crochet de Poisson. Dans sa thèse [24] § 13, Wodzicki établit que si Z est compacte et Y est connexe, alors on a :

(9) $$\{P^l(Y),P^m(Y)\} = \begin{cases} P(Y)^{l+m-1} & \text{si } l+m \neq 1-n \\ \mathrm{Ker}(\mathrm{Res}) & \text{si } l+m = 1-n . \end{cases}$$

On en déduit que le résidu symplectique induit un isomorphisme

(10) $$P(Y)/\{P(Y),P(Y)\} \cong \mathbf{C}$$

et que l'algèbre dérivée de $P(Y)$ est parfaite, *i.e.*

$$\{P(Y),P(Y)\} = \{\{P(Y),P(Y)\},\{P(Y),P(Y)\}\} .$$

On comparera ceci aux résultats d'Avez, Lichnérowicz, Diaz-Miranda [2] sur la structure de l'algèbre de Poisson de *toutes* les fonctions C^∞ sur une variété symplectique.

4. LA FORME LOCALE DU RÉSIDU DE WODZICKI

Nous utilisons les constructions géométriques du § 3 pour donner une forme locale intrinsèque du résidu non commutatif. Nous montrons ensuite comment on obtient l'invariant secondaire $\rho(A,B)$ cité au début du texte (voir la formule (4) de l'introduction).

Commençons par préciser ce que nous entendons par opérateur pseudo-différentiel.

4.1. Rappels sur les opérateurs pseudo-différentiels (*cf.* par exemple [20])

On considère la catégorie dont les objets sont des triplets (X,E,F) où X est une variété C^∞ et E et F sont des fibrés vectoriels complexes C^∞ au-dessus de X et les morphismes sont les triplets

$$\varphi = (f,r,s) : (X',E',F') \longrightarrow (X,E,F)$$

tels que

i) $f : X' \to X$ est un plongement ouvert ;

ii) $r \in \mathrm{Hom}(E',f^*E)$ et $s \in \mathrm{Hom}(f^*F,F')$.

Au voisinage de tout point d'une variété X , il existe une "carte locale", c'est-à-dire un morphisme

$$\varphi : (U, U \times \mathbf{C}^k, U \times \mathbf{C}^l) \longrightarrow (X,E,F)$$

où U est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $n = \dim(X)$, $k = \mathrm{rang}(E)$ et $l = \mathrm{rang}(F)$.

Étant donné un morphisme $\varphi : (X,E',F') \to (X,E,F)$, on peut associer à toute application linéaire A de $C_c^\infty(X,E) = \{s \in C^\infty(X,E)$ à support compact$\}$ dans $C^\infty(X,F)$ une unique application linéaire $\varphi^\# A : C_c^\infty(X',E') \to C^\infty(X',F')$ telle que le carré

$$\begin{tikzcd} C_c^\infty(X,E) \arrow[r, "A"] & C^\infty(X,F) \arrow[d, "\varphi^*"] \\ C_c^\infty(X',E') \arrow[u, "\varphi_!"] \arrow[r, "\varphi^\# A"] & C^\infty(X',F') \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

On dit alors qu'une application linéaire $A : C_c^\infty(X,E) \to C^\infty(X,F)$ est un *opérateur pseudo-différentiel* (*classique*) si pour toute carte locale $\varphi : (U, U \times \mathbf{C}^k, U \times \mathbf{C}^l) \to (X,E,F)$, l'opérateur induit $\varphi^\# A$ est de la forme :

$$(\varphi^\# A)(f)(u) = \int_{\mathbf{R}^n_\xi} \left(\int_{\mathbf{R}^n_v} e^{i(u-v)\xi} \alpha(u,\xi) f(v) dv \right) \bar{d}\xi + Tf(u)$$

où $\bar{d}\xi = (2\pi)^{-n}\, d\xi$, $n = \dim(X)$, T est un opérateur régularisant et la fonction $\alpha \in C^\infty(T^*U) \otimes M_{lk}(C)$ admet le développement asymptotique quand $|\xi|$ tend vers l'infini

(2) $$\alpha \sim \sum_{j\in \mathbf{N}} a_{m-j}$$

avec $a_{m-j}(u,t\xi) = t^{m-j}\, a_{m-j}(u,\xi)$ pour $t > 0$. Le nombre complexe $m = \mathrm{ord}(\varphi^\# A)$ est appelé l'*ordre* de $\varphi^\# A$. La somme formelle $\sum_{j\in \mathbf{N}} a_{m-j}$ est son *symbole formel* (ou total) tandis que $a_m \neq 0$ en est le *symbole principal.*

On notera $CL^m(X,E,F)$ l'espace de tous les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre $\leq m$. Si $E = F$, on le note $CL^m(X,E)$ et si, de plus, $E = F$ est le fibré trivial de rang 1 (dans ce cas les opérateurs sont dits scalaires), on le note $CL^m(X)$.

L'espace vectoriel $CL^m(X,E,F)$ contient le sous-espace $L^{-\infty}(X,E,F)$ des opérateurs régularisants. On définit l'espace des symboles $CS^m(X,E,F)$ au moyen de la suite exacte

(3) $$0 \longrightarrow L^{-\infty}(X,E,F) \longrightarrow CL^m(X,E,F) \longrightarrow CS^m(X,E,F) \longrightarrow 0 .$$

Lorsque X est *compacte* - ce que nous supposerons désormais -, on peut composer les opérateurs pseudo-différentiels. Dans ce cas, $CL(X,E) = \bigcup_{m\in \mathbf{Z}} CL^m(X,E)$ est une algèbre associative contenant $L^{-\infty}(X,E)$ comme idéal bilatère. On munit le quotient $CS(X,E) = CL(X,E)/L^{-\infty}(X,E)$ de la structure d'algèbre-quotient. En coordonnées locales, le produit des symboles est donné par l'analogue multidimensionnel de la formule (1) du § 2.

