ANDRÉ HAEFLIGER

Feuilletages riemanniens

Astérisque, tome 177-178 (1989), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 707, p. 183-197
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1988-1989__31__183_0>

Séminaire BOURBAKI
41ème année, 1988-89, n° 707

Mars 1989

FEUILLETAGES RIEMANNIENS

par André HAEFLIGER

Un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété M est dit riemannien s'il existe sur M une métrique riemannienne telle que les feuilles soient localement équidistantes (la définition précise est donnée en 1.2). Cette classe de feuilletage a été introduite en 1959 par B.L. Reinhart [31] qui en a établi les premières propriétés (*cf.* § 1). Vers la fin des années 70, P. Molino a démontré un théorème de structure (*cf.* § 3) pour les feuilletages riemanniens $\mathcal{F}$ qui associe notamment à $\mathcal{F}$ une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (dite algèbre de Lie structurale de $\mathcal{F}$). Ce théorème est très utile car il permet de ramener l'étude des propriétés qualitatives de $\mathcal{F}$ à celles des G-feuilletages de Lie (*cf.* 2.1), où G est un groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Le livre "Riemannian Foliations" de Molino [28] constitue une excellente introduction ; il est complété par des appendices écrits par divers auteurs et qui donnent un aperçu sur les développements plus récents.

Dans cet exposé, les variétés, feuilletages, métriques riemanniennes et applications seront supposées indéfiniment différentiables.

1. DÉFINITION DES FEUILLETAGES RIEMANNIENS

Nous commençons par quelques remarques préliminaires.

1.1. Submersions riemanniennes

Une submersion f d'une variété riemanienne U dans une variété T est dite riemannienne si les fibres de f sont équidistantes. Autrement dit, il existe une métrique riemannienne sur T telle que les restrictions de la différentielle df de f aux sous-espaces orthogonaux aux fibres sont des isométries sur les espaces tangents à T ; cette métrique sur T est unique si f est surjective.

Pour une telle submersion, toute géodésique orthogonale en un point à une fibre est orthogonale aux fibres en chacun de ses points. En effet, si g est un segment géodésique de T et si g' est un relèvement de g dans U orthogonal aux fibres, alors g' réalise le minimum de la distance entre ses points ; c'est donc un segment géodésique. Il en résulte que si U est une variété riemannienne complète, alors f est une fibration (Hermann [22]) : une trivialisation locale au-dessus d'une petite boule géodésique D centrée en t_0 dans T est obtenue en faisant correspondre à $(x,y) \in D \times f^{-1}(t_0)$ l'extrémité de la géodésique issue de y orthogonale à $f^{-1}(t_0)$ et se projetant sur le rayon géodésique reliant t_0 à x.

Réciproquement, on peut montrer que si les géodésiques dans U orthogonales à une fibre en un point sont orthogonales aux fibres en chacun de leurs points, alors la submersion f est riemannienne.

1.2. Rappelons qu'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension q sur une variété M peut être défini de la manière suivante. On se donne un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M, une variété auxiliaire T de dimension q (appelée variété transverse) et des submersions $f_\alpha : U_\alpha \to T$ à fibres connexes compatibles dans le sens suivant: pour $\alpha, \beta \in A$, il existe un difféomorphisme $h_{\alpha\beta}$ de $f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta\}$ sur $f_\alpha\{U_\alpha \cap U_\beta)$ tel que $f_\alpha = h_{\alpha\beta} f_\beta$. Les feuilles de la restriction de $\mathcal{F}$ à U_α sont les fibres de f_α.

En supposant que la réunion des images des f_α est T, le pseudogroupe d'holonomie de $\mathcal{F}$ associé à la transversale T est le pseudogroupe engendré par les $h_{\alpha\beta}$.

DÉFINITION 1.- *Un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété M est dit riemannien s'il existe une métrique riemannienne sur M pour laquelle les feuilles sont localement équidistantes, c'est-à-dire que les projections locales $f_\alpha : U_\alpha \to T$ définissant le feuilletage sont des submersions riemanniennes.*

DÉFINITION 2.- *Un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété M est dit riemannien s'il peut être défini par des submersions locales $f_\alpha : U_\alpha \to T$ dans une variété riemannienne T telles que les difféomorphismes locaux de transition $h_{\alpha\beta}$ sont des isométries locales de T.*

L'équivalence des ces deux définitions est évidente. D'après la dernière remarque de 1.1, elles équivalent à dire qu'il existe sur M une métrique riemannienne pour laquelle toute géodésique orthogonale à une feuille en un de ses points est orthogonale aux feuilles en chacun de ses points.

Un feuilletage $\mathcal{F}$ est dit *riemannien complet* s'il existe sur M une métrique riemannienne complète verifiant les conditions de la définition 1. Dans ce cas, il résulte facilement de la remarque qui précède (*cf.* Reinhart [31]) que les feuilles ont alors des revêtements d'holonomie communs.

1.3. Remarque

Soit M une variété avec une métrique riemannienne donnée. Un feuilletage sur M est dit ***métrique*** s'il est riemannien pour cette métrique donnée. L'étude de ces feuilletages est très intéressante (voir par exemple Gromoll-Grove [19] qui considèrent le cas où M est la sphère euclidienne). Le point de vue présenté dans cet exposé est très différent, car on ne s'intéresse ici qu'aux propriétés différentiables d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur M découlant de l'existence d'une métrique quelconque qui le rend riemannien .

2. EXEMPLES

2.1. Feuilletages riemanniens de codimension 1 transversalement orientés

Ce sont les feuilletages donnés par une 1-forme fermée ω partout différente de zéro. Un tel feuilletage sur une variété compacte M existe si et seulement si M fibre sur le cercle (remarque de Tischler [39] : il suffit d'approcher ω par une forme fermée à périodes rationnelles ; le feuilletage correspondant est une fibration sur un cercle).

