Paul-André Meyer

# Calcul stochastique non commutatif

*Astérisque*, tome 152-153 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 672, p. 55-66
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1986-1987__29__55_0>

Séminaire BOURBAKI
39ème année, 1986-87, n° 672

Novembre 1986

# CALCUL STOCHASTIQUE NON COMMUTATIF

par Paul-André MEYER

Les résultats présentés dans cet exposé sont dus principalement à R.L Hudson et K.R. Parthasarathy d'une part, et à H. Maassen d'autre part. Il s'agit d'une théorie mathématique très plaisante, qui se développe sans gros outils abstraits, en parallèle avec le calcul stochastique classique (mouvement brownien, formule d'Ito, équations différentielles stochastiques). Les motivations physiques, contrairement à l'habitude, ne viennent pas de la physique fondamentale, mais plutôt de la physique d'ingénieurs : il s'agit de construire un bon modèle mathématique pour la notion de *bruit* quantique, se substituant au bruit blanc (mouvement brownien) des probabilités classiques.

## 1. MOUVEMENT BROWNIEN ET ESPACE DE FOCK

a) Soit $\Omega$ l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, continues et nulles en $0$, avec ses applications coordonnées notées $X_t$, la tribu $\mathcal{F}$ qu'elles engendrent, et la mesure de Wiener notée $P$. On sait depuis Wiener que tout élément $f$ de l'espace de Hilbert complexe $L^2(\Omega)$ peut se développer en série d'intégrales stochastiques multiples

(1) $$f = \Sigma_n I_n(\hat{f}_n) , \quad I_n(\hat{f}_n) = \int_{\mathcal{P}_n} \hat{f}_n(s_1,\ldots,s_n)dX_{s_1}\ldots dX_{s_n} .$$

La notation $\hat{f}_n$ suggère qu'il s'agit d'une sorte d'analyse harmonique de $f$. Pour $n>0$, $\mathcal{P}_n$ est le n-èdre croissant $(s_1<\ldots<s_n)$ de $\mathbb{R}_+^n$, muni de sa mesure de Lebesgue $ds_1\ldots ds_n$, et $I_n$ est une isométrie de $L^2(\mathcal{P}_n)$ sur un sous-espace $C_n$ de $L^2(\Omega)$ appelé le *n-ième chaos de Wiener*. Pour $n=0$, $\mathcal{P}_0$ est réduit à un point, la mesure est la masse unité en ce point, $L^2(\mathcal{P}_0)$ et $C_0$ sont formés de constantes, et $I_0$ est l'identité. Les chaos de Wiener sont orthogonaux et engendrent $L^2(\Omega)$.

Nous pouvons identifier $\mathcal{P}_n$ à l'ensemble des parties de $\mathbb{R}_+$ à n éléments, et noter $\mathcal{P}$ l'ensemble de toutes les parties finies de $\mathbb{R}_+$. En tant que somme des $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}$ hérite d'une structure mesurable correcte (lusinienne) et d'une mesure naturelle. Les opérations ensemblistes usuelles sont mesurables sur $\mathcal{P}$, en particulier $\mathcal{P}$ est un groupe mesurable pour la différence symétrique, mais ce groupe n'a pas de mesure de Haar. Ce que nous avons construit plus haut est un isomorphisme entre $L^2(\mathcal{P})$ et $L^2(\Omega)$ , que nous noterons

(2) $$f = I(\hat{f}) \quad \text{ou} \quad f = \int \hat{f}(A)dX_A \quad \text{avec} \quad \|I(\hat{f})\|^2 = \int |\hat{f}(A)|^2 dA \ .$$

Nous dirons que $\hat{f}$ est le *noyau* de la v.a. $f$ .

Selon la présentation de Guichardet [1], $L^2(\mathcal{P})$ s'appelle *l'espace de Fock* (il faut parfois ajouter *symétrique* ou *bosonique*, par opposition à un espace de Fock fermionique ou antisymétrique, qui viendra plus tard). Les physiciens utilisent couramment des espaces de ce type construits sur des espaces $L^2(E,\mu)$ pour décrire des particules (bosons) de types très divers, mais le cas de $L^2(\mathbb{R}_+,ds)$ ne correspond à aucune situation physique : il décrit en quelque sorte un objet quantique situé sur l'axe des temps, qui joue le rôle d'une source de bruit. La structure d'ordre de $\mathbb{R}_+$ va intervenir constamment dans la suite.

Nous identifierons informellement $L^2(\mathcal{P})$ et $L^2(\Omega)$ , et laisserons les chapeaux au vestiaire la plupart du temps.