4.2. Une densité

Nous appelons *densité* ce que Bourbaki [5] 10.4.1 nomme une forme différentielle tordue. Rappelons que si $\tau : Z \to X$ est une submersion, alors l'intégration le long des fibres de τ définit un morphisme de complexes

$$\tau_* : |\Omega_*(Z)| \longrightarrow |\Omega_*(X)|$$

où $|\Omega_q(Z)|$ désigne l'espace vectoriel des densités de degré $\dim Z - q$ sur la variété Z .

On sait aussi que si Z est orientée, on peut associer canoniquement une densité $|\theta|$ à toute forme différentielle θ sur Z .

Exemple.- Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$. On note $Y = T^*U \setminus U$ le fibré cotangent privé de la section nulle. C'est un cône symplectique dont la base Z est le sphère cotangente S^*U . Soit A un opérateur pseudo-différentiel sur U de symbole formel

$$a = \sum_{j\in \mathbf{N}} a_{m-j}$$

où les a_{m-j} sont des éléments homogènes de $P(Y) \otimes M_{lk}(C)$ de degré $m - j$. Si on munit Z de son orientation canonique, on peut définir une densité matricielle de degré n sur U par la formule

(4) $$\mathrm{res}_u(A) = \gamma_n \tau_* \left|\mathrm{Res}_0(a)\right| = \frac{1}{(2\pi)^n}\left(\int_{|\xi|=1} a_{-n}(u,\xi)\, |d\xi|\right)|du|$$

où $\tau : S^*U \to U$ est la projection canonique, Res_0 est défini en 3.4 et γ_n est la constante de normalisation

(5) $$\gamma_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!(2\pi)^n}.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant de Wodzicki [26] (rappelons que X désigne une variété compacte sans bord de dimension n).

4.3. PROPOSITION.- *Pour tout opérateur pseudo-différentiel* $A : C^\infty(X,E) \to C^\infty(X,F)$ *, il existe une unique densité* $\mathrm{res}_X(A)$ *sur* X *à valeurs dans* $\mathrm{Hom}(E,F)$ *, telle que pour toute carte locale* $\varphi : (U, U \times C^k, U \times C^l) \to (X,E,F)$ *on ait :*

$$\varphi^* \mathrm{res}_{\varphi(u)}(A) = \mathrm{res}_u\, \varphi^{\#}(A).$$

La densité $\mathrm{res}_X(A)$ est C-linéaire, fonctorielle pour les morphismes définis en 4.1. Si l'ordre de A n'est pas un entier ou s'il est strictement inférieur à $-n$, alors la densité $\mathrm{res}_X(A)$ est nulle.

La proposition 4.3. résulte du fait que, dans un changement de cartes, le symbole a se met sous la forme

(6) $$a + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_j}(b_j)$$

(on note $(u^1,\ldots,u^n,\xi_1,\ldots,\xi_n)$ les coordonnées canoniques de T^*U). Or Wodzicki montre que, pour toute section homogène s, on a

(7) $$\mathrm{Res}_0\left(\frac{\partial s}{\partial \xi_j}\right) = d_{\mathrm{fibre}}\, \gamma_j \wedge du^1 \wedge \ldots \wedge du^n$$

où γ_j est une forme relative explicite et où d_{fibre} désigne la différentielle extérieure le long des fibres de $\tau : S^*U \to U$. Par conséquent, on a

(8) $$\tau_* \left| \mathrm{Res}_0 \left(\frac{\partial s}{\partial \xi_i} \right) \right| = 0 .$$

On suppose maintenant $E = F$. La densité $\mathrm{res}_x(A)$ est liée au résidu non commutatif de A de la manière suivante. La trace $\mathrm{Tr}(\mathrm{res}_x(A))$ est une densité scalaire qu'on peut intégrer sur X. Il résulte des formules locales données par Seeley [19] (voir aussi [20], chap. II) que le résidu de Wodzicki est donné par

(9) $$\mathrm{res}(A) = \int_X \mathrm{Tr}(\mathrm{res}_x(A)) .$$

4.4. Si X est de *dimension un*, la sphère cotangente n'est plus connexe. On a une décomposition naturelle $S^*X = X^+ \cup X^-$ (où $X^\pm$ est difféomorphe à X), ce qui donne deux densités res_x^+ et res_x^- et donc deux résidus non commutatifs res^+ et res^-.

Nous avons vu en 1.3 que le résidu non commutatif est une trace. Cette propriété admet la traduction locale suivante.