Le problème de la classification de tels feuilletages est déjà très difficile en général (*cf.* par exemple Sikorav [36] , Thurston [38]).

2.2. Les G-feuilletages de Lie (*cf.* Fedida [15])

2.2.1. Soit G un groupe de Lie 1-connexe. Un G-feuilletage de Lie $\mathcal{F}$ sur une variété connexe M est donné par des submersions locales $f_\alpha : U_\alpha \to G$ telles que les difféomorphismes de transition $h_{\alpha\beta}$ soient des restrictions de translations à gauche de G . Un tel feuilletage est riemannien (définition 2).

Par un argument classique d'Ehresmann, il existe un revêtement galoisien connexe $\pi : \widetilde{M} \to M$ de groupe de Galois Γ , une injection de Γ dans G et une submersion Γ-équivariante $D : \widetilde{M} \to G$ (appelée le développement) telle que $\pi^*(\mathcal{F})$ est le feuilletage défini par la submersion D ($\widetilde{M}$ est une composante connexe du revêtement galoisien de groupe G formé des germes des submersions locales f_α composées avec les translations à gauche par les éléments de G). Le sous-groupe Γ de G est appelé le *groupe d'holonomie* de $\mathcal{F}$.

Les feuilletages de l'exemple 2.1 donnés par une 1-forme fermée sont les $\mathbf{R}$-feuilletages de Lie. Le groupe d'holonomie est le groupe des périodes de la forme.

2.2.2. Si M est compacte et si on choisit une métrique riemanienne pour laquelle $\mathcal{F}$ est riemannien (ou plus généralement si M est complète pour cette métrique), alors $\widetilde{M}$ est une variété riemannienne complète et D est une submersion riemanienne, donc une fibration (*cf.* 1.1) à fibres connexes. Reeb [30] avait déjà démontré ceci dans le cas des $\mathbf{R}$-feuilletages de Lie.

Si de plus le groupe d'holonomie Γ est dense dans G , alors les feuilles sont denses dans M . Soit f un difféomorphisme de M préservant $\mathcal{F}$. Alors f se relève suivant un difféomorphisme de $\widetilde{M}$ qui se projette par l'application de développement sur une application h de G dans G de la forme $h(g) = \alpha(g)u$, où u est un élément fixé de G et α un automorphisme de G appliquant Γ sur Γ . On voit donc que la paire (G,Γ) à automorphisme près est attachée intrinsèquement au feuilletage $\mathcal{F}$.

2.2.3. Voici un procédé pour construire des G-feuilletages de Lie sur des variétés compactes. Soit $\tilde{G}$ un groupe de Lie connexe contenant un sous-groupe discret cocompact $\tilde{\Gamma}$, et soit D un homomorphisme surjectif de $\tilde{G}$ sur un groupe de Lie simplement connexe $\tilde{G}$. Les fibres de D sont les feuilles d'un feuilletage sur $\tilde{G}$ invariant par les translations à gauche. En passant au quotient par l'action à gauche de $\tilde{\Gamma}$, on obtient sur $M = \tilde{\Gamma}\backslash\tilde{G}$ un G-feuilletage de Lie avec groupe d'holonomie $\Gamma = D(\tilde{\Gamma})$.

2.2.4. Étant donné un groupe de Lie 1-connexe G, un problème fondamental est de déterminer les sous-groupes Γ, de type fini qui apparaissent comme groupe d'holonomie de G-feuilletages de Lie sur des variétés compactes. A part le cas où G est compact ou nilpotent (pour lequel tout sous-groupe de type fini convient via la construction précédente), on ne sait presque rien sur ce problème (*cf.* le travail [17] de Ghys qui contient des résultats partiels intéressants). En utilisant des constructions arithmétiques, on peut montrer que tout groupe G semi-simple admet de tels sous-groupes Γ denses, mais il est probable que certains groupes résolubles par exemple n'en admettent aucun.

2.2.5. Pour terminer, donnons un exemple (*cf.* Meyer [25]) d'un G-feuilletage de Lie sur une variété de dimension 3 étudié par Ghys-Sergiescu [18] et Carrière [4] et qui a joué un rôle historique important. Soit A un élément de $Sl(2,\mathbf{Z})$ de trace > 2 ; l'automorphisme linéaire correspondant de $\mathbf{R}^2$ a deux sous-espaces propres V_s et V_u de dimension 1. Soit $A(t)$ un sous-groupe à un paramètre de $Sl(2,\mathbf{R})$ tel que $A(1) = A$ et préservant V_s et V_u. Soit $\tilde{G}$ le groupe de Lie produit semi-direct $\mathbf{R}^2 \rtimes \mathbf{R}$, où $t \in \mathbf{R}$ opère sur $\mathbf{R}^2$ par $A(t)$. Le sous-groupe $\tilde{\Gamma} = \mathbf{Z}^2 \rtimes \mathbf{Z}$ est discret cocompact et le quotient $\tilde{\Gamma}\backslash\tilde{G}$ est une variété T^3_A de dimension 3 qui est un fibré en tores sur le cercle. Soit N le sous-groupe à un paramètre de $\tilde{G}$ égal à $V_s \times 0$. Il est invariant dans $\tilde{G}$ et le quotient $\tilde{G}/N$ est isomorphe au groupe G des transformations affines de la droite. Le feuilletage sur $\tilde{G}$ dont les feuilles sont les classes modulo N se projette sur un G-feuilletage de Lie sur $T^3_A = \tilde{\Gamma}\backslash\tilde{G}$ dont le groupe d'holonomie est l'image de $\tilde{\Gamma}$ dans G. Les adhérences des feuilles sont les tores fibres.

