Astérisque

GUY HENNIART

Cyclotomie et valeurs de la fonction Γ

Astérisque, tome 161-162 (1988), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 688, p. 53-72
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1987-1988__30__53_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 1987
40ème année, 1987-88, n° 688

CYCLOTOMIE ET VALEURS DE LA FONCTION Γ
[d'après G. Anderson]

par Guy HENNIART

0. INTRODUCTION

Cet exposé aurait pu s'intituler de diverses manières, par exemple :"la cyclotomie, encore aujourd'hui", en réponse à [We 3], ou encore "motifs et valeurs de fonctions L ". Le résultat que nous avons en vue, dû à G. Anderson [A 1], offre un ancrage concret à la vision moderne des valeurs spéciales de fonctions L arithmético-géométriques, en termes de motifs et de leurs périodes [De 2]. Un cas important où les conjectures de [De 2] sont démontrées est celui des fonctions L attachées aux caractères de Hecke d'un corps de nombres [Bl,Ha-Sch] ; dans notre cas, celui des caractères de Hecke associés aux sommes de Jacobi, on peut en outre exprimer les périodes en termes de valeurs de la fonction gamma d'Euler.

Les caractères de Hecke apparaissent chez Hecke (sous le nom de Grössencharaktere) vers 1918, à travers leurs propriétés analytiques. Pour un corps de nombres K , les caractères de Hecke algébriques sont (d'un point de vue moderne) les caractères (à valeurs dans $\bar{\mathbb{Q}}^\times$) du groupe I_K des idèles de K , dont la restriction au sous-groupe $K^\times$ est donnée par un caractère algébrique. La théorie du corps de classes, élaborée dans les décennies suivantes, donne une bijection canonique entre ceux dont la restriction à $K^\times$ est triviale et les caractères du groupe de Galois de $\bar{\mathbb{Q}}$ sur K . Au début des années cinquante, des caractères plus généraux apparaissent à nouveau au premier plan : les fonctions L de courbes elliptiques et plus généralement de variétés abéliennes sur K , *à multiplication complexe*, sont produits de fonctions L de caractères de Hecke algébriques de K [Sh-Ta]. D'autre part, le nombre de points modulo un nombre premier de certaines variétés algébriques sur $\mathbb{Q}$ (dont les hypersurfaces de Fermat) peut s'exprimer en termes de somme d'exponentielles [We 1], ce qui a conduit Weil [We 2] à introduire les caractères de Hecke associés aux sommes de Jacobi. Le sujet de notre exposé est le dernier avatar de ce second aspect, mais, comme nous le verrons, il est fortement lié au premier [DMOS]. On pourra trouver dans [Sch] une excellente introduction aux idées évoquées ici, avec beaucoup plus de détails.

1. CARACTÈRES DE HECKE ATTACHÉS AUX SOMMES DE JACOBI

On notera $\bar{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. Un corps de nombres K sera une extension finie de $\mathbb{Q}$ dans $\bar{\mathbb{Q}}$, et on notera $\mathfrak{g}(K)$ le groupe de Galois de $\bar{\mathbb{Q}}$ sur K ; on pose $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\mathbb{Q})$ et on note $\rho \in \mathfrak{g}$ la conjugaison complexe.

Si K est un corps de nombres, un homomorphisme α de $K^\times$ dans $\bar{\mathbb{Q}}^\times$ est dit *algébrique* si son expression dans une base de K sur $\mathbb{Q}$ est donnée par des fractions rationnelles en les coordonnées. De manière équivalente, il existe une fonction ϑ, le *type* de α, de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(K)$ dans $\mathbb{Z}$ telle que

$$\alpha(x) = \prod_{\sigma\in\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(K)} (\sigma x)^{\vartheta(\sigma)} . \tag{1.1}$$

Soit $\mathfrak{m}$ un idéal de (l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de) K, $I_{\mathfrak{m}}$ le groupe des idéaux fractionnaires de K premiers à $\mathfrak{m}$. Un homomorphisme $\chi : I_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}^\times$ est un caractère de Hecke algébrique, de conducteur $\leq \mathfrak{m}$, s'il existe un homomorphisme algébrique χ_{alg} de K dans $\bar{\mathbb{Q}}^\times$ tel que, pour $x \in K^\times$, totalement positif et congru à 1 (multiplicativement) modulo $\mathfrak{m}$, on ait

$$\chi((x)) = \chi_{alg}(x) . \tag{1.2}$$

Alors χ_{alg} est déterminé par χ et son type est le *type à l'infini de* χ. Si $\chi((x)) = \chi_{alg}(x)$ pour x totalement positif et congru à 1 modulo un idéal $\mathfrak{m}'$ de K, χ se prolonge en un caractère de Hecke algébrique $I_{\mathfrak{m}+\mathfrak{m}'} \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}^\times$, de conducteur $\leq \inf(\mathfrak{m},\mathfrak{m}')$. On *identifie* les caractères de Hecke qui coïncident sur leur domaine commun de définition et on appelle *conducteur* le plus petit idéal $\mathfrak{m}$ tel que χ soit de conducteur $\leq \mathfrak{m}$. On dit que χ est *non ramifié hors de* $m \in K$ si le conducteur de χ n'est divisible que par les idéaux premiers divisant m.

On va dans ce § 1 attacher des caractères de Hecke algébriques de corps de nombres à des sommes de Gauss et de Jacobi.

Soient p un nombre premier, ψ un caractère additif non trivial de $\mathbb{F}_p$, $\psi : \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{C}^\times$. À tout caractère multiplicatif non trivial χ d'une extension finie k de $\mathbb{F}_p$, on associe sa *somme de Gauss* :

$$g(\chi,\psi) = - \sum_{x\in k^\times} \chi^{-1}(x)\ \psi \circ \mathrm{Tr}_{k/\mathbb{F}_p}(x) . \tag{1.3}$$

(attention au signe moins !).

Si χ_1 et χ_2 sont deux tels caractères, vérifiant $\chi_1\chi_2 \neq 1$, on leur associe aussi la *somme de Jacobi* (*classique*).

$$J(\chi_1,\chi_2) = g(\chi_1,\psi)\, g(\chi_2,\psi)\, g(\chi_1\chi_2,\psi)^{-1} = - \sum_{\substack{x_1+x_2=1 \\ x_1,x_2\notin\{0,1\}}} \chi_1^{-1}(x_1)\ \chi_2^{-1}(x_2) \tag{1.4.}$$

qui ne dépend pas de ψ.

Plus généralement, si $\chi_1,\ldots,\chi_r$ sont r caractères non triviaux $k^\times \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}^\times$, de produit χ_0 non trivial, on peut considérer

(1.5) $$J(\chi_1,\dots,\chi_r) = g(\chi_0,\psi)^{-1} \prod_{i=1}^{r} g(\chi_i,\psi) ,$$

ne dépendant pas de ψ.

On sait le rôle important que peuvent jouer les sommes de Gauss dans les lois de réciprocité, ne serait-ce que pour la loi de réciprocité quadratique [We 3]. On sait aussi que des sommes de Gauss (un peu) plus générales apparaissent comme constantes d'équations fonctionnelles de fonctions L galoisiennes ou automorphes. Le théorème de Hasse - Davenport, qui dit, avec les notations introduites plus haut, que si k' est une extension finie de k, de degré d, on a

(1.6) $$g(\chi \circ N_{k'/k}, \psi) = g(\chi, \psi)^d ,$$

peut s'interpréter en termes de telles constantes. Enfin les sommes de Jacobi interviennent comme racines (ou pôles, selon la dimension) des fonctions zêta des variétés $\Sigma\, a_i X_i^m = 0$ sur les corps finis [We 1], comme mentionné plus haut. L'aspect des sommes de Gauss que nous voulons développer est plutôt rattaché à cette dernière propriété. Il s'agit de faire varier p, ψ et χ de manière cohérente, en relevant la situation sur un corps de nombres K.

Notons e l'application $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ induite par $x \longmapsto \exp(2\pi i x)$. Pour chaque nombre premier p, on obtient un caractère additif non trivial de $\mathbb{F}_p$:

(1.7) $$\mathbb{F}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} (1/p\mathbb{Z})/\mathbb{Z} \xrightarrow{e} \mathbb{C}^\times .$$

Pour chaque entier $m \geq 1$, on note μ_m le groupe des racines de l'unité d'ordre m dans $\bar{\mathbb{Q}}^\times$. Le groupe $k^\times$ se relève en caractéristique 0 comme le groupe μ_{q-1}. Les sommes de Gauss apparaissent alors plutôt comme des résolvantes de Lagrange. Introduisons le formalisme qui permettra de décrire commodément la classe de caractères de Hecke envisagée.

On note $\mathbb{B}$ le groupe abélien libre sur $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} - \{0\}$, dont les éléments sont écrits $\Sigma\, n_a[a]$. Pour $a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on note $\langle a \rangle$ le représentant de a dans $[0,1[$ et, par linéarité, on obtient une fonction $\langle\ \rangle\ \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{Q}$: $\langle \Sigma\, n_a[a] \rangle = \Sigma\, n_a \langle a \rangle$. On pose aussi $w(\Sigma\, n_a[a]) = \Sigma\, n_a \in \mathbb{Z}$. Pour chaque nombre premier p, on se donne une extension v_p à $\bar{\mathbb{Q}}$ de la valuation p-adique de $\mathbb{Q}$; en particulier, tout corps de nombres possède un idéal premier privilégié au-dessus de p. On note $\mathbb{B}_{(p)}$ le sous-groupe de $\mathbb{B}$ engendré par les éléments de la forme $\sum_{j=1}^{f} [p^j a]$, où $f \in \mathbb{N}^\times$, $a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} - \{0\}$ vérifient $(p^f - 1)a = 0$.