4.5. THÉORÈME (Wodzicki [26]).- *A toute paire* (A,B) *d'opérateurs pseudo-différentiels opérant sur les sections* C^∞ *d'un fibré* E *sur* X (*compacte sans bord*), *on peut associer fonctoriellement une classe* $\rho(A,B)$ *dans* $|\Omega_1(X)| / d\,|\Omega_2(X)|$ *telle que*

i) $d\rho(A,B) = \mathrm{Tr}(\mathrm{res}_x[A,B])$,

ii) ρ *est bilinéaire antisymétrique en* (A,B) *et*

iii) *pour tout triplet* (A_0,A_1,A_2) , *on a*

$$\rho(A_0A_1,A_2) - \rho(A_0,A_1A_2) + \rho(A_2A_0,A_1) = 0 .$$

Avant de donner une formule explicite de ρ en coordonnées locales, remarquons que les propriétés ii) et iii) ci-dessus signifient que ρ est un 1-cocycle cyclique (au sens de Connes [7]) à valeurs dans $|\Omega_1(X)| / d\,|\Omega_2(X)|$. On peut donc exprimer le théorème à l'aide du diagramme commutatif (10)

$$\begin{tikzcd}
CC_0(CS(X,E)) \arrow[d, "\mathrm{Tr}\,\mathrm{res}_x"'] & CC_1(CS(X,E)) \arrow[l, "b"'] \arrow[d, "\rho"'] & CC_2(CS(X,E)) \arrow[l, "b"'] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
|\Omega_0(X)| & |\Omega_1(X)| / d\,|\Omega_2(X)| \arrow[l, "d"'] & 0 \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

où CC (CS(X,E)), b désigne le complexe cyclique de l'algèbre CS(X,E) . Ce diagramme conduit naturellement à chercher des invariants supérieurs dans l'homologie cyclique de l'algèbre des symboles. Le calcul de cette homologie sera présenté au § 5.

4.6. Formule pour le cocycle ρ

On se place en coordonnées locales au-dessus d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$. Pour simplifier, on suppose que A et B sont des opérateurs scalaires de symboles formels respectifs a et b . On a

$$\rho_u(A,B) = \sqrt{-1}\ \gamma_n\, \tau_* \left|\mathrm{Res}_1\left(\hat{A}^{-1}(1 \otimes L - L \otimes 1)\left(a^W \otimes b^W\right)\right)\right| . \tag{11}$$

Ici, a^W et b^W désignent le symbole de Weyl de A et B respectivement, L est l'opérateur différentiel du second ordre

$$L = \sqrt{-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial\xi_j\, \partial u^j} \tag{12}$$

et $\hat{A}^{-1}$ est l'inverse de la série formelle $A(Z) = (Z/2)/\mathrm{sh}(Z/2)$.

En considérant le commutateur [a,b] des symboles comme une déformation du crochet de Poisson {a,b} , on voit apparaître, ici comme chez Vey [21], la série formelle qui définit le genre multiplicatif $\hat{A}$.

La densité ρ_u de (11) n'est indépendante du choix de carte locale que modulo les densités exactes. D'où la formulation du théorème 4.5.

4.7. Donnons les grandes lignes de la démonstration de (11). Celle-ci utilise deux identités pour l'opérateur L ainsi que les t-symboles de Shubin [20].

D'une part, on a

$$e^{L} - 1 = \frac{1}{\sqrt{-1}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\, \mathrm{Td}^{-1}(L)\right) \tag{13}$$

où Td(Z) est la série de Todd : $\mathrm{Td}(Z) = Z/(1 - e^{-Z})$.

D'autre part, si f et $g \in P = P(T^*U \setminus U)$, on a

$$fL(g) - L(f)g = \frac{1}{\sqrt{-1}}\{f,g\} + \frac{1}{\sqrt{-1}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\frac{\partial f}{\partial u^j}\, g - f\, \frac{\partial g}{\partial u^j}\right) . \tag{14}$$

Par conséquent, en notant $m : P \otimes P \to P$ la multiplication (commutative) de l'algèbre de Poisson, on voit que (8) et (14) entraînent la relation

$$\tau_* \left|\mathrm{Res}_0(m(1 \otimes L - L \otimes 1)(f \otimes g)\right| = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, \tau_* \left|\mathrm{Res}_0\{f,g\}\right| \tag{15}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}\, d\tau_* \left|\mathrm{Res}_1(f \otimes g)\right| .$$

4.8. Amplitudes et t-symboles (*cf.* [20], § 23)

On sait que, localement sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$, tout opérateur pseudo-différentiel (classique) A admet une écriture plus générale de la forme

$$Af(u) = \int_{\mathbf{R}^n_\xi} \left(\int_U e^{i(u-v)\xi}\, \beta(u,v,\xi)\, f(v)\, dv \right) d\xi + Tf(u) \tag{16}$$

(T opérateur régularisant). La fonction $\beta(u,v,\xi)$ est appelée une *amplitude*. Pour tout réel t, il existe une amplitude de la forme

$$\beta(u,v,\xi) = \alpha((1-t)\,u + tv,\xi)$$

où α admet le développement asymptotique

$$\alpha \sim a^{(t)} = \sum_{j \in \mathbf{N}} a^{(t)}_{m-j} .$$

avec $a^{(t)}_{m-j}$ homogène en ξ d'ordre $m-j$. La série formelle $a^{(t)}$ est unique : c'est le *t-symbole* de A. Pour $t = 0$, on retrouve le symbole formel (encore appelé le *symbole à gauche*) défini en 4.1. Pour $t = 1/2$ (resp. $t = 1$), c'est le *symbole de Weyl* $a^W = a^{(1/2)}$ (resp. le *symbole à droite* $a^{(1)}$) de A.

Les t-symboles sont liés entre eux par la relation

$$a^{(t_1)} = e^{(t_1 - t_2)L}\, a^{(t_2)} . \tag{17}$$

Il résulte de (13) et de (17) que $\tau_* |\mathrm{Res}_0(a^{(t)})|$ ne dépend pas de t. Wodzicki [26], lemme 2.23, établit un résultat plus complet en calculant $\tau_* |\mathrm{Res}_0(a)|$ à partir d'une amplitude de A.

