Astérisque

ALAIN BRUGUIÈRES

Propriétés de convexité de l'application moment

Astérisque, tome 145-146 (1987), Séminaire Bourbaki, exp. nº 654, p. 63-87
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1985-1986__28__63_0>

Séminaire BOURBAKI — Novembre 1985
38ème année, 1985-86, n° 654

PROPRIÉTÉS DE CONVEXITÉ DE L'APPLICATION MOMENT
[d'après Atiyah, Guillemin - Sternberg, Kirwan et al.]

par Alain BRUGUIÈRES

Introduction

Lorsqu'un groupe de Lie compact connexe d'algèbre de Lie $\underline{k}$ opère sur une variété symplectique X en respectant la structure symplectique, on définit la notion d'application moment $\Phi : X \longrightarrow \underline{k}^*$, qui généralise l'application moment de la Mécanique Classique, obtenue lorsque $K = SO(3)$ opère sur le fibré cotangent à S^2.

Si X est compacte connexe, l'application moment Φ a des propriétés de rigidité remarquables. Atiyah, Guillemin et Sternberg ont montré que lorsque K est un tore, l'image de Φ est un convexe ; F.C. Kirwan démontre un résultat analogue dans le cas général (§ 2). D'autre part, inspiré par une idée dûe à Atiyah, elle utilise la "fonction de Yang - Mills" $f = \|\Phi\|^2$ pour définir sur X une stratification K-invariante, parfaite au sens K-équivariant (§ 3). Dans le cas de l'action linéaire d'un groupe réductif G sur une variété projective lisse $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, cette stratification, que l'on peut aussi définir dans le cadre de la théorie des invariants géométriques de Hilbert - Mumford, permet de calculer les nombres de Betti du bon quotient X^{ss}/G si $X^s = X^{ss}$, et de calculer ses nombres de Betti d'intersection si $X^s \neq \emptyset$ (§ 4). Cette méthode rend possible le calcul des nombres de Betti de nombreux espaces de modules en géométrie algébrique (nous citons quelques exemples au § 5).

La rigidité de l'application moment se traduit également dans son comportement vis-à-vis de la mesure de Liouville, par la formule de la phase stationnaire avec reste nul, dûe à Duistermaat et Heckman (§ 6). Cette rigidité a également permis à Białynicki-Birula et J. Święcicka de généraliser la notion d'application moment à une situation purement algébrique, ce qui permet d'étendre certains résultats de la théorie des invariants géométriques à l'action d'un groupe réductif sur une variété complète (§ 6).

1. APPLICATION MOMENT : DÉFINITION, PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES, EXEMPLES

Soit X une variété symplectique compacte, connexe, de dimension $2n$. Notons ω_X la forme symplectique sur X. On associe à toute fonction $f \in \mathcal{E}^\infty(X)$ le *champ hamiltonien* ξ_f défini par $\langle df, \cdot \rangle = \omega_X(\cdot, \xi_f)$. Si $f, g \in \mathcal{C}^\infty(X)$, on définit le *crochet de Poisson* $\{f,g\}$ de f et de g par $\{f,g\} = \xi_f(g)$. Alors $\mathcal{C}^\infty(X)$, muni du crochet de Poisson, est une algèbre de Lie et l'application $f \longmapsto \xi_f$ définit un morphisme d'algèbres de Lie :

$$\xi : \mathcal{C}^\infty(X) \longrightarrow \mathfrak{X}(X) .$$

Soit à présent K un groupe de Lie compact, connexe, d'algèbre de Lie $\underline{k}$, opérant sur X . Une telle action définit un morphisme d'algèbres de Lie :

$$\underline{k} \longrightarrow \mathfrak{X}(X) ,$$

associant à tout $a \in \underline{k}$ le champ de vecteurs a_X défini par

$$(a_X)_x = a_x = \frac{\partial}{\partial t}(\exp ta \cdot x)\Big|_{t=0} .$$

Nous supposons que l'action de K sur X est *symplectique*, c'est-à-dire qu'elle respecte ω_X .

DÉFINITION.- *On appelle* application moment *pour l'action symplectique de* K *sur* X *toute application* $\Phi : X \longrightarrow \underline{k}^*$ *vérifiant :*

(M1) Φ *est* K-*équivariante*, K *opérant sur* $\underline{k}^*$ *par la représentation co-adjointe.*

(M2) *Pour tout* $a \in \underline{k}$, $a_X = \xi_{\langle \Phi, a \rangle}$.