PROPOSITION 1.- i) *Il existe un unique homomorphisme*

$$g_p : \mathbb{B}_{(p)} \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}^\times$$

tel que, sur un générateur $\sum_{j=1}^{f} [p^j a] = \mathbf{a}$ *de* $\mathbb{B}_p$ *, on ait, en posant* $q = p^f$, (1.8) $$g_p\left(\sum_{j=1}^{f} [p^j a]\right) = - \sum_{\xi\in\mu_{q-1}} \xi^{-\langle a\rangle(q-1)}\, e\left(\frac{t(q,\xi)}{p}\right)$$

où $t(q,\mathbb{Z})$ *est un entier congru à* $\sum_{j=1}^{f} \xi^{p^j}$ *modulo l'idéal premier privilégié de* $\mathbb{Q}(\mu_{q-1})$ *au-dessus de* p .

ii) *pour* $\mathfrak{a} \in \mathbb{B}_{(p)}$ *, on a*

(1.9) $$v_p(g_p(\mathfrak{a})) = \langle \mathfrak{a}\rangle$$

(1.10) $$|g_p(\mathfrak{a})|^2 = p^{w(\mathfrak{a})} .$$

La partie i) n'est qu'une reformulation de l'identité de Hasse - Davenport, (1.10) exprime l'égalité $|g(\chi,\psi)|^2 = q$, tandis que (1.9) traduit le théorème de Stickelberger [We 2] donnant la décomposition en idéaux premiers de l'idéal principal $(g(\chi,\psi)^{q-1})$ de $\mathbb{Q}(\mu_{q-1})$.
On note $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}^\times$ le caractère cyclotomique :

(1.11) $$\sigma\xi = \xi^{\psi(\sigma)} \quad \text{pour toute racine de l'unité } \xi \text{ dans } \bar{\mathbb{Q}}^\times .$$

On fait agir $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par $\sigma[a] = [\psi(\sigma)a]$, action qu'on étend à $\mathbb{B}$ par linéarité. Pour tout corps de nombres K , on note $\mathbb{B}_K$ le sous-groupe de $\mathbb{B}$ fixé par $\mathfrak{g}(K)$; on note $\mathbb{B}^o$ le sous-groupe des éléments $\Sigma\, n_a[a]$ de $\mathbb{B}$ tels que $\Sigma\, n_a a$ soit nul dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et on pose $\mathbb{B}_K^o = \mathbb{B}^o \cap \mathbb{B}_K$.
Pour $\mathfrak{a} \in \mathbb{B}$, on note $m(\mathfrak{a})$ le ppcm des dénominateurs des $a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tels que n_a soit non nul.

Soit K un corps de nombres. Soit $\mathfrak{a} \in \mathbb{B}_K$ et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de K ne divisant pas $m(\mathfrak{a})$. Soit p le nombre premier dans $\mathfrak{p}$ et soit $D(K,\mathfrak{p})$ l'ensemble des éléments σ de $\mathfrak{g}$ tels que $\sigma\mathfrak{p}$ soit l'idéal privilégié de K au-dessus de p . On pose

(1.12) $$g_K(\mathfrak{a},\mathfrak{p}) = g_p\left(\sum_{\sigma\in D(k,\mathfrak{p})/\mathfrak{g}(K)} \sigma^{-1}\mathfrak{a}\right) .$$

On définit aussi $\vartheta_K(\mathfrak{a}) : \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(K) \longrightarrow \mathbb{Q}$ par

(1.13) $$\vartheta_K(\mathfrak{a})(\sigma) = \langle\sigma^{-1}\mathfrak{a}\rangle .$$

THÉORÈME 1.- *Pour tout corps de nombres* K *et tout* $\mathfrak{a} \in \mathbb{B}_K^o$ *, il existe un (unique) caractère de Hecke algébrique* $J_K(\mathfrak{a})$ *de* K *tel que*

i) $J_K(\mathfrak{a})$ *soit non ramifié hors de* $m(\mathfrak{a})$;

ii) *pour tous les idéaux premiers* $\mathfrak{p}$ *de* K *ne divisant pas* $m(\mathfrak{a})$ *, on ait*

(1.14) $$J_K(\mathfrak{a})(\mathfrak{p}) = g_K(\mathfrak{a},\mathfrak{p}) .$$

Remarque 1.- Il découle du théorème de Stickelberger que le type à l'infini de $J_K(\mathfrak{a})$ est $\vartheta_K(\mathfrak{a})$ (qui prend des valeurs entières quand $\mathfrak{a} \in \mathbb{B}^o$). De plus J_K est équivariant sous l'action de $\mathfrak{g}$ et en particulier $J_K(\mathfrak{a})$ prend ses valeurs dans le sous-corps $K^\times$ de $\bar{\mathbb{Q}}^\times$.

Les caractères de Hecke algébriques de K obtenus de cette façon seront appelés *caractères de Hecke attachés aux sommes de Jacobi* ou plus simplement *caractères de Jacobi*. Le théorème précédent a une longue histoire, la notion de caractères de Jacobi ayant été successivement élargie [We 2, We 4, De 1, Ku-Li] jusqu'à la généralité présente due à [Ku]. Anderson présente une preuve du théorème 1 indépendante de [Ku] et proche dans l'esprit de [De 1], qui était moins précis quant à la ramification.

Exemples.- 1) Les caractères de Jacobi de $\mathbb{Q}$ sont les caractères $\chi_d N^r$ où N désigne le caractère norme (valeur absolue) et χ_d le caractère quadratique attaché à $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, où l'on impose seulement que d soit strictement positif si r est pair et strictement négatif si r est impair [Br-Li]. Plus généralement, les caractères de Jacobi des corps totalement réels ont été déterminés dans [Br] (mais la définition utilisée là est celle de [Ku-Li], plus restrictive que [Ku]).

2) Si K est un corps quadratique imaginaire de nombre de classes 1 et de discriminant < -8, alors on obtient tous les caractères de Hecke algébriques de K, à valeurs dans K, équivariants sous $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ [Br-Li].

3) Soit E la courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ d'équation $y^2 = x^3 - x$. Sur $K = \mathbb{Q}(i)$, elle a des multiplications complexes par $\mathbb{Z}[i]$. Il lui est donc attaché un caractère de Hecke algébrique de K de type $\mathfrak{g}(K) \longmapsto 1$ $\mathfrak{g} - \mathfrak{g}(K) \longmapsto 0$, qui n'est autre que $J_K(\mathfrak{a}_4)$ où $\mathfrak{a}_4 = \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{3}{4}\right] - \left[\frac{1}{4}\right]$.

4. VALEURS DE LA FONCTION Γ

La fonction Γ d'Euler est définie par $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^s \frac{dx}{x}$ pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, et prolongée à tout le plan complexe en une fonction méromorphe de s, dont les pôles sont simples, en les entiers négatifs. On a

(2.1) $$s\Gamma(s) = \Gamma(s+1) \quad \text{et} \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^\times .$$

(2.2) $$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \pi/\sin\pi s .$$

(2.3) $$\prod_{j=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{s+j}{m}\right) = (2\pi)^{(m-1)/2}\, m^{-s+1/2}\, \Gamma(s) .$$

Pour $\mathfrak{a} = \Sigma\, n_a[a] \in \mathbb{B}$, on pose

(2.4) $$\Gamma(\mathfrak{a}) = \prod_a \Gamma(\langle a\rangle)^{n_a}$$ et

(2.5) $$\Phi(\mathfrak{a}) = \{\sigma \in \mathfrak{g} \mid \langle\sigma\mathfrak{a}\rangle \geq \langle\sigma\rho\mathfrak{a}\rangle\}$$

(on rappelle que ρ désigne la conjugaison complexe).

Soient K un corps de nombres, abélien sur $\mathbb{Q}$, K^+ son sous-corps totalement réel maximal, Δ^+ le discriminant de K^+, Δ celui de K, $\Delta^- = \Delta/\Delta^+$, d le degré de K^+ sur $\mathbb{Q}$.