4.9. La fonction

$$(u,v,\xi) \longmapsto a(u,\xi)\, b^{(1)}(v,\xi) - b(u,\xi)\, a^{(1)}(v,\xi) \tag{18}$$

est une amplitude pour le commutateur $[A,B]$. La formule (11) résulte alors de (15) et du calcul formel suivant :

$$ab^{(1)} - a^{(1)}b = m\left(1 \otimes e^{L} - e^{L} \otimes 1\right)(a \otimes b) \tag{19}$$

$$= m\,(1 \otimes L - L \otimes 1)\,F\left(1 \otimes L\,,\,L \otimes 1\right)(a \otimes b)$$

où $F(Y) = \dfrac{e^{X} - e^{Y}}{X - Y}$. Or, si on pose : $Z = X - Y$ et $T = X + Y$, on a :

$$F(X,Y) = \hat{A}^{-1}(Z)\,e^{T/2}$$

et, par conséquent d'après (17), on a :

$$ab^{(1)} - a^{(1)}b = m\,(1 \otimes L - L \otimes 1)\left[\hat{A}^{-1}(1 \otimes L - L \otimes 1)\left(a^{W} \otimes b^{W}\right)\right].$$

4.10. <u>Opérateurs adjoints</u>

On désigne à nouveau par A un opérateur pseudo-différentiel opérant sur les sections d'un fibré vectoriel E sur la variété compacte X . Si on munit X d'une densité positive ν et E d'une métrique hermitienne $(\ ,\ )$, on peut définir l'opérateur adjoint A^* par la formule

$$\int_X (f, A^* g)\nu = \int_X (Af, g)\nu\,. \tag{21}$$

Sous ces hypothèses, la densité construite en 4.3 vérifie

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{res}_x(A^*)) = \overline{\mathrm{Tr}(\mathrm{res}_x(A))} \tag{22}$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{res}(A^*) = \overline{\mathrm{res}(A)} \tag{23}$$

(la barre indique la conjugaison complexe). Le résidu non commutatif d'un opérateur auto-adjoint est donc un nombre réel.

5. L'HOMOLOGIE CYCLIQUE DE L'ALGÈBRE DES SYMBOLES

Rappelons que si A est une algèbre associative avec unité sur un corps commutatif k , alors l'espace des traces (k-linéaires) de A est le dual de $A/[A,A]$ qui est isomorphe au groupe $HC_0(A)$ d'homologie cyclique de A . En calculant toute l'homologie cyclique de l'algèbre des symboles, on en détermine donc l'espace des traces. Pour tout ce qui concerne l'homologie cyclique et également l'homologie de Hochschild, on se référera à [7] et [16].

Dans toute la suite, X désigne une variété C^∞, compacte sans bord, de dimension n.

Reprenons les notations du paragraphe précédent. On note $Y = T^*X \setminus X$ le fibré cotangent de X privé de la section nulle et Y^c la complexification de Y introduite en 3.4 ; l'espace Y^c a le type d'homotopie de $S^1 \times S^*X$.

Le théorème suivant a été démontré par Wodzicki [28] et Brylinski-Getzler [6]. Il est également vrai pour l'algèbre des symboles à valeurs dans un fibré vectoriel non nul quelconque.

5.1. THÉORÈME.- a) *L'homologie de Hochschild de l'algèbre des symboles* CS(X) *est donnée pour tout* q *par*

$$HH_q(CS(X)) \cong H^{2n-q}(Y^c).$$

b) *La suite spectrale de Connes de termes* $E^1_{pq} = HH_{q-p}(CS(X))$, *convergeant vers les groupes* $HC_*(CS(X))$ *d'homologie cyclique de* CS(X), *dégénère en* E^1 *et, par conséquent, on a l'isomorphisme* (*non canonique*)

$$HC_*(CS(X)) \cong H_*(Y^c) \otimes H_*(BS^1)$$

où on a posé : $H_q(Y^c) = H^{2n-q}(Y^c)$.

5.2. *Remarque*.- Les complexes qui calculent ici l'homologie de CS(X) sont formés à partir de complétions convenables des puissances tensorielles de CS(X). En effet, l'algèbre A = CS(X) est munie de la topologie d'algèbre complète localement convexe suivante : comme espace vectoriel topologique

$$A = \varinjlim_{n} \Big(\varprojlim_{m<n} F_n/F_{m-1} \Big) = \varprojlim_{m} \Big(\varinjlim_{n>m} F_n/F_{m-1} \Big)$$

où $F_m = CS^m(X)$ et F_n/F_m a la topologie du produit $C^\infty(S^*X)^{n-m}$ $(n > m)$. La filtration de A par les sous-espaces fermés F_m induit une filtration $\ldots \subset F^{(k)}_m \subset F^{(k)}_{m+1} \subset \ldots$ du produit tensoriel inductif de Grothendieck $A^{\otimes_i (k+1)}$. On pose alors

$$C_k(A) = \varprojlim_{m} A^{\bar{\otimes}_i (k+1)} / F^{(k)}_m .$$

Les bords b et B de Hochschild et de Connes s'étendent de manière unique à $C_*(A)$, ce qui permet de définir l'homologie de Hochschild $HH_*(A)$ comme l'homologie du complexe $(C_*(A),b)$ et l'homologie cyclique $HC_*(A)$ comme l'homologie du bicomplexe $(C_{**}(A),b,B)$ où $C_{pq}(A) = C_{q-p}(A)$ et $p,q \geq 0$.