La donnée d'une application moment Φ est équivalente à celle d'une application linéaire K-équivariante $\tilde{\Phi}$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \underline{k} \arrow[rr] \arrow[dr, "\tilde{\Phi}"'] & & \mathfrak{X}(X) \\ & \mathcal{C}^\infty(X) \arrow[ur, "\xi"'] & \end{tikzcd}$$

S'il existe une application moment, elle est définie à constante additive près dans $(\underline{k}^*)^K$. On dit alors que l'action de K sur X est *hamiltonienne*. On a le théorème suivant ([M-W], [Ki]) :

THÉORÈME 1 (Marsden - Weinstein, 1974).- *Soit* K *opérant symplectiquement sur* X . *Cette action est hamiltonienne si le centre de* K *est fini, ou si* $H^1(X ; \mathbb{R}) = 0$. □

Considérons en effet le complexe $\Omega^*(X ; \underline{k}^*) = \mathrm{Hom}(\underline{k}, \Omega^*(X))$, sur lequel K opère. Soit $\tilde{\Phi} \in \Omega^0(X ; \underline{k}^*) = \mathrm{Hom}(\underline{k}, \mathcal{C}^\infty(X))$. Alors $\tilde{\Phi}$ correspond à une application moment $\Phi : X \longrightarrow \underline{k}^*$ si et seulement si :

1) $\tilde{\Phi}$ est K-équivariant ;

2) $d\tilde{\Phi} + i(K)\omega_X = 0$ [1] ,

---

[1] Les notations i , Θ désignent respectivement le produit intérieur et la dérivée de Lie.

où $K \in \mathfrak{X}(X\,;\underline{k}^*)$ est le champ de vecteurs à valeurs dans $\underline{k}^*$ associé à l'action de K sur X.

On a $di(K)+i(K)d = \Theta_K$ (1), donc $d[i(K)\omega_X] = \Theta_K\omega_X - i(K)d\omega_X = 0$ car ω_X est K-invariante, fermée. Donc $i(K)\omega_X$ est fermée ; elle est aussi K-équivariante. L'obstruction à l'existence de Φ se trouve donc dans $H^1(\Omega^*(X\,;\underline{k}^*)^K)$. Or on a $H^1(\Omega^*(X\,;\underline{k}^*)^K) = [H^1(\Omega^*(X\,;\underline{k}^*))]^K$ (car K est compact) $= (H^1(X\,;\mathbb{R})\otimes\underline{k}^*)^K$ $= H^1(X\,;\mathbb{R})\otimes(\underline{k}^*)^K$ car K, connexe, agit trivialement sur $H^1(X\,;\mathbb{R})$. En particulier, si $H^1(X\,;\mathbb{R}) = 0$ ou si $(\underline{k}^*)^K = 0$ (c'est-à-dire si le centre de K est fini), l'action est hamiltonienne. ■

Propriété de fonctorialité des applications moment

Supposons que K opère symplectiquement sur X et K' sur X'. Supposons donnés un morphisme de groupes $\varphi : K' \longrightarrow K$ et une immersion symplectique $i : X' \longrightarrow X$ compatibles avec ces actions. Alors si $\Phi : X \longrightarrow \underline{k}^*$ est une application moment pour l'action de K sur X, $\Phi' = {}^t(T\varphi)\circ\Phi\circ i$ est une application moment pour l'action de K' sur X'.

Quelques exemples

Exemple 1.- Soit $K = S^1$ opérant sur $X = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ par rotations autour de l'axe OZ. Alors la hauteur $Z : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application moment pour cette action.

Exemple 2.- Soit $K = S^1$ opérant sur $X = S^1 \times S^1$ par rotations sur le premier facteur. Il n'existe pas d'application moment pour cette action.

Exemple 3.- Soit K un groupe de Lie compact connexe, $\mathcal{O} \subset \underline{k}^*$ une orbite de la représentation co-adjointe. Alors $\mathcal{O}$ est muni d'une structure symplectique naturelle, l'action de K sur $\mathcal{O}$ est hamiltonienne et l'inclusion $\mathcal{O} \hookrightarrow \underline{k}^*$ est une application moment pour cette action.

Exemple 4.- Soit K un groupe de Lie compact connexe, $\alpha \in \underline{k}^*$ et soit H le stabilisateur de α dans K. Alors K/H est équipé d'une structure symplectique naturelle, l'action de K sur K/H est hamiltonienne et l'application

$$\Phi : K/H \longrightarrow \underline{k}^*$$
$$\mathrm{Cl}(k) \longrightarrow \mathrm{Ad}^*(k)\alpha$$

est une application moment pour cette action.

Exemple 5.- (Action linéaire sur une variété projective complexe). