JEAN-LOUIS VERDIER

Groupes quantiques

Astérisque, tome 152-153 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 685, p. 305-319
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1986-1987__29__305_0>

Séminaire BOURBAKI
39ème année, 1986-87, n° 685

Juin 1987

GROUPES QUANTIQUES
[d'après V.G. Drinfel'd]

par Jean-Louis VERDIER

1. INTRODUCTION

Les systèmes mécaniques classiques amènent à considérer les objets suivants : une variété symplectique, espace de phase du système ; des hamiltoniens en involutions ; des groupes naturels de symétries dont l'action sur l'espace de phase est hamiltonienne et qui produisent des intégrales premières, à l'aide de l'application moment.

Dans certains systèmes classiques étudiés ces dernières années, en particulier les systèmes du type K.P. ou K.D.V., ou plus généralement les systèmes complètement intégrables construits par la méthode de "transformation d'habillage" [13], cette situation paradisiaque s'altère légèrement. Les situations symplectiques naturelles ont tendance à dégénérer et il y a lieu de les remplacer par la structure duale de crochet de Poisson. Il apparaît plusieurs structures symplectiques naturelles. Plus grave encore, les groupes naturels de symétrie ne préservent pas les structures symplectiques. Toutes ces incohérences apparentes s'éclairent lorsqu'on comprend que les groupes naturels de symétrie sont munis, eux aussi, de structure de Poisson et que les actions considérées sont des actions de Poisson [16].

Mais cela a la conséquence suivante : lorsqu'on étudie les déformations quantiques de ces systèmes classiques, on est amené à étudier en même temps les déformations quantiques des groupes de Poisson de symétries. Ces déformations produisent de nouveaux objets qu'on appelle *groupes quantiques*.

En mécanique statistique, ou bien en théorie quantique des champs, plus spécialement dans la méthode du *scattering inverse quantique*, sont apparues des équations satisfaites par des matrices dépendant d'un paramètre appelées équations de Yang - Baxter (Quantiques) (YBQ) ou encore équations triangles. Toute solution de ces équations permet de construire des systèmes quantiques ou de mécanique statistique exactement solubles. E.K. Sklyanin a proposé d'étudier des limites classiques de ces équations YBQ qu'il a appelées équations de Yang-Baxter classiques (YBC) [7]. Il se trouve que toute solution de YBC permet de construire un groupe de Poisson. Réciproquement, les déformations quantiques des groupes de Poisson permettent de construire des solutions de YBQ.

J'ai suivi en partie l'exposé très riche de Drinfel'd au C.M.I. de Berkeley [1]. En m'inspirant de [11], j'ai donné quelques indications sur les démonstrations de la partie "classique" de cet exposé. Faute de place, j'ai dû réduire beaucoup la partie "quantique".

Nous possédons maintenant un instrument permettant d'étudier systématiquement les systèmes complètement intégrables classiques, les systèmes exactement solubles de la mécanique statistique, les systèmes intégrables quantiques. La vision que nous en avons maintenant s'est dégagée petit à petit des travaux de Baxter, des travaux de l'Ecole de Léningrad autour de Fadeev, des travaux de Yang et Zamolodchikov.

Le sujet des groupes quantiques est extrêmement actif. Leur interprétation en terme de "groupes de symétrie" d'objets géométriques non commutatifs est en devenir [12]. Ils commencent à être étudiés du point de vue des algèbres stellaires [19].

2. THÉORIE DE LIE - POISSON

2.0. Soit X une variété. Une structure de Poisson sur X est une section P de $\overset{2}{\Lambda}T_X$ telle que la loi de composition

$$(f,g) \longmapsto \{f,g\} = \langle P, df \wedge dg\rangle$$

fasse de $C^\infty(X)$ une algèbre de Lie. Cette loi de composition est appelée *crochet de Poisson*. Soit $x \in X$. On dit que P est inversible si, pour tout $x \in X$, $P(x)$, interprété comme un morphisme de T^*_x dans T_x , est inversible. L'inverse $\Omega = P^{-1}$ est alors une 2-forme fermée, inversible en chaque point, c'est-à-dire une forme symplectique sur X . Réciproquement une forme symplectique sur X définit une structure de Poisson inversible sur X . Les structures de Poisson que nous allons considérer ici ne sont pas en général inversibles.

2.1. Soient X et Y deux variétés, $P \in \Gamma(X,\overset{2}{\Lambda}T_X)$, $Q \in \Gamma(Y,\overset{2}{\Lambda}T_Y)$ deux structures de Poisson sur X et Y respectivement. La section

$$P \times Q = 1 \otimes Q + P \otimes 1 .$$

de $\Gamma(X \times Y , \overset{2}{\Lambda}T_X \oplus \overset{2}{\Lambda}T_Y) \hookrightarrow \Gamma(X \times Y , \overset{2}{\Lambda}T_{X\times Y})$ est une structure de Poisson sur le produit appelée *structure de Poisson produit*. On dit qu'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ est un *morphisme de Poisson* si $f^*Q = df(P)$.

2.2. Soient G un groupe de Lie, P une structure de Poisson sur G. On dit que (G,P) est un groupe de Lie-Poisson si le morphisme de multiplication $m : G \times G \longrightarrow G$ est un morphisme de Poisson de la variété $G \times G$, munie de la structure de Poisson produit $P \times P$, sur G muni de P. Il revient au même de dire que pour tout $x,y \in G$, on a

2.2.1 $$P(xy) = x . P(y) + P(x) . y \, .$$

Soit $e \in G$, l'élément neutre. On a $2P(e) = P(e)$, d'où $P(e) = 0$. Donc P n'est pas inversible en général.

2.3. Une *cogèbre de Lie*, réelle ou complexe, est un espace vectoriel $\mathfrak{g}$, réel ou complexe, muni d'un homomorphisme $\mathfrak{p} : \mathfrak{g} \longrightarrow \overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g}$, appelé *cocommutateur*, tel que l'homomorphisme $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ déduit de $\mathfrak{p}$, soit une structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{g}^*$. Il revient au même de dire que $\mathfrak{p}_2 \circ \mathfrak{p} : \mathfrak{g} \longrightarrow \overset{3}{\Lambda}\mathfrak{g}$ est nul où $\mathfrak{p}_2 : \overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g} \longrightarrow \overset{3}{\Lambda}\mathfrak{g}$ est défini par

2.3.1 $$\mathfrak{p}_2(X \wedge Y) = \mathfrak{p}(X) \wedge Y - X \wedge \mathfrak{p}(Y) \, .$$

Une *bigèbre de Lie*, réelle ou complexe, est une algèbre de Lie, réelle ou complexe, munie d'une structure de cogèbre de Lie $\mathfrak{p} : \mathfrak{g} \longrightarrow \overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g}$, telle que $\mathfrak{p}$ soit un 1-cocycle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, à valeurs dans le $\mathfrak{g}$-module adjoint $\overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g}$. Si $(\mathfrak{g},\mathfrak{p})$ est une bigèbre de Lie, on a donc

2.3.2 $$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{p}_2 \circ \mathfrak{p} = 0 \, . \\ \mathfrak{p}([X,Y]) = \mathrm{ad}X \, \mathfrak{p}(Y) - \mathrm{ad}Y \, \mathfrak{p}(X) \, . \end{array} \right.$$

2.4. Soient (G,P) un groupe de Lie-Poisson et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Alors $x \longmapsto P(x) . x^{-1}$ est une fonction de classe C^∞, définie sur G, à valeurs dans $\overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g}$. Sa dérivée à l'origine est une application linéaire de $\mathfrak{g}$ dans $\overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g}$, notée $\mathfrak{p}$.