5.3. L'espace des traces

D'après le théorème 5.1, si X est connexe,

$$HC_0(CS(X)) = HH_0(CS(X)) \cong H^{2n-1}(S^*X) = \begin{cases} \mathbf{C} & \text{si } n > 1 \\ \mathbf{C}^2 & \text{si } n = 1 . \end{cases}$$

L'espace des traces de $CS(X)$ est donc engendré par le résidu de Wodzicki en dimension > 1 et par $\{res^+, res^-\}$ en dimension 1 (voir 4.4). Par conséquent, si X connexe de dimension > 1, le résidu non commutatif induit un isomorphisme

$$CS(X)/[CS(X),CS(X)] \xrightarrow{\cong} \mathbf{C} .$$

Cette assertion est encore vraie lorsqu'on remplace $CS(X)$ par l'algèbre $CL(X)$ des opérateurs pseudo-différentiels. On a la caractérisation suivante.

5.4. PROPOSITION [24].- *Si* X *est connexe et* $\dim X > 1$, *alors* $res(A) = 0$ *si et seulement s'il existe des opérateurs pseudo-différentiels* $B_1, \ldots, B_q, C_1, \ldots, C_q$ *tels que*

$$A = \sum_{i=1}^{q} [B_i, C_i] .$$

5.5. Concernant la structure des algèbres de Lie sous-jacentes à $CL(X)$, $CS(X)$, $L^{-\infty}(X)$, Wodzicki établit dans sa thèse [24] que, comme pour l'algèbre de Poisson $P(Y)$ (voir 3.8), les algèbres de Lie dérivées $[CL(X),CL(X)]$, $[CS(X),CS(X)]$ et $[L^{-\infty}(X),L^{-\infty}(X)]$ sont parfaites. De plus, on peut caractériser les éléments de $[L^{-\infty}(X),L^{-\infty}(X)]$ comme étant ceux de trace nulle. Pour des résultats plus complets, voir [24], chap. IV-V.

5.6. L'homologie cyclique de $CS(X)$ se stabilise à partir de $q \geq 2n - 1$ et on a :

(1) $$HC_q(CS(X)) \cong HC_{q+2}(CS(X)) \cong \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} H^{q-2i}(Y^c)$$

dès que $q \geq 2n - 1$.

5.7. Soit $CS^0(X)$ la sous-algèbre des symboles d'ordre ≤ 0 (ce sont les symboles des opérateurs pseudo-différentiels bornés sur $L^2(X)$). Wodzicki a également déterminé l'homologie de $CS^0(X)$

(voir appendice de [28]). Il a notamment montré qu'en degré $q \geq 2n - 1$:

i) le symbole principal $CS^0(X) \to C^\infty(S^*X)$ induit un isomorphisme en homologie cyclique,

ii) on a :

(2)
$$HC_q\left(CS^0(X)\right) \cong \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} H^{q-2i}(S^*X)\ ,$$

iii) l'inclusion de $CS^0(X)$ dans $CS(X)$ correspond *via* les isomorphismes (1) et (2) à la projection de Y^c sur S^*X.

5.8. <u>Idée de la démonstration du théorème</u> 5.1

Pour ce qui est de l'homologie de Hochschild de $CS(X)$, la filtration $(F_m^{(*)})_m$ donne naissance à une suite spectrale dont on identifie les termes E^2 grâce au quasi-isomorphisme de $C_*(C^\infty(Y^c))$ sur $\Omega_*(Y^c)$ donné par

(3)
$$f_0 \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_q \longmapsto \frac{(-1)^q}{q!} f_0 i_{f_1} \ldots i_{f_q} \omega^n$$

(à comparer avec 3.5). On obtient : $E^2_{pq} = H^{n-p}(Y^c)$ si $q = n$ et $E^2_{pq} = 0$ sinon. On démontre ensuite que la suite spectrale converge.

Pour ce qui est de l'homologie cyclique, un autre argument de suite spectrale permet de la calculer en degré $>> 0$, ce qui donne l'isomorphisme (1) de 5.6. Les autres groupes d'homologie cyclique résultent alors du lemme suivant (démontré dans Wodzicki [27]).

5.9. LEMME.- *Soit* A *une algèbre associative avec unité sur un corps commutatif* k. *On suppose que, pour tout* q, *l'espace vectoriel* $HH_q(A)$ *est de dimension finie et qu'il est nul pour tout* $q > q_0$. *On a l'inégalité*

(4)
$$\dim HC_q(A) \leq \sum_{i=0}^{[q/2]} \dim HH_{q-2i}(A)$$

pour tout q. *Si l'inégalité* (4) *est une égalité pour* $q = q_0$, *alors c'est une égalité pour tout* q *et la longue suite exacte de Connes se décompose en suites exactes courtes*

$$0 \longrightarrow HH_q(A) \xrightarrow{I} HC_q(A) \xrightarrow{S} HC_{q-2}(A) \longrightarrow 0$$

pour tout q.

5.10. Wodzicki [29] détermine également l'homologie cyclique de l'algèbre $CL^0(X)$ des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre ≤ 0 qui apparaît dans l'extension d'algèbres

$$0 \longrightarrow L^{-\infty}(X) \longrightarrow CL^0(X) \longrightarrow CS^0(X) \longrightarrow 0 .$$

Ce faisant, Wodzicki a découvert un critère extrêmement utile que nous énonçons avec des hypothèses simplificatrices.