Nous noterons $\Phi$ l'espace de Fock $L^2(\mathcal{P})$ . L'élément $1$ de $L^2(\mathcal{P}_0)$ (correspondant à la v.a. 1 sur $\Omega$) est appelé *vecteur vide* et noté $\mathbb{1}$ . Nous noterons $\Phi_{t]}$ (resp. $\Phi_{[t}$) l'ensemble des vecteurs $f \in \Phi$ tels que $f(A) = 0$ pour $A \not\subset [0,t[$ (resp. $[t,\infty[$). Pour $f \in \Phi_t$ , $g \in \Phi_{[t}$ , définissons $h = fg$ par

$$h(A) = f(A \cap [0,t[)g(A \cap [t,\infty[) \ .$$

Nous obtenons ainsi une application bilinéaire à valeurs dans $\Phi$ , et il est facile de voir qu'il existe un isomorphisme de $\Phi_{t]} \otimes \Phi_{[t}$ sur $\Phi$ , qui transforme $f \otimes g$ en $fg$ . Dans l'interprétation probabiliste de l'espace de Fock donnée plus haut, $\Phi_{t]}$ correspond à $L^2(\Omega,\mathcal{F}_{t]})$ , la tribu du passé engendrée par les $X_s$ , $s \leq t$ , $\Phi_{[t}$ à $L^2(\mathcal{F}_{[t})$ , la tribu du futur engendrée par les $X_s - X_t$ , $s \geq t$ , et le produit ci-dessus au produit ordinaire des v.a... Cette multiplication non partout définie de vecteurs bien séparés dans le temps, est un élément de structure de l'espace de Fock (elle fait de celui-ci un *produit tensoriel continu*).

b) *L'intégrale stochastique*. Soit $(f_t)$ une *courbe adaptée* dans l'espace de Fock, c'est-à-dire une courbe mesurable telle que $f_t \in \Phi_{t]}$ pour tout $t$ . Supposons $\int \|f_t\|^2 dt < \infty$ . On peut alors définir (par prolongement isométrique à partir des courbes étagées) l'*intégrale d'Ito*

$$F = \int_0^\infty f_s dX_s \ .$$

Il est intéressant de noter que dans l'élément différentiel, $f_s$ et $dX_s$ sont "séparés dans le temps" comme ci-dessus, de sorte que l'i.s. ne dépend que de la structure de produit tensoriel continu de l'espace de Fock. Comment calcule-t-on le

[1] Alain GUICHARDET - *Symmetric Hilbert spaces and related topics*, Lecture Notes in Math. 261, Springer, 1972.

noyau de $F$ connaissant les noyaux des $f_t$ ? L'adaptation s'exprime par le fait que $f_t(A)=0$ si $A\not\subset [0,t[$ ; désignons par $\vee A$ le dernier élément de $A$ et par $A-$ l'ensemble $A\setminus\{\vee A\}$ . Alors on a

(3) $$F(A)=f_{\vee A}(A-) \quad (\text{et } F(\emptyset)=0) .$$

$F$ est un vecteur d'espérance nulle. Inversement, soit $F$ un vecteur d'espérance nulle, et soit $f_t(A)=F(A\cup\{t\})$ si $A\subset [0,t[$ , et $0$ sinon; l'intégrale stochastique de la courbe $(f_t)$ est égale à $F$ .

Nous aurons plus tard des formules analogues pour les i.s. d'opérateurs.

Soit $h\in L^2(\mathbb{R}_+)$ ; la solution de l'équation différentielle stochastique

(4) $$Z_t = 1+\int_0^t Z_s h_s dX_s$$

est appelée *exponentielle stochastique* de $h$ . Dans l'interprétation brownienne, on a

$$Z_t = \exp(\int_0^t h_s dX_s - 1/2 \int_0^t h_s^2 ds)$$

et dans l'écriture des noyaux

(5) $$Z_t(A) = \Pi_{s\in A, s<t} h(s) \quad (Z_t(\emptyset)=1).$$

Les vecteurs $Z_\infty$ sont appelés vecteurs *exponentiels*, ou *cohérents*, et jouent un grand rôle dans l'analyse sur l'espace de Fock.

c) *Les opérateurs fondamentaux*

Nous adoptons la convention que $f(A+s)$ veut dire $f(A\cup\{s\})$ si $s\notin A$ et $0$ si $s\in A$ , de même $f(A-s)=f(A\setminus\{s\})$ si $s\in A$ et $0$ sinon. On interprètera de même $f(A+B)$ , $f(A-B)$ .