Soit $\mathfrak{a} \in \mathbb{B}^o_K$. Notons $L_K(s,\mathfrak{a})$ la fonction L de $J_K(\mathfrak{a})$, définie pour Re s assez grand par la formule :

$$L_K(s,\mathfrak{a}) = \Pi\ (1 - J_K(\mathfrak{a})(\mathfrak{p})\ N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}, \tag{2.6}$$

(où le produit est étendu aux idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de K ne divisant pas le conducteur de $J_K(\mathfrak{a})$), et prolongée méromorphiquement à $\mathbb{C}$ tout entier. On peut définir des facteurs à l'infini $L_{K,\infty}(s,\mathfrak{a})$ (produits de facteurs du type $\pi^{-(s-s_0)/2}\ \Gamma\left(\frac{s-s_0}{2}\right)$) de sorte que posant

$$\Lambda_K(s,\mathfrak{a}) = L_{K,\infty}(s,\mathfrak{a})\ L_K(s,\mathfrak{a}), \tag{2.7}$$

on ait l'équation fonctionnelle

$$\Lambda_K(s,\mathfrak{a}) = \varepsilon_K(s,\mathfrak{a})\ \Lambda_K(1-s,-\mathfrak{a}) \tag{2.8}$$

où $\varepsilon_K(s,\mathfrak{a})$ est un monôme $A\,B^{-s}$, B étant déterminé par le conducteur de $J_K(\mathfrak{a})$ et $A \in \mathbb{C}^\times$ étant la constante de l'équation fonctionnelle (constante dont on a déjà parlé plus haut).

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\Sigma_K(\mathfrak{a}) = \{n \in 2\mathbb{Z} \mid n > w(\mathfrak{a}) + 1/2\} \quad \text{si } K = K^+, \tag{2.9}$$

$$\Sigma_K(\mathfrak{a}) = \{n \in \mathbb{Z} \mid \langle\sigma\rho\mathfrak{a}\rangle < n \le \langle\sigma\mathfrak{a}\rangle \ \text{ pour tout } \sigma \in \Phi(\mathfrak{a})\}, \tag{2.9 bis}$$

si $K \neq K^+$.

Remarque 2.- L'ensemble Crit(a) des entiers n tels que ni $L_{K,\infty}(s,\mathfrak{a})$ ni $L_{K,\infty}(1-s,-\mathfrak{a})$ n'ont de pôle ou de zéro en $s = n$ est $\Sigma_K(\mathfrak{a})$ si $K \neq K^+$ et $\Sigma_K(\mathfrak{a}) \cup (w(\mathfrak{a}) + 1 - \Sigma_K(\mathfrak{a}))$ si $K = K^+$.

THÉORÈME 2 [A 1, Thm. 2].- *Soit* K *un corps de nombres abélien sur* $\mathbb{Q}$. *Pour tout* $\mathfrak{a} \in \mathbb{B}^o_K$ *et* $n \in \Sigma_K(\mathfrak{a})$, *on a*

$$\Omega_K(n,\mathfrak{a})\ L_K(n,\mathfrak{a}) \in \mathbb{Q}, \quad \textit{avec} \tag{2.10}$$

$$\Omega_K(n,\mathfrak{a}) = \pi^{-nd}\ \sqrt{|\Delta^{(-)n}|}\ \prod_{\sigma\in\Phi(\mathfrak{a})/\mathfrak{g}(K)} \Gamma(\sigma\mathfrak{a}) \in \mathbb{C}^\times. \tag{2.11}$$

Il s'agit de la conjecture, dite hypothèse Γ, de Lichtenbaum [Li], qui a été prouvée si K est totalement réel dans [Br] et si K est quadratique imaginaire de nombre de classes 1 dans [Br-Li]. Le fait que, sous les hypothèses du théorème, on ait

$$\Omega_K(n,\mathfrak{a})\ L_K(n,\mathfrak{a}) \in \overline{\mathbb{Q}}$$

est dû à Lichtenbaum [Li].

On peut déduire aussi, des techniques de preuve du théorème 2, des relations entre valeurs de la fonction Γ. Par exemple, il peut arriver que deux éléments de $\mathbb{B}^o$ distincts donnent le même caractère de Jacobi :

THÉORÈME 3 [Sch, III, Thm. 4.4.1 et A 1, 8.6].- *Soit* K *un corps de nombres abélien sur* $\mathbb{Q}$. *Soient* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *dans* $\mathbb{B}_K^o$. *On identifie* $K \otimes \mathbb{C}$ *à* $\mathbb{C}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(K)}$

i) *Si* $J_K(\mathfrak{a}) = J_K(\mathfrak{b})$, *alors*

$$(\Gamma(\sigma\mathfrak{a}))_{\sigma\in\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(K)} = (\Gamma(\sigma\mathfrak{b}))_{\sigma\in\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(K)} \quad \textit{dans} \quad (K\otimes\mathbb{C})^\times/K^\times .$$

ii) *Si* $\Sigma_K(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$ *et* $L_K(s,\mathfrak{a}) = L_K(s,\mathfrak{b})$, *alors*

$$\Sigma_K(\mathfrak{a}) = \Sigma_K(\mathfrak{b}) \qquad \textit{et}$$

$$\Omega_K(n,\mathfrak{a}) = \Omega_K(n,\mathfrak{b}) \quad \textit{dans} \quad \mathbb{C}^\times/\mathbb{Q}^\times , \ \textit{pour tout} \ n \in \Sigma_K(\mathfrak{a}) .$$

Il peut arriver aussi que $J_K(\mathfrak{a})$ soit proche d'un caractère de Hecke d'ordre fini :

THÉORÈME 4.- *Soit* K *un corps de nombres abélien sur* $\mathbb{Q}$. *Soient* $\mathfrak{a} \in \mathbb{B}_K^o$ *et* $r \in \mathbb{Z}$ *tels que* $\langle\sigma\mathfrak{a}\rangle = r$ *pour tout* $\sigma \in \mathfrak{g}$. *Considérons le caractère de Hecke d'ordre fini* $N^{-r} J_K(\mathfrak{a})$ *comme un caractère de* $\mathfrak{g}(K)$, *et posons* $\widetilde{\Gamma}(\mathfrak{a}) = (2\pi i)^{-r}\,\Gamma(\mathfrak{a})$. *On a alors :*

i) $\widetilde{\Gamma}(\mathfrak{a}) \in \bar{\mathbb{Q}}^\times/\mathbb{Q}^\times$;

ii) $\sigma\widetilde{\Gamma}(\mathfrak{a}) = (N^{-r} J_K(\mathfrak{a}))(\sigma)\cdot\widetilde{\Gamma}(\mathfrak{a})$ *pour* $\sigma \in \mathfrak{g}(K)$;

iii) $\widetilde{\Gamma}(\mathfrak{a}) / \tau\widetilde{\Gamma}(\mathfrak{a}) \in K^\times$ *et*

$$\sigma(\widetilde{\Gamma}(\mathfrak{a}) / \tau\widetilde{\Gamma}(\mathfrak{a})) = \widetilde{\Gamma}(\sigma\mathfrak{a}) / \tau\widetilde{\Gamma}(\sigma\mathfrak{a}) \quad \textit{pour} \ \sigma \ \textit{et} \ \tau \ \textit{dans} \ \mathfrak{g} .$$

La partie i) est due à Koblitz et Ogus (appendice à [De 2]). La partie ii) est prouvée au signe près dans [Gr-Ko] par des méthodes p-adiques. Pour ii) et iii), voir [De 2, p. 339 ; Ku-Li ; DMOS I, § 7].

Esquissons l'idée de la preuve des théorèmes 1 et 2. Nous développerons cette esquisse dans les paragraphes suivants.

Les sommes de Jacobi interviennent dans le comptage de points des hypersurfaces de Fermat sur les corps finis, et par conséquent dans leur cohomologie ℓ-adique. D'autre part, des valeurs de la fonction Γ apparaissent comme périodes de ces variétés de Fermat, i.e. dans la structure de Hodge de leur cohomologie de Betti. On voudrait, pour chaque $\mathfrak{a} \in \mathbb{B}^o$, "découper" le morceau de la cohomologie des hypersurfaces de Fermat qui lui correspond et prouver le résultat par comparaison des cohomologies. C'est précisément ce qu'on fait en se plaçant dans la théorie des motifs ; on utilise les motifs de Hodge absolus de Deligne [DMOS, I] qui ont l'avantage de ne pas faire appel aux "conjectures standard" [Sa, Appendice]. Les motifs de Hodge absolus (sur $\mathbb{Q}$) forment une catégorie tannakienne [Sa] équivalente, par la réalisation de Betti, à la catégorie des représentations sur $\mathbb{Q}$ (algébriques, de dimension finie) d'un groupe pro-algébrique $\mathcal{G}$, le groupe de Galois motivique. La sous-catégorie tannakienne $\mathcal{PCM}$ engendrée par les motifs d'Artin et ceux des variétés abéliennes à multiplication complexe correspond à un quotient de $\mathcal{G}$, appelé groupe de Taniyama, qu'un théorème de Deligne [DMOS, IV] permet de décrire complètement : c'est une extension T de $\mathfrak{g}$ par une limite projective S de tores, et précisément S est le groupe de Serre (connexe) décrivant les caractères de Hecke algébriques des corps de nombres [Se]. Les motifs provenant des hypersurfaces de Fermat, à cause de leur grand nombre d'automorphismes, appartiennent à *PCM* , ce qui permet déjà de prouver le théorème 1.

Les motifs de *PCM* possèdent une fonction L globale bien définie, avec équation fonctionnelle. Une conjecture de Deligne [De 2] prédit, à un nombre rationnel près, les valeurs de ces fonctions L en les entiers critiques (où les facteurs à l'infini de l'équation fonctionnelle n'ont ni zéro, ni pôle), en termes de périodes, i.e. de la structure de Hodge du motif. Dans certains cas, cette conjecture peut être prouvée, grâce à des résultats de rationalité de Siegel [Si], Shimura et Blasius [Bl]. Cela suffit à Anderson pour prouver le théorème 2.