2.3. <u>Flots riemanniens sur les variétés compactes orientables de dimension</u> 3

Suivant la terminologie de Y. Carrière, un flot riemannien est un feuilletage riemannien orienté de dimension un. Voici la liste (à difféomorphismes près) de tels feuilletages transversalement orientables sur les variétés compactes M de dimension 3 d'après Carrière [5] :

a) M est le tore T^3 et $\mathcal{F}$ est un feuilletage linéaire,

b) M est obtenu en recollant deux tores pleins le long de leur bord (ainsi M est un espace lenticulaire ou $S^2 \times S^1$). Soit T_α le tore solide $D^2 \times S^1$ muni du feuilletage quotient du feuilletage sur $D^2 \times R$ donné par la projection sur D^2 par la relation d'équivalence engendrée par $(x,t) \to (\rho(\alpha)x,t+1)$, où $\rho(\alpha)$ est la rotation d'angle $2\pi\alpha$. Sur le bord on obtient un feuilletage linéaire du tore de pente α. On peut recoller T_α et T_β le long de leur bord par un automorphisme linéaire appliquant le feuilletage de pente α sur le feuilletage de pente β (c'est possible si $\beta = a\alpha + b/c\alpha + d$, où a,b,c et d sont des entiers tels que $ad - bc = 1$). Si α est irrationnel, il y a deux feuilles compactes qui sont des cercles et les adhérences des autres sont des tores concentriques.

c) $M = T_A^3$ muni du feuilletage décrit à la fin de 2.2,

d) M est un fibré de Seifert feuilleté par les fibres.

3. LE THÉORÈME DE STRUCTURE DE MOLINO ([27], [28])

3.1. Le passage au fibré des repères orthonormaux

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage riemannien de codimension q sur une variété riemannienne complète M donné par des submersions riemaniennes locales $f_\alpha : U_\alpha \to T$ dans une variété riemannienne T de dimension q, les difféomorphismes de transition $h_{\alpha\beta}$ étant des isométries locales de T.

Pour étudier les isométries de T, il est classique (*cf.* par exemple Kobayashi [24]) de considérer leur prolongement au fibré O(q)-principal $\hat{T}$ des repères orthonormaux sur T, car il est muni d'un parallélisme naturel : il existe des champs de vecteurs $\overline{X}_1,...,\overline{X}_N$ sur $\hat{T}$ formant en chaque point une base de l'espace tangent (donc $N = \dim T$) qui sont invariants par les prolongements à $\hat{T}$ des isométries locales de T.

Soit alors $p : \hat{M} \to M$ le fibré O(q)-principal des repères orthonormaux du fibré $N\mathcal{F}$ normal aux feuilles. Le feuilletage $\mathcal{F}$ se relève suivant un feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ sur $\hat{M}$ de même dimension défini par les submersions locales $\hat{f}_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to \hat{T}$ qui sont les prolongements des f_α aux repères orthonormaux. Les feuilles de $\hat{\mathcal{F}}$ sont les revêtements d'holonomie des feuilles de $\mathcal{F}$ et le feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ est invariant par l'action à droite de O(q).

Il existe sur $\hat{M}$ des champs de vecteurs $X_1,...,X_N$ qui se projettent par les projections locales sur les champs $\overline{X}_1,...,\overline{X}_N$; toute combinaison linéaire à coefficients constants des X_i engendre un groupe global à un paramètre d'automorphismes de $\hat{\mathcal{F}}$. Il en résulte que le groupe des automorphismes de $\hat{\mathcal{F}}$ opère transitivement sur $\hat{M}$, donc que $\hat{\mathcal{F}}$ est très régulier.

3.2. Théorème de structure de Molino

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage riemannien complet sur M connexe et soit $\hat{\mathcal{F}}$ le feuilletage correspondant sur le fibré $\hat{M}$ des repères orthonormaux du fibré normal aux feuilles. Alors

a) *les adhérences des feuilles de $\mathcal{F}$ sont les fibres d'une fibration différentiable $\hat{\pi} : \hat{M} \to \hat{W}$, où $\hat{W}$ est une variété différentiable munie d'une action de O(q) pour laquelle $\hat{\pi}$ est équivariante.*

Les adhérences des feuilles de $\mathcal{F}$ forment aussi une partition de M en sous-variétés. L'espace W des adhérences des feuilles de $\mathcal{F}$ est le quotient de $\hat{W}$ par l'action de O(q) et on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \hat{M} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\hat{\pi}"'] & M \arrow[d, "\pi"] \\ \hat{W} \arrow[r] & W \end{tikzcd}$$

b) *La restriction* $\hat{\mathcal{F}}_0$ *de* $\hat{\mathcal{F}}$ *à l'adhérence* $\hat{\pi}^{-1}(w)$ *d'une feuille est un* G*-feuilletage de Lie* (*dont le groupe d'holonomie* Γ *est dense dans* G) ; *si* U *est un voisinage contractile de* w , *alors il existe un difféomorphisme de* $\hat{\pi}^{-1}(U)$ *sur* $U \times \hat{\pi}^{-1}(w)$ *transportant la restriction de* $\hat{\mathcal{F}}$ *à* $\hat{\pi}^{-1}(U)$ *sur le produit de* $\hat{\mathcal{F}}_0$ *par le feuilletage par points de* U . *L'algèbre de Lie de* G *est appelée l'algèbre de Lie structurale de* $\mathcal{F}$.

Remarquons que l'algèbre de Lie structurale de $\mathcal{F}$ est réduite à zéro si et seulement si toutes les feuilles sont compactes, c'est-à-dire si $\mathcal{F}$ est une fibration de Seifert généralisée [13].

Esquisse de la démonstration.- Soit C^∞ l'espace vectoriel des fonctions C^∞ sur $\hat{M}$ constantes sur les feuilles de $\hat{\mathcal{F}}$ (donc sur leurs adhérences) ; il est stable par différentiation dans la direction des champs X_i du parallélisme transverse.

On vérifie d'abord, en utilisant le fait que le groupe des automorphismes de $\hat{\mathcal{F}}$ est transitif sur $\hat{M}$, qu'il existe une variété différentiable $\hat{W}$ et une fibration différentiable $\hat{\pi} : \hat{M} \to \hat{W}$ telle que les éléments de C_b^∞ sont les composés de $\hat{\pi}$ avec les fonctions sur $\hat{W}$.

On a $[X_i,X_j] = \Sigma\, c_{ij}^k X_k$ modulo l'espace des champs tangents aux feuilles, où les $c_{ij}^k \in C_b^\infty$, donc proviennent de fonctions sur $\hat{W}$.

Après un changement de base à coefficients constants, on peut supposer que les champs $X_1,\ldots,X_r$ sont tangents en un point d'une fibre donnée $\hat{\pi}^{-1}(w)$ de $\hat{\pi}$, et que $X_{r+1},\ldots,X_N$ se projettent sur un base de l'espace normal à cette fibre.Les champs $X_1,\ldots,X_r$ sont alors tangents à la fibre $\hat{\pi}^{-1}(w)$ en chacun de ses points, donc aussi leurs crochets, et les $c_{ij}^k(w)$ sont nuls pour $k > r$ et $i,j \leq r$.

Ainsi les $c_{ij}^k(w)$ pour $1 \leq i,j,k \leq r$ sont les constantes de structure de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie simplement connexe G . Il en résulte que la restriction $\hat{\mathcal{F}}_0$ de $\hat{\mathcal{F}}$ à la fibre $\hat{\pi}^{-1}(w)$ est un G-feuilletage de Lie, avec groupe d'holonomie Γ ; les projections locales de ce feuilletage appliquent les X_i, $1 \leq i \leq r$, sur une base des champs invariants à gauche sur G . Il reste à montrer que $\pi^{-1}(w)$ est l'adhérence d'une feuille, autrement dit que Γ est dense dans G . Si ce n'était pas le cas, l'adhérence de Γ serait un sous-groupe de Lie H de G et G/H serait une variété de dimension positive. L'existence d'une fonction différentiable non constante sur G/H impliquerait l'existence d'une fonction dans C_b^∞ non constante sur $\hat{\pi}^{-1}(w)$, d'où contradiction.

3.3. Le faisceau de Molino

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur une variété M . Un champ de vecteurs sur un ouvert U de M est projetable si le sous-groupe local à un paramètre qu'il engendre est formé d'autormorphismes du feuilletage $\mathcal{F}$ restreint à U . Les champs de vecteurs tangents aux feuilles sont évidemment projetables. Par définition un champ de vecteurs transverse à $\mathcal{F}$ sur U est un champ de vecteurs projetable sur U modulo les champs tangents aux feuilles. L'image par les projections locales $f_\alpha : U_\alpha \to T$ du feuilletage d'un champ de vecteurs transverse est un champ de vecteurs sur un ouvert de T .

THÉORÈME.- *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage riemannien complet sur une variété* M *connexe comme dans le théorème* 3.2. *Il lui est associé un faisceau $\mathcal{G}$ sur* M *en algèbres de Lie de germes de champs de vecteurs transverses à $\mathcal{F}$ tangents aux adhérences des feuilles, appelé le faisceau de Molino de $\mathcal{F}$. Ce faisceau est localement constant de fibre isomorphe à l'algèbre de Lie structurale $\mathfrak{g}$ de $\mathcal{F}$* (*cf.* 3.2,b)) ; *en tant que tel, il est déterminé abstraitement par une représentation (monodromie) de* $\pi_1(M)$ *dans* Aut($\mathfrak{g}$) ; *l'image de cette représentation contient la représentation adjointe de* Γ *et est contenue dans le sous-groupe* Aut(g,Γ) *formé des automorphismes de $\mathfrak{g}$ qui sont les différentielles des automorphismes de* G *préservant* Γ .

Ce faisceau peut être décrit de la manière suivante (*cf.* [20] et [33]). Soit $\mathcal{H}$ le pseudogroupe d'holonomie de $\mathcal{F}$ associé à la transversale T (*cf.* 1.2). L'adhérence de $\mathcal{H}$ dans la C^1-topologie est un pseudogroupe $\overline{\mathcal{H}}$ d'isométries locales de T . Les éléments de $\mathcal{G}$ sont les germes de champs de vecteurs transverses qui se projettent par les f_α sur les germes de champs de vecteurs engendrant des sous-groupes locaux contenus dans $\overline{\mathcal{H}}$ (*cf.* E. Salem [33]).

Par exemple si $\mathcal{F}$ un G-feuilletage de Lie à feuilles denses sur une variété compacte M , alors le pseudogroupe d'holonomie $\mathcal{H}$ est engendré par les translations à gauche par les éléments de Γ , et $\overline{\mathcal{H}}$ est engendré par les translations à gauche par les éléments de G . Le faisceau de Molino est formé des germes de champ de vecteurs transverses qui se projettent par les f_α sur les germes de champs de vecteurs invariants à droite sur G, c'est-à-dire ceux qui engendrent les translations à gauche par les éléments de G . La représentation de $\pi_1(M)$ dans Aut($\mathfrak{g}$) est le composé de la surjection de $\pi_1(M)$ sur Γ et de la représentation adjointe de Γ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G .

Pour le feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ sur le fibré $\hat{M}$ des repères orthonormaux, la restriction du faisceau de Molino $\hat{\mathcal{G}}$ à un ouvert $\hat{\pi}^{-1}(U) = U \times \hat{\pi}^{-1}(w)$ (comme dans l'énoncé 3.2.b), est l'image inverse par la projection sur $\hat{\pi}^{-1}(w)$ du faisceau décrit ci-dessus. Molino décrit $\hat{\mathcal{G}}$ comme le faiceau des germes de champs de vecteurs transverses à $\mathcal{F}$ qui commutent avec tous les champs de vecteurs transverses globaux ; pour cette raison, il appelle $\hat{\mathcal{G}}$ le faisceau central. Le fait que la représentation de $\pi_1(M)$ dans Aut($\mathfrak{g}$) définie par la monodromie de $\hat{\mathcal{G}}$ prend ses valeurs dans Aut($\mathfrak{g}$,Γ) découle de 2.2.2.

Le faisceau $\hat{\mathcal{G}}$ sur $\hat{M}$ est invariant par l'action de O(q) ; il se projette par $p : \hat{M} \to M$ sur le faisceau de Molino de $\mathcal{F}$.

3.4. COROLLAIRE.- *Si* $\pi_1(M)$ *est trivial* (resp. *nilpotent ou résoluble*), *l'algèbre de Lie structurale est abélienne* (resp. *nilpotente ou résoluble*).

Cela résulte immédiatement du fait que la représentation de $\pi_1(M)$ dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ contient la représentation adjointe du sous-groupe Γ dense dans G.

3.5. *Remarque.* Le sous-groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g},\Gamma)$ de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ dépend en général des propriétés arithmétiques de Γ. Par exemple si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie du groupe additif **R** et si Γ est un sous-groupe de génération finie de **R** alors le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g},\Gamma)$ est formé des homothéties de **R** induisant un automorphisme sur Γ. Une telle homothétie est la multiplication par une unité d'un corps de nombres algébriques et ne pourra être différente de ± 1 que si Γ est somme d'homothétiques de sous-groupes du groupe additif des entiers algébriques.

Par exemple dans le cas du G-feuilletage de Lie sur T^3_A décrit dans 2.2.5, l'algèbre de Lie structurale est l'algèbre de Lie de **R** et l'image de la représentation de $\pi_1(M)$ dans $\mathrm{Aut}(\mathbf{R})$ est engendrée par la multiplication par la valeur propre de la matrice A associée au sous-espace V_s. C'est une unité du corps $Q(\sqrt{d})$, $d = \mathrm{Tr}^2 A - 4$; le groupe Γ est un sous-groupe du groupe des entiers de $Q(\sqrt{d})$.

4. COHOMOLOGIE BASIQUE

Une forme différentielle ω sur M est dite basique si, pour tout champ de vecteurs X tangents aux feuilles, la dérivée de Lie $L_X\omega$ et le produit intérieur $i_X\omega$ sont nuls. Cela revient à dire que si $f_\alpha : U_\alpha \to T$ est une projection locale du feuilletage, alors ω restreinte à U_α est le pull back par f_α d'une forme différentielle sur T.

Les formes basiques forment une algèbre fermée pour la différentielle ; la cohomologie de cette algèbre est appelée la cohomologie basique de M et notée $H^*_b(M;\mathbf{R})$. Si les feuilles sont les fibres d'une fibration de M sur B, alors la cohomologie basique est la cohomologie de B.

Reinhart avait démontré en 1959 ([32]) un théorème de finitude et de dualité pour la cohomologie basique d'un feuilletage riemannien en utilisant la théorie de Hodge. Cependant Carrière a remarqué en 1981 (*cf.* [5] que la dualité était fausse dans le cas du feuilletage sur T^3_A décrit en 2.2.5. On a donc été amené à repenser l'énoncé et la démonstration du théorème de Reinhart. La situation a été complètement clarifiée via le théorème de structure de Molino (*cf.* [11], [12], [23] et [34]).

Nous énonçons ici le théorème général de dualité en suivant essentiellement la formulation de Sergiescu dans [34] (voir aussi [20]).

La définition des formes basiques s'étend au cas où l'on considère des formes différentielles à valeur dans un faisceau localement constant $\mathcal{D}$ en espaces vectoriels sur **R** de dimension finie, et la cohomologie des formes basiques pour $\mathcal{F}$ à valeur dans $\mathcal{D}$ sera désignée par $H_b(M;\mathcal{D})$.

Soit $\mathcal{G}$ le faisceau de Molino (cf.3.3) dont la fibre est une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension p. Désignons par $|\Lambda^p\mathcal{G}|$ la valeur absolue de la puissance extérieure p-ème de $\mathcal{G}$: il est déterminé par le composé des représentations

$$\pi_1(M) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{|\det|} \mathbf{R}^*$$

Appelons faisceau dualisant le faisceau localement constant $\mathcal{D}$ sur M de fibre **R** qui est le produit tensoriel de $|\Lambda^p\mathcal{G}|$ par le faisceau $\mathcal{O}$ de fibre **R** tordu par l'orientation transverse de $\mathcal{F}$.

THÉORÈME.- *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage riemannien de codimension* q *sur une variété compacte* M *et soit $\mathcal{D}$ le faisceau dualisant. Alors* $H_b^*(M;R)$ *est de dimension finie et on a un accouplement naturel :*

$$H_b^k(M;R) \times H_b^{q-k}(M;\mathcal{D}) \longrightarrow H_b^q(M,\mathcal{D}) \approx R\ .$$

qui donne un isomorphisme de $H_b^k(M;R)$ *sur le dual de* $H_b^{q-k}(M;\mathcal{D})$.

En particulier $H_b^q(M;\mathbf{R}) \neq 0$ si et seulement si $\mathcal{D}$ est trivial et dans ce cas $H_b^k(M;\mathbf{R})$ est isomorphe à $H_b^{q-k}(M;\mathbf{R})$.

5. LES FLOTS RIEMANNIENS

Rappelons qu'un flot riemannien est un feuilletage riemannien orienté de dimension un. Un flot isométrique sur M est un feuilletage dont les feuilles sont les orbites d'un sous-groupe à un paramètre d'isométries de M. Un flot isométrique est évidemment riemannien ; le feuilletage sur T_A^3 décrit en 2.2.5 est un flot riemannien qui n'est pas isométrique.

Le théorème remarquable suivant a été démontré par Carrière ([5]) (*cf.* aussi Caron-Carrière [3]) en partant d'une idée de Thurston [36].

THÉORÈME.- *Soit $\mathcal{F}$ un flot riemannien sur une variété compacte* M. *Alors l'adhérence de toute feuille est un tore et le feuilletage restreint à cette adhérence est conjugué à un flot linéaire. En particulier l'algèbre de Lie structurale de $\mathcal{F}$ est abélienne.*

De plus (*cf.* Molino-Sergiescu [29]), $\mathcal{F}$ est isométrique si et seulement si le faisceau localement constant de Molino est globalement trivial ou encore si la cohomologie basique en degré maximum est non nulle.

Carrière démontre d'abord le théorème dans le cas d'un feuilletage de Lie (*cf.* [3] et Epstein [14]) et se ramène au cas général en utilisant le théorème de structure de Molino.

Pour une revue des résultats connus sur les flots riemanniens et une bibliographie sur ce sujet, voir l'excellent survol de Y.Carrière dans [8]. Almeida et Molino ([1]) ont donné une description des flots riemanniens sur les variétés de dimension 4 compactes.

6. FEUILLETAGES RIEMANNIENS SUR LES VARIÉTÉS 1-CONNEXES

Soit M une variété compacte simplement connexe munie d'un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$. Alors il résulte du théorème de structure de Molino (*cf.* 3.4) que l'algèbre de Lie structurale de $\mathcal{F}$ est abélienne et que le faisceau $\mathcal{G}$ de Molino est globalement trivial. Un feuilletage riemannien vérifiant cette propriété est appelé feuilletage de Killing par Molino.

E. Ghys a montré dans [16] qu'un tel feuilletage pouvait être approché par un feuilletage riemannien dont toutes les feuilles sont compactes (fibré de Seifert généralisé). Il en déduit notamment que si M est une sphère d'homologie rationnelle, alors $\mathcal{F}$ est soit un fibré de Seifert généralisé soit un flot isométrique.

Dans [21], on précise les résultats de Ghys en montrant qu'à tout feuilletage de Killing $\mathcal{F}$ sur une variété compacte M est associée une action d'un tore T^N sur un orbifold X compact, et un sous-groupe de Lie contractile L dense dans T^N opérant localement librement sur X. De plus il existe une application f, au sens orbifold, de M dans X tel que $\mathcal{F}$ soit l'image réciproque par f du feuilletage $\mathcal{F}_X$ sur X dont les feuilles sont les orbites de L. Au type d'homotopie rationnelle près, f est une fibration de M sur X dont la fibre est le revêtement d'holonomie commun F des feuilles.

Il en résulte que si M est simplement connexe, alors $\dim M \geq \dim X$ et la fibre F a une homologie de type fini. On peut en déduire que si M est simplement connexe avec caractéristique d'Euler-Poincaré non nulle, alors $\mathcal{F}$ est une fibration de Seifert généralisée.

Lorsque M est simplement connexe, on conjecture dans [21] que M est un fibré de Seifert généralisé de base X, le feuilletage $\mathcal{F}$ étant l'image inverse par la projection de $\mathcal{F}_X$.

7. FEUILLETAGES RIEMANNIENS A CROISSANCE POLYNOMIALE

7.1. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur une variété compacte M. Choisissons une métrique riemannienne sur M.

On dit que $\mathcal{F}$ est à croissance polynomiale de degré $\leq d$ si pour toute feuille il existe un polynome P de degré $\leq d$ tel que le volume de toute boule de rayon r contenue dans cette feuille (pour la métrique riemannienne induite) soit majoré par P(r).

On dit que $\mathcal{F}$ est Fölner (Carrière-Ghys [9]) si dans toute feuille il existe une suite K_n de sous-variétés à bord, de dimension égale à celle des feuilles, telles que $\mathrm{Vol}(\partial K_n)/\mathrm{Vol}(K_n)$ tend vers zero quand n tend vers l'infini.

Ces définitions sont indépendantes du choix de la métrique riemanienne sur M.

Yves Carrière a démontré le résultat remarquable suivant qui est l'aboutissement d'une série de résultats non triviaux sur la dynamique des actions de groupes.

7.2. THÉORÈME (Car [7]).- *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage riemannien sur une variété compacte connexe. Alors $\mathcal{F}$ est à croissance polynomiale* (resp. *Fölner*) *si et seulement si l'algèbre de Lie structurale de $\mathcal{F}$ est nilpotente* (resp. *résoluble*).

Nous ne pourrons donner ici qu'un plan de la démonstration. Tout d'abord, Carrière montre que, *via* le théorème de structure de Molino, il suffit de montrer le théorème dans le cas où $\mathcal{F}$ est un G-feuilletage de Lie à feuilles denses.

La condition de croissance polynomiale ou de Fölner peut se lire sur le groupe d'holonomie Γ dans G de $\mathcal{F}$.

7.3. De manière plus générale, pour un sous-groupe Γ d'un groupe de Lie connexe G, introduisons les notations suivantes. Si U est un ouvert de G et γ un élément de Γ, on note γ^U la restriction à $U \cap \gamma^{-1}(U)$ de la translation à gauche par γ. Le pseudogroupe de transformations de U engendré par les γ^U, $\gamma \in \Gamma$, sera désigné par Γ^U.

DÉFINITION.- *L'action de Γ sur G (sous-entendu par translations à gauche) est dite* de génération compacte *si pour un ouvert relativement compact U rencontrant toutes les orbites de Γ, il existe un ensemble fini S d'éléments de Γ tel que Γ^U soit engendré par les γ^U, $\gamma \in S$ (cette définition est un cas particulier de la définition donnée en* [20]).

On vérifie facilement que si cette condition est vérifiée pour U, elle l'est aussi pour tout ouvert V relativement compact rencontrant toutes les orbites de Γ. De plus les éléments de S engendrent Γ.