Soit $h\in L^2(\mathbb{R}_+)$ . Les *opérateurs de création et d'annihilation* sont définis par

(6) $$a_h^+ f(A) = \Sigma_{s\in A} h(s) f(A-s) \ , \ a_h^- f(A) = \int \bar{h}(s) f(A+s) ds$$

sous réserve que les noyaux ainsi définis soient dans $L^2(P)$ . Ces opérateurs sont fermés et adjoints l'un de l'autre. Ils satisfont à des relations de commutation dites *canoniques*, que je ne rappellerai pas. Les opérateurs de *comptage* (number operators) sont définis pour $h$ réelle bornée par

(7) $$a_h^o f(A) = (\Sigma_{s\in A} h(s)) f(A) .$$

Si $h$ est la fonction caractéristique de $[0,t]$ , on écrit simplement $a_t^o$ , et de même $a_t^+$ , $a_t^-$ .

Sur l'espace de Wiener, les opérateurs $a_h^-$ ($h$ réelle) sont des opérateurs de *dérivation* suivant les fonctions de Cameron-Martin, très couramment utilisés en analyse; l'opérateur $a_h^+ + a_h^- = Q_h$ est l'opérateur de *multiplication* par l'i.s $\int h_s dX_s$ . Quand aux $a_h^o$ , ce sont des opérateurs différentiels du second ordre.

Nous verrons que c'est le triplet d'opérateurs $(a_t^-, a_t^o, a_t^+)$ qui est le bruit quantique : les opérateurs $a^{\pm}$ sont extrêmement familiers pour les physiciens, mais l'idée que le trio est incomplet sans $a^o$ semble nouvelle et importante.

d) *Diverses interprétations probabilistes de l'espace de Fock*

Suivant l'axiomatique de von Neumann, une *variable aléatoire* sur $\Phi$ à valeurs dans un espace mesurable $(E,\mathcal{E})$ est une *mesure spectrale* $X=(X_A)_{A\in\mathcal{E}}$ étalée sur cet espace, la *loi* de $X$ dans un état (pur) $\phi$ - autrement dit un vecteur unitaire - étant la mesure de probabilité ordinaire sur $E$ $A \longmapsto \langle\phi, X_A\phi\rangle$ . Nous appellerons *interprétation probabiliste* de l'espace de Fock tout isomorphisme de $\Phi$ avec un espace $L^2(E,\mathcal{E},\mu)$ , pour lequel $\mu$ est une loi de probabilité et l'état vide $\mathbb{1}$ correspond à la fonction 1; dans ce cas les opérateurs de multiplication par $\chi_A (A\in\mathcal{E})$ sont les projecteurs d'une mesure spectrale $X$ qui est une observable complète au sens de l'axiomatique de von Neumann, et la loi de $X$ dans l'état vide est $\mu$ . Nous avons vu plus haut l'interprétation de Wiener; nous allons en voir d'autres à présent.

Revenons aux v.a. : des v.a. $(X^i)_{i\in I}$ à valeurs dans $E$ ne peuvent en général (c'est la différence fondamentale avec les probabilités classiques !) être considérées comme les marges d'une v.a. à valeurs dans $E^I$ : une condition nécessaire et suffisante pour cela est que les projecteurs spectraux $X_A^i$ *commutent tous*. En particulier, supposons que l'on ait $E=\mathbb{R}$ , $I=\mathbb{R}$ . Sur $\mathbb{R}$ , il y a bijection entre mesures spectrales et opérateurs a.a., et l'on a coutume de dire que la v.a. *est* l'opérateur autoadjoint associé. Une famille d'opérateurs a.a. qui commutent, indexée par $\mathbb{R}_+$ , constitue un *processus stochastique classique* sur l'espace de Fock. Il est intéressant aussi de considérer des processus stochastiques non commutatifs, mais nous n'en ferons aucune théorie générale.

Ainsi, le processus $(Q_t)$ est un processus stochastique classique sur l'espace de Fock, dont la loi dans l'état vide est celle d'un mouvement brownien. Conjuguons maintenant toute la structure par un opérateur unitaire, la *transformation de Fourier-Wiener*, qui se réduit sur le n-ième chaos à la multiplication par $i^n$ . Le processus classique $(Q_t)$ est transformé en un nouveau processus classique $P_t = i(a_h^+ - a_h^-)$ , dont la loi dans l'état vide est aussi celle d'un mouvement brownien, et cela nous procure une seconde "interprétation de Wiener". Le couple $(P_t, Q_t)$ n'est pas un processus classique : on a une relation de commutation non triviale

$$[dP_t, dQ_t] = \frac{2}{i}\, I dt \ .$$

Le théorème suivant, dû à Hudson-Parthasarathy, est beaucoup plus surprenant, et illustre le rôle des opérateurs $a_t^o$ .

