JOSEPH OESTERLÉ

Dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham

Astérisque, tome 152-153 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 673, p. 67-83
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1986-1987__29__67_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 1986
39ème année, 1986-87, n° 673

DÉGÉNÉRESCENCE DE LA SUITE SPECTRALE DE HODGE VERS DE RHAM
[d'après Deligne et Illusie]

par Joseph OESTERLÉ

Introduction

Soit X un schéma *propre* et *lisse* sur un corps k (ou pour ceux qui préfèrent une variété algébrique complète non singulière définie sur k). Les germes de formes différentielles sur X , avec la différentielle extérieure, forment un complexe de faisceaux $\Omega^*_{X/k}$ sur X appelé le *complexe de De Rham*. Son hypercohomologie, notée $H^*_{DR}(X/k)$, s'appelle la *cohomologie de De Rham* de X et est l'aboutissement d'une suite spectrale régulière

$$E_1^{i,j} = H^j(X,\Omega^i_{X/k}) \Rightarrow H^{i+j}_{DR}(X/k) \tag{1}$$

appelée *suite spectrale de Hodge vers De Rham*.

Les espaces vectoriels $H^j(X,\Omega^i_{X/k})$ et $H^m_{DR}(X/k)$ sont de dimension finie sur k . Notons leurs dimensions $h^{i,j}$ et b_m .

THÉORÈME 1.- *Supposons* k *de caractéristique* 0 . *On a* $b_m = \sum_{i+j=m} h^{i,j}$ *pour tout* $m \geq 0$.

Cet énoncé peut se reformuler de la façon suivante :

THÉORÈME 1'.- *Supposons* k *de caractéristique* 0 . *La suite spectrale de Hodge vers de Rham dégénère en* E_1 .

Jusqu'en 1984, toutes les démonstrations du théorème 1 utilisent comme ingrédient essentiel la théorie de Hodge qui établit l'analogue de ce théorème pour une variété analytique complexe kählérienne compacte.

La première démonstration n'utilisant pas la théorie de Hodge est due à Faltings : compte tenu de l'égalité de la dimension b_m de $H^m_{DR}(X/k)$ sur k et de celle du groupe de cohomologie étale $H^m_{ét}(X \times_k \bar{k},\mathbb{Q}_p)$ sur $\mathbb{Q}_p$ (égalité obtenue en comparant sur $\mathbb{C}$ les cohomologies étale, singulière et de De Rham), ainsi que de changements de base standard, le théorème 1 se déduit du résultat suivant, annoncé par Faltings en 1985 ([Fa]) et qui résout une conjecture de Tate :

Soit k un corps de caractéristique 0 , complet pour une valuation discrète à corps résiduel parfait de caractéristique $p > 0$, X un schéma propre et lisse sur k , C le complété d'une clôture algébrique $\bar{k}$ de k (sur lequel $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ agit par continuité), $\chi_p : \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique et $C(n)$ le C-espace vectoriel C sur lequel $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ agit par $(\sigma,x) \longmapsto \sigma(x)\chi_p(\sigma)^n$. On a alors une décomposition de Hodge-Tate (C-linéaire et compatible à l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$)

$$H^m_{\text{ét}}(X \times_k \bar{k}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} C \approx \bigoplus_{i+j=m} (H^j(X,\Omega^i_{X/k}) \otimes_k C(-i)) .$$

Kato ([Ka]), lorsque X est projectif, puis Fontaine et Messing ([F;M]) lorsque X est propre, montrent que les conclusions des théorèmes 1 et 1' restent valables lorsque k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$, pourvu que l'on ait $\dim X < p$ et que X se relève en un schéma propre et lisse sur l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt de k . Des arguments standard permettent d'en déduire les théorèmes 1 et 1' dont on obtient ainsi la première démonstration purement algébrique.

Deligne et Illusie ([D;I]) améliorent les résultats de Kato, Fontaine et Messing. Leur démonstration, objet du présent exposé, est étonnamment élémentaire. Ils obtiennent en particulier :

THÉORÈME 2 (Deligne-Illusie).- *Supposons* k *de caractéristique* $p > 0$. *Si* X *admet un relèvement plat sur l'anneau* $W_2(k)$ *des vecteurs de Witt de longueur* 2 *sur* k , *on a* $b_m = \sum_{i+j=m} h^{i,j}$ *pour tout* $m < p$.

Lorsqu'on omet l'hypothèse concernant l'existence d'un relèvement plat sur $W_2(k)$, des contre-exemples (*cf.* 7.1) montrent que la conclusion du théorème 2 n'est plus nécessairement vérifiée. Si X satisfait aux hypothèses du théorème 2 et si l'on a $\dim X \leq p$, l'égalité $b_m = \sum_{i+j=m} h^{i,j}$ vaut en fait pour tout m (*cf.* § 6) ; on ne sait pas si ceci reste vrai lorsque $\dim X \geq p+1$.

Le théorème 2 est obtenu comme conséquence de résultats beaucoup plus précis sur le complexe de De Rham de X , pour l'énoncé desquels nous renvoyons aux § 5 et § 6. Ces résultats fournissent également des renseignements sur l'obstruction à relever un schéma propre et lisse sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$ en un schéma plat sur $W_2(k)$ (*cf.* § 6).

Raynaud a remarqué que les résultats de Deligne et Illusie permettent d'obtenir un théorème d'annulation de type Kodaira en caractéristique $p > 0$:

THÉORÈME 3 (Raynaud).- *Soit* X *un schéma connexe projectif et lisse de dimension* n *sur un corps* k *de caractéristique* $p > 0$, *admettant un relèvement plat sur* $W_2(k)$. *Soit* L *un faisceau inversible ample sur* X . *On a* $H^j(X,\Omega^i_{X/k} \otimes L) = 0$ *pour* $i+j > \sup(n, 2n-p)$ *(ou ce qui revient au même par dualité de Serre* $H^j(X,\Omega^i_{X/k} \otimes L^{-1}) = 0$ *pour* $i+j < \inf(n,p)$ *).*

Cela fournit, par les mêmes arguments de changement de base que précédemment, la première démonstration non transcendante du théorème d'annulation classique :

COROLLAIRE (Kodaira - Akizuki - Nakano).- *Soit* X *un schéma connexe projectif et lisse de dimension* n *sur un corps* k *de caractéristique* 0 , *et soit* L *un faisceau inversible ample sur* X . *On a* $H^j(X,\Omega^i_{X/k} \otimes L) = 0$ *pour* $i+j > n$.

1. UN APERÇU DE LA THÉORIE DE HODGE

1.1. Complexe de De Rham d'une variété différentielle compacte

Soit X une variété différentielle réelle compacte de dimension n . Notons $\Omega^i(X)$ l'espace vectoriel des formes différentielles de classe C^∞ et de degré i sur X , et d la différentielle extérieure. Le complexe de De Rham $\Omega^*(X)$

$$0 \longrightarrow \Omega^0(X) \xrightarrow{d} \Omega^1(X) \longrightarrow \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(X) \longrightarrow 0 \tag{2}$$

est un complexe *elliptique* (i.e. pour tout $x \in X$ et tout $\xi \in T_x(X)^*$ non nul, les symboles des opérateurs différentiels intervenant dans (2) appliqués à ξ forment une suite exacte). Ses groupes de cohomologie, notés $H^i_{DR}(X,\mathbb{R})$, sont donc des espaces vectoriels *de dimension finie sur* $\mathbb{R}$. Ils s'identifient aux groupes de cohomologie du faisceau localement constant $\underline{\mathbb{R}}$, car les faisceaux de formes différentielles Ω^i sont fins et forment une résolution de $\underline{\mathbb{R}}$.