Mais Anderson ne s'arrête pas là : il arrive à intégrer les sommes de Gauss individuelles, et non seulement les sommes de Jacobi, dans le cadre de la théorie des motifs. Il élargit pour cela la notion de structure de Hodge en celle de structure de Hodge arithmétique, où les poids peuvent prendre des valeurs fractionnaires. La catégorie tannakienne (dite des "motifs ultérieurs") ainsi construite correspond à une extension $\tilde{T}$ de T par $2\pi i\hat{\mathbb{Z}}$. Le groupe $\tilde{T}(\mathbb{C})$ est muni d'éléments de Frobenius pour chaque nombre premier p , et on dispose, pour $a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, non nul, d'un motif ultérieur (i.e. une représentation de $\tilde{T}$) tel que, pour p ne divisant pas le dénominateur de a , $g_p(a)$ soit la trace de l'élément de Frobenius en p sur ce motif ultérieur.

3. STRUCTURES DE HODGE ARITHMÉTIQUES ET HYPERSURFACES DE FERMAT

Une *structure de Hodge arithmétique* est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, W_B , de dimension finie, muni d'une graduation $W_B = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_B^n$, d'une décomposition sur $\mathbb{C}$

$$W_B^n \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{\substack{a,b\in\mathbb{Q}\\ a+b=n}} W^{(a,b)} , \tag{3.1}$$

et d'une $\mathbb{Q}$-structure $W_{DR} \subset W_B \otimes \mathbb{C}$ vérifiant les conditions suivantes :

i) $(1 \otimes \rho)\ W^{(a,b)} = W^{(b,a)}$.

ii) il existe une involution $\mathbb{Q}$-linéaire (unique, forcément unique) $\rho^* : W_B \longrightarrow W_B$ telle que $\rho^* \otimes \rho$ induise l'identité sur W_{DR} .

iii) Si, pour $a \in \mathbb{Q}$, on pose $F^a(W_B^n \otimes \mathbb{C}) = \bigoplus_{\substack{a'+b'=n\\ a'>a}} W^{(a',b')}$, et $F^a W_{DR}^n = W_{DR} \cap F^a(W_B^n \otimes \mathbb{C})$, alors $F^a W_{DR}^n$ est une $\mathbb{Q}$-stucture sur $F^a(W_B^n \otimes \mathbb{C})$.

Un *morphisme* $f : V \longrightarrow W$ de structures de Hodge arithmétiques est une application $\mathbb{Q}$-linéaire $V_B \longrightarrow W_B$ telle que $f \otimes 1(V^{(a,b)}) \subset W^{(a,b)}$ pour a et b dans $\mathbb{Q}$, et $f \otimes 1(V_{DR}) \subset W_{DR}$.

La catégorie des structures de Hodge arithmétiques est munie d'un produit tensoriel évident. Pour tout entier n, on définit la structure $\mathbb{Q}(n)$,

(3.2)
$$\mathbb{Q}(n)_B = \mathbb{Q}$$
$$\mathbb{Q}(n)_B \otimes \mathbb{C} = \mathbb{Q}(n)^{(n,n)}$$
$$\mathbb{Q}(n)_{DR} = \frac{1}{(2\pi i)^n}\,\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}\ .$$

Pour tout entier n et toute structure de Hodge arithmétique W, on pose $W(n) = W \otimes \mathbb{Q}(n)$.

Une structure de Hodge arithmétique telle que $n \neq w$ implique $W_B^n = 0$ pour un entier w est dite *pure de poids* w ; $\mathbb{Q}(1)$ est pure de poids 2. Toute structure de Hodge arithmétique est somme directe de structures pures.

Une structure de Hodge arithmétique W est dite *entière* si $W^{(a,b)} = 0$ quand a ou b n'est pas entier. Si X est un schéma projectif et lisse sur $\mathbb{Q}$, on note $H_B^{\bullet}(X)$ la cohomologie de Betti de $X(\mathbb{C})$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$, $H_{DR}^{\bullet}(X)$ l'hypercohomologie du complexe de de Rham $\Omega^{\bullet}_{X/\mathbb{Q}}$. On dispose sur $H_{DR}^{\bullet}(X)$ d'une filtration croissante $F^p H_{DR}^n(X)$, dite de Hodge, et d'un isomorphisme canonique (de comparaison)

(3.3)
$$I : H_B^{\bullet}(X) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H_{DR}^{\bullet}(X) \otimes \mathbb{C}\ .$$

Posant $W_B^n = H_B^n(X)$ et pour $n = p+q$ (entiers),

(3.4)
$$W^{(p,q)} = I^{-1}(F^p H_{DR}^n(X) \otimes \mathbb{C}) \cap (1 \otimes \rho)\, I^{-1}(F^q H_{DR}^n(X) \otimes \mathbb{C})\ ,$$

on a la décomposition de Hodge

(3.5)
$$W_B^n = H_B^n(X) \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=n} H^{(p,q)}(X) = \oplus\, W^{(p,q)}\ .$$

On définit ainsi une structure de Hodge arithmétique entière, notée $\omega_\infty(X)$, l'involution ρ^* étant donnée par l'action de ρ sur $X(\mathbb{C})$.

Par les formules de Künneth, la structure associée au produit de deux schémas projectifs et lisses X et Y sur $\mathbb{Q}$ est isomorphe au produit tensoriel de celles de X et Y. Dans ce §, on veut étudier les structures de Hodge arithmétiques associées aux hypersurfaces de Fermat. Elles sont entières, mais s'expriment commodément en termes de structures de Hodge arithmétiques non entières, essentielles pour la suite, que nous allons définir maintenant.

Notons $\hat{\mu}$ le groupe $\hat{\mathbb{Z}}(1) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \bar{\mathbb{Q}}^{\times})$ dual de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Se donner, pour un espace vectoriel V sur $\mathbb{Q}$, une graduation $V \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{a\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} V(a)$ revient à se donner une action *admissible* de $\hat{\mu}$ sur V, c'est-à-dire telle que le stabilisateur d'un élément de V soit ouvert dans $\hat{\mu}$; $V(a)$ est alors le sous-espace isotypique de $V \otimes \mathbb{C}$ pour le caractère de $\hat{\mu}$ défini par $a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Pour $a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} - \{0\}$, on définit la fonction $\gamma(a) : \hat{\mu} \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$ par

(3.6) $$\gamma(a)(\xi) = \xi(-a)\,\Gamma(<-a>)\ .$$

On note $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\hat{\mu}$ dans $\mathbb{Q}$ se factorisant par un quotient $\hat{\mu}/m\hat{\mu}$, et de moyenne nulle. Pour $a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} - \{0\}$, on pose

(3.7) $$\mathbb{E}^{(<a>,<-a>)} = \mathbb{C}\,\gamma(a)$$ et

(3.8) $$\mathbb{E}_{DR} = \sum_{a \neq 0} \mathbb{Q}\,\gamma(a) \subset \mathbb{E}\ .$$

On note par un indice m les sous-espaces correspondant aux $a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ annulés par m . Alors $\mathbb{E}$ est limite inductive des structures de Hodge arithmétique $\mathbb{E}_m$. La graduation

(3.9) $$\mathbb{E} \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}} \mathbb{E}(a)\ ,$$

avec $\mathbb{E}(0) = 0$ et $\mathbb{E}(a) = \mathbb{E}^{(<a>,<-a>)}$ correspond à l'action de $\hat{\mu}$ sur $\mathbb{E}$ par $\xi\,.\,e(\xi') = e(\xi' - \xi)$ pour $\xi, \xi' \in \hat{\mu}$, $e \in \mathbb{E}$. Notons $\mathbb{B}^+$ le sous-ensemble de $\mathbb{B}$ formé des $\Sigma\, n_a[a]$ à coefficients n_a positifs. Notons $\mathbb{Q}[\mathbb{E}]$ l'algèbre symétrique sur $\mathbb{E}$, $\mathbb{C}[\mathbb{E}] = \mathbb{Q}[\mathbb{E}] \otimes \mathbb{C}$. Pour $\mathfrak{a} = \Sigma\, n_a[a] \in \mathbb{B}^+$, on note $\mathbb{E}(\mathfrak{a})$ l'image dans $\mathbb{C}[\mathbb{E}]$ de $\bigotimes_a \mathbb{E}(a)^{n_a}$ et on obtient une décomposition

(3.10) $$\mathbb{C}[\mathbb{E}] = \bigoplus_{\mathfrak{a} \in \mathbb{B}^+} \mathbb{E}(\mathfrak{a})\ .$$

Passons aux hypersurfaces de Fermat [Ka-Sh ; DMOS, I ; A 2, § 10]. On fixe deux entiers $m \geq 1$ et $n \geq 2$. On considère sur $\mathbb{Q}$ l'hypersurface de Fermat X_n^m (ou simplement X) dans $\mathbb{P}_{n-1}$ de degré m , d'équation

(3.11) $$x_1^m + \ldots + x_n^m = 0\ .$$

La même équation définit un modèle lisse de X sur $\mathbb{Z}[1/m]$. On note ι l'inclusion de X dans $\mathbb{P}_{n-1}$ et on pose

(3.12) $$H_B^{\cdot}(X)_{prim} = H_B^{\cdot}(X) / \iota^*\, H_B^{\cdot}(\mathbb{P}_{n-1})\ .$$

L'hypersurface X possède un gros groupe d'automorphismes, produit semi-direct de $\mathcal{S}_n$, agissant par permutation des coordonnées, par le groupe $\bigoplus_{i=1}^{n} \mu_m$ divisé par le groupe μ_m diagonal. Suivant Anderson, on note Λ le groupe $\bigoplus_{i=1}^{n} \mu_m$. Le dual de $\Lambda(\mathbb{C})$ s'identifie à $(\frac{1}{m}\,\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^n$ par la formule

(3.13) $$(a,\lambda) = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{m<a_j>}$$

avec des notations évidentes. Le dual de $\Lambda(\mathbb{C})/\mu_m(\mathbb{C})$ est le sous-groupe de $(\frac{1}{m}\,\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^n$ défini par l'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$. On note $H_a^{n-2}(X)$ le sous-espace de $H_B^{n-2}(X) \otimes \mathbb{C}$ isotypique pour le caractère a de $\Lambda(\mathbb{C})$. On note Ψ l'ensemble des $(a_1,\ldots,a_n) \in (\frac{1}{m}\,\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^n$ vérifiant $a_i \neq 0$ pour $i = 1,\ldots,n$ et $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$. On a alors [DMOS, I, prop. 7.4 et 7.6].

PROPOSITION 2.- i) $H_B^{\bullet}(X)_{prim} \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{a\in\Psi} H_a^{n-2}(X)$.

ii) *Pour tout* $a \in \Psi$, $H_a^{n-2}(X)$ *est de dimension* 1 *sur* $\mathbb{Q}$ *et égal à* $H_a^{n-2}(X)^{(r,s)}$ *où* $r+1 = \sum_{j=1}^{n} \langle a_j\rangle$ *et* $s+1 = \sum_{j=1}^{n} \langle -a_j\rangle$.

Pour la démonstration, on compare $H_B^{\bullet}(X)$ à $H_B^{\bullet}(U)$ avec $U = \mathbb{P}^{n-1} \setminus X$, et de même pour la cohomologie de de Rham. La filtration de Hodge sur $H_{DR}^{\bullet}(U)$ s'interprète alors en termes d'ordre de pôle de formes différentielles sur U , le long de X .

On peut même aller plus loin et calculer les périodes de certaines formes différentielles sur U . Pour $a \in \Psi$, posons

$$\omega_a = m^{n-1}\, \Gamma(\langle a_1\rangle + \ldots + \langle a_n\rangle)\, x_1^{m\langle -a_1\rangle} \ldots x_n^{m\langle -a_n\rangle} \frac{dx_1}{x_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}} .$$

On calcule [DMOS, § 7] l'intégrale de ω_a sur certains cycles bien choisis de $U(\mathbb{C})$ à l'aide du calcul de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-t_1} \ldots \int_0^{1-t_1-\ldots-t_{n-2}} t_1^{s_1-1} \ldots t_{n-1}^{s_{n-1}-1} (1-t_1 \ldots -t_{n-1})^{s_n-1}\, dt_1 \ldots dt_n ,$$

$$I = \Gamma(s_1) \ldots \Gamma(s_n) / \Gamma(s_1 + \ldots + s_n) .$$

(généralisant $B(s,t) = \Gamma(s)\,\Gamma(t) / \Gamma(s+t) = \int_0^1 u^{s-1}\,(1-u)^{t-1}\,du$). On obtient alors une description de la structure de Hodge arithmétique (primitive) de X .

THÉORÈME 5 [A 2, Thm. 10].- *On a un isomorphisme de la structure de Hodge arithmétique* $H^{\bullet}(X)_{prim}(-1)$ *sur* $(\mathbb{E}_m^{\otimes n})^{\hat{\mu}}$ *(formé des points de* $\mathbb{E}_m^{\otimes n}$ *fixes par* $\hat{\mu}$ *).*

Remarque 3.- Cet isomorphisme est équivariant sous l'action de $\Lambda(\mathbb{C})$ et pour $\sigma \in S_n$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_B^{n-2}(X)_{prim} & \longrightarrow & \mathbb{E}_m^{\otimes n} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ H_B^{n-2}(X)_{prim} & \longrightarrow & \mathbb{E}_m^{\otimes n} \end{array} ,$$

où S_n agit sur $\mathbb{E}^{\otimes n}$ par permutation des facteurs $\mathbb{E}$.

Pour tout schéma projectif et lisse X sur $\mathbb{Q}$ et tout nombre premier ℓ , on dispose aussi de la cohomologie étale ℓ-adique $H_\ell^{\bullet}(X)$ de $X(\bar{\mathbb{Q}})$; c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}_\ell$ de dimension finie, muni d'une action continue de $\mathfrak{g}$. Si X a un modèle projectif et lisse sur $\mathbb{Z}[1/m]$, cette représentation de $\mathfrak{g}$ est non ramifiée hors de m . On dispose d'isomorphismes de comparaison canoniques

$$I_\ell : H_B^{\bullet}(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} H_\ell^{\bullet}(X)$$

tels que $\rho^* \otimes 1$ corresponde à l'action de $\rho \in \mathfrak{g}$ sur $H_\ell^{\bullet}(X)$. Les isomorphismes I_ℓ sont compatibles aux isomorphismes de Künneth.

Dans le cas de $X = X_n^m$, on peut, pour tout nombre premier p ne divisant pas m , calculer la trace d'un Frobenius géométrique $F(p)$ agissant sur $H_\ell^\bullet(X)$, en utilisant la formule des traces de Lefschetz et le calcul du nombre de points de X sur $\mathbb{F}_p$ [*cf.* DMOS, I, § 7]. Dans notre cadre, on obtient alors [A 1, 10.7] :

PROPOSITION 3.- *Soit* $\mathbf{a} \in \mathbb{B}_p \cap \mathbb{B}^o \cap \mathbb{B}^+$ *tel que* $n = w(\mathbf{a})$ *et* $m(\mathbf{a})|m$. $A = \{(a_1,\dots,a_n) \in (\frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^n \ \ a_j \neq 0 \ , \sum_{j=1}^{n} [a_i] = \mathbf{a}\}$. *Alors*

$$g_p(\mathbf{a}) = \frac{p}{m^n n!} \sum_{\sigma\in S_n} \sum_{\xi\in\Lambda(\mathbb{C})} \sum_{a\in A} \operatorname{sgn}(\sigma) \ (a,\xi)^{-1} \ \operatorname{tr}(F(p)\sigma\xi \mid H_\ell^{n-2}(X_n^m)) \ .$$

Remarque 4.- On interprétera cette égalité au paragraphe 5 , en termes de motifs, en remarquant que le projecteur $p_{\mathbf{a}} = \frac{1}{m^n n!} \sum_{\sigma\in S_n} \sum_{\xi\in\Lambda(\mathbb{C})} \operatorname{sgn}(\sigma)(a,\xi)^{-1}\sigma\xi$ de l'algèbre du groupe des automorphismes $X = X_n^m$ définit un facteur de $H_B^{n-1}(X)_{prim}(-1) \otimes \mathbb{C}$ de dimension 1 sur $\mathbb{C}$, qui correspond, par l'isomorphisme du théorème 5, à un facteur de $\mathbb{E}_m^{\otimes n}$. Si on identifie $\mathbb{C}[\mathbb{E}]$ à l'espace des tenseurs symétriques sur $\mathbb{E}$, ce facteur de $\mathbb{E}_m^{\otimes n}$ n'est autre que le facteur $\mathbb{E}(\mathbf{a})$ de $\mathbb{C}[\mathbb{E}]$ introduit en 3.10, comme on le déduit de la remarque 3.

4. MOTIFS ET GROUPE DE TANIYAMA [DMOS]

Soient X et Y deux schémas projectifs et lisses sur $\mathbb{Q}$. Une application $\mathbb{Q}$-linéaire $f : H_B^\bullet(X) \longrightarrow H_B^\bullet(Y)$ est une *correspondance de Hodge absolue* s'il existe

i) une application linéaire $f_{DR}: H_{DR}^\bullet(X) \longrightarrow H_{DR}^\bullet(Y)$ telle que

$$f_{DR}(F^p H_{DR}^n(X)) \subset F^p H_{DR}^n(Y) \quad \text{pour tout } p \text{ et tout } n$$

et que I transporte $f \otimes id_{\mathbb{C}}$ en $f_{DR} \otimes id_{\mathbb{C}}$ (*cf.* 3.3).

ii) pour chaque nombre premier ℓ une application $\mathbb{Q}_\ell[\mathfrak{g}]$-linéaire

$$f_\ell : H_\ell^\bullet(X) \longrightarrow H^\bullet(Y) \quad \text{telle que } I_\ell \text{ transporte } f \otimes id_{\mathbb{Q}_\ell} \text{ en } f_\ell \ .$$

L'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ des correspondances de Hodge absolues sera noté $C^{ah}(X,Y)$.

Remarque 5.- Un cycle algébrique de codimension $\dim X$ dans $X \times Y$ définit une correspondance de Hodge absolue.