2.5. THÉORÈME.- 1) *Soit* (G,P) *un groupe de Lie-Poisson. Alors* $(\mathfrak{g},\mathfrak{p})$ *est une bigèbre de Lie.*

2) *Le foncteur* $(G,P) \longmapsto (\mathfrak{g},\mathfrak{p})$ *induit une équivalence entre la catégorie des groupes de Lie-Poisson, connexes et simplement connexes* (de dimension finie) *et la catégorie des bigèbres de Lie* (de dimension finie) [5].

2.6. Démontrons 1). Le fait que $\mathfrak{p}$ soit un 1-cocycle se déduit de 2.2.1 par dérivation. La structure de Poisson P définit, par le crochet de Poisson, une structure d'algèbre de Lie sur $C^\infty(G)$. Elle agit, par dualité, sur l'espace $U(\mathfrak{g})$ des distributions à support dans l'origine et définit un homomorphisme $U(P) : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \overset{2}{\Lambda}U(\mathfrak{g})$ qui est une structure de cogèbre de Lie sur $U(\mathfrak{g})$. Un calcul simple montre que $U(P)(\mathfrak{g})$ est contenu dans $\overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g} \subset \overset{2}{\Lambda}U(\mathfrak{g})$ et induit entre ces espaces l'application $\mathfrak{p} : \mathfrak{g} \longrightarrow \overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g}$.

2.7. Pour démontrer 2), indiquons une méthode qui s'inspire de [11]. Soit X une variété, P, Q deux sections de $\overset{2}{\Lambda} T_X$, ω_i, $1 \leq i \leq 3$, trois formes différentielles sur X. On pose

2.7.1
$$<[P,Q]>(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \underset{\bullet}{\Sigma}\,(P\llcorner\omega_1) \lrcorner (\vartheta_{Q\llcorner\omega_2}\omega_3) ,$$

où $\underset{\bullet}{\Sigma}$ indique une sommation sur les permutations circulaires et $\vartheta_{Q\llcorner\omega_2}$ est l'automorphisme infinitésimal associé au champ de vecteurs $Q\llcorner\omega_2$. On constate que $<[P,Q]>(\omega_1,\omega_2,\omega_3) + <[Q,P]>(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ est $C^\infty(X)$-linéaire en les ω_i et alternée. Cette expression définit donc une section $\frac{1}{2}(<[P,Q]> + <[Q,P]>)$ de $\overset{3}{\Lambda} T_X$ notée $[P,Q]$. En particulier $[P,P]$ est une section de $\overset{3}{\Lambda} T_X$ et P est une structure de Poisson sur X si et seulement $[P,P] = 0$. Le tenseur $[P,P]$ est appelé *crochet de Schouten* de P.

2.8. Soient G un groupe de Lie, $e \in G$ son élément neutre, Y un tenseur sur G en e. On note $\gamma(Y)$ (resp. $\delta(Y)$) le champ de tenseurs sur G invariant à gauche (resp. à droite) engendré par Y. Soient $r,s \in \overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g}$, $\omega_i \in \mathfrak{g}^*$, $i = 1,2,3$. On pose

2.8.1
$$<[r,s]>(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \underset{\bullet}{\Sigma} <[r\llcorner\omega_1, s\llcorner\omega_2],\omega_3> .$$

On définit ainsi un élément $<[r,s]> \in \overset{3}{\otimes}\mathfrak{g}$. Le tenseur $<[r,s]> + <[s,r]>$ est antisymétrique.

2.9. *Lemme.- Soient* G *un groupe de Lie,* $r,s \in \overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g}$.

1) *Le champ de tenseurs* $[\gamma(s),\gamma(s)]$ (*resp.* $[\delta(r),\delta(r)]$) *est invariant à gauche (resp. à droite).*

2) *On a* $[\gamma(s),\gamma(s)] = \gamma(<[s,s]>)$

$$[\delta(r),\delta(r)] = -\delta(<[r,r]>) .$$

3) *On a* $[\delta(r),\gamma(s)] = 0$.

4) *On a* $[\gamma(s) - \delta(r),\gamma(s) - \delta(r)] = \gamma(<[s,s]>) - \delta(<[r,r]>)$.

2.10. La première assertion est claire, par transport de structures. Soient $\omega_i \in \mathfrak{g}^*$, $i = 1,2,3$. On a

$$[\gamma(s),\gamma(s)](\gamma(\omega_1),\gamma(\omega_2),\gamma(\omega_3)) = \underset{\bullet}{\Sigma} <\gamma(s\llcorner\omega_1), \vartheta_{\gamma(s)\llcorner\gamma(\omega_2)}\gamma(\omega_3)> .$$

D'après la formule de variation, on a

2.10.1
$$\vartheta_{\gamma(s)\llcorner\gamma(\omega_2)}\gamma(\omega_3) = d(\gamma(s\llcorner(\omega_2 \wedge \omega_3))) + \gamma(s\llcorner(\omega_1 \wedge d(\gamma(\omega_2)(e)))) .$$

Le premier terme du second membre de 2.10.1 est la différentielle d'une fonction constante. Par suite, il est nul. On a donc

$$[\gamma(s),\gamma(s)]\,(\gamma(\omega_1),\gamma(\omega_2),\gamma(\omega_3)) = \gamma\,(\underset{\bullet}{\Sigma} <(s\llcorner\omega_1) \wedge (s\llcorner\omega_2), d(\gamma(\omega_3))(e)>) ,$$

d'où l'égalité cherchée, en vertu de 2.8.1. La deuxième égalité de 2) s'en déduit, en appliquant le difféomorphisme $x \longrightarrow x^{-1}$. L'assertion 4) se déduit de 3) et 2) en développant le crochet de Schouten. Démontrons 3). On a, par transport de structures, pour tout $x \in G$,

$$[\gamma(s),\delta(r)](x) = x\,.\,([\gamma(s),\delta(x^{-1}rx)](e))\ .$$

Il suffit donc de montrer que $[\gamma(s),\delta(r)](e) = 0$ pour tout $r,s \in \overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g}$. Soient $\omega_i \in \mathfrak{g}^*$, $i = 1,2,3$. Il suffit de montrer que

$C(\omega_1,\omega_2,\omega_3) =$

$<[\gamma(s),\delta(r)]>(\gamma(\omega_1),\gamma(\omega_2),\gamma(\omega_3))(e) + <[\delta(r),\gamma(s)]>(\gamma(\omega_1),\gamma(\omega_2),\gamma(\omega_3))(e) = 0$.

Par un calcul analogue à celui fait ci-dessus, on montre que

$$2.10.2\qquad \begin{cases} <[\delta(r),\gamma(s)]>\ (\gamma(\omega_1),\gamma(\omega_2),\gamma(\omega_3))(e) = <[r,s]>\ (\omega_1,\omega_2,\omega_3) \\ <[\gamma(s),\gamma(r)]>\ (\gamma(\omega_1),\gamma(\omega_2),\gamma(\omega_3))(e) = <[s,r]>\ (\omega_1,\omega_2,\omega_3)\ . \end{cases}$$

Par suite $C(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = 0$ équivaut à

2.10.3 $<[\gamma(s),\delta(r) - \gamma(r)]>(\gamma(\omega_1),\gamma(\omega_2),\gamma(\omega_2))(e) = -(<[r,s]> + <[s,r]>)(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$.

En utilisant 2.7.1, la formule de variation, et le fait que $(\delta(r) - \gamma(r))(e) = 0$, on montre que le premier membre de 2.10.3 est égal à

$$2.10.4 \qquad \underset{\bullet}{\Sigma} <s \llcorner \omega_1\ ,\ d((\delta(r) - \gamma(r)) \llcorner \gamma(\omega_2 \wedge \omega_3))>\ .$$

La fonction $(\delta(r) - \gamma(r)) \llcorner \gamma(\omega_2 \wedge \omega_1)$ est égale à

$$2.10.5 \qquad x \longmapsto (x^{-1}rx - r) \llcorner \omega_2 \wedge \omega_1\ .$$

Par suite, 2.10.4 s'écrit

$$2.10.6 \qquad \underset{\bullet}{\Sigma} -\ (\mathrm{ad}(s \llcorner \omega_1)r) \llcorner (\omega_2 \wedge \omega_3)\ .$$

Il suffit donc de se convaincre que cette dernière expression n'est autre que

$$2.10.7 \qquad \underset{\bullet}{\Sigma} - <[s \llcorner \omega, r \llcorner \omega_2]\ ,\ \omega_3> - <[s \llcorner \omega_1, r \llcorner \omega_2]\ ,\ \omega_3>\ ,$$

et il suffit de le vérifier lorsque r et s sont décomposables.

2.11. Démontrons l'assertion 2) du théorème 2.5. Soient $(\mathfrak{g},\mathfrak{p})$ une bigèbre de Lie, G un groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Le 1-cocycle $\mathfrak{p}$ s'intègre en un 1-cocycle sur G à valeurs dans $\overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g}$. Il existe donc un unique $P \in \Gamma(G,\overset{2}{\Lambda}T_G)$, possédant les propriétés 2.2.1 dont la dérivée à l'origine soit $\mathfrak{p}$. Démontrer 2) se ramène à démontrer que P est une structure de Poisson sur G, c'est-à-dire à démontrer que $[P,P] = 0$. Comme $P(e) = 0$, on a $[P,P](e) = 0$. Il suffit donc de montrer que, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $\vartheta_{\gamma(X)}[P,P] = 0$. Comme on a $\vartheta_{\gamma(X)}[P,P] = [\vartheta_{\gamma(X)}P,P] + [P,\vartheta_{\gamma(X)}P]$ et, d'après 2.2.1, $\vartheta_{\gamma(X)}P = \gamma(\mathfrak{p}(X))$, on est ramené à montrer que $[\gamma(\mathfrak{p}(X)),P] + [P,\gamma(\mathfrak{p}(X))] = 0$. Utilisant à nouveau $P(e) = 0$, $\vartheta_{\delta(Y)}\gamma(\mathfrak{p}(X)) = 0$, $\vartheta_{\delta(Y)}P = \delta(\mathfrak{p}(Y))$ pour $Y \in \mathfrak{g}$, on est ramené à montrer que

2.11.1 $$[\gamma(\mathfrak{p}(X)),P](e) = 0 \ .$$

2.11.2 $$[\gamma(\mathfrak{p}(X)),\delta(\mathfrak{p}(Y))] + [\delta(\mathfrak{p}(Y)),\gamma(\mathfrak{p}(X))] = 0 \ .$$

L'égalité 2.11.2 résulte du lemme 2.9. En utilisant 2.7.1, la formule de variation et $P(e) = 0$, on montre que 2.11.1 est équivalent à

2.11.3 $$\underset{\bullet}{\Sigma} <\mathfrak{p}(X) \llcorner \omega_1 \ , \mathfrak{p} \llcorner \omega_2 \wedge \omega_3> = 0 \ , \quad \forall \omega_i \in \mathfrak{g}^* \ .$$

Par un calcul simple, on voit que le premier membre de 2.11.3 est égal à

2.11.4 $$<\mathfrak{p}_2 \circ \mathfrak{p}(X) \ , \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3>$$

qui est nul, car $\mathfrak{p}$ est un cocommutateur, d'où le théorème.

3. SYSTÈMES TRIPLES DE MANIN

3.1. Soit $(\mathfrak{g},\mathfrak{p})$ une bigèbre de Lie. Il existe au plus un crochet de Lie sur $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$, qui induit sur $\mathfrak{g}$ le crochet initial, sur $\mathfrak{g}^*$ le crochet de Lie donné par ${}^t\mathfrak{p}$ et qui préserve la forme bilinéaire hyperbolique canonique H sur $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$. Si $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, un tel crochet existe et on a, pour $x \in \mathfrak{g}$ et $\xi \in \mathfrak{g}^*$

$$[X,\xi] = \mathfrak{p}(X) \llcorner \xi + X \lrcorner d_{\mathfrak{g}} \xi \ ,$$

où $d_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g}^*$ est l'application duale du crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$. Pour vérifier ce fait, il suffit de vérifier l'identité de Jacobi pour le crochet décrit par 3.1.1, ce qui se fait par un calcul qui n'est pas reproduit ici.

3.2. Un *système triple de Manin* est constitué par une algèbre de Lie A , une forme bilinéaire B sur A , symétrique invariante séparante, une décomposition $A = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{k}$ en somme directe de deux sous-algèbres isotropes pour B . D'après 3.1, si $(\mathfrak{g},\mathfrak{p})$ est une bigèbre de Lie, de dimension finie, $(A = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*,H)$ est un système triple de Manin.