Supposons maintenant la variété X *munie d'une métrique riemannienne.* On en déduit des métriques sur les fibrés $\Lambda^i(T(X)^*)$ et une forme volume dV sur X , d'où des produits scalaires sur les espaces vectoriels $\Omega^i(X)$, définis par $\langle\omega,\omega'\rangle = \int_X \langle\omega_x,\omega'_x\rangle dV$. Il existe un (unique) opérateur différentiel d^* adjoint de d par rapport à ces produits scalaires. L'opérateur différentiel $\Delta = d^*d + dd^*$ est appelé *le laplacien.* On a $\langle\Delta\omega,\omega\rangle = \langle d\omega,d\omega\rangle + \langle d^*\omega,d^*\omega\rangle$. Pour qu'une forme différentielle ω vérifie $\Delta\omega = 0$, il faut et il suffit que l'on ait $d\omega = d^*\omega = 0$. On dit alors que ω est *harmonique.* Notons $\mathcal{H}^m$ l'ensemble des formes harmoniques de degré m . Le *théorème de Hodge - De Rham* affirme (entre autres) que l'application linéaire canonique $\mathcal{H}^m \longrightarrow H^m_{DR}(X,\mathbb{R})$ est *bijective* pour tout $m \geq 0$.

1.2. Le cas des variétés analytiques complexes compactes

Soit Y une variété analytique complexe compacte de dimension n . Notons X la variété différentielle réelle de dimension $2n$ sous-jacente, et $\Omega^{i,j}$ le faisceau des formes différentielles de classe C^∞ sur X à valeurs complexes et de bidegré (i,j) . Alors $\bigoplus_{i,j} \Omega^{i,j}(X)$ est le complexifié de $\Omega^*(X)$ et à ce titre est muni d'une conjugaison complexe pour laquelle $\overline{\Omega^{i,j}(X)} = \Omega^{j,i}(X)$. La différentielle extérieure d se décompose en $d' + d''$, avec d' et d'' bihomogènes de bidegrés $(1,0)$ et $(0,1)$ respectivement.

Pour tout $i \geq 0$, le complexe

(3) $$0 \longrightarrow \Omega^{i,0}(X) \xrightarrow{d''} \Omega^{i,1}(X) \xrightarrow{d''} \cdots \xrightarrow{d''} \Omega^{i,n}(X) \longrightarrow 0$$

est elliptique, et ses groupes de cohomologie, notés $H_{d''}^{i,j}$, sont donc des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Notons Ω_Y^i le faisceau sur Y des formes différentielles holomorphes de degré i . On a des isomorphismes canoniques

(4) $$H_{d''}^{i,j} \approx H^j(Y,\Omega_Y^i)$$

car les faisceaux $\Omega^{i,j}$ sont *fins* et forment une *résolution du faisceau* Ω_Y^i sur l'espace topologique $Y = X$ (lemme de Dolbeault).

Notons $H_{DR}^m(Y,\mathbb{C})$ les groupes de cohomologie $H_{DR}^m(X,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ du complexe $\Omega^*(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Ce complexe est le complexe simple associé au bicomplexe $(\Omega^{i,j}(X))$: la filtration du bicomplexe par le premier indice fournit la *suite spectrale de Hodge vers De Rham*

(5) $$E_1^{i,j} = H_{d''}^{i,j} \approx H^j(Y,\Omega_Y^i) \Rightarrow H_{DR}^{i+j}(Y,\mathbb{C}) ,$$

dont les différentielles $d_1^{i,j}$ sont déduites de d' .

On déduit de cette suite spectrale l'existence d'une filtration sur $H_{DR}^m(Y,\mathbb{C})$, appelée *filtration de Hodge*, dont le gradué associé est $\bigoplus_i E_\infty^{i,m-i}$. Comme $E_\infty^{i,j}$ est un sous-quotient de $E_1^{i,j}$, on a, en posant $b_m = \dim H_{DR}^m(Y,\mathbb{C})$ et $h^{i,j} = \dim H^j(Y,\Omega_Y^i)$,

(6) $$b_m \leq \sum_{i+j=m} h^{i,j} ,$$

avec égalité pour tout $m \geq 0$ si et seulement si $E_1^{i,j} = E_\infty^{i,j}$ quels que soient i,j , c'est-à-dire si et seulement si la suite spectrale (5) dégénère en E_1 .

Choisissons maintenant une métrique *hermitienne* h sur Y . Alors $g = \operatorname{Re} h$ est une métrique *riemannienne* sur X , et pour le produit scalaire associé sur $\Omega^m(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (*cf.* 1.1), les espaces $\Omega^{i,j}(X)$ sont deux à deux orthogonaux. La théorie de Hodge appliquée au complexe elliptique (3) montre que si $\mathcal{H}^{i,j}$ désigne le noyau de $\Delta'' = d''^*d'' + d''d''^*$ dans $\Omega^{i,j}(X)$, l'application linéaire canonique $\mathcal{H}^{i,j} \longrightarrow H_{d''}^{i,j}$ est bijective.

En général, les formes $\omega \in \mathcal{H}^{i,j}$ *ne sont pas harmoniques*, car il n'existe pas de lien simple entre Δ'' et $\Delta = d^*d + dd^*$.

1.3. Théorie de Hodge pour les variétés kählériennes

Reprenons les notations de 1.2. La partie imaginaire d'une métrique hermitienne h sur Y est une 2-forme différentielle de type $(1,1)$ sur X . On dit que h est kählérienne lorsque cette 2-forme est fermée ; ceci équivaut à l'existence au voisinage de tout point de Y d'un système centré de coordonnées locales $(z_\alpha)_{1\leq\alpha\leq n}$ dans lequel $h\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial z_\beta}\right) = \delta_{\alpha\beta} + o(|z|)$. Les laplaciens $\Delta = d^*d + dd^*$, $\Delta' = d'^*d' + d'd'^*$ et $\Delta'' = d''^*d'' + d''d''^*$ sont alors liés par les égalités $\Delta = 2\Delta' = 2\Delta''$, de sorte que toute forme harmonique ω vérifie

$d'\omega = d''\omega = d'^*\omega = d''^*\omega = 0$, et que l'on a, avec les notations de 1.1 et 1.2, la décomposition de Hodge

(7) $$H^m \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigoplus_{i+j=m} H^{i,j} .$$

De plus, puisque Δ commute à la conjugaison complexe, on a

(8) $$\overline{H^{i,j}} = H^{j,i} .$$

THÉORÈME 4.- *Soit* Y *une variété analytique complexe compacte kählérienne* (i.e. *sur laquelle il existe une métrique kählérienne*).

a) *On a* $b_m = \sum_{i+j=m} h^{i,j}$ *quel que soit* m .

b) *On a* $h^{i,j} = h^{j,i}$ *quels que soient* i *et* j .

c) *La suite spectrale* (5) *dégénère en* E_1 .

d) *On a* $d\omega = 0$ *pour toute forme différentielle holomorphe sur* Y .

e) *Pour tout* m , *l'entier* b_{2m+1} *est pair ; si* Y *est de dimension* n , *on a* $b_{2m} \neq 0$ *pour* $0 \leq m \leq n$.