Pour $x \in U$, désignons par $B(x,n)$ l'ensemble des points de U de la forme $(\gamma_1^U \gamma_2^U \dots \gamma_k^U)x$, où $\gamma_i \in S \cup S^{-1}$ et $k \leq n$. Pour un ensemble fini K dans l'intersection de U avec une orbite de Γ, on désigne par ∂K l'ensemble des éléments x de K tel qu'il existe $\gamma \in S \cup S^{-1}$ avec $\gamma^U x \notin K$.

On dira que *l'action de G est à croissance polynomiale* de degré $\leq d$ si, pour tout $x \in U$, il existe un polynome P de degré $\leq d$ tel que le cardinal de $B(x,n)$ soit $\leq p(n)$ pour tout $n \in N$.

L'action de Γ sur G est Fölner si dans toute orbite de Γ dans U, il existe une suite d'ensembles finis K_n telle que $\mathrm{Card}(\partial K_n)/\mathrm{Card}(K_n)$ tende vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

On vérifie que ces conditions sont indépendantes du choix de U et du système fini de générateurs de Γ^U.

Enfin si Γ est le groupe d'holonomie d'un G-feuilletage de Lie $\mathcal{F}$ sur une variété compacte M, alors l'action de Γ sur G est de génération compacte et $\mathcal{F}$ est à croissance polynomiale de degré $\leq d$ ou Fölner si et seulement si c'est le cas pour l'action de Γ sur G.

Le théorème 7.2 sera donc une conséquence du théorème suivant.

7.4. THÉORÈME.- *Soit* Γ *un sous-groupe dense d'un groupe de Lie connexe* G *telle que l'action de* Γ *sur* G *soit de génération compacte. Alors*

1) *l'action de* Γ *sur* G *est Fölner si et seulement si* G *est résoluble ;*
2) *l'action de* Γ *sur* G *est polynomiale si et seulement si* G *est nilpotent.*

Il est facile de voir que si l'action de Γ sur G est à croissance polynomiale, alors elle est Fölner. Il suffit de prendre pour K_n les boules $B(x,n)$. Il est connu (*cf.* C. Series [35], R. Brooks [2]) que si l'action de Γ sur G est Fölner, elle est aussi moyennable (pour une définition de moyennable, voir R. Zimmer [41] et Carrière-Ghys [9]). La réciproque est aussi vraie (*cf.* Carrière-Ghys [9]).

L'assertion 1) découle alors d'un théorème de Zimmer [42] affirmant que *si* Γ *est un sous-groupe dense dans* G, *alors l'action de* Γ *sur* G *est moyennable si et seulement si* G *est résoluble*.

Ce théorème avait été conjecturé par Connes et Sullivan et indépendamment par Carrière et Ghys qui l'avaient démontré dans un cas particulier ([9]). La démonstration de Zimmer utilise à fond les techniques développées par Margulis et exposées dans [41] pour établir la superrigidité.

Supposons maintenant que l'action de Γ sur G est à croissance polynomiale. Fixons un ensemble fini S de générateurs de G. Pour tout ouvert relativement compact U de G, notons $\mathcal{H}(U,S)$ le pseudogroupe engendré par les γ^U, $\gamma \in S$. Alors le type de croissance de ce pseudogroupe (calculé avec le système de générateurs S) est dominé par le type de croissance de Γ^U, donc est polynomial. On voudrait pouvoir en déduire que la croissance de Γ est elle-même polynomiale ; il suffirait alors d'appliquer un théorème de Tits [40] et de Wolf [43] pour en conclure que G est nilpotent. Malheureusement un grand détour est nécessaire pour arriver à cette conclusion.

En utilisant le théorème de Zimmer et le fait que la croissance polynomiale implique la moyennabilité, Carrière se ramène au cas où G est résoluble. Par un argument très délicat, il montre que si Γ est dense dans G résoluble, et si pour tout ouvert relativement compact U de G, la croissance de $\mathcal{H}(U,S)$ est polynomiale (où S est un système fixé de générateurs de Γ), alors le centre de Γ est non discret. Par récurrence sur la dimension de G, il en déduit que G doit être nilpotent.

8. REMARQUES FINALES

Grâce au théorème de structure de Molino, on a vu plus haut que beaucoup de propriétés qualitatives des feuilletages riemanniens sont relativement bien comprises.

En revanche, le problème de la classification des feuilletages riemanniens à difféomorphisme près est beaucoup plus difficile (comme le montre par exemple le cas des 1-formes fermées, *cf.* 2.1). On peut cependant se proposer (voir [20]) un but moins ambitieux, à savoir la classification à équivalence différentiable près des pseudogroupes d'holonomie des feuilletages riemanniens complets. Par exemple, si l'algèbre de Lie structurale est réduite à zéro, il s'agit de classer à difféomorphisme près les orbifolds. On a une réponse assez complète dans le cas où toutes les feuilles sont denses (voir [20]) et aussi dans le cas où la codimension des adhérences des feuilles est petite et l'algèbre de Lie structurale abélienne (voir [1] et les références dans [21]). Cependant, le problème de la classification des pseudogroupes d'holonomie des feuilletages riemanniens sur des variétés *compactes* reste essentiellement ouvert lorsque l'algèbre de Lie structurale n'est pas de type compact ou nilpotente (*cf.* 2.2.4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. ALMEIDA - P. MOLINO - *Flots riemanniens sur les 4-variétés compactes*, Tohoku Math. Jour. 38 (1986), 313-326.

[2] R. BROOKS - *Some Riemannian and dynamical invariants of foliations*, in Differential Geometry, Proceed. Maryland, 1981-82. Progress in Math. 32, Birkhäuser, 56-72.

[3] P. CARON - Y. CARRIÈRE - *Flots transversalement de Lie* $\mathbb{R}^n$, *flots de Lie minimaux*, C.R. Ac. Sci. Paris 260(1980), 477-478.