On note A la catégorie dont les objets sont les schémas projectifs et lisses sur $\mathbb{Q}$ et les flèches données par $\operatorname{Hom}_A(X,Y) = C^{ah}(X,Y)$.

Il existe [DMOS, IV] un schéma en groupes affine g sur $\mathbb{Q}$, appelé *le groupe de Galois motivique*, tel que $g(R)$, pour chaque $\mathbb{Q}$-algèbre R , soit formé des automorphismes R-linéaires du foncteur $X \longmapsto H_B^\bullet(X) \otimes R$ (de A dans la catégorie des R-modules) qui soient compatibles aux isomorphismes de Künneth. Par construction, g opère sur $H_B^\bullet(X)$. De plus, on a (*loc. cit.*) :

THÉORÈME 6.- i) g *est pro-réductif.*

ii) $C^{ah}(X,Y) = \mathrm{Hom}_g(H^{\bullet}_B(X), H^{\bullet}_B(Y))$ *pour* $X,Y \in \mathrm{Ob}(A)$.

La catégorie M des *motifs* (*de Hodge absolus*) est pour nous la catégorie des représentations (algébriques, de dimension finie) de g sur $\mathbb{Q}$. Elle est munie d'un produit tensoriel. Pour $M \in M$, on note $\omega_B(M)$ l'espace de la représentation M et $M^{\vee}$ le *dual* de M (représentation contragrédiente) ; le *rang* de M est la dimension de $\omega_B(M)$.

On peut obtenir M à partir de A . Dit de façon grossière, on ajoute formellement à A l'image de tous les projecteurs des $C^{ah}(X,Y)$; on obtient alors les *motifs effectifs*, et pour tout motif M , il existe un motif effectif N de rang 1 tel que $M \otimes N$ soit effectif (on peut prendre en fait $N = \mathbb{Z}(n)$ pour $n \leq 0$ convenable, voir plus loin). Pour $X \in \mathrm{Ob}(A)$, on note $H(X)$ le motif qui lui correspond.

Remarque 6.- L'idée initiale des motifs est due à Grothendieck, et entre dans le formalisme général des catégories tannakiennes [Sa; DMOS, II]. La notion de motif de Hodge absolu est due à Deligne.

Soit $X \in \mathrm{Ob}(A)$, de dimension 0 . Alors $H^0_B(X)$ est muni d'une action admissible de $\mathfrak{g}$, correspondant à celle de $\mathfrak{g}$ sur les $H^0_\ell(X)$ par I_ℓ , et telle que le diagramme suivant soit commutatif, pour tout $s \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ induisant $\sigma \in \mathfrak{g}$ sur $\bar{\mathbb{Q}}$:

$$(4.1)\qquad \begin{array}{ccc} H^0_B(X) \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\ I\ } & H^0_{DR}(X) \otimes \mathbb{C} \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma \otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes s} \\ H^0_B(X) \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\ I\ } & H^0_{DR}(X) \otimes \mathbb{C} \, . \end{array}$$

C'est (essentiellement) la théorie de Galois. Pour $X,Y \in \mathrm{Ob}(A)$ de dimension 0 , on a $C^{ah}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(H^0_B(X), H^0_B(Y))$. On en déduit que $\mathfrak{g}$ est un quotient de g , par lequel se factorise l'action de g sur $H^0_B(X)$, pour X de dimension 0 .

Pour chaque nombre premier ℓ et $\sigma \in \mathfrak{g}$, il existe un unique point $\alpha_\ell(\sigma) \in g(\mathbb{Q}_\ell)$ tel que, pour tout $X \in \mathrm{Ob}(A)$, on ait

$$(4.2)\qquad I_\ell \circ \alpha_\ell(\sigma) = \sigma \circ I_\ell : H^{\bullet}_B(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow H^{\bullet}_\ell(X) \, .$$

On a donc une section $\alpha_\ell : \mathfrak{g} \longrightarrow g(\mathbb{Q}_\ell)$ (continue) de $\varphi : g \longrightarrow \mathfrak{g}$. Pour chaque motif M , on pose $\omega_\ell(M) = \omega_B(M) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ et, via α_ℓ , $\omega_\ell(M)$ est muni d'une action continue de $\mathfrak{g}$.

Remarque 8.- $\alpha_\ell(\rho)$ est défini sur $\mathbb{Q}$, indépendant de ℓ ; on le note $\alpha(\rho)$.

Les composantes de Künneth de la diagonale Δ de $X \times X$, pour $X \in \mathrm{Ob}(A)$, définissent des correspondances de Hodge absolues dans $C^{ah}(X,X)$. De ce fait, on tire que tout motif M est équipé d'une graduation $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M^n$, fonctorielle en M et compatible au produit tensoriel ; si $M = H(X)$ pour $X \in Ob(\mathcal{A})$, M^n "correspond" bien sûr à $H^n(X)$. Si $M = M^w$ pour un entier w , on dit que M est pur de poids w .

De plus, tout motif M possède une *structure de Hodge arithmétique entière* $\omega_\infty(M)$ (donnant en particulier une $\mathbb{Q}$-structure $\omega_{DR}(M)$ dans $\omega_B(M) \otimes \mathbb{C}$) qui coïncide avec celle notée $\omega_\infty(X)$ au § 3 si $M = H(X)$, $X \in Ob(\mathcal{A})$; l'application ρ^* de la définition (3.1 ii)) n'est autre que $\alpha(\rho)$.

Le *motif de Tate* $\mathbb{Z}(1)$ est le dual de $H^2(\mathbb{P}^1)$; le *motif de Lefschetz* $H^2(\mathbb{P}^1)$ est noté $\mathbb{Z}(-1)$; par produits tensoriels on définit $\mathbb{Z}(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et, pour tout motif M , on pose $M(n) = M \otimes \mathbb{Z}(n)$.

Les motifs qui vont nous intéresser sont d'un type particulier, ils sont *potentiellement à multiplication complexe*.

Une *structure de Hodge* est un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbb{Q}$, muni d'une graduation $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V^n$ et d'une décomposition $\mathbb{C}$-linéaire $V^n \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=n} V^{(p,q)}$ telle que $(1 \otimes \rho)V^{(p,q)} = V^{(q,p)}$. Elle est dite à *multiplication complexe* s'il existe une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative semi-simple E dans $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V)$, respectant la structure de Hodge, admettant une involution positive et telle que V soit libre de rang 1 sur E .

Soit $X \in Ob(\mathcal{A})$. On dit que X est *potentiellement à multiplication complexe* (PCM) si la structure de Hodge sous-jacente à $\omega_\infty(X)$ est à multiplication complexe et que $X(\mathbb{C})$ est union disjointe de tores complexes. On note $\mathcal{PCM}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$ *engendrée* par les $H(X)$ pour X un objet (PCM) de $\mathcal{A}$. (Ici, engendrée signifie que $\mathcal{PCM}$ est la plus petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$ contenant les $H(X)$ pour X (PCM) et les motifs qu'on peut former à partir d'eux par application successive des opérations de produit tensoriel, dualisation, passage aux sous-quotients.) L'action de $\mathcal{G}$ sur les objets de $\mathcal{PCM}$ se factorise par un quotient T de $\mathcal{G}$ qui se projette surjectivement sur $\mathfrak{g}$. On a donc une suite exacte de groupes algébriques sur $\mathbb{Q}$

$$1 \longrightarrow S \longrightarrow T \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{g} \longrightarrow 1 \ ,$$

muni de sections locales $\alpha_\ell : \mathfrak{g} \longrightarrow T(\mathbb{Q}_\ell)$.

L'extension T , appelée groupe de Taniyama par Langlands, a été décrite par Deligne en termes de théorie du corps de classes [DMOS, III et IV]. Il se trouve que T est très proche du groupe proalgébrique défini par Serre [Se] qui classifie les caractères de Hecke algébriques des corps de nombres. Plus précisément, pour tout corps de nombres K , posons $T_K = \varphi^{-1}(\mathfrak{g}(K))$, et notons $A_0(K)$ le groupe des caractères de Hecke algébriques de K .

THÉORÈME 7.- *On a un isomorphisme canonique* $\psi \longmapsto \widetilde{\psi}$ *de* $A_0(K)$ *sur le groupe* $X(T_K)$ *des caractères de* T_K , i.e. *des homomorphismes de* T_K *dans* $\mathbb{G}_m$, *définis sur* $\overline{\mathbb{Q}}$.

Cet isomorphisme est déterminé de la façon suivante : soit ℓ un nombre premier ; le choix de la valuation en ℓ sur $\overline{\mathbb{Q}}$ donne un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de $\mathbb{Q}_\ell$. De $\widetilde{\psi}$ on déduit un morphisme de $T_K(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ d'où par composition avec $\alpha_\ell : \mathfrak{g} \longrightarrow T(\mathbb{Q}_\ell)$ un caractère continu $\widetilde{\psi}_\ell : \mathfrak{g}(K) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$. Alors $\widetilde{\psi}_\ell$ est non ramifié en une place $\mathfrak{p}$ de K ne divisant pas ℓ exactement quand $\mathfrak{p}$ ne divise pas le conducteur de ψ , et si tel est le cas, on a

$$\widetilde{\psi}_\ell(F_\mathfrak{p}) = \widetilde{\psi}(\mathfrak{p}) \in \overline{\mathbb{Q}}^\times \subset \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times \tag{4.3}$$

pour tout élément de Frobenius géométrique $F_\mathfrak{p}$ en $\mathfrak{p}$.