3.3. Réciproquement, soit $(A,B,\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{k})$ un système triple de Manin. Soit $\hat{\mathfrak{p}} : \mathfrak{g} \longrightarrow (\overset{2}{\Lambda}\mathfrak{k})^*$ l'application linéaire définie par

$$\hat{\mathfrak{p}}(X)(\xi \wedge \eta) = B([X,\xi],\eta) \ , \quad X \in \mathfrak{g} \ , \quad \xi,\eta \in \mathfrak{h} \ .$$

Notons $\iota : \overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g} \hookrightarrow (\overset{2}{\Lambda}\mathfrak{k})^*$ l'injection canonique associée à B . Si il existe $\mathfrak{p} : \mathfrak{g} \longrightarrow \overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g}$ tel que $\iota \circ \mathfrak{p} = \hat{\mathfrak{p}}$, ou en d'autres termes si $\hat{\mathfrak{p}}$ prend ses valeurs dans $\iota(\overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g})$, alors $(\mathfrak{g},\mathfrak{p})$ est une bigèbre de Lie. Cela résulte de calculs simples laissés au lecteur.

3.4. Il résulte de ce qui précède que lorsque $(\mathfrak{g},\mathfrak{p})$ est une bigèbre de Lie de dimension finie, $(\mathfrak{g}^*,d_{\mathfrak{g}})$ est une bigèbre de Lie. Les bigèbres de Lie utiles dans le scattering inverse quantique, ou en mécanique statistique, sont parfois de dimension infinie. Il y a lieu, dans ce cas, de faire attention aux phénomènes de bidualité.

4. EXEMPLES DE BIGÈBRES DE LIE

4.1. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody et $<\ ,\ >$ un produit scalaire invariant sur $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, $\mathfrak{b}_\pm$ les sous-algèbres de Borel, de sorte qu'on a

4.1.1 $$\begin{cases} \mathfrak{g} = \mathfrak{b}_+ + \mathfrak{b}_- , \\ \mathfrak{b}_+ \cap \mathfrak{b}_- = \mathfrak{h} . \end{cases}$$

Posons $A = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$, $B((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \langle x_1,x_2\rangle - \langle y_1,y_2\rangle$. Identifions $\mathfrak{g}$ à la sous-algèbre diagonale de A . Posons $\mathfrak{k} = \{(x,y) \in \mathfrak{b}_- \times \mathfrak{b}_+ \mid x_{\mathfrak{h}} + y_{\mathfrak{h}} = 0\}$. C'est une sous-algèbre de $\mathfrak{b}_- \times \mathfrak{b}_+$ elle-même sous-algèbre de A . On a $A = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{k}$ et $(A,B,\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{k})$ est un système triple de Manin. Ce système induit sur $\mathfrak{g}$ une structure de bigèbre de Lie. Si (X_i^+,H_i,X_i^-) sont les générateurs canonique de $\mathfrak{g}$, le cocommutateur μ est donné par

4.1.2 $$\begin{cases} \mu(h) = 0 \quad \text{pour} \quad h \in \mathfrak{h} , \\ \mu(X_i^\pm) = \frac{1}{2} X_i^\pm \wedge H_i . \end{cases}$$

4.2. Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie simple, de dimension finie, $<\ ,\ >$ un produit scalaire invariant sur $\mathfrak{a}$. Posons $A = \mathfrak{a}[u^{-1},u]$, algèbre de Lie des polynômes de Laurent à coefficients dans $\mathfrak{a}$. Posons

4.2.1 $$B(f,g) = \operatorname*{res}_{u=\infty} \langle f(u),g(u)\rangle\, du .$$

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}[u]$ et $\mathfrak{k} = u^{-1}\mathfrak{a}[u^{-1}]$. On a $A = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{k}$ et $(A,B,\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{k})$ est un système triple de Manin, qui induit sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}[u]$ une structure de bigèbre de Lie. Explicitons-en le cocommutateur. Le produit scalaire sur $\mathfrak{a}$ est un élément symétrique r de $\mathfrak{a}^* \otimes \mathfrak{a}^*$. La forme inverse est un élément symétrique r^{-1} de $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$, invariant par $\mathfrak{a}$. Soit v une autre variable. Notons $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}(u,v)$ le produit tensoriel de $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$ avec le corps des fractions rationnelles en les deux variables u et v . C'est un module sur $A = \mathfrak{a}[u^{-1},u]$. On a une inclusion $A \otimes A = \mathfrak{a}[u^{-1},u] \otimes \mathfrak{a}[v^{-1},v] \subset \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}(u,v)$ de A-modules. L'élément $\frac{r^{-1}}{u-v}$ est un élément antisymétrique de $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}(u,v)$, mais n'est pas un élément de $A \otimes A$. Cependant, pour tout $f \in A$, on peut montrer, en utilisant le fait que r^{-1} est invariant, que $\operatorname{ad} f\left(\frac{r^{-1}}{u-v}\right)$ appartient à $A \otimes A$ et est antisymétrique. On a

4.2.2 $$\mu(f) = \operatorname{ad} f \left(\frac{r^{-1}}{u-v}\right) .$$

La vérification est facile et laissée au lecteur.

4.3. A la suite de I.V. Cherednik [7], on peut généraliser les exemples précédents comme suit : Soit X une courbe algébrique lisse projective connexe sur le corps $\mathbb{C}$. Soient $K(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur X , $A(X)$ l'anneau des adèles de X , ω une forme différentielle rationnelle, $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie simple, $<\,,\,>$ une forme bilinéaire symétrique inversible invariante sur $\mathfrak{a}$. Posons $A = \mathfrak{a} \otimes A(X)$, et

4.3.1 $$B(f,g) := \sum_{x \in X} \operatorname{res}_x \omega <f_x, g_x> .$$

L'algèbre $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \otimes K(X)$ est une sous-algèbre discrète de A . S'il existe une sous-algèbre ouverte $\Lambda \subset A$, isotrope telle que $A = \mathfrak{g} \oplus \Lambda$, alors $(A, B, \mathfrak{g} \oplus \Lambda)$ forme un système triple de Manin et $\mathfrak{g}$ est une bigèbre de Lie. Soient $S \subset X$, $S \neq \emptyset$ un sous-ensemble de X , et $A^S(X)$ les adèles restreintes, sans x-composantes pour $x \in S$. Posons $\Lambda^S \subset \mathfrak{a} \otimes A^S(X)$ l'image de Λ et posons

4.3.2 $$\mathfrak{g}^S = \{ f \in \mathfrak{g} \mid \text{l'image de } f \text{ dans } \mathfrak{a} \otimes A^S(X) \text{ est dans } \Lambda^S \} .$$

Alors $\mathfrak{g}^S$ est une sous-bigèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.

Ainsi, lorsque $X = \mathbb{P}^1$, $\omega = d\lambda$, $S = \{\infty\}$, $\Lambda = \mathfrak{a} \otimes (m_\infty \times \prod_{x \in X-S} \hat{O}_x)$, $\mathfrak{g}^S$ est la bigèbre de Lie présentée dans 4.2.