Les assertions a) et b) résultent de (7) et (8), et c) équivaut à a) (*cf.* 1.2). L'assertion d) traduit la nullité des différentielles $d_1^{i,0}$ de la suite spectrale (5), nullité qui résulte de c). Le fait que b_{2m+1} soit pair pour tout m est une conséquence immédiate de a) et b). Supposons Y de dimension n et soit h une métrique kählérienne sur Y . La 2-forme $\omega = \operatorname{Im} h$ est alors fermée. On a donc $d(\omega^m) = 0$ pour tout m . Si ω^m était exacte pour un entier m , $0 \leq m \leq n$, il en serait de même de ω^n , ce qui est absurde car $\frac{\omega^n}{n!}$ est la forme volume associée à h . Ceci prouve que $b_{2m} \neq 0$ pour $0 \leq m \leq n$.

1.4. Exemples de variétés analytiques complexes non kählériennes

a) Soit G (resp. L) le groupe des matrices $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec a,b,c dans $\mathbb{C}$ (resp. dans $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\, i$) . La variété analytique complexe $Y = G/L$ est compacte. Notons $\omega_1 , \omega_2 , \omega_3$ les formes différentielles holomorphes de degré 1 sur Y , invariantes sous l'action de G et induisant sur l'espace tangent à G en l'élément neutre les formes linéaires qui à $\begin{pmatrix} 0 & u & v \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ associent u , v et w respectivement. On a $d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$, de sorte que Y n'est pas kählérienne. En remarquant que la suite spectrale (5) peut se calculer à l'aide du bicomplexe des formes différentielles invariantes, on montre d'ailleurs que l'on a $h^{0,1} = 2$ et $h^{1,0} = 3$, donc $h^{1,0} \neq h^{0,1}$, et $b_1 = 4 < h^{1,0} + h^{0,1}$.

b) La surface de Hopf est le quotient de $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ par le groupe de transformations engendré par $(z,w) \longmapsto (2z,2w)$. C'est une surface analytique complexe compacte, homéomorphe à $\underset{\sim}{S}^3 \times \underset{\sim}{S}^1$ (pour le voir, utiliser l'homéomorphisme évident entre $C^2 - \{(0,0)\}$ et $\underset{\sim}{S}^3 \times \mathbb{R}_+^*$) . En particulier pour cette surface, b_1 est égal à 1, donc impair, et b_2 est nul. La surface de Hopf n'est donc pas kählérienne, ni même homéomorphe à une variété kählérienne.

1.5. Exemples de variétés analytiques complexes kählériennes

a) Il existe sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ une unique métrique hermitienne h invariante par le groupe unitaire $U(n+1)$ pour laquelle les droites (complexes) de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sont d'aire 1 ; on l'appelle la métrique de Fubini-Study. Comme toute forme différentielle de classe C^∞ de degré impair sur la variété différentielle sous-jacente à $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ invariante par $U(n+1)$ est nulle, la 2-forme $\operatorname{Im} h$ est fermée et h est une métrique kählérienne.

b) La restriction de h à une sous-variété analytique Y de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est une métrique kählérienne sur Y. (Lorsque la sous-variété Y est compacte, on sait d'après un résultat de Chow ([Ch 1]) qu'elle est l'ensemble des points complexes d'un sous-schéma propre et lisse de l'espace projectif.)

c) Il existe des variétés kählériennes compactes qui ne se plongent pas dans un espace projectif : c'est le cas par exemple des tores analytiques complexes qui ne sont pas des variétés abéliennes. Pour qu'une variété kählérienne compacte connexe Y se plonge dans un espace projectif (et donc soit algébrisable), chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante :

- il existe une métrique kählérienne h sur Y, telle que la classe de cohomologie de la 2-forme $\operatorname{Im} h$ appartienne à $H^2(Y,\mathbb{Q})$ ([Ko]) ;
- le degré de transcendance sur $\mathbb{C}$ du corps des fonctions méromorphes sur Y est égal à la dimension de Y ([Mo]).

2. HYPERCOHOMOLOGIE D'UN COMPLEXE DE FAISCEAUX (DE GROUPES ABÉLIENS)

Sauf mention du contraire, tous les faisceaux et morphismes de faisceaux considérés dans cet exposé sont des faisceaux et morphismes de faisceaux de groupes abéliens.

2.1. Faisceaux acycliques

Un faisceau A sur un espace topologique X est dit acyclique si l'on a $H^n(X,A)=0$ pour tout $n\geq 1$: A est en particulier acyclique s'il est injectif, ou flasque, ou fin ou mou lorsque X est paracompact, ou un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent lorsque X est un schéma affine.

2.2. Soit A^* un complexe de faisceaux sur un espace topologique X. On peut trouver une suite de complexes de faisceaux acycliques $(F^{*,n})_{n\geq 0}$ et de morphismes de complexes

(9) $$0 \longrightarrow A^* \longrightarrow F^{*,0} \longrightarrow F^{*,1} \longrightarrow \cdots$$

qui soit exacte. On en déduit un bicomplexe de groupes abéliens $F^{*,*}(X)$, dont nous noterons d' et d'' les différentielles de bidegrés $(1,0)$ et $(0,1)$. La cohomologie du complexe simple $F^*(X)$ associé est l'aboutissement d'une suite spectrale régulière

(10) $$E_1^{i,j} = H^j(F^{i,*}(X), d'') \Rightarrow H^{i+j}(F^*(X))$$

dont le terme $E_1^{i,j}$ est canoniquement isomorphe à $H^j(X, A^i)$ puisque $F^{i,*}$ est une résolution acyclique de A^i pour tout i.

2.3. Hypercohomologie (*cf.* [EGA], III, § 11)

À isomorphisme canonique près, la suite spectrale (10) ne dépend pas du choix des $F^{i,j}$. Il en est donc de même des groupes $H^m(F^*(X))$. On les note $H^m(X, A^*)$: ce sont *les groupes d'hypercohomologie* du complexe de faisceaux A^*. La suite spectrale (10) s'écrit alors :

(11) $$E_1^{i,j} = H^j(X, A^i) \Rightarrow H^{i+j}(X, A^*)$$

et est appelée *première suite spectrale d'hypercohomologie* de A^*. Elle est fonctorielle en A^*. Ses différentielles $d_1^{i,j} : E_1^{i,j} \longrightarrow E_1^{i+1,j}$ sont celles déduites de la différentielle de A^*.

2.4. Propriétés de l'hypercohomologie (*loc. cit.*)

Soit $u : A^* \longrightarrow B^*$ un morphisme de complexes de faisceaux.

a) Notons $H^i(A^*)$ et $H^i(B^*)$ les i-ièmes faisceaux de cohomologie des complexes A^* et B^*. Si $H^i(u) : H^i(A^*) \longrightarrow H^i(B^*)$ est un isomorphisme pour tout i (ce qui se résume en disant que u est un *homologisme*), et si les complexes A^* et B^* sont *bornés inférieurement*, les homomorphismes de groupes $H^m(X, u) : H^m(X, A^*) \longrightarrow H^m(X, B^*)$ sont *bijectifs* pour tout m.

b) Soit $v : A^* \longrightarrow B^*$ un morphisme de complexes de faisceaux *homotope* à u. Les morphismes déduits de u et v au niveau des premières suites spectrales d'hypercohomologie coïncident alors en E_2, donc aussi en E_r pour $r \geq 2$; les homomorphismes $H^m(X, u)$ et $H^m(X, v)$ coïncident pour tout m.

c) À une suite exacte courte $0 \longrightarrow A^* \longrightarrow B^* \longrightarrow C^* \longrightarrow 0$ de complexes de faisceaux correspond une *suite exacte longue d'hypercohomologie*

$$\ldots \longrightarrow H^m(X, A^*) \longrightarrow H^m(X, B^*) \longrightarrow H^m(X, C^*) \longrightarrow H^{m+1}(X, A^*) \longrightarrow H^{m+1}(X, B^*) \longrightarrow \ldots$$

3. FORMES DIFFÉRENTIELLES SUR UN SCHÉMA

3.1. Soient k un anneau commutatif, et A un anneau commutatif muni d'une structure de k-algèbre. Le *module des formes différentielles de degré* 1 *de la* k-*algèbre* A est le A-module $\Omega^1_{A/k}$ engendré par des éléments da $(a \in A)$ soumis aux relations

$$d(a + a') = da + da' \qquad d(aa') = ada' + a'da \qquad d(\lambda.1_A) = 0$$

pour a, a' dans A et λ dans k. (Lorsque k est égal à $\mathbb{Z}$, la dernière relation résulte des deux autres ; $\Omega^1_{A/\mathbb{Z}}$ est simplement noté Ω^1_A et appelé *module des formes différentielles absolues de degré* 1 *de l'anneau* A).