Remarque 7.- Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres K , à multiplication complexe par un anneau d'entiers d'un corps de nombres E . Alors la théorie de la multiplication complexe [Sh-Ta] associe à A un caractère de Hecke algébrique ψ de K à valeurs dans E . En fait, A définit un motif sur K à coefficients dans E (notion plus générale de motif, introduite par Deligne [De 2]) qui correspond à la représentation $\widetilde{\psi}$ de T_K . La description de T donnée en DMOS, III et IV , et le théorème 7, peuvent être vus comme une généralisation de la théorie de [Sh-Ta] ; *cf.* [DMOS, IV, Rem. 4, p. 263] ; pour une description plus précise, voir par exemple [Sch] et [A 2].

Il semble connu depuis quelque temps que la cohomologie des hypersurfaces de Fermat "s'exprime" en termes de celles des X_m^2 et X_m^3 , et de la droite projective [voir Ka-Sh ; DMOS, II ; A 1, § 9]. Comme la jacobienne de la courbe de Fermat X_m^3 est à multiplication complexe par $\mathbb{Q}(\mu_m)$, on peut énoncer

THÉORÈME 8.- *Quels que soient* $m \geq 1$ *et* $n \geq 2$, *on a*

$$H(X_m^n) \in \mathcal{PCM} .$$

5. PÉRIODES

Soit $M \in \mathcal{M}$ un motif pur de poids w . A la structure de Hodge arithmétique $\omega_\infty(M)$ de M , on peut associer un facteur $L_\infty(M,s)$ [De 2, 5.2]. On dit que M est *critique* si ni $L_\infty(M,s)$ ni $L_\infty(M^\vee,1-s)$ n'ont de pôle en $s = 0$. On a le critère suivant :

Critère : Notons i la trace de $\alpha(\rho)$ agissant sur $\omega_B(M)$ et h^{pq} la dimension de $\omega_\infty(M)^{(p,q)}$. Alors M est *critique* si $h^{pq} \neq 0$ implique ou bien $\min(p,q) < 0 \leq \max(p,q)$, ou bien $p = q$ et $i = h^{pp}$ signe $(\frac{1}{2}-p)$. Si M est

critique, on note $\omega_B^+(M)$ le sous-espace de $\omega_B(M)$ fixe par $\alpha(\rho)$ et $\omega_{DR}^+(M) = \omega_{DR}(M) / \cup F^p \omega_{DR}(M)$, où l'on prend l'union sur les p vérifiant $2p \geq w$ si $w \geq 0$ et $2p > w$ si $w < 0$.
On a un unique isomorphisme $I^+ : \omega_B^+(M) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \omega_{DR}^+(M) \otimes \mathbb{C}$ déduit de I . On pose

(5.1) $$c^+(M) = \det(I^+) \in \mathbb{C}^\times/\mathbb{Q}^\times ,$$

où le déterminant se calcule par rapport à des bases *sur* $\mathbb{Q}$ de $\omega_B^+(M)$ et $\omega_{DR}^+(M)$.

D'autre part, on voudrait associer à M une fonction L , coïncidant avec la fonction L globale de X si $X \in \mathrm{Ob}(A)$ et $M = H(X)$. On conjecture que M vérifie l'hypothèse de compatibilité (SC) suivante :

(SC) Pour tout nombre premier p , il existe un polynôme $P_p(M) \in \mathbb{Q}[t]$ tel que, pour tout nombre premier ℓ distinct de p , on ait l'égalité

(5.2) $$P_p(M)(t) = \det_{\mathbb{Q}_\ell} (1 - t\, F(p) \mid \omega_\ell(M)^{I(p)}) \quad \text{dans} \quad \mathbb{Q}_\ell[t] ,$$

où $I(p)$ désigne un groupe d'inertie en p et $F(p)$ un Frobenius géométrique.
Si M vérifie (SC), on pose

(5.3) $$L(M,s) = \prod_p P_p(M)(p^{-s})^{-1} , \Lambda(M,s) = L_\infty(M,s)\ L(M,s)$$

qui converge pour $\mathrm{Re}\ s$ assez grand.

On conjecture aussi :

(EF) $L(M,s)$ se prolonge méromorphiquement à $\mathbb{C}$ tout entier et on a une équation fonctionnelle

(5.4) $$\Lambda(M,s) = \varepsilon(M,s)\ \Lambda(M^\vee, 1-s) ,$$

où $\varepsilon(M,s)$ est un monôme $A\,B^s$.

Conjecture (Deligne [De 2]).- *Si* M *est pur de poids* w *, est critique et vérifie* (SC) *et* (EF) *alors* $L(M,0)$ *est défini et* $c^+(M)^{-1} L(M,0) \in \mathbb{Q}$.

Le théorème d'induction de Brauer pour les groupes algébriques de type multiplicatif et le théorème 7 ont les conséquences suivantes [A 1, 5.7] :

PROPOSITION 4.- i) *Soit* $M \in PCM$. *Alors* M *vérifie* (SC) *et il existe des corps de nombres* $K_1, \ldots, K_r$ *et des caractères de Hecke algébriques* $\chi_i \in A_0(K_i)$ *tels que* $L(M,s) = \prod_{i=1}^r L(\chi_i, s)^{\varepsilon_i}$ *avec* $\varepsilon_i = \pm 1$ *; en particulier* M *vérifie* (EF)

ii) *Soient* $M, N \in PCM$ *tels que* $L(M,s) = L(N,s)$ *; alors* M *et* N *sont isomorphes.*

Dans le cas où, dans i), on peut prendre $r = 1$, $\varepsilon_1 = 1$ et K_1 totalement réel ou de type CM , on dit que M est *accessible*.

THÉORÈME 9 [Si, Bl].- *Si* $M \in PCM$ *est pur, critique et accessible, alors la conjecture plus haut est vraie pour* M .

Le cas où K est totalement réel provient des résultats de rationalité de Siegel [Si] sur la fonction zêta de K. Sur le cas CM, dû à Blasius, un commentaire est de rigueur[1]. Shimura [Sh 1] avait déterminé, à un nombre algébrique près et même plus précisément, les valeurs critiques des fonctions L des $\psi \in A_0(K)$, en termes de périodes de variétés abéliennes de type CM, *à multiplication complexe par* K. Le formalisme des périodes de Deligne impose plutôt de considérer des motifs *sur* K *à coefficients* dans le corps E des valeurs de ψ. Deligne [De 2] avait vérifié la compatibilité de sa conjecture avec les résultats de Shimura, à un nombre algébrique près. Blasius a réussi à écrire la "dualité" qui échange K et E en termes de motifs, et étendant les résultats de Shimura [Sh 1, Sh 2], à prouver la conjecture de Deligne dans le cas CM.

A ce stade, nous avons tout ce qu'il faut pour prouver les théorèmes 1 à 3. Des arguments faciles nous ramènent d'abord à $\mathfrak{a} \in \mathbb{B}^0 \cap \mathbb{B}^+$ et $\mathfrak{g}(K) = \{\sigma \in \mathfrak{g} \mid \sigma\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}$. On pose alors $m = m(\mathfrak{a})$ et $n = w(\mathfrak{a})$. On considère le motif $H(X_m^n)(-1)$ du § 3. Notons $p_{\mathfrak{a}}$ le projecteur défini dans la remarque 4. Alors $\sum_{\sigma\in\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(K)} p_{\sigma\mathfrak{a}}$ est un projecteur qui définit en fait un sous-motif $M(\mathfrak{a})$ de $H(X_m^n)(-1)$, qui appartient donc à PCM. De même $p_{\mathfrak{a}}$ définit une représentation de T_K de degré 1, donc un caractère de Hecke algébrique $J_K(\mathfrak{a})$ dont on prouve, à l'aide de la proposition 3, qu'il vérifie bien les propriétés du théorème 1. On remarque que la fonction $L(M(\mathfrak{a}),s)$ est celle de $J_K(\mathfrak{a})$ et par suite que $M(\mathfrak{a})$ est accessible. Il ne reste plus qu'à déterminer les entiers n tels que $M(\mathfrak{a})(n)$ soit critique, et pour ces n, à calculer l'invariant $c^+(M(\mathfrak{a})(n))$, ce qui n'est pas trop difficile, car il se décrit uniquement en termes de la structure de Hodge arithmétique du théorème 5. On obtient alors le théorème 2.

Le théorème 3 vient de ce que les motifs de PCM sont déterminés par leur fonction L (Proposition 4 ii)) ; le théorème 4 s'obtient en comparant $M(\mathfrak{a})$ à un motif d'Artin.