5. LES ÉQUATIONS DE YANG-BAXTER CLASSIQUES

5.1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $r \in \overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g}$. Le cobord de r est une application $\partial(r) : \mathfrak{g} \longrightarrow \overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g}$ donnée par

5.1.1 $$\partial(r)(X) = \operatorname{ad} X . r .$$

Soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Il existe une section P de $\overset{2}{\Lambda}T_G$ et une seule qui vérifie 2.2.1 et telle que la dérivée à l'origine de $x \longmapsto P(x)x^{-1}$ soit donnée par 5.1.1. On a, pour tout $x \in G$

5.1.2 $$P(x) = x . r - r . x ,$$

ou encore on a

5.1.3 $$P = \gamma(r) - \delta(r) .$$

5.2. PROPOSITION.- *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie,* $r \in \overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g}$. *Alors* $(\mathfrak{g}, \partial(r))$ *est une bigèbre de Lie si et seulement si* $<[r,r]> \in \overset{3}{\Lambda}\mathfrak{g}$ *est invariant par* $\mathfrak{g}$.

5.3. Lorsque $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, algèbre de Lie d'un groupe de Lie G simplement connexe, alors $(\mathfrak{g}, \partial(r))$ est une bigèbre de Lie si et seulement si P défini par 5.1.3 est une structure de Poisson sur G (2.5), ou encore si et seulement si $[P,P] = 0$ (2.7). On a $[P,P] = \gamma(<[r,r]>) - \delta(<[r,r]>)$ (2.9). Donc $(\mathfrak{g}, \partial(r))$ est une bigèbre de Lie si et seulement si $<[r,r]>$ est invariant sous G , c'est-à-dire sous $\mathfrak{g}$. Dans le cas général, il faut montrer que $<[r,r]>$ invariant équivaut à $\mathfrak{p}_2 \circ \mathfrak{p} = 0$ où $\mathfrak{p}(X) = \mathrm{ad}(X)r$, ce qui se fait par un calcul qui n'est pas reproduit ici.

5.4. En interprétant $<[r,r]>$ comme un tenseur antisymétrique, on a

5.4.1 $$<[r,r]> = [r^{1,2},r^{2,3}] + [r^{1,2},r^{1,3}] + [r^{1,3},r^{2,3}] \ ,$$

où, par exemple, si $r = \Sigma\, a_i \otimes b_i$, on a $[r^{1,2},r^{2,3}] = \sum_{i,j} a_i \otimes [b_i,a_j] \otimes b_j \ldots$. L'équation

5.4.2 $$[r^{1,2},r^{2,3}] + [r^{1,2},r^{1,3}] + [r^{1,3},r^{2,3}] = 0$$

est appelée *équation de Yang - Baxter classique* (YBC en abrégé) et a été introduite par Sklyanine [17]. C'est un cas particulier de la condition " $<[r,r]>$ invariant par $\mathfrak{g}$ ".

Une bigèbre de Lie telle que le cocommutateur soit un cobord est dite *bigèbre de Lie cobordante*. Une bigèbre de Lie *triangulaire* est un triple $(\mathfrak{g},\mathfrak{p},r)$ où $(\mathfrak{g},\mathfrak{p})$ est une bigèbre de Lie, $r \in \overset{2}{\Lambda}\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p} = \partial(r)$ et r est une solution de 5.4.2. (L'équation de Yang - Baxter, classique ou quantique, est aussi appelée "équation triangulaire" ou "équation triangle".) Une structure un peu plus générale est celle des bigèbres de Lie *quasitriangulaires* formée des triples $(\mathfrak{g},\mathfrak{p},r)$ où $(\mathfrak{g},\mathfrak{p})$ est une bigèbre de Lie, $r \in \overset{2}{\otimes}\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p} = \partial(r)$ et r vérifie 5.4.2 et

5.4.3 $$r^{1,2} + r^{2,1} \text{ est invariant par } \mathfrak{g} \ .$$

5.5. On peut montrer que les bigèbres de Lie de l'exemple 4.1, dans le cas où $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, admettent une structure quasitriangulaire. Etudions l'exemple 4.2, où $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}[u]$, $\mathfrak{a}$ algèbre de Lie simple. Une structure triangulaire est donnée par un élément de $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} = \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}[u,v]$, donc par un polynôme $r(u,v)$ à valeurs dans $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$, soumis aux conditions

5.5.1 $$[r^{1,2}(u_1,u_2),r^{1,3}(u_1,u_3)] + [r^{1,2}(u_1,u_2),r^{2,3}(u_2,u_3)] + [r^{1,3}(u_1,u_3),r^{2,3}(u_2,u_3)] = 0 \ .$$

5.5.2 $$r^{1,2}(u_1,u_2) + r^{2,1}(u_2,u_1) = 0 \ .$$

L'exemple 4.2 fournit la solution $r(u,v) = \frac{r^{-1}}{u-v}$ qui n'est pas polynomiale. Plus généralement, en étudiant l'exemple 4.3 proposé par Cherednik [7], on est amené à chercher à résoudre 5.5.1 en s'autorisant des fonctions rationnelles sur une courbe algébrique. Belavin et Drinfeld [3] ont alors montré qu'on retombait nécessairement sur la famille d'exemples 4.3, avec trois possibilités

1) X elliptique, ω régulière, $\mathfrak{a} = s\ell(n)$;
2) $X = \mathbb{P}^1$, $\omega = \lambda^{-1}d\lambda$ (cas trigonométrique ;
3) $X = \mathbb{P}^1$, $\omega = d\lambda$ (cas rationnel).

Dans les cas 1) et 2), une classification complète est donnée.

6. LES GROUPES QUANTIQUES

6.1. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $U(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante. Alors $U(\mathfrak{g})$ est une bigèbre, à unité notée i, coünité notée ε, antipode notée S. Notons m la multiplication et $\Delta : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ la comultiplication. La comultiplication est cocommutative. Un tel objet $(U(\mathfrak{g}),m,\Delta,i,\varepsilon,S)$ est appelé une *algèbre de Hopf* cocommutative.

Nous serons amenés à considérer plus généralement des algèbres de Hopf non nécessairement commutatives ni cocommutatives. Précisons qu'en plus de l'antipode S, on impose dans ce cas l'existence d'une antipode gauche, i.e. une antipode pour la multiplication opposée et la même comultiplication. Une telle algèbre de Hopf est appelée *groupe quantique*. L'idée est de considérer cette bigèbre comme une généralisation non commutative de la bigèbre des fonctions sur un groupe. De sorte que la catégorie des *groupes quantiques* est, par définition, la catégorie opposée à la catégorie des algèbres de Hopf.

La notion de groupe quantique (ou d'algèbre de Hopf) admet des variantes suivant les contextes. Ainsi, dans le cadre des algèbres stellaires, on a des groupes quantiques stellaires où le produit tensoriel est remplacé par un produit tensoriel topologique [18]. Ainsi aussi, l'objet dual $U(\mathfrak{g})^*$ où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, est un groupe quantique qu'on peut considérer comme la bigèbre du groupe formel associé à $\mathfrak{g}$. Mais dans ce cas la comultiplication est à valeurs dans un complété convenable du produit tensoriel.

6.2. Quantifier une algèbre commutative A_0, c'est décrire une déformation non nécessairement commutative A_h, dépendant d'un paramètre $h \in \mathbb{C}$, considéré comme très petit (constante de Planck). Dans un premier temps, une quantification de A_0 sera donc pour nous une $\mathbb{C}[[h]]$-algèbre A_h, topologiquement libre, telle que $A_h/hA_h = A_0$. Soient $a_0,b_0 \in A_0$, $a,b \in A_h$ dont les classes dans A_0 soient a_0 et b_0 respectivement. Alors $\{a_0,b_0\} = h^{-1}[a,b]$ ne dépend que de a_0 et b_0 et est un crochet de Poisson sur A_0. Soit donc (A_0,P) une algèbre de Poisson (i.e. une algèbre commutative munie d'un crochet de Poisson) ; *une quantification* de (A_0,P) est une algèbre A_h qui quantifie A_0 et qui induit P sur A_0. L'algèbre (A_0,P) est appelée la *limite classique* de A_h.

6.3. A la structure de groupe de Poisson (2.2) correspond, en prenant la bigèbre des fonctions, la notion d'algèbre de *Hopf-Poisson*. C'est une algèbre de Hopf commutative, munie d'un crochet de Poisson tel que la comultiplication préserve la structure de Poisson. Soit donc (A_0,P) une algèbre de *Hopf-Poisson*. Une quantification de (A_0,P) est une algèbre de Hopf sur $\mathbb{C}[[h]]$, topologiquement libre, telle que $A_h/hA_h = A_0$ et qui induit sur A_0 la structure de Poisson P.

6.4. De manière duale, on a aussi la structure d'algèbre de *Hopf - co-Poisson*. C'est une algèbre de Hopf cocommutative munie d'une structure de cogèbre de Lie qui se décrit en prenant le dual des structures décrites dans 6.3. En particulier, si G est un groupe de Lie - Poisson de bigèbre de Lie $(\mathfrak{g},\mathfrak{p})$, l'algèbre de Hopf cocommutative $U(\mathfrak{g})$ est munie d'une structure de co-Poisson qui induit sur $\mathfrak{g}$ la structure de cogèbre de Lie $\mathfrak{p}$ (*cf.* 2.6). Réciproquement, une bigèbre de Lie $(\mathfrak{g},\mathfrak{p})$ étant donnée, il existe sur $U(\mathfrak{g})$ une et une seule structure de co-Poisson qui induit $\mathfrak{p}$ sur $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, cela résulte de (2.5) et (2.6). Il existe une démonstration purement algébrique dans le cas général. On définit de manière duale à 6.3 les quantifications des algèbres de Hopf - co-Poisson. On appelle *quantification d'une bigèbre de Lie* $(\mathfrak{g},\mathfrak{p})$ les quantifications de l'algèbre de Hopf-co-Poisson correspondante.

6.5. Si $(\mathfrak{g},\mathfrak{p})$ est une bigèbre de Lie, alors $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie (3.1). Considérons le complexe

6.5.1 $$\ker(C^\bullet(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*) \longrightarrow C^\bullet(\mathfrak{g}) \oplus C^\bullet(\mathfrak{g}^*)) ,$$

où, pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{a}$, $C^\bullet(\mathfrak{a})$ désigne le complexe de Poincaré standard : $0 \longrightarrow \mathfrak{a}^* \longrightarrow \overset{2}{\Lambda}\mathfrak{a}^* \longrightarrow \ldots$. Notons, pour tout i, $\mathrm{Der}^i(\mathfrak{g},\mathfrak{p})$ la cohomologie de 6.5.1. On a $\mathrm{Der}^i(\mathfrak{g},\mathfrak{p}) = 0$ pour $i \le 0$; $\mathrm{Der}^1(\mathfrak{g},\mathfrak{p})$ est l'espace des dérivations de la bigèbre $\mathfrak{g}$. On peut montrer [1] qu'il existe une théorie de l'obstruction de la quantification de $\mathfrak{g}$ à valeur dans $\mathrm{Der}^1\mathfrak{g}$ et $\mathrm{Der}^2\mathfrak{g}$: l'extension à l'ordre $n+1$ des quantifications à l'ordre n est obstruée par $\mathrm{Der}^2\mathfrak{g}$ et paramétrée par $\mathrm{Der}^1\mathfrak{g}$ si l'obstruction dans $\mathrm{Der}^2\mathfrak{g}$ est nulle.

7. EXEMPLES DE GROUPES QUANTIQUES

7.1. Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie simple (de dimension finie) et $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}[u]$. L'algèbre $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie graduée par le degré des polynômes et est munie de la structure de bigèbre de Lie décrite dans 4.2. Il résulte alors de la théorie de la déformation esquissée au § 6.5 qu'il existe une unique quantification graduée Q de $(\mathfrak{g},\mathfrak{p})$, où $\deg(h) = 1$. Cette algèbre a été découverte et étudiée dans [20]. On peut la décrire par générateurs et relations. En degré 0 on a l'algèbre

7.1.1 $$Q_0 = U(\mathfrak{a}) .$$

L'algèbre Q est engendrée par Q_0 et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel en degré 1, isomorphe à $\mathfrak{a}$ par un isomorphisme noté J . On a les relations

7.1.2 $$J([a,b]) = [a,J(b)] \qquad a,b \in \mathfrak{a} .$$

7.1.3 $$a_i,b_i \in \mathfrak{a} \ , \ \Sigma\, [a_i,b_i] = 0$$
$$\Rightarrow \sum_i [J(a_i),J(b_i)] = \frac{h^2}{12} \sum_i \sum_{\alpha,\beta,\gamma} ([[a_i,I_\alpha],[b_i,I_\beta]],I_\gamma)\ \{I_\alpha,I_\beta,I_\gamma\}$$

7.1.4 $a_i, b_i, c_i \in \mathfrak{a}$, $\Sigma\, [[a_i,b_i],c_i] = 0$

$$\Rightarrow \sum_i [[J(a_i),J(b_i)],J(c_i)] = \frac{h^2}{4} \sum_i \sum_{\alpha,\beta,\gamma} f(a_i,b_i,c_i,I_\alpha,I_\beta,I_\gamma)\ \{I_\alpha,I_\beta,J(I_\gamma)\}.$$

où les I_α forment une base orthonormale de $\mathfrak{a}$, et

$\{x_1,x_2,x_3\} = \mathrm{Sym}\ x_1x_2x_3$ et $f(a,b,c,x,y,z) = \underset{a,b}{\mathrm{Alt}}\ \underset{a,c}{\mathrm{Sym}}\ ([a,[b,x]],[[c,y],z])$.