5.11. PROPOSITION ([30] et [31]).- *Soit* I *une algèbre associative quelconque sur un corps commutatif* k *et soit* $\tilde{I}$ *l'algèbre unifère obtenue par adjonction d'une unité à* I. *Alors il y a équivalence entre*

i) *pour tout* $q \geq 1$, $\mathrm{Tor}_q^{\tilde{I}}(k,k) = 0$, *et*

ii) *pour toute extension d'algèbres non nécessairement unifères*

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow S \longrightarrow 0 ,$$

il existe une longue suite exacte naturelle

$$\ldots \longrightarrow HC_q(I) \longrightarrow HC_q(R) \longrightarrow HC_q(S) \longrightarrow HC_{q-1}(R) \longrightarrow \ldots .$$

Rappelons qu'on définit $HC_*(I)$ comme le noyau de l'application $HC_*(\tilde{I}) \to HC_*(k)$ induite par l'augmentation de $\tilde{I}$. La proposition est encore vraie si dans ii), on remplace l'homologie cyclique par l'homologie de Hochschild. Wodzicki appelle *homologiquement unifère* ou H-*unifère* toute algèbre qui vérifie une des conditions équivalentes de la proposition. Dans [31], il donne de nombreux exemples d'algèbres H-unifères, notamment toutes les C^*-algèbres et les algèbres de fonctions à support compact.

6. APPLICATIONS

Nous concluons avec quelques applications également dues à Wodzicki.

6.1. Asymétrie spectrale et valeurs en 0 de fonctions zêta

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels elliptiques A d'ordre > 0 admettant des puissances complexes A_θ^s pour un angle $\theta \in \,]0,2\pi]$. Nous notons $\zeta_\theta(A,s)$ la fonction zêta correspondante. Soit $\theta' > \theta$ une autre coupure admissible pour A . Dans [22]-[25] , Wodzicki étudie la fonction méromorphe $\rho(A,s) = \zeta_\theta(A,s) - \zeta_{\theta'}(A,s)$ et démontre qu'elle est régulière en tout point entier $k \in \mathbf{Z}$, où elle prend la valeur (généralement non nulle)

$$\rho(A,k) = \frac{2\pi i}{\mathrm{ord}(A)} \operatorname{res}\left(P\, A^{-k}\right)$$

où P désigne la projection sur les valeurs propres du secteur $\operatorname{Arg} \lambda \in]\theta,\theta'[$. Les valeurs de la fonction zêta aux points entiers dépendent donc en général de la coupure, même si A est un opérateur différentiel.

Par contre, la valeur en 0 ne dépend pas de θ : nous la noterons $\zeta(A,0)$. Ceci résulte de la nullité de $\rho(A,0)$ établie dans [23].

Pour $A \in \mathcal{P}$, posons $Z(A) = \mathrm{ord}\, A \,.\, (\zeta(A,0) + k(A))$ où $k(A)$ est la dimension (finie) de l'espace vectoriel $\bigcup_{i\geq 1} \mathrm{Ker}(A^i)$. Dans un article ("*Noncommutative residue. Chapter* III. *An exotic* logdet *and a bi-multiplicative index formula*") en préparation, Wodzicki démontre la formule suivante (A,B et $AB \in \mathcal{P}$) :

(1)
$$Z(AB) = Z(A) + Z(B) .$$

Il en résulte que si les ordres de A et B sont entiers ou rationnels, alors

$$\zeta(AB,0) - \frac{\mathrm{ord}\, A}{\mathrm{ord}\, A + \mathrm{ord}\, B}\zeta(A,0) - \frac{\mathrm{ord}\, B}{\mathrm{ord}\, A + \mathrm{ord}\, B}\zeta(B,0)$$

est un nombre rationnel.

6.2. Résidu multiplicatif

Un ingrédient essentiel dans la démonstration de (1) est la construction d'une version multiplicative du résidu non commutatif. Cette version s'obtient comme cas particulier de la construction générale suivante.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre topologique sur $\mathbf{C}$ et $\tau : \mathcal{A} \to \mathbf{C}$ une trace sur $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{A}_0^*$ la composante connexe de 1 dans le groupe $\mathcal{A}^*$ des éléments inversibles de $\mathcal{A}$. Moyennant certaines hypothèses sur $\mathcal{A}$ et τ ,

(2)
$$\gamma \longmapsto \int_\gamma \tau\left(a^{-1}\, da\right) ,$$

où γ désigne un chemin (suffisamment régulier) d'origine 1 dans $\mathcal{A}^*$, définit un homomorphisme de groupes

$$\Delta_\tau : \mathcal{A}_0^* \longrightarrow \mathbf{C}/\Gamma_\tau ,$$

où Γ_τ est le sous-groupe additif de $\mathbf{C}$ engendré par l'image des lacets par l'application (2).

6.3. *Exemples*.- a) (classique) Si $\mathcal{A} = M_n(\mathbf{C})$, alors $\mathcal{A}_0^* = GL_n(\mathbf{C})$. Si de plus $\tau = \mathrm{Trace}$, alors $\Gamma_{\mathrm{Trace}} = 2\pi i\mathbf{Z}$ et

(3) $$\Delta_{\mathrm{Trace}}(m) = \mathrm{Log}\det(m).$$

b) (Wodzicki) $\mathcal{A} = CL^0(X,E)$ et $\tau(A) = \mathrm{res}(A)$ (résidu non commutatif). Alors $\Gamma_{\mathrm{res}} = \{0\}$. On obtient ainsi un homomorphisme de groupes

$$\Delta^E_{\mathrm{res}} : \mathcal{A}_0^* \to \mathbf{C}$$

que Wodzicki appelle le "*résidu multiplicatif*" ou encore le " Log-déterminant exotique".