Exemple.- $\Omega^1_{k[T_1,\ldots,T_n]/k}$ est le $k[T_1,\ldots,T_n]$-module libre de base $dT_1,\ldots,dT_n$.

3.2. On note $\Omega^*_{A/k} = \bigoplus_{m\geq 0} \Omega^m_{A/k}$ l'algèbre extérieure du A-module $\Omega^1_{A/k}$. Les éléments de $\Omega^m_{A/k}$ sont les *formes différentielles de degré* m de la k-algèbre A ; ils s'écrivent (de façon non unique) comme sommes de termes de la forme $a_o da_1 \wedge \ldots \wedge da_m$. Il existe une unique antidérivation de $\Omega^*_{A/k}$ qui coïncide avec $a \longmapsto da$ dans $\Omega^o_{A/k} = A$; on la note encore d, elle s'appelle la *différentielle extérieure* et est de carré nul.

3.3. Soit $\rho : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux de A dans un anneau B (non nécessairement commutatif), dont l'image est contenue dans le centre de B, et soit $\delta : A \longrightarrow B$ une ρ-dérivation k-linéaire (i.e. on a $\delta(a+a') = \delta(a)+\delta(a')$, $\delta(aa') = \rho(a)\delta(a')+\rho(a')\delta(a)$ et $\delta(\lambda.1_A) = 0$ pour a,a' dans A et λ dans k), telle que $\delta(a)\delta(a) = 0$ pour tout $a \in A$. Par définition de $\Omega^*_{A/k}$, il existe un unique homomorphisme d'anneaux $u : \Omega^*_{A/k} \longrightarrow B$ qui coïncide avec ρ dans $\Omega^o_{A/k}$ et est tel que $u(da) = \delta(a)$. On a $u(a_o da_1 \wedge \ldots \wedge da_m) = \rho(a_o)\delta(a_1)\ldots\delta(a_m)$.

3.4. Etant donnés un schéma S et un S-schéma X, il existe sur X un "unique" complexe de faisceaux $\Omega^*_{X/S}$ tel que pour tout ouvert affine U = Spec(k) de S et tout ouvert affine V = Spec(A) de X au-dessus de U, le complexe des sections de $\Omega^*_{X/S}$ au-dessus de V soit $\Omega^*_{A/k}$. On dit que $\Omega^*_{X/S}$ est le *complexe de De Rham relatif* de X sur S.

4. LA SUITE SPECTRALE DE HODGE VERS DE RHAM

Dans ce paragraphe, X *désigne un schéma propre et lisse sur un corps* k.

4.1. Cohomologie de De Rham

Par analogie avec 1.3, on définit la *cohomologie de De Rham* $H^*_{DR}(X/k)$ de X comme l'hypercohomologie du complexe de De Rham $\Omega^*_{X/k}$ (*cf.* 3.4). La première suite spectrale d'hypercohomologie (*cf.* 2.3)

$$E_1^{i,j} = H^j(X,\Omega^i_{X/k}) \Rightarrow H^{i+j}_{DR}(X/k) \tag{12}$$

s'appelle encore *suite spectrale de Hodge vers De Rham.*

Comme X est propre sur k et que les $\mathcal{O}_X$-modules $\Omega^i_{X/k}$ sont cohérents, les dimensions $h^{i,j}$ des k-espaces vectoriels $H^j(X,\Omega^i_{X/k})$ sont *finies*. Il en est alors de même des dimensions b_m des k-espaces vectoriels $H^m_{DR}(X/k)$ d'après (12), et l'on a

$$b_m \leq \sum_{i+j=m} h^{i,j} \tag{13}$$

avec égalité pour tout $m \geq 0$ si et seulement si la suite spectrale (12) dégénère en E_1 (*cf.* arguments de 1.2).

4.2. Comment l'on déduit le théorème 1 de la théorie de Hodge

Dans ce numéro, nous supposons k de caractéristique 0 et rappelons comment l'on déduit de la théorie de Hodge les égalités

$$b_m = \sum_{i+j=m} h^{i,j} \tag{14}$$

et donc la dégénérescence en E_1 de la suite spectrale (12).

a) *On se ramène par changement de base au cas où* $k = \mathbb{C}$: on remarque pour cela que X admet un modèle sur un sous-corps de k qui est de type fini sur $\mathbb{Q}$, donc qui se plonge dans $\mathbb{C}$, et que les nombres b_m et $h^{i,j}$ sont invariants par extension des scalaires.

b) *On se ramène à la situation analytique complexe* : la variété analytique complexe X^{an} sous-jacente à X est compacte. On a une application continue canonique $u : X^{an} \longrightarrow X$ et des u-morphismes de faisceaux canoniques $\Omega^i_{X/\mathbb{C}} \longrightarrow \Omega^i_{X^{an}}$, d'où un morphisme de la suite spectrale de Hodge vers De Rham de X dans celle de X^{an}. Ce morphisme est un *isomorphisme* car les applications linéaires $H^j(X,\Omega^i_{X/\mathbb{C}}) \longrightarrow H^j(X^{an},\Omega^i_{X^{an}})$ qui s'en déduisent au niveau des termes $E_1^{i,j}$ sont *bijectives* par GAGA (*cf.* [Se 1] et [Gr]). Il suffit donc de démontrer la dégénérescence de la suite spectrale relative à X^{an}.

c) *Cas où le schéma* X *est projectif sur* $\mathbb{C}$: la variété analytique X^{an} est alors kählérienne (1.6,b)), et on conclut en utilisant la théorie de Hodge (th. 4 de 1.3).

d) *Cas où* X *est seulement propre sur* $\mathbb{C}$: on peut supposer X connexe. Soit n sa dimension. Il existe d'après un théorème de Chow ([Ch 2]) un schéma Y *projectif* sur $\mathbb{C}$ et un morphisme $\varphi : Y \longrightarrow X$ birationnel. Le théorème de résolution des singularités d'Hironaka ([Hi]) permet de choisir Y *lisse* sur $\mathbb{C}$. On déduit de $\varphi^{an} : Y^{an} \longrightarrow X^{an}$ un morphisme de la suite spectrale de Hodge vers De Rham de X^{an} dans celle de Y^{an}. Les applications linéaires $H^j(X^{an},\Omega^i_{X^{an}}) \longrightarrow H^j(Y^{an},\Omega^i_{Y^{an}})$ obtenues au niveau des termes $E_1^{i,j}$ sont *injectives*, à cause de leur compatibilité évidente avec les dualités de Kodaira - Serre

$$\begin{array}{ccccccc}
H^j(X^{an},\Omega^i_{X^{an}}) & \times & H^{n-j}(X^{an},\Omega^{n-i}_{X^{an}}) & \longrightarrow & H^n(X^{an},\Omega^n_{X^{an}}) & \simeq & \mathbb{C} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\
H^j(Y^{an},\Omega^i_{Y^{an}}) & \times & H^{n-j}(Y^{an},\Omega^{n-i}_{Y^{an}}) & \longrightarrow & H^n(Y^{an},\Omega^n_{Y^{an}}) & \simeq & \mathbb{C}\ .
\end{array}$$

La dégénérescence de la suite spectrale relative à X^{an} résulte alors de celle de la suite spectrale relative à Y^{an}. (L'argument employé ici est une variante de celui de [De]).