Pour comprendre ce théorème, il faut rappeler que nous sommes partis de la décomposition en chaos de Wiener pour établir un isomorphisme entre un espace $L^2(P)$ et l'espace de Fock. Or il existe d'autres décompositions en chaos classiques en probabilités, pour les processus de Poisson cette fois, que l'on peut utiliser pour établir un isomorphisme entre espace de Fock et les espaces $L^2$ des processus de Poisson. Le théorème de Hudson-Parthasarathy *unifie toutes ces interprétations probabilistes*.

THÉORÈME.- *Il existe une interprétation probabiliste de l'espace de Fock par l'espace probabilisé* $(\Omega, F, P)$ *engendré par un processus de Poisson compensé* $(Y_t)$ , *à sauts de hauteur* $c \neq 0$ , *d'intensité* $1/c^2$ . *Dans cette interprétation, l'opérateur de multiplication par la* v.a. $Y_t$ *est une extension autoadjointe de* $Q_t + ca^o_t$ .

Ces divers processus ne commutent pas entre eux. En tant que *vecteur* de l'espace de Fock, $Y_t$ est l'opérateur de multiplication par $Y_t$ appliqué au vecteur $\mathbb{1}$ , et comme $a^o_t \mathbb{1} = 0$, la *courbe* tracée dans l'espace de Fock reste toujours la même (et la même que pour le brownien, qui correspond à $c = 0$) . Les intégrales stochastiques, etc... ne dépendent que de cette courbe, et ne dépendent donc pas de l'interprétation probabiliste. Ce qui en dépend essentiellement, ce sont les diverses *multiplications* de v.a. que l'on peut associer aux diverses interprétations (non partout définies, puisque le produit de deux éléments de $L^2$ n'appartient qu'à $L^1$ en général). Nous reviendrons là-dessus au §III.

*Remarque*.- Le processus $(a^o_t)$ admet lui aussi une interprétation comme une famille d'opérateurs de multiplication sur un espace de Poisson, mais le vecteur vide ne correspond pas à la fonction 1. Soit $h \in L^2(\mathbb{R}_+)$ , partout $>0$ pour simplifier. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties finies de $]0,\infty[$ , et pour $\omega \in \mathcal{P}$ soit $N_T(\omega)$ le nombre d'éléments de $\omega \cap ]0,t[$ . Il existe sur $\mathcal{P}$ une loi $P$ unique sous laquelle $(N_t)$ est un processus de Poisson d'intensité $h^2_t dt$ . Posons alors pour $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$

$$\mathcal{E}(f) = \prod_{s \in \omega} \frac{f(s)}{h(s)} \qquad (\mathcal{E}(h) = 1 \ , \ \mathcal{E}(0) = \chi_{\{\emptyset\}}) \ .$$

Soit $Q = cP$ avec $c = \exp(\|h\|^2)$ ; on a $<\mathcal{E}(f) \ , \ \mathcal{E}(g)>_Q = e^{<f,g>}$ , et on en déduit sans peine que l'espace de Fock est isomorphe à $L^2(Q)$ . D'autre part, les opérateurs de multiplication par $N_t$ dans $L^2(Q)$ correspondent aux opérateurs $a^o_t$ sur l'espace de Fock.

Lorsque $h$ tend vers 1 , on retrouve l'interprétation de Guichardet, mais $c$ tend vers $+\infty$ , et $P$ disparaît.

## 2. MODÈLE FINI. OPÉRATEURS DONNÉS PAR DES NOYAUX.

De la même manière que les fonctions $f$ ont une représentation de Wiener

$\int \hat{f}(A)dX_A$ , nous allons étudier pour les opérateurs une représentation de la forme $\int K(A,B,C)da_A^+ da_B^o da_C^-$ . Cette représentation est couramment utilisée par les physiciens, mais sans le terme médian, et de manière peu rigoureuse.

a) il est bon ici d'avoir un guide simple. Suivant une idée de J.-L. Journé, remplaçons le mouvement brownien $(X_t)$ par un jeu de pile-ou-face $(X_n)$ à un nombre fini $N$ de parties. Le $dX_t$ continu est remplacé par $x_i$ , où les $x_i$ $(i=1,\ldots,n)$ sont des v.a. indépendantes prenant les valeurs $\pm 1$ avec probabilité 1/2. L'espace $\Omega$ est ici $\{-1,1\}^N$ , que l'on peut considérer comme un groupe commutatif fini, dont la mesure de Bernoulli $P$ est la mesure de Haar. Pour tout $A \subset \{1,\ldots,N\}$, posons

$$x_A(\omega) = \prod_{i \in A} x_i(\omega) \ .$$

Les fonctions $x_A$ sont exactement les caractères de $\Omega$ , et tout élément $f$ de $L^2(\Omega)$ admet une représentation

$$f = \sum_{A \in P} \hat{f}(A) x_A$$

qui est à la fois analogue à (2), et une véritable analyse harmonique de $f$ . Définissons les opérateurs de création, d'annihilation et de comptage par

$$a_i^+ x_A = x_{A+i}, \ a_i^- x_A = x_{A-i} \ , \ a_i^o = a_i^+ a_i^-$$

puis posons pour $A \in P$ , $\varepsilon = +,o,-$

$$a_A^\varepsilon = \prod_{i \in A} a_i^\varepsilon \ .$$

Alors on a le résultat très facile suivant :