6.4. Le résidu multiplicatif permet de retrouver l'indice $\mathrm{Ind}(A)$ d'un opérateur elliptique A. Soit l'extension de groupes

(4) $$1 \to \mathrm{Ell}^0_0(X,E) \to \mathrm{Ell}(X,E) \to G \to 1$$

où $\mathrm{Ell}(X,E)$ est le groupe des symboles des opérateurs elliptiques d'ordre entier opérant sur les sections d'un fibré E et $\mathrm{Ell}^0_0(X,E)$ est le sous-groupe des symboles d'ordre nul, homotopes à l'identité. Le groupe-quotient G est isomorphe à $\mathbf{Z} \times \pi_0 \,\mathrm{Aut}(\tau^*E)$ où $\tau : S^*X \to X$.

Pour a et b dans G, posons

(5) $$\langle a,b\rangle = \Delta^{E\oplus E}_{\mathrm{res}} \begin{pmatrix} [\tilde{a},\tilde{b}] & 0 \\ 0 & 1_E \end{pmatrix}$$

où $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ sont des relèvements dans $\mathrm{Ell}(X,E)$ de a et b respectivement. La 2-cochaîne $\langle -,- \rangle$ est un 2-cocycle de G à valeurs complexes. On a la formule suivante :

(6) $$\langle a,b\rangle = \begin{vmatrix} \mathrm{Ind}(a) & \mathrm{Ind}(b) \\ \mathrm{ord}(a) & \mathrm{ord}(b) \end{vmatrix} = \mathrm{Ind}\left(a^{\mathrm{ord}(b)}\, b^{-\mathrm{ord}(a)}\right).$$

Si Δ désigne un laplacien attaché à X et E, on a ainsi :

(7) $$\mathrm{Ind}(a) = \frac{1}{2}\langle a,\Delta\rangle,$$

ce qui signifie que l'indice d'un opérateur elliptique A mesure la non-commutativité avec Δ de n'importe quel symbole elliptique de la classe d'homotopie de A.

6.5. <u>Anomalie multiplicative pour le déterminant régularisé</u>

Soit A et B deux opérateurs pseudo-différentiels elliptiques inversibles auto-adjoints positifs (pour le choix d'une densité sur X et d'une métrique hermitienne sur E) d'ordre > 0. La formule

(8) $$\det(A) = e^{-\zeta'(A,0)}$$

définit ce qu'on appelle le *déterminant régularisé* de A (pour plus de détails, voir par exemple [4]). La non-multiplicativité de ce déterminant s'exprime à l'aide du résidu non commutatif. Si on pose

(9) $$\delta(A,B) = \operatorname{Log}\det(AB) - \operatorname{Log}\det(A) - \operatorname{Log}\det(B)$$

et si, de plus, A et B commutent, alors on a :

$$\delta(A,B) = \frac{\operatorname{res}((\operatorname{Log}\sigma(A,B))^2)}{2\operatorname{ord}A\operatorname{ord}B(\operatorname{ord}A + \operatorname{ord}B)}$$

où $\sigma(A,B)$ est l'opérateur elliptique d'ordre 0 ("symbole modéré")

$$\sigma(A,B) = A^{\operatorname{ord}B}B^{-\operatorname{ord}A}.$$

Le logarithme $\operatorname{Log}\sigma(A,B)$ est défini par l'intégrale curviligne

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \operatorname{Log}\lambda(\sigma(A,B) - \lambda)^{-1}\,d\lambda$$

où Γ est un lacet autour du spectre de $\sigma(A,B)$, laissant 0 à l'extérieur.

6.6. Voici une formule du même type. Soit P et Q deux polynômes de $\mathbf{C}[z]$. On suppose que $Q = (z - a_1)\ldots(z - a_d)$. Considérons la série de Dirichlet

$$\zeta(P\,|\,Q;s) = \sum P(n)\,Q(n)^{-s}$$

où la somme porte sur tous les entiers positifs $n \notin \{a_i,\ldots,a_d\}$. Posons :

(10) $$\delta_{P,Q} = \zeta'(P\,|\,Q;0) - \sum_{i=1}^{d}\zeta'\big(P\,|\,z - a_i;0\big).$$

Wodzicki établit la formule suivante pour $\delta_{P,Q}$. Si on note S_d la forme quadratique

$$S_d\big(\xi_1,\ldots,\xi_d\big) = (d-1)\sum_{1\le i\le d}\xi_i^2 - 2\sum_{1\le i<j\le d}\xi_i\,\xi_j$$

et η_i la série formelle : $\eta_i = \operatorname{Log}(1 - a_i z^{-1}) \in z^{-1}\mathbf{C}[[z^{-1}]]$, alors on a :

$$\delta_{P,Q} = -\frac{1}{2d}\operatorname{Res}_{z=0}\Big(P \cdot S_d(\eta_1,\ldots,\eta_d)\Big) \tag{11}$$

(voir aussi J.-B. Bost, "*Le déterminant régularisé du laplacien scalaire sur la sphère* S^d ", notes manuscrites, et I. Vardi, "*Determinants of Laplacians and multiple gamma functions*", SIAM J. Math. Anal. 19 (1988), 493-507).

Lorsque $Q = z(z + a)$, (11) entraîne une formule qui joue un rôle essentiel dans le travail de Gillet-Soulé [13] sur le théorème de Riemann-Roch arithmétique pour les espaces projectifs au-dessus de $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ADLER - *On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structure of Korteweg-de Vries type equations*, Inventiones Math. 50 (1979), 219-248.

[2] A. AVEZ, A. LICHNEROWICZ, A. DIAZ-MIRANDA - *Sur l'algèbre des automorphismes infinitésimaux d'une variété symplectique*, J. Diff. Geom. 9 (1974), 1-40.