4.3. Comment l'on déduit le théorème 1 du théorème 2

Conservons les notations précédentes. Il existe un sous-anneau B de k *de type fini* sur $\mathbb{Z}$ et un schéma Y propre et lisse sur B tels que X soit isomorphe à $Y \times_B k$. On définit la cohomologie de De Rham de Y sur B comme en 4.1 et on a encore une suite spectrale régulière

$$E_1^{i,j} = H^j(Y,\Omega^i_{Y/B}) \Rightarrow H^{i+j}_{DR}(Y/B) . \tag{15}$$

Les B-modules $H^j(Y,\Omega^i_{Y/B})$, et par suite aussi les B-modules $H^m_{DR}(Y/B)$, sont *de type fini* parce que Y est propre sur B et que les $\mathcal{O}_Y$-modules $\Omega^i_{Y/B}$ sont cohérents. La formation de la suite spectrale (15) commute à la localisation, et quitte à remplacer B par $B\left[\frac{1}{s}\right]$ avec $s \neq 0$ dans B convenable, on peut supposer, ce que nous ferons dans la suite, que les B-modules $H^j(Y,\Omega^i_{Y/B})$ et $H^m_{DR}(Y/B)$ sont *libres*.

La formation de la suite spectrale (15) *commute alors à tout changement de base* $B \longrightarrow B'$ ([EGA], III, 7.8.5) ; en particulier, les rangs $h^{i,j}$ et b_m des B'-modules libres $H^j(Y',\Omega^i_{Y'/B'})$ et $H^m_{DR}(Y'/B')$, où $Y' = Y \times_B B'$, sont *indépendants* de B' . En prenant d'une part $B' = k$, d'autre part $B' = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ $(= W_2(\mathbb{F}_p))$ pour p assez grand, ce qui est possible vu le lemme ci-dessous, on voit que le théorème 1 est une conséquence du théorème 2.

Lemme.- Pour une infinité de nombres premiers p , B *admet un quotient isomorphe à* $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

Par hypothèse, B est isomorphe à un anneau de la forme $\mathbb{Z}[T_1,\dots,T_n]/\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathbb{Z}[T_1,\dots,T_n]$. Les polynômes $P \in \mathfrak{a}$ ont une racine commune dans k^n , donc aussi une dans $\bar{\mathbb{Q}}^n$, disons $(t_1,\dots,t_n)$. Une infinité de nombres premiers se décomposent totalement dans le corps de nombres $\mathbb{Q}(t_1,\dots,t_n)$ et $\mathbb{Z}[t_1,\dots,t_n]$ admet un quotient isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ pour presque tous ces nombres premiers.

5. PRINCIPE DES DÉMONSTRATIONS DES THÉORÈMES 2 ET 3

Dans [D;I], les théorèmes 2 et 3 sont énoncés pour k parfait ; le cas général s'en déduit aussitôt par changement de base. Pour exposer le principe des démonstrations de ces théorèmes, nous avons choisi de nous restreindre pour simplifier au cas où $k = \mathbb{F}_p$ (et donc $W_2(k) = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$).

5.1. L'isomorphisme de Cartier

Soit A un anneau commutatif annulé par p . L'anneau de cohomologie $H^*(A)$ du complexe de De Rham absolu Ω^*_A de A est alors une A^p-algèbre graduée (car on a $d(a^p) = 0$ pour tout $a \in A$).

PROPOSITION 1.- *Il existe un (unique) homomorphisme d'anneaux* $c : \Omega^*_A \longrightarrow H^*(A)$ *tel que* $c(a_0 da_1 \wedge \dots \wedge da_m)$ *soit la classe de cohomologie de* $a_0^p a_1^{p-1} \dots a_m^{p-1} da_1 \wedge \dots \wedge da_m$.

Pour tout $a \in A$, la forme différentielle $a^{p-1}da$ est fermée ; notons $\gamma(a)$ sa classe de cohomologie. Le polynôme $\Phi(X,Y) = \dfrac{(X+Y)^p - X^p - Y^p}{p}$ est à coefficients entiers, et on a pour a, b dans A

$$(a+b)^{p-1}d(a+b) - a^{p-1}da - b^{p-1}db = d(\Phi(a,b))$$
$$(ab)^{p-1}d(ab) = a^p b^{p-1}db + b^p a^{p-1}da$$

d'où $\gamma(a+b) = \gamma(a) + \gamma(b)$ et $\gamma(ab) = a^p\gamma(b) + b^p\gamma(a)$. L'égalité $\gamma(a)\gamma(a) = 0$ étant évidente, il suffit d'appliquer 3.3 pour conclure.

PROPOSITION 2.- *Si* A *est lisse sur* $\mathbb{F}_p$, *l'homomorphisme d'anneaux* $c : \Omega^*_A \longrightarrow H^*(A)$ *est bijectif.*

L'énoncé est de nature locale sur A, ce qui permet de se ramener au cas où A est étale sur un anneau de polynômes $B = \mathbb{F}_p[T_1,\dots,T_n]$. Alors A^p est étale (donc plat) sur B^p, on a $A = B \otimes_{B^p} A^p$ (car A est étale et radiciel sur $B \otimes_{B^p} A^p$), $\Omega^*_A = \Omega^*_B \otimes_B A = \Omega^*_B \otimes_{B^p} A^p$, $H^*(A) = H^*(B) \otimes_{B^p} A^p$, et il suffit de démontrer la prop. 2 pour l'anneau B. En utilisant la formule de Künneth, on se ramène au cas $n = 1$ et on conclut par un calcul direct.

L'isomorphisme réciproque de c est appelé isomorphisme de Cartier (*cf.* [Ca]).

5.2. Relèvements plats sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$

Un *relèvement* de A *plat* sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ est un anneau $\tilde{A}$ annulé par p^2 tel que $\tilde{A}/p\tilde{A} = A$ et que l'application $A \longrightarrow p\tilde{A}$ déduite par passage au quotient de la multiplication par p dans $\tilde{A}$ soit *bijective*. Notons $a \longmapsto p\,.\,a$ cette bijection.

Si A est lisse sur $\mathbb{F}_p$, $\tilde{A}$ est lisse sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ et tout endomorphisme de l'anneau A se relève en un endomorphisme de l'anneau $\tilde{A}$ ([EGA], III, 17.3.1 et 17.5.1).

5.3. L'homomorphisme $c_{\tilde{F}}$

Soient $\tilde{A}$ un relèvement de A plat sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, et $\tilde{F}$ un endomorphisme de $\tilde{A}$ relevant l'endomorphisme de Frobenius $F : a \longmapsto a^p$ de A ; pour tout $b \in \tilde{A}$, soit $u(b)$ l'élément de A tel que $\tilde{F}(b) = b^p + p\,.\,u(b)$.