THÉORÈME.- *Les opérateurs* $a_A^+ a_B^o a_C^-$ *avec* $A,B,C$ *disjoints forment une base de l'espace* (de dimension finie!) *de tous les opérateurs sur* $L^2(\Omega)$ .

Le fait de supposer $A,B,C$ disjoints fait que l'ordre des symboles $+,o,-$ est indifférent. On obtient une autre base en considérant les opérateurs $a_A^+ a_B^-$ , où cette fois $A$ et $B$ ne sont plus nécessairement disjoints, et les + sont avant les - : c'est la *forme normale* des physiciens. D'une manière générale, le modèle fini éclaire beaucoup la théorie continue, mais nous n'avons pas la place d'en dire plus.

b) Passons à la théorie continue. Il s'agit de définir un opérateur

$$K = \int K(A,B,C) da_A^+ da_B^o da_C^-$$

où l'on conviendra (par analogie avec le modèle fini) que $K(A,B,C) = 0$ si $A,B,C$ ne sont pas disjoints. Le modèle fini suggère que, si $f$ est donnée par son noyau, le noyau de $Kf$ se calcule par la formule suivante (où nous remettons une seule fois les chapeaux, pour la clarté).

$$(8) \qquad \widehat{Kf}(A) = \int \sum_{U+V+W=A} K(U,V,M)\hat{f}(V+W+M)dM$$

sous réserve que l'intégrale ait un sens, et que le résultat appartienne à $L^2$ . Pour donner un sens précis à $K$ en tant qu'opérateur, on définit une classe de *fonctions-test,* et une classe de *bons noyaux* (noyaux de Maassen).

1) La fonction $f$ est une *fonction-test* si elle (i.e. si son noyau) est à support compact suivant le temps ($f(A)=0$ si $A \not\subset [0,t]$ , pour un $t$ assez grand), et si elle satisfait à une inégalité de la forme

$$(9) \qquad |f(A)| \leq cM^{|A|}$$

où $A$ est le nombre d'éléments de $A$ . Comme la mesure de $\mathcal{P}_n \cap [0,t]^n$ est $t^n/n!$ , $f$ appartient à $L^2(\mathcal{P})$ . Des exemples de telles fonctions sont les vecteurs exponentiels $\mathcal{E}(h)$ , pour $h$ bornée à support compact : les fonctions test sont donc denses dans l'espace de Fock.

2) Le noyau $K$ est un *bon noyau* s'il est à support compact suivant le temps ($K(A,B,C)=0$ si $A\cup B\cup C \not\subset [0,t]$ , pour un $t$ assez grand), et s'il satisfait à une inégalité de la forme

$$(10) \qquad |K(A,B,C)| \leq cM^{|A|+|B|+|C|} \quad .$$

Les deux résultats fondamentaux de Maassen sont les suivants; une fois conjecturés, ils se démontrent sans grosse difficulté.

THÉORÈME.- 1) *Les bons noyaux transforment les fonctions-test en fonctions test.* 2) *L'ensemble des bons noyaux est stable par addition, composition et passage à l'adjoint.*

Voici, pour épater un peu le lecteur, la formule de composition de deux noyaux K et L

$$KL(A,B,C) = \sum_{\substack{a+a'+a''=A \\ b+b'+b''=B \\ c+c'+c''=C}} K(a,a'+b+b',c+c'+M)L(M+a'+a'',b'+b''+c',c'')dM \ .$$

Revenant au modèle fini, il est naturel de se demander dans quelle mesure on a construit une sorte de "base continue" pour les opérateurs sur l'espace de Fock. En ce qui concerne l'unicité, pas de problème : deux bons noyaux définissant le même opérateur sont égaux aux ensembles de mesure nulle près. Mais quant à l'existence, J.-L. Journé a construit un opérateur borné qui n'est pas représentable par un noyau (il s'agit de la seconde quantification de la transformation de Hilbert sur $\mathbb{R}_+$ ) . Ensuite, Parthasarathy a montré que cet opérateur était représentable par une sorte de noyau-distribution.

c) *Intégrales stochastiques.* Nous allons étendre aux opérateurs la théorie de l'intégrale d'Ito, en restant dans le cadre des noyaux de Maassen : il existe une théorie un peu plus générale, et parfois indispensable, due à Hudson-Parthasarathy.