[3] A.A. BEILINSON, Yu.I. MANIN, V.V. SHECHTMAN - *Sheaves of the Virasoro and Neveu-Schwarz algebras*, in K-theory, Arithmetic and Geometry (Séminaire Manin à Moscou, 1984-86), Springer Lecture Notes in Math. n° 1289 (1987), 52-66.

[4] J.-B. BOST - *Fibrés déterminants, déterminants régularisés et mesures sur les espaces de modules des courbes complexes*, Séminaire Bourbaki, exposé n° 676, Astérisque 152-153 (1987), 113-149.

[5] N. BOURBAKI - *Variétés différentielles et analytiques*, Hermann, Paris (1971).

[6] J.-L. BRYLINSKI, E. GETZLER - *The homology of algebras of pseudo-differential symbols and the noncommutative residue*, K-theory 1 (1987), 385-403.

[7] A. CONNES - *Non-commutative differential geometry*, Publ. Math. IHES 62 (1985), 41-144.

[8] A. CONNES - *The action functional in non-commutative geometry*, Commun. Math. Phys. 117 (1988), 673-683.

[9] J. DIXMIER - *Existence de traces non normales*, C.R. Acad. Sci. Paris 262 (1966), 1107-1108.

[10] V.G. DRINFELD, V.V. SOKOLOV - *Équations de Lie et équations du type de Korteweg-de Vries*, Itogi Nauki i Tekhniki, ser. Sovremennye Problemy Matematiki 24 (1984), 81-181 (en russe) ; trad. anglaise : J. Soviet Math. 30 (1985), 1975-2036.

[11] J.J. DUISTERMAAT, V.W. GUILLEMIN - *The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics*, Inventiones Math. 29 (1975), 39-79.

[12] Ch. EHRESMANN, P. LIBERMANN - *Sur le problème d'équivalence de formes différentielles extérieures quadratiques*, C.R. Acad. Sci. Paris 229 (1949), 697-698.

[13] H. GILLET, C. SOULÉ - *Analytic torsion and the arithmetic Todd genus*, à paraître dans Topology.

[14] V. GUILLEMIN - *A new proof of Weyl's formula on the asymptotic distribution of eigenvalues*, Adv. Math. 55 (1985), 131-160.

[15] P. LIBERMANN - *Formes différentielles sur une variété symplectique*, C.R. Acad. Sci. Paris 234 (1952), 395-397.

[16] J.-L. LODAY, D. QUILLEN - *Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices*, Comment. Math. Helv. 59 (1984), 565-591.

[17] Yu.I. MANIN - *Aspects algébriques des équations différentielles non linéaires*, Itogi Nauki i Tekhniki, ser. Sovremennye Problemy Matematiki 11 (1978), 5-152 (en russe) ; trad. anglaise : J. Soviet Math. 11 (1979), 1-122.

[18] Yu.I. MANIN, A.O. RADUL - *A supersymmetric extension of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy*, Commun. Math. Phys. 98 (1985), 65-77.

[19] R.T. SEELEY - *Complex powers of an elliptic operator,* A.M.S. Proc. Symp. Pure Math., vol. 10 (1967), 288-307 ; corrections dans Amer. J. Math. 91 (1969), 889-920.

[20] M.A. SHUBIN - *Opérateurs pseudo-différentiels et théorie spectrale*, Nauka, Moscou 1978 (en russe) ; trad. anglaise : Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1987.

[21] J. VEY - *Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique*, Comment. Math. Helvetici 50 (1975), 421-454.

[22] M. WODZICKI - *Spectral asymmetry and zeta functions,* Inventiones Math. 66 (1982), 115-135.

[23] M. WODZICKI - *Local invariants of spectral asymmetry*, Inventiones Math. 75 (1984), 143-178.

[24] M. WODZICKI - *Asymétrie spectrale et résidu non commutatif*, thèse de Doctorat, Institut de Mathématiques Steklov, Moscou 1984 (en russe).

[25] M. WODZICKI - Commentaire de l'article de H. Weyl : "Ramification, old and new, of the eigenvalue problem (Bull. A.M.S. 56 (1950), 115-139), in Oeuvres choisies de Hermann Weyl (publiées par V.I. Arnold et A.N. Parshin), Nauka, Moscou 1984 (en russe).

[26] M. WODZICKI - *Noncommutative residue, Chapter* I. *Fundamentals*, in K-Theory, Arithmetic and Geometry (Séminaire Manin à Moscou, 1984-86), Springer Lecture Notes in Math. 1289 (1987), 320-399.

[27] M. WODZICKI - *Cyclic homology of differential operators*, Duke Math. J. 54 (1987), 641-647.

[28] M. WODZICKI - *Report on the cyclic homology of symbols* (version préliminaire du chapitre IV de "Noncommutative residue"), prépublication Institute for Advanced Study, Princeton 1987.

[29] M. WODZICKI - *Cyclic homology of pseudodifferential operators and noncommutative Euler class,* C.R. Acad. Sci. Paris 306 (1988), 321-325.

[30] M. WODZICKI - *The long exact sequence in cyclic homology associated with an extension of algebras*, C.R. Acad. Sci. Paris 306 (1988), 399-403.

[31] M. WODZICKI - *Excision in cyclic homology and in rational algebraic* K-*theory*, Annals of Math. 129 (1989), 591-639.

Christian KASSEL

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur - C.N.R.S.
7 rue René Descartes
F-67084 STRASBOURG CEDEX

Tél. (33) 88.41.63.50
e-mail : a18603 at frccsc21.bitnet