Si $a \in A$, l'élément $a^{p-1}da + du(\tilde{a})$ de Ω^1_A, où $\tilde{a} \in \tilde{A}$ relève a, ne dépend pas du choix de $\tilde{a}$. Notons-le $\delta(a)$. On a

$$\delta(a+a') = \delta(a) + \delta(a')\ ,\ \delta(aa') = a^p\delta(a') + a'^p\delta(a) \quad \text{et} \quad \delta(a) \wedge \delta(a) = 0\ .$$

En appliquant 3.3, on obtient (*cf.* [Ma]) :

PROPOSITION 3.- *Il existe un (unique) homomorphisme d'anneaux* $c_{\tilde{F}} : \Omega^*_A \longrightarrow \Omega^*_A$ *tel que* $c_{\tilde{F}}(a_0 da_1 \wedge \dots \wedge da_m) = a_0^p\delta(a_1) \wedge \dots \wedge \delta(a_m)$. *Pour tout* $\omega \in \Omega^*_A$, *la forme différentielle* $c_{\tilde{F}}(\omega)$ *est fermée et sa classe de cohomologie est* $c(\omega)$.

Soient maintenant $\tilde{F}_1$ et $\tilde{F}_2$ deux endomorphismes de $\tilde{A}$ relevant F. Si a est un élément de A, il existe $v(a) \in A$ tel que $\tilde{F}_2(\tilde{a}) - \tilde{F}_1(\tilde{a}) = p\,.\,v(a)$ pour tout $\tilde{a} \in \tilde{A}$ relevant a. On a $v(a+a') = v(a) + v(a')$ et $v(aa') = a^p v(a') + a'^p v(a)$. Par construction de Ω^1_A, on en déduit l'existence d'un (unique) homomorphisme de groupes $h : \Omega^1_A \longrightarrow A$ tel que $h(a_0 da_1) = a_0^p v(a_1)$.

On a $dh = c_{\tilde F_2} - c_{\tilde F_1}$ dans Ω^1_A .

5.4. Décomposition du complexe de De Rham lorsque le morphisme de Frobenius se relève

Soit X un schéma *lisse* sur $\mathbb{F}_p$, et soit $F : X \longrightarrow X$ le *morphisme de Frobenius* (qui correspond à l'élévation à la puissance p-ième dans $\mathcal{O}_X$). Notons Ω^* le complexe de De Rham absolu de X et $\bigoplus_i \Omega^i[-i]$ le complexe ayant les mêmes composantes homogènes, mais une différentielle nulle.

La différentielle du complexe image directe $F_*\Omega^*$ est $\mathcal{O}_X$-linéaire. Les prop. 1 et 2 fournissent un *isomorphisme canonique* c de la $\mathcal{O}_X$-algèbre graduée $\bigoplus_i \Omega^i$ sur la $\mathcal{O}_X$-algèbre graduée $\bigoplus_i H^i(F_*\Omega^*)$ formée par les faisceaux de cohomologie de $F_*\Omega^*$.

On déduit de la prop. 3 l'énoncé suivant :

PROPOSITION 4.- *Supposons que* X *admette un relèvement* $\tilde X$ *plat sur* $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ *et que* F *admette un relèvement* $\tilde F : \tilde X \longrightarrow \tilde X$. *Il existe alors un morphisme de complexes de* $\mathcal{O}_X$*-modules* $c_{\tilde F} : \bigoplus_i \Omega^i[-i] \longrightarrow F_*\Omega^*$ *qui induit l'isomorphisme* c *par passage à la cohomologie.*

COROLLAIRE.- *Si de plus* X *est propre sur* $\mathbb{F}_p$, *la suite spectrale de Hodge vers De Rham de* X *dégénère en* E_1 *et l'on a* $b_m = \sum_{i+j=m} h^{i,j}$ *pour tout* $m \geq 0$ (avec les notations de 4.1).

L'hypercohomologie de Ω^* coïncide avec celle de $F_*\Omega^*$ (ce sont les mêmes complexes de faisceaux, seule l'action de $\mathcal{O}_X$ diffère), donc aussi avec celle du complexe $\bigoplus_i \Omega^i[-i]$ (prop. 4 et 2.4, a)), et ce dernier est somme directe des complexes $\Omega^i[-i]$ concentrés en un seul degré. On a donc

$$b_m = \dim H^m(X, \bigoplus_i \Omega^i[-i]) = \sum_i \dim H^m(X,\Omega^i[-i]) = \sum_{i+j=m} h^{i,j} .$$

5.5. Énoncé du résultat principal et démonstration des théorèmes 2 et 3

Soient X un schéma lisse sur $\mathbb{F}_p$ et $F : X \longrightarrow X$ le morphisme de Frobenius. Conservons les notations introduites en 5.4. Pour tout complexe A^* de faisceaux sur X , notons $\tau_{<p}(A^*)$ le sous-complexe de A^* dont la composante homogène de degré i est A^i pour $i < p-1$, $Z^i(A^*)$ pour $i = p-1$ et 0 pour $i \geq p$. Notons d'autre part $D(\mathcal{O}_X)$ la *catégorie dérivée de celle des* $\mathcal{O}_X$*-modules* (cf. [Ve]). L'un des résultats principaux de [D;I] s'énonce alors de la façon suivante :

PROPOSITION 5.- *À tout relèvement* $\tilde X$ *de* X *plat sur* $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ *correspond un isomorphisme* $c_{\tilde X} : \bigoplus_{i<p} \Omega^i[-i] \longrightarrow \tau_{<p}(F_*\Omega^*)$ *dans* $D(\mathcal{O}_X)$ *qui induit l'isomorphisme* c *de* 5.4 *par passage à la cohomologie.*

La démonstration sera donnée en 5.7.

Étant donné un $\mathcal{O}_X$-module inversible M , on munit $\Omega^* \otimes M^{\otimes p}$ (produit tensoriel sur $\mathcal{O}_X$) de la différentielle pour laquelle $d(\omega \otimes s^{\otimes p}) = d\omega \otimes s^{\otimes p}$ (ω section locale de Ω^* , s section locale de M).

COROLLAIRE.- *Supposons que* X *soit propre sur* $\mathbb{F}_p$ *et admette un relèvement plat sur* $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. *Pour tout* $\mathcal{O}_X$*-module inversible* M , *posons* $h^{i,j}(M) = \dim H^j(X,\Omega^i \otimes M)$. *On a alors pour tout* $m < p$

$$\sum_{i+j=m} h^{i,j}(M) = \dim \mathbb{H}^m(X,\Omega^* \otimes M^{\otimes p}) \leq \sum_{i+j=m} h^{i,j}(M^{\otimes p}) .$$

Le complexe de $\mathcal{O}_X$-modules $F_*(\Omega^* \otimes M^{\otimes p})$ est isomorphe à $(F_*\Omega^*) \otimes M$ et son hypercohomologie en degrés $< p$ coïncide avec celle du complexe $\tau_{<p}(F_*\Omega^*) \otimes M$ (utiliser 2.4, c)), donc aussi avec celle de $(\bigoplus_{i<p} \Omega^i[-i]) \otimes M$ (prop. 5 et 2.4). On en déduit par une démonstration analogue à celle du corollaire à la prop. 4 l'égalité $\sum_{i+j=m} h^{i,j}(M) = \dim \mathbb{H}^m(X,\Omega^* \otimes M^{\otimes p})$. La dernière inégalité de l'énoncé résulte aussitôt de la première suite spectrale d'hypercohomologie de $\Omega^* \otimes M^{\otimes p}$.