[4] Y. CARRIÈRE - *Flots riemanniens et feuilletages géodésibles de codimension un*, Thèse de troisième cycle, Université de Lille I, 1981.

[5] Y. CARRIÈRE - *Flots riemanniens*, dans "Structures transverses des feuilletages ", Astérisque 116 (1984), 393-400.

[6] Y. CARRIÈRE - *Les propriétés topologiques des flots riemanniens retrouvées à l'aide du théorème des variétés presque plates*, Math.Zeitschrift 186 (1984), 393-400.

[7] Y. CARRIÈRE - *Feuilletages riemanniens à croissance polynomiale*, Comm. Math. Helv. 63 (1988), 1-20.

[8] Y. CARRIÈRE - *Variations on Riemannian flows*, Appendix A , p. 217-234 in [28].

[9] Y. CARRIÈRE - E.GHYS - *Relations d'équivalences moyennables sur les groupes de Lie*, C.R. Acad. Sci. Paris 300 (1985), 677-680.

[10] L. CONLON - *Transversally parallelizable foliations of codimension* 2, Trans. Am. Math. Soc., 194 (1974), 79-102.

[11] A. EL KACIMI - G. HECTOR - *Décomposition de Hodge basique pour un feuilletage riemannien*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 36 (1986), 207-227.

[12] A. EL KACIMI - V. SERGIESCU - G. HECTOR - *La cohomologie basique d'un feuilletage riemannien est de dimension finie*, Math. Zeitschrift 188 (1985), 593-599.

[13] D.B.A. EPSTEIN - *Foliations with all leaves compact,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 26 (1976), 265-282.

[14] D.B.A. EPSTEIN - *Transversally hyperbolic* 1-*dimensional foliations*, in "Structures transverses des feuilletages" Astérisque 116 (1984), 53-69.

[15] E. FEDIDA - *Sur les feuilletages de Lie,* C.R. Acad. Sci. Paris 272 (1971), 999-1001.

[16] E. GHYS - *Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes,* Annal. Inst. Fourier, Grenoble 34 (1984), 203-223.

[17] E. GHYS - *Groupes d'holonomie des feuilletages de Lie,* Indag. Math. 47 (1985), 173-182.

[18] E. GHYS - V. SERGIESCU - *Stabilité et conjugaison pour certains feuilletages*, Topology 19 (1980), 179-197.

[19] D. GROMOLL - K. GROVE - *The low-dimensional metric foliations of Euclidean spheres,* Journ. of diff. Geometry 28 (1988), 143-156 .

[20] A. HAEFLIGER - *Pseudogroups of local isometries*, in Proceed. Vth Coll. in Differential Geometry, ed. L.A. Cordero, Research notes in Math. 131, Pitman (1985), 174-197.

[21] A. HAEFLIGER - E. SALEM - *Riemannian foliations on* 1-*connected manifolds and actions of tori on orbifolds*, à paraître dans Ill. Journ. of Math.

[22] R. HERMANN - *A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fiber bundle,* Proc. AMS 11 (1960), 236-242.

[23] F.W. KAMBER - P. TONDEUR - *Duality theorems for foliations*, in "Structures transverses des feuilletages",Astérisque, 116 (1984), 108-116.

[24] S. KOBAYASHI - *Tranformation groups in differential geometry*, Ergebnisse der Mathematik 70, Springer (1972).

[25] J. MEYER - e-*foliations of codimension two*, Journ. of Diff. Geometry 12 (1977), 583-594.

[26] P. MOLINO - *Etude des feuilletages transversalement complets et applications,* Ann. Inst. Ec. norm. Sup. 10 (1977), 289-307.

[27] P. MOLINO - *Géométrie globale des feuilletages riemanniens,* Ned. Ak. van Wet., Indag. Math. 85 (1982), 45-76.

[28] P. MOLINO - *"Riemannian Foliations",* Birkhäuser, Progress in Mathematics (1988).

[29] P. MOLINO - V. SERGIESCU - *Deux remarques sur les flots riemanniens*, Manuscripta Math. 51 (1985), 145-161.

[30] G. REEB - *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées,* Hermann, Paris (1952).

[31] B. REINHART - *Foliated manifolds with bundle-like metrics*, Ann. of Math. 6 9(1959), 119-132.

[32] B. REINHART - *Harmonic integrals on foliated manifolds*, Amer. Jour. of Math. 81 (1959), 529-536.

[33] E. SALEM - *Une généralisation du théorème de Myers-Steenrod aux pseudogroupes d'isométries locales,* Ann. Inst. Fourier 38 (1988), 185-200.

[34] V. SERGIESCU - *Cohomologie basique et dualité des feuilletages riemanniens,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 35 (1985), 137-158.

[35] C. SERIES - *Foliations of polynomial growth are hyperfinite,* Isr. J. Math. 34 (1979), 245-258.

[36] J.-C.SIKORAV - *Formes différentielles fermées non singulières sur le* n*-tore*, Comm. Math. Helv. 57 (1982), 79-106.

[37] W. THURSTON - *The geometry and topology of* 3*-manifolds*, Mimeographed Notes, Princeton University (1978).

[38] W. THURSTON - *A norm on the homology of* 3*-manifolds*, preprint.

[39] D. TISCHLER - *On fibering certain manifolds over* S^1, Topology 9 (1970), 153-154.

[40] J. TITS - *Free subgroups in linear groups*, J. of Algebra 20 (1972), 250-270.

[41] R. ZIMMER - *"Ergodic theory and Semisimple groups"*, Birkhäuser, Boston, 1984.

[42] R. ZIMMER - *Amenable actions and dense subgroups of Lie groups*, J. Funct. Anal. 72, 58-64.

[43] J.A. WOLF - *Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds*, J. Diff. Geometry 2 (1968), 421-446.

André HAEFLIGER

Université de Genève
Section de Mathématiques
2-4 rue du Lièvre
Case Postale 240
CH-1211 GENEVE
(Suisse)