Considérons un *processus adapté de noyaux*, c'est-à-dire une famille $(K_t)$ de noyaux telle que pour chaque $t$, $K_t$ soit $t$-adapté ($K_t(A,B,C)=0$ si $A\cup B\cup C \not\subset [0,t[$ ). On définit alors l'intégrale stochastique

$$I^\varepsilon = \int_0^\infty K_s da_s^\varepsilon \quad , \ \varepsilon = +,o,-$$

comme un noyau, en complète analogie avec (3), dont on reprend les notations

(11) $I^+(A,B,C) = K_{\vee A}(A-,B,C)$, $I^o(A,B,C) = K_{\vee B}(A,B-,C)$, $I^-(A,B,C) = K_{\vee C}(A,B,C-)$.

(on convient que $K_\emptyset$ est remplacé par 0). Par exemple, soit $K$ un noyau. Posons

$$k_t^+(A,B,C) = K(A+t,B,C) \quad \text{si} \quad \vee B < \vee A,\ \vee C < \vee A,\ \vee A < t \quad (\text{et } 0 \text{ sinon})$$

et de même pour $k_t^o$, $k_t^-$. Alors on a

$$K = \Sigma_\varepsilon \int k_s^\varepsilon da_s^\varepsilon + K(\emptyset,\emptyset,\emptyset)I \ ,$$

ce qui est analogue à la représentation des martingales browniennes en intégrale stochastique.

Disons un mot de la *table d'Ito* : le problème est celui de la composition de deux noyaux J et K donnés par des intégrales stochastiques

$$J = \int j_s^\varepsilon da_s^\varepsilon \quad , \ K = \int k_s^\eta da_s^\eta \quad (\varepsilon,\eta = +,o,-)$$

On définit les intégrales jusqu'à $t$ : $J_t, K_t$. On écrit alors une "formule d'intégration par parties" formelle

$$JK = \int J_s k_s^\eta da_s^\eta + j_s^\varepsilon K_s da_s^\varepsilon + j_s^\varepsilon k_s^\eta da_s^\varepsilon da_s^\eta$$

et il s'agit d'interpréter le dernier terme. La règle d'Ito dit que les seuls "produits" $da_s^\varepsilon da_s^\eta$ non nuls sont donnés par

(12) $$da_s^- da_s^o = da_s^-,\ da_s^- da_s^+ = ds,\ da_s^o da_s^o = da_s^o,\ da_s^o da_s^+ = da_s^+ \ .$$

On remarquera que les indices $\varepsilon$, $\eta$ des produits non nuls vont toujours en croissant (selon l'ordre $-<o<+$).

d) *Equations différentielles stochastiques*. Nous ne dirons qu'un mot de ce sujet, qui est pourtant le plus important par ses applications.

En probabilités classiques, lorsqu'on veut construire la solution d'un problème de Cauchy

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = L_x f(x,t)\ , \ f(x,0) = f(x)$$

où $L$ est un brave opérateur elliptique sur un espace $\mathbb{R}^n = E$, on procède de la manière suivante : on "couple" $E$ à une source de bruit $\Omega$, i.e. on construit l'espace des trajectoires continues à valeurs dans $E$, muni de la mesure de Wiener; on résoud une équation différentielle stochastique convenablement liée à l'opérateur $L$, issue de chaque point de $E$ ; on redescend de $\Omega$ à $E$ au moyen d'une espérance conditionnelle.

En probabilités quantiques, E est remplacé par un espace de Hilbert, le couplage de E avec un ou plusieurs espaces de Fock revient à former un produit tensoriel, et la notion d'équation différentielle stochastique a été développée par Hudson - Parthasarathy dans ce cadre, pour des processus d'opérateurs. La méthode permet de déterminer des dilatations unitaires explicites pour certains semi-groupes de contractions de E , et pour commencer, pour tous les semi-groupes *uniformément* continus.

e) *Opérateurs de fermions.* Une application assez spectaculaire de l'intégrale stochastique doit être signalée ici : l'opérateur $a_t^o$ étant autoadjoint à spectre entier, on peut définir l'opérateur $J_t = (-1)^{a_t^o}$ (qui est en fait une symétrie). Posons alors pour $\varepsilon = +,-$

(13) $$b_t^\varepsilon = \int_0^t J_s da_s^\varepsilon \ .$$

THÉORÈME.- *Les opérateurs* $b_t^\pm$ *sont bornés et mutuellement adjoints ; ils satisfont aux relations d'anticommutation canoniques*