La comultiplication est donnée par

7.1.5 $\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes Q$, $\Delta(J(a)) = J(a) \otimes 1 + 1 \otimes J(a) + \frac{h}{2}\,[a \otimes 1, r^{-1}]$ où $a \in \mathfrak{a}$ et $r^{-1} = \sum_\alpha I_\alpha \otimes I_\alpha$.

On remarque que ces relations définissent Q sur $\mathbb{C}[h]$ et qu'on peut alors y substituer $h = 1$. On obtient ainsi un groupe quantique noté $Y(\mathfrak{a})$ et appelé le *Yangien* de $\mathfrak{a}$.

7.2. Prenons l'exemple 4.1 et, pour simplifier les notations, nous allons décrire les formules dans le cas où $\mathfrak{g} = s\ell(2,\mathbb{C})$. On utilise la base canonique $X^{\pm}$, H et le cocommutateur $\mathfrak{p}(H) = 0$, $\mathfrak{p}(X^{\pm}) = \frac{1}{2} X^{\pm} \wedge H$. On montre qu'il existe une quantification $U_h(\mathfrak{g})$ [9] et que cette quantification est essentiellement unique si on impose de plus que l'involution de Cartan soit préservée. L'algèbre $U_h(\mathfrak{g})$ est engendrée h-adiquement par les trois générateurs $X^{\pm}$, H soumis aux relations

7.2.1 $$[H,X^{\pm}] = \pm 2\, X^{\pm}$$

7.2.2 $$[X^+,X^-] = \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{hH}{2}\right)}{\frac{h}{2}} .$$

La comultiplication Δ est donnée par

7.2.3 $$\begin{cases} \Delta(X^{\pm}) = X^{\pm} \otimes \exp \frac{hH}{4} + \exp \frac{-hH}{4} \otimes X^{\pm} , \\ \Delta(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H . \end{cases}$$

La quantification duale, quantification du groupe formel associé à $SL(2,\mathbb{C})$ peut être décrite de la manière suivante : L'algèbre $U_h(\mathfrak{g})^*$ est le quotient de l'anneau des séries formelles non commutatives $\mathbb{C}[[h]][[\rho_{ij} - \delta_{i,j}]]$, $1 \le i,j \le 2$, par les relations

7.2.4 $$\begin{cases} \rho_{11}\,\rho_{12} = e^{-h/2}\,\rho_{12}\,\rho_{11} \\ \rho_{21}\,\rho_{22} = e^{-h/2}\,\rho_{22}\,\rho_{21} \\ \rho_{11}\,\rho_{21} = e^{-h/2}\,\rho_{21}\,\rho_{11} \\ \rho_{12}\,\rho_{22} = e^{-h/2}\,\rho_{22}\,\rho_{12} \\ \rho_{12}\,\rho_{21} = \rho_{21}\,\rho_{12} \\ [\rho_{22}\,,\rho_{11}] = (e^{h/2} - e^{-h/2})\rho_{21}\,\rho_{12} \\ \rho_{11}\,\rho_{22} - e^{h/2}\,\rho_{12}\,\rho_{21} = 1 . \end{cases}$$

Le cocommutateur est donné par $\Delta(\rho_{ij}) = \sum_k \rho_{ik} \otimes \rho_{kj}$. Ce groupe quantique est en fait défini sur $\mathbb{C}[q,q^{-1}]$ où $q = e^{h/2}$, et la sous-algèbre de Hopf sur $\mathbb{C}[q,q^{-1}]$ engendrée par les polynômes non commutatifs en les ρ_{ij} , soumis aux relations 7.2.4 peut être considérée comme la quantification du groupe algébrique $SL(2,\mathbb{C})$ ainsi qu'on le voit en faisant $q = 1$ dans 7.2.4. On remarquera que, dans cette quantification, la table de comultiplication est constante (indépendante de q) : c'est la table qui provient du groupe ensembliste sous-jacent à $SL(2,\mathbb{C})$. En revanche, la structure d'algèbre dépend de q et, pour $q \neq 1$, donne des algèbres non commutatives. Cette algèbre a été retrouvée de manière indépendante en partant du point de vue des algèbres stellaires par Woronowicz [18, 19, 14].

8. L'ÉQUATION DE YANG-BAXTER QUANTIQUE

8.1. Dans les systèmes exactement solubles de la mécanique statistique (les modèles à vertex) apparaissent des matrices $R(\lambda) \in \mathrm{End}(V \otimes V)$ dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$, qui vérifient, dans $\mathrm{End}(V \otimes V \otimes V)$, les relations [2,8]

$$\text{8.1.1} \qquad \left\{ \begin{aligned} & R^{1,2}(\lambda_1 - \lambda_2) \circ R^{1,3}(\lambda_1 - \lambda_3) \circ R^{2,3}(\lambda_2 - \lambda_3) \\ & \qquad = R^{2,3}(\lambda_2 - \lambda_3) \circ R^{1,3}(\lambda_1 - \lambda_3) \circ R^{1,2}(\lambda_1 - \lambda_2) \\ & R^{1,2}(\lambda) \circ R^{2,1}(-\lambda) = 1 \,. \end{aligned} \right.$$

Cette relation est appelée relation de Yang-Baxter quantique (YBQ en abrégé) et toute solution de cette relation permet de construire un système exactement soluble.

8.2. On peut chercher des solutions de type $1 + r_1(\lambda)h + r_2(\lambda)h^2 + \dots$. On obtient alors, en faisant tendre h vers 0 , les relations

$$\text{8.2.1} \qquad \left\{ \begin{aligned} & [r^{1,2}(\lambda_1 - \lambda_2), r^{1,3}(\lambda_1 - \lambda_3)] + [r^{1,2}(\lambda_1 - \lambda_2), r^{2,3}(\lambda_2 - \lambda_3)] \\ & \qquad + [r^{1,3}(\lambda_1 - \lambda_3), r^{2,3}(\lambda_2 - \lambda_3)] = 0 \,. \\ & r^{1,2}(\lambda) + r^{2,1}(-\lambda) = 0 \,. \end{aligned} \right.$$

On obtient donc les relations définissant sur les algèbres de Lie les structures triangulaires (5.4). Il est donc naturel d'utiliser les variations quantiques de bigèbres de Lie pour construire des solutions de YBQ.