Conservons les hypothèses du corollaire. En prenant M égal à $\mathcal{O}_X$, on obtient le théorème 2 (pour $k = \mathbb{F}_p$). Supposons maintenant X connexe de dimension n , et soit L un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample. Pour tout couple d'entiers (i,j) tel que $j < n$, on a $h^{i,j}((L^{-1})^{\otimes N}) = 0$ pour N assez grand. Il existe en particulier $r \geq 0$ tel que $h^{i,j}((L^{-1})^{\otimes p^r}) = 0$ pour $i+j < \inf(p,n)$. Appliquant r fois le corollaire ci-dessus, on en déduit $h^{i,j}(L^{-1}) = 0$ pour $i+j < \inf(p,n)$. Ceci prouve le th. 3 (pour $k = \mathbb{F}_p$).

Remarque.- La méthode consistant à comparer M et $M^{\otimes p}$ pour obtenir des théorèmes d'annulation en cohomologie a été introduite par Szpiro ([Sz 1], [Sz 2], [Me]).

5.6. Complexes de Čech

Soient X un espace topologique, $\mathcal{A}$ un faisceau sur X et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert fini de X . Notons $\check{C}(\mathcal{U},\mathcal{A})$ le complexe de Čech de faisceaux ainsi défini :

. une section s du faisceau $\check{C}^j(\mathcal{U},\mathcal{A})$ sur un ouvert V de X est la donnée pour tout $(U_0, \dots U_j) \in \mathcal{U}^{j+1}$ d'une section $s(U_0, \dots, U_j)$ de $\mathcal{A}$ sur $U_0 \cap \dots \cap U_j \cap V$;

. on a $(ds)(U_0, \dots, U_{j+1}) = \sum_{\alpha=0}^{j+1} (-1)^\alpha s(U_0, \dots, \hat{U}_\alpha, \dots, U_{j+1})$ dans $U_0 \cap \dots \cap U_{j+1} \cap V$.

Le complexe $\check{C}(\mathcal{U},\mathcal{A})$ est une *résolution* du faisceau $\mathcal{A}$.

Soit maintenant $\mathcal{A}^*$ un complexe de faisceaux sur X . On note $\check{C}(\mathcal{U},\mathcal{A}^*)$ le complexe *simple* associé au bicomplexe dont les colonnes sont les $\check{C}(\mathcal{U},\mathcal{A}^i)$ et dont la différentielle horizontale se déduit de la différentielle de $\mathcal{A}^*$ par fonctorialité. Les morphismes canoniques $\mathcal{A}^i \longrightarrow \check{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{A}^i)$ définissent un *homologisme* de $\mathcal{A}^*$ dans $\check{C}(\mathcal{U},\mathcal{A}^*)$.

Soit de plus $\mathcal{B}$ un faisceau sur X . Se donner un morphisme de faisceaux ψ de $\mathcal{B}$ dans $\check{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{A}^*) = \check{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{A}^1) \oplus \check{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{A}^0)$ équivaut à se donner d'une part un morphisme de faisceaux $c_U : \mathcal{B}_{|U} \longrightarrow \mathcal{A}^1_{|U}$ pour tout $U \in \mathcal{U}$, d'autre part un morphisme de faisceaux $h_{U,U'} : \mathcal{B}_{|U\cap U'} \longrightarrow \mathcal{A}^{0}_{|U\cap U'}$ pour tout $(U,U') \in \mathcal{U}^2$. Pour que ψ soit un morphisme du *complexe* $\mathcal{B}([-1])$ (concentré en degré 1) dans le complexe $\check{C}(\mathcal{U},\mathcal{A}^*)$, il faut et il suffit que l'on ait $dc_U = 0$, $dh_{U,U'} = c_{U'} - c_U$ dans $U \cap U'$ et $h_{U,U'} + h_{U',U''} = h_{U,U''}$ dans $U \cap U' \cap U''$.

5.7. Démonstration de la proposition 5

Reprenons les notations de 5.5 et considérons un relèvement $\tilde{X}$ de X plat sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ Choisissons un recouvrement $\mathcal{U}$ de X par des ouverts affines ; choisissons alors, ce qui est possible d'après 5.2, un relèvement $\tilde{F}_U$ du morphisme de Frobenius au-dessus de U pour chaque $U \in \mathcal{U}$. On en déduit par 5.3 des morphismes de faisceaux $c_U : \Omega^1_{|U} \longrightarrow F_*\Omega^1_{|U}$ et $h_{U,U'} : \Omega^1_{|U\cap U'} \longrightarrow F_*\mathcal{O}_{X|U\cap U'}$ satisfaisant aux identités énoncées à la fin du numéro précédent, d'où un morphisme de complexes $\Omega^1[-1] \longrightarrow \check{C}(\mathcal{U},F_*\Omega^*)$. En composant ce morphisme avec l'*inverse dans* $D(\mathcal{O}_X)$ de l'homomorphisme canonique $F_*\Omega^* \longrightarrow \check{C}(\mathcal{U},F_*\Omega^*)$, on obtient un morphisme $\alpha_1 : \Omega^1[-1] \longrightarrow F_*\Omega^*$ dans $D(\mathcal{O}_X)$. On vérifie facilement que α_1 ne dépend ni du choix de $\mathcal{U}$, ni de celui des $\tilde{F}_U$. On le prolonge par multiplicativité en un morphisme $\alpha : \bigoplus_{i<p} \Omega^i[-i] \longrightarrow F_*\Omega^*$ dans $D(\mathcal{O}_X)$: la restriction de α à $\Omega^i[-i]$ est le composé

$$\Omega^i[-i] \xrightarrow{\text{antisymétrisation}} (\Omega^1[-1])^{\otimes i} \xrightarrow{\alpha_1^{\otimes i}} (F_*\Omega^*)^{\otimes i} \xrightarrow{\text{produit}} F_*\Omega^* .$$

(Le morphisme d'antisymétrisation $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_i \longrightarrow \frac{1}{i!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_i} \varepsilon(\sigma)\, \omega_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \omega_{\sigma(i)}$ nécessite d'inverser $i!$; c'est pour cela que nous sommes obligés de nous limiter aux degrés $i < p$.)

Le morphisme α induit par passage à la cohomologie l'isomorphisme c de 5.4 en degrés $< p$: l'assertion étant locale, il suffit de la vérifier lorsque X est affine, $\mathcal{U}$ égal à $\{X\}$; elle résulte alors de la compatibilité de c au produit (5.1, prop. 1) et de ce qu'elle est vraie en degré 1 par construction. On pose $\varphi_{\tilde{X}} = \tau_{<p}(\alpha)$. Puisque $\varphi_{\tilde{X}}$ induit un isomorphisme sur la cohomologie, c'est un isomorphisme dans $D(\mathcal{O}_X)$ et il répond aux exigences de la prop. 5.

6. COMPLÉMENTS

Deligne et Illusie généralisent les résultats qui précèdent à une base S de caractéristique p quelconque, et les précisent :

Soit X un S-schéma lisse. Notons F_S et F_X les morphismes de Frobenius *absolus* de S et X, et soit X' le S-schéma déduit de X par le changement de base $F_S : S \longrightarrow S$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "F_{X/S}"] \arrow[rr, bend left, "F_X"] \arrow[dr] & X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
& S \arrow[r, "F_S"] & S
\end{tikzcd}$$

où $F_{X/S}$ est le morphisme de Frobenius *relatif*. Notons-le simplement F.