6. MOTIFS ULTÉRIEURS

Cependant, pour la preuve des théorèmes 1 à 4, Anderson préfère passer par un formalisme plus élégant, mettant en oeuvre les structures de Hodge arithmétiques. Notons $AHOD$ la catégorie des structures de Hodge arithmétiques et $PCM^{\sim}$ la sous-catégorie pleine de $AHOD$ engendrée (au sens expliqué au § 4) par les $\mathbb{E}_m$ pour m entier et $\omega_\infty(M)$ pour M parcourant PCM. Alors il existe un groupe algébrique $\widetilde{T}$ sur $\mathbb{Q}$ dont les points sur une $\mathbb{Q}$-algèbre R sont les automorphismes R-linéaires du foncteur $X \longmapsto H_B(X) \otimes R$, de $PCM^{\sim}$ dans la catégorie des R-modules, qui sont compatibles avec le produit tensoriel. Le groupe $\widetilde{T}$ s'appelle le *groupe de Taniyama étendu* et ses représentations les *motifs ultérieurs*. A tout motif de PCM on associe sa structure de Hodge arithmétique, ce qui donne

[1] Je ne peux pas ici détailler plus les résultats importants de Blasius, qui nécessiteraient à eux seuls tout un exposé.

un morphisme $\tilde{\varphi} : \tilde{T} \longrightarrow T$. D'autre part, pour tout $W \in \mathrm{Ob}(PCM^{\sim})$ et $a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on pose

(6.1) $$W(a) = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} W^{(p+\langle a\rangle,q-\langle a\rangle)} ,$$

d'où une décomposition $W \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{a\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} W(a)$, qui donne un morphisme $j : \hat{\mu} \longrightarrow \tilde{T}$.

On a alors le théorème principal suivant, qui implique assez facilement les théorèmes 1 à 4 et qui surtout interprète, non seulement les sommes de Jacobi, mais aussi les sommes de Gauss dans le cadre des motifs ; autrement dit, on a factorisé les motifs de Jacobi en motifs ultérieurs, factorisation qui correspond précisément à celle des sommes de Jacobi en sommes de Gauss.

THÉORÈME.- i) *La suite* $1 \longrightarrow \hat{\mu} \xrightarrow{j} \tilde{T} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} T \longrightarrow 1$ *est exacte.*

ii) *On a un isomorphisme de motifs (ultérieurs)*

$$H(X_m)_{\mathrm{prim}}(-1) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{E}_m^{\otimes n})^{\hat{\mu}}$$

iii) *Pour* $\sigma \in \mathfrak{g}$ *et* $t \in \tilde{T}(\mathbb{C})$ *tels que* $\varphi(\tilde{\varphi}(t)) = \sigma$ *et pour* $a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} - \{0\}$, *on a* $tE(a) = \mathbb{E}(\psi(\sigma)^{-1} a)$, *où* ψ *est le caractère cyclotomique* .

iv) *Soit* ℓ *un nombre premier. Choisissons une extension à* $\mathbb{C}$ *de la valuation* ℓ*-adique de* $\bar{\mathbb{Q}}$, *de sorte que* $\mathbb{C}$ *soit complet pour cette valuation, d'où un plongement* $\mathbb{Q}_\ell \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$. *Soit* p *un nombre premier distinct de* ℓ . *Alors il existe* $F(p,\ell) \in \tilde{T}(\mathbb{C})$ *dont l'image par* $\tilde{\varphi}$ *soit* $\alpha_\ell(F(p))$, *où* $F(p)$ *est un élément de Frobenius du groupe de décomposition en* p *de la valuation* p*-adique de* $\bar{\mathbb{Q}}$, *et tel que, pour tout entier* $f \geq 1$ *et* $a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *non nul, annulé par* $p^f - 1$, *on ait*

$$\mathrm{tr}(F(p,\ell)^f \mid \mathbb{E}(a)) = g_p\left(\sum_{\nu=1}^{f} [p^\nu a]\right) .$$

N.B. : on peut bien sûr, si l'on veut, énoncer iv) sans avoir recours à l'axiome du choix.

7. (À SUIVRE)

À la suite des travaux de Ihara [I] sur l'interpolation ℓ-adique des sommes de Jacobi, Anderson [A 2] définit une fonction bêta adélique $B : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{Z}[[(\mathbb{Z}(1))^2]]^\times$, $\sigma \longmapsto B_\sigma$, qui interpole adéliquement les sommes de Gauss et vérifie certaines propriétés de la fonction bêta classique $B(s,t) = \Gamma(s)\ \Gamma(t) / \Gamma(s+t)$. Il montre également qu'on peut définir une fonction gamma hyperadélique $\Gamma : \mathfrak{g} \longrightarrow W[[\hat{\mathbb{Z}}(1)]]^\times$, $\sigma \longmapsto \Gamma_\sigma$, où $\mathbf{W}$ est le produit, portant sur les nombres premiers p , des anneaux des vecteurs de Witt sur une clôture algébrique de $\bar{\mathbb{F}}_p$. Ces fonctions vérifient bien $B_\sigma(s,t) = \Gamma_\sigma(s)\ \Gamma_\sigma(t) / \Gamma_\sigma(s+t)$ dans $(\bar{\mathbb{Q}} \otimes W)^\times$, pour s et t dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Enfin, Anderson annonce que l'on peut voir la fonction bêta adélique B comme un cocycle définissant l'extension

$$1 \longrightarrow \hat{\mu} \longrightarrow \widetilde{T} \longrightarrow T \longrightarrow 1$$

définie par les motifs ultérieurs. On attend les détails.

BIBLIOGRAPHIE

[A 1] G. ANDERSON - *Cyclotomy and an extension of the Taniyama group*, Compos. Math. 57 (1986), 153-217.

[A 2] G. ANDERSON - *The hyperadelic gamma function*, prépublication Univ. Minnesota, juin 1987.

[Bl] D. BLASIUS - *On the critical values of Hecke L-series*, Annals of Math. 124 (1986), 23-63.

[Br] G. BRATTSTRÖM - *Jacobi sum Hecke characters of a totally real abelian field*, Sém. Th. des Nombres, Bordeaux, exp. 22, année 1981-82.

[Br-Li] G. BRATTSTRÖM, S. LICHTENBAUM - *Jacobi sum Hecke characters of imaginary quadratic fields*, Compos. Math. 53 (1984), 277-302.

[De 1] P. DELIGNE - *Sommes trigonométriques* in SGA $4^{1/2}$, Cohomologie étale, Springer LNM 569 (1977), 168-232.

[De 2] P. DELIGNE - *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, PSPM 33 (1979), part 2, 313-346.

[DMOS] P. DELIGNE, J. MILNE, A. OGUS, K. SHIH - *Hodge cycles, motives and Shimura varieties*, Springer LNM 900 (1980).

[Gr-Ko] B. GROSS, N. KOBLITZ - *Gauss sums and the p-adic Γ-function*, Annals of Math. 109 (1979), 569-581.

[Ha-Sch] G. HARDER, N. SCHAPPACHER - *Special values of Hecke L-functions and abelian integrals* in Arbeitstagung, Bonn 1984, Springer LNM 1111 (1985), 17-49.

[I] Y. IHARA - *Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications*, Annals of Math. 123 (1986), 43-106.

[K-S] T. KATSURA, T. SHIODA - *On Fermat varieties*, Tohokû Math. J. 31 (1979), 97-115.

[Ku] D. KUBERT - *Jacobi sums and Hecke characters*, Am. J. of Math. 107 (1985), 253-280.

[Ku-Li] D. KUBERT, S. LICHTENBAUM - *Jacobi sum Hecke characters*, Compos. Math. 48 (1983), 55-87.

[Li] S. LICHTENBAUM - *Values of L-functions of Jacobi-sum Hecke characters of abelian fields*, in Number Theory related to Fermat's last theorem, Progress in Math. 26 (Birkhäuser)(1982), 207-218.

[Sa] N. SAAVEDRA RIVANO - *Catégories tannakiennes*, Springer LNM 265 (1975).

[Sch] N. SCHAPPACHER - *Periods of Hecke characters*, L.N. in Mathematics n° 1301, Springer-Verlag (1987).

[Se] J.-P. SERRE - *Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves*, Benjamin (1968).

[Sh 1] G. SHIMURA - *On some arithmetic properties of modular forms of one and several variables*, Annals of Math. 102 (1975), 491-515.

[Sh 2] G. SHIMURA - *On certain reciprocity laws for theta functions and modular forms*, Acta Math. 141 (1978), 35-71.

[Sh-Ta] G. SHIMURA, Y. TANIYAMA - *Complex multiplication of abelian varieties and its applications to Number Theory*, Public. Math. Soc. Japan 6 (1961).

[Si] C. SIEGEL - *Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen*, Gött. Nachr. 3 (1970), 15-56 (Ges. Alh. IV, 98-139).

[We 1] A. WEIL - *Number of solutions of equations in finite fields*, Bull. Am. Math. Soc. 55 (1949), 497-508, (Oeuvres, 1949 b)).

[We 2] A. WEIL - *Jacobi sums as "Grössencharaktere"*, Transac. AMS VI 73 (1952), 487-495 (Oeuvres, 1952 c).

[We 3] A. WEIL - *La cyclotomie jadis et naguère*, exposé au Séminaire Bourbaki, Paris, juin 1974, Enseign. Math. XX (1974), 247-263 (Oeuvres, 1974 c).

[We 4] A. WEIL - *Sommes de Jacobi et caractères de Hecke*, Gött. Nachr. 1974, n° 1, 14 p. (Oeuvres, 1974 d).

Guy HENNIART

Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY CEDEX