8.3. En fait, la stratégie suivie pour trouver des solutions de YBQ est la suivante [1] :

a) on part d'une algèbre de Lie simple $\mathfrak{a}$;

b) on considère le groupe d'automorphismes $T_\lambda(f(u)) = f(u+\lambda)$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}[u]$;

c) les automorphismes T_λ de $\mathfrak{g}$ définissent des automorphismes gradués T_λ de $Y(\mathfrak{a})$ (7.1) tels que T_λ soit l'identité en degré 0 et $T_\lambda(J(a)) = J(a) + \lambda a$, $\forall a \in \alpha$;

d) on construit dans $Y(\mathfrak{a})$ une série formelle $R(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} R_k \lambda^{-k}$, $R_k \in Y(\mathfrak{a}) \otimes Y(\mathfrak{a})$ telle que

$$\begin{cases} (\Delta \otimes \mathrm{id})R(\lambda) = R^{1,3}(\lambda)R^{2,3}(\lambda) \\ (T_\lambda \otimes \mathrm{id})\Delta'(a) = R(\lambda)(T_\lambda \otimes \mathrm{id})\Delta(a)R(\lambda)^{-1} \quad a \in Y(\mathfrak{a}) , \end{cases}$$

où $\Delta'(a) = \sigma\Delta(a)$ avec $\sigma(x \otimes y) = y \otimes x$. Une telle série formelle est unique. De plus, elle satisfait dans $Y(\mathfrak{a})$ l'équation YBQ ;

e) on prend une représentation $\rho : Y(\mathfrak{a}) \longrightarrow \mathrm{End}(V)$. Alors $(\rho \otimes \rho)R(\lambda)$ vérifie dans $\mathrm{End}(V \otimes V \otimes V)$ la relation YBQ. De plus, si ρ est irréductible, alors, à un facteur près, $(\rho \otimes \rho)R(\lambda)$ est une fonction rationnelle de λ.

Essentiellement la même stratégie, appliquée à $U_h(\mathfrak{g})$ permet de construire des solutions trigonométriques (i.e. rationnelles en e^λ) de YBQ [9].

Le problème est ainsi ramené à construire les représentations irréductibles de $Y(\mathfrak{a})$ ou $U_h(\mathfrak{g})$. Lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(N)$, Jimbo a pu donner des solutions à ce problème pour $U_h(\mathfrak{g})$ en le liant aux représentations irréductibles d'une algèbre de Hecke, déformation quantique de l'algèbre du groupe $\mathfrak{S}_N$ [9]. Pour le Yangien, des algèbres de Hecke permettent aussi d'en étudier les représentations [6,10,4].

BIBLIOGRAPHIE

[1] V.G. DRINFEL'D – *Quantum groups*, Proc. ICM 86, Traduction russe : Zapiski Nauchny seminarov LOMI, vol. 155 (1986).

[2] R.J. BAXTER – *Exactly solved models*, Academic Press, London, 1982.

[3] A.A. BELAVIN, V.G. DRINFEL'D – *On the solutions of the classical Yang - Baxter equations*, Funct. Anal. and its applic., 16 (1982), 159-180.

[4] I.V. CHEREDNIK – *On "quantum" deformations of irreducible finite dimensional representations of* $\mathfrak{gl}_N$, Dokl. Acad. Nauk CCCP, tome 287 (1986), n° 5 (en russe) et Sov. Math. Dokl. vol. 33 (1986), n° 2 (en anglais).

[5] V.G. DRINFEL'D – *Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the meaning of the classical Yang - Baxter equations*, Doklady, Ac. Nauk., CCCP, Tome 268 (1983), n° 2, Trad. anglaise : Soviet Math. Dokl., vol. 27 (1983), n° 1.

[6] V.G. DRINFEL'D – *Degenerate affine Hecke algebras and Yangians*, Funk. Anal. i prilozen 20 (1986), n° 1, 69-70 (en russe).

[7] I.M. GELFAND, I.V. CHEREDNIK – *Abstract Hamiltonian formalism for classical Yang - Baxter bundles*, Uspehi Mat. Nauk, 38 (1983), n° 3, 3-21.

[8] M. JAEKEL et J.-M. MAILLARD - *Modèles exacts en Mécanique Statistique et modèles exactement solubles en Physique des Particules*, in Mathématique et Physique, Séminaire de l'E.N.S. 1979-1982, Progress in Mathematics, Birkhäuser, vol. 37 (1983).

[9] M. JIMBO - *A q-analogue of* $U(\mathfrak{gl}(n+1))$, *Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation*, Letters in Math. Phys. 11 (1986), 247-252.

[10] A.N. KIRILLOV, N. YU. RESHETIKHIN - *The Yangians, Bethe Ansatz and combinatorics*, Letters in Math. Phys. 12 (1986), 199-208.

[11] Y. KOSMANN-SCHWARZBACH - *Poisson-Drinfel'd groups*, Proc. Oberwolfach Conference on non linear evolution equations (July 1986), M. Ablowitz, B. Fuchssteiner, M. Kruskal ed. World Scientific Publ., à paraître.

[12] YU. I. MANIN - *Some remarks on Koszul algebras and quantum groups*, Conférence en l'honneur de J.-L. Koszul, Juin 1987, à paraître.

[13] A.G. REIMAN et M.A. SEMENOV-TYAN-SHANSKY - *Hamiltonian structure of Kadomtsev-Petviashvili type equations*, Zapiski Nauchnykh Seminarov Leningradskogo Otdeleniya Matematicheskogo Instituta im. V.A. Steklova AN SSSR, Vol. 133, 212-227, 1984.

[14] M. ROSSO - *Comparaison des groupes* SU(2) *quantiques de Drinfel'd et de Woronowicz*, CRAS t. 304, Série I, n° 12, 1987, 323-326.

[15] M.A. SEMENOV-TYAN-SHANSKY - *Dressing transformations and Poisson group actions*, Publication RIMS Kyoto Univ. 21 (1986), n° 6.

[16] M.A. SEMENOV-TYAN-SHANSKY - *Classical* R-*matrices, Lax equations, Poisson-Lie groups and dressing transformations in Field theory, quantum gravity and strings, II*, Lecture Notes in Physics, Springer Verlag, 280, 174-214.

[17] E.K. SKLYANIN - *The quantum version of the inverse scattering method*, Zapiski Nauch. Seminarov LOMI 95 (1980), 55-128.

[18] S.L. WORONOWICZ - *Compact matrix pseudogroups*, Prépublication, Warsawa, 1987.

[19] S.L. WORONOWICZ - *Twisted* SU(2) *group : An example of non commutative differential calculus*, à paraître dans RIMS Publ., Kyoto Univ.

[20] C.N. YANG - *Some exact results for the many body problem in one dimension with repulsive delta function interaction*, Phys. Rev. Letters, 19 (1967), n° 23, 1312-1314.

Pour une bonne bibliographie jusqu'en 1986, on pourra consulter [1].

Jean-Louis VERDIER

Université de Paris 7
U.A. 212 du CNRS
UER de Mathématiques
Tour 45-55 - 5° étage
2 place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05