(14) $$[db_s^-, db_t^-]_+ = 0 = [db_s^+, db_t^+]_+ \ , \ [db_s^-, db_t^+]_+ = \delta_{st} dt \ ,$$

*où* $[\ ]_+$ *désigne l'anticommutateur.*

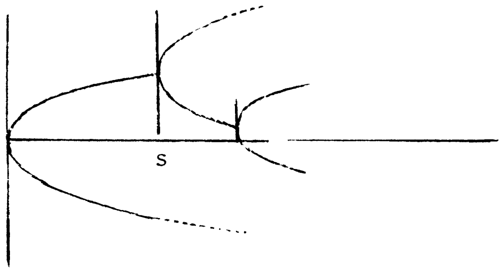
*Commentaire.*- On réalise d'habitude les relations d'anticommutation canoniques sur l'*espace de Fock antisymétrique*. Celui-ci contrairement à l'espace de Fock symétrique, n'a pas d'interprétation probabiliste évidente. Ici, nous travaillons sur l'espace de Fock construit sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ , et $\mathbb{R}_+$ est *ordonné*. On peut utiliser cet ordre pour construire un isomorphisme naturel entre l'espace de Fock *antisymétrique* et l'espace $L^2$ du mouvement brownien, consistant tout simplement à déplier de manière antisymétrique sur $\mathbb{R}_+^n$ une fonction appartenant à $L^2(P_n)$ . Si on identifie ainsi espace de Fock symétrique et antisymétrique, les $b_t^\pm$ sont les opérateurs de fermions habituels. Mais cet isomorphisme permet de dire d'autres choses amusantes : par exemple, on peut définir sur l'espace du mouvement brownien une *multiplication de Clifford* des v.a., définie et associative au moins sur la somme (non complétée) des chaos de Wiener.

La relation entre bosons et fermions étudiée ici a été aperçue (avant Hudson-Parthasarathy, mais de manière moins nette) par P. Garbaczewski, Comm. M. Phys. 43, 1975 . Les relations entre bosons et fermions sont un thème récurrent en physique : R.F. Streater nous a indiqué que les relations que l'on rencontre en physique relativiste ne sont pas liées à celle que nous avons décrite plus haut.

Les opérateurs $F_t = b_t^- + b_t^+$ sont autoadjoints, et peuvent donc être considérés comme des v.a., mais les v.a. $F_t$ relatives à des instants différents ne commutent pas, et le processus $(F_t)$ est le *mouvement brownien fermionique*, le premier exemple vraiment intéressant de "processus stochastique non commutatif".

On peut s'en faire une représentation intuitive de la manière suivante : on trace la courbe $x = \pm\sqrt{t}$ ; tant qu'on ne regarde pas la particule issue de $0$ , elle se déplace de manière "déterministe" suivant le temps, mais en résonance entre les points $+\sqrt{t}$ et $-\sqrt{t}$ . Si on la regarde à l'instant $s$ , on la voit soit en haut, soit en bas avec une probabilité $1/2$ . Elle reprend ensuite son mouvement sur une nouvelle parabole ayant son sommet au point où elle a été vue, toujours en résonance entre les deux branches jusqu'à l'observation suivante. Si l'on resserre les observations, ce que l'on observe ressemble de plus en plus à un mouvement brownien classique.

La structure probabiliste de l'espace de Fock antisymétrique a été étudiée de manière approfondie par Streater-Barnett-Wilde.




## 3. QUELQUES NOYAUX INTÉRESSANTS

Nous nous proposons de faire un petit catalogue d'opérateurs représentés par des noyaux. Commençons par les *opérateurs élémentaires*, de *création*, de *comptage* et d'*annihilation*

(15) $\qquad a_h^+(\{t\},\emptyset,\emptyset) = h(t)\ ,\ a_h^o(\emptyset,\{t\},\emptyset) = h(t)\ ,\ a_h^-(\emptyset,\emptyset,\{t\}) = \bar{h}(t)$

( $0$ dans tous les autres cas).

Nous passons à diverses multiplications commutatives : la plus célèbre est la *formule de multiplication des intégrales stochastiques* (au sens de Wiener)

(16) $$fg(A) = \int \Sigma_{U+V=A}\, f(U+M)g(V+M)dM\ .$$

De la même façon, les divers produits de v.a. relatifs aux diverses interprétations de Poisson sont donnés par

(17) $$fg(A) = \int \Sigma_{U+V+W=A}\, f(U+V+M)g(V+W+M)c^{|V|}dM$$

(le cas $c = 0$ correspond au produit de Wiener). Dans tous ces cas, la multiplication par $g$ est un opérateur donné par un noyau

(18) $$G(A,B,C) = c^{|B|}g(A+B+C)\ ,$$

qui est un bon noyau si $g$ est une fonction-test. Mais cela ne finit pas l'histoire : il y a d'autres produits associatifs et commutatifs que l'on peut définir raisonnablement. Par exemple, généralisant le produit de Wiener

(19) $$fg(A) = \int \Sigma_{U+V=A}\, f(U+M)g(V+M)\lambda^{|M|}dm\ .$$

Le cas $\lambda = 1$ correspond à Wiener, le cas $\lambda = -1$ est le produit de Wiener relatif au mouvement brownien conjugué, le cas $\lambda = 0$ correspond au produit de Wick.

Passons à d'autres types de noyaux : ceux qui ne dépendent que du second argument ( $K(\emptyset,B,\emptyset) = k(B)$ , $K(A,B,C) = 0$ dans les autres cas) correspondent dans le modèle discret à des *multiplicateurs de Fourier*

$$(Kf)(A) = j(A)f(A) \quad \text{où} \quad j(A) = \Sigma_{B\subset A}\, k(B)$$

et l'on passe de $j$ à $k$ par la formule d'inversion de Moebius. L'un des plus remarquables de ces multiplicateurs est l'opérateur $J_t = (-1)^{a^o_t}$ mentionné plus haut à propos des fermions. Le multiplicateur $j_t(A)$ vaut dans ce cas $(-1)^{|A_t|}$ (où l'on a posé $A_t = A \cap [0,t[$ ), et le noyau est donné par $k_t(B) = (-2)^{|B_t|}$ .

Enfin, mentionnons le *produit de Clifford* de deux fonctions $f,g$

(20) $$fg(A) = \int \Sigma_{U+V=A}\, f(U+M)g(V+M)(-1)^{n(U+M,V+M)}dM$$

où $n(.,.)$ désigne un nombre d'inversions. Le noyau correspondant à la multiplication par $g$ est plus difficile à calculer que (18), et nous ne l'expliciterons pas. Comme en (19), on peut mettre un facteur $\lambda^{|M|}$ sans perdre l'associativité, et le cas $\lambda = 0$ correspond au produit extérieur.

## BIBLIOGRAPHIE

L'article principal de R.L. HUDSON et K.R. PARTHASARATHY est *Quantum Ito's formula and stochastic evolutions*, Comm. Math. Phys. 1984, p. 301-323.

Celui de H. MAASSEN est *Quantum Markov processes on Fock space described by integral kernels. Quantum probability and applications II*, p. 361-374. (Heidelberg 1984, L. Accardi et W. von Waldenfels ed.) Lecture Notes in Math. 1136.

Un effort pour présenter le contenu de ces deux articles est fait dans

P.-A. MEYER - *Éléments de probabilités quantiques*, Sém. Prob. XX, p. 186-312 (J. Azéma et M. Yor éd.). Lecture Notes in Math. 1204, Springer 1986 (à suivre vol. XXI).

On trouvera dans le même volume le contre-exemple de J.-L. JOURNÉ mentionné dans le texte.

Les articles concernant le calcul stochastique sur les fermions sont

C. BARNETT, R.F. STREATER, I.F. WILDE - *The Ito-Clifford Integral*, J. Functional Anal. 48, 1982 ; J. London M. Soc. 27, 1983 ; Comm. Math. Phys. 89, 1983 ;

J. Operator Theory 11, 1984. *Cf.* C. BARNETT et I. WILDE, J. Funct. Anal. 58, 1984 ; D.B. APPLEBAUM et R.L. HUDSON, Comm. Math. Phys. 96, 1984.

Un sujet important, dont nous n'avons pas parlé ici, concerne les représentations des relations de commutation canoniques "à température positive", qui ont une interprétation probabiliste en termes de mouvement brownien à deux dimensions. Voir

R.L. HUDSON, J.M. LINDSAY - *Uses of non-Fock brownian motion and a quantum martingale representation theorem. Quantum probability and applications II*, Proceedings Heidelberg 1984, Lecture Notes in Math. 1136.

Ce même volume contient plusieurs autres articles liés au sujet de cet exposé, en particulier ceux de L. ACCARDI et K.R. PARTHASARATHY, C. BARNETT et I. WILDE, et D. APPLEBAUM.

Enfin, deux articles très intéressants de K.R. PARTHASARATHY et K.B. SINHA devraient paraître prochainement, intitulés *Stochastic integral representation of bounded quantum martingales in Fock space*, et *Stop times in Fock space quantum stochastic calculus*.

Paul-André MEYER
IRMA
Université Louis Pasteur
7 rue du Général Zimmer
F-67084 STRASBOURG CEDEX