Une méthode analogue à celle de 5.1 et 5.4 permet de définir un isomorphisme canonique $c : \bigoplus_i \Omega^i_{X'/S} \longrightarrow \bigoplus_i \mathcal{H}^i(F_*\Omega^*_{X/S})$ de $\mathcal{O}_{X'}$-algèbres graduées (dont l'isomorphisme réciproque est encore appelé isomorphisme de Cartier).

Soit $\widetilde{S}$ un relèvement de S plat sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. À tout $\widetilde{S}$-schéma $\widetilde{X}'$, plat sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, relevant le S-schéma X', Deligne et Illusie associent un isomorphisme $\varphi_{\widetilde{X}} : \bigoplus_{i<p} \Omega^i_{X'/S}[-i] \longrightarrow \tau_{<p}(F_*\Omega^*_{X/S})$ *dans* $D(\mathcal{O}_{X'})$ induisant c par passage à la cohomologie, et ils analysent la dépendance de $\varphi_{\widetilde{X}'}$ par rapport à $\widetilde{X}'$.

Ils montrent qu'inversement dès que $\tau_{<2}(F_*\Omega^*_{X/S})$ est *décomposable* (i.e. isomorphe dans $D(\mathcal{O}_{X'})$ à un complexe à différentielle nulle), X' admet un relèvement $\widetilde{X}'/\widetilde{S}$ plat sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

Lorsque S est affine, X de dimension relative $\leq p$ et que X' admet un relèvement $\widetilde{X}'/\widetilde{S}$ plat sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, le complexe $F_*\Omega^*_{X/S}$ tout entier est en fait décomposable dans $D(\mathcal{O}_{X'})$.

Enfin, diverses généralisations (aux complexes de De Rham à pôles logarithmiques, aux espaces algébriques) sont mentionnées dans [D;I].

7. EXEMPLES, CONTRE-EXEMPLES, QUESTIONS OUVERTES

7.1. On connaît des exemples de surfaces projectives et lisses X sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$ admettant des 1-formes globales *non fermées* ([Mu], [La], [Fo]), donc pour lesquelles $b_1 < h^{1,0} + h^{0,1}$ (*cf.* preuve du th. 4), et d'autres sur lesquelles il existe un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample L tel que $H^1(X,L^{-1}) \neq 0$ ([Ra], [Fl]). D'après les théorèmes 2 et 3, ces surfaces n'admettent pas de relèvement plat sur $W_2(k)$.

7.2. On connaît des surfaces projectives et lisses sur $\mathbb{F}_p$ (pour $p \geq 5$) admettant un relèvement plat sur $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ et pour lesquelles on a $h^{1,0} \neq h^{0,1}$ ([Se 2]).

7.3. Soit X un schéma lisse sur $S = \operatorname{Spec} k$, avec k corps parfait de caractéristique $p > 0$. Les notations étant celles du § 6, on sait que $F_*\Omega^*_{X/S}$ est décomposable dans $D(\mathcal{O}_{X'})$ lorsque X est une variété abélienne ou un espace projectif standard. Ce résultat n'est pas connu en général pour les grassmanniennes ou les intersections complètes : le cas des quadriques de dimension 3 en caractéristique 2 est même ouvert.

7.4. On ne sait pas si la suite spectrale de Hodge vers De Rham d'un schéma propre et lisse X de dimension $\geq p+1$ sur un corps parfait k de caractéristique $p>0$ dégénère en E_1 lorsque X admet un relèvement plat sur $W_2(k)$ (ou même sur $W_n(k)$ pour tout $n \geq 1$).

BIBLIOGRAPHIE

[Ca] P. CARTIER - *Une nouvelle opération sur les formes différentielles*. C. R. Acad. Sci. Paris 244 (1957), 426-428.

[Ch 1] W.-L. CHOW - *On compact complex analytic varieties*, Amer. J. of Math. 71 (1949), 893-914.

[Ch 2] W.-L. CHOW - *On the projective embedding of homogeneous varieties*, Lefschetz's volume, Princeton, 1956.

[De] P. DELIGNE - *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales*, Publ. Math. IHES 35 (1968), 105-126.

[D;I] P. DELIGNE et L. ILLUSIE - *Relèvements modulo* p^2 *et décomposition du complexe de De Rham*, à paraître dans Inventiones Mathematicae.

[EGA] A. GROTHENDIECK - *Éléments de Géométrie Algébrique*, rédigés avec la collaboration de J. DIEUDONNÉ, Publ. math. IHES.

[Fa] G. FALTINGS - *p-adic Hodge Theory*, preprint, Princeton University (1985).

[Fl] M. FLEXOR - *Nouveaux contre-exemples aux énoncés d'annulation "à la Kodaira" en caractéristique* $p > 0$, dans Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux, par L. Szpiro, Astérisque 86 (1981), 79-89.

[F;M] J.M. FONTAINE et W. MESSING - *Cohomologie cristalline et dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers De Rham*, preprint, Université de Grenoble (1985).

[Fo] R. FOSSUM - *Formes différentielles non fermées*, dans Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux, par L. Szpiro, Astérisque 86 (1981), 90-96.

[Gr] A. GROTHENDIECK - *Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents*, Séminaire Cartan 1956-57, exposé 2.

[Hi] H. HIRONAKA - *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. of Math. 79 (1964), 109-326.

[Ka] K. KATO - *On p-adic vanishing cycles (Application of ideas of Fontaine-Messing)*, preprint, Tokyo University (1985).

[Ko] K. KODAIRA - *On Kähler varieties of restricted type (An intrinsec characterization of algebraic varieties)*, Ann. of Math. 60 (1954), 28-48.

[La] W. LANG - *Quasi-elliptic surfaces in characteristic three*, Ann. Sci. ENS, 4ème série, 12 (1979), 473-500.

[Ma] B. MAZUR - *Frobenius and the Hodge Filtration, Estimates*, Ann. of Math. 98 (1973), 58-95.

[Me] R. MÉNÉGAUX - *Un théorème d'annulation en caractéristique positive*, dans Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux, par L. Szpiro, Astérisque 86 (1981), 35-43.

[Mo] B.G. MOISHEZON - *On* n-*dimensional compact varieties with* n *algebraically independent meromorphic functions*, Amer. Math. Soc. Translations 63 (1967), 51-177.

[Mu] D. MUMFORD - *Pathologies of modular surfaces*, Amer. J. of Math. 83 (1961), 339-342.

[Ra] M. RAYNAUD - *Contre-exemple au "Vanishing Theorem" en caractéristique* $p > 0$, dans C.P. Ramanujan - A tribute, Studies in Math. 8, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1978.

[Se 1] J.-P. SERRE - *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Annales de l'Institut Fourier 6 (1955), 1-42.

[Se 2] J.-P. SERRE - *Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique* p, dans Symposium Internacional de Topologia Algebraica, Mexico, 24-53 (1958).

[Sz 1] L. SZPIRO - *Le théorème de la régularité de l'adjointe de Gorenstein à la Kodaira*, dans Int. Symposium on Algebraic Geometry, Kyoto (1977), 93-102.

[Sz 2] L. SZPIRO - *Sur le théorème de rigidité de Parshin et Arakelov*, dans Journées de géométrie algébrique de Rennes II, Astérisque 64 (1979), 169-201.

[Ve] J.-L. VERDIER - *Catégories dérivées* (état 0), notes miméographiées IHES, reproduites dans le Séminaire de Géométrie Analytique du Bois-Marie SGA $4\frac{1}{2}$, par P. Deligne, Lecture Notes 569, Springer-Verlag, 1977.

Joseph OESTERLÉ

Université de Paris 6
U.E.R. de Mathématiques
Tour 46 - 5ème étage
2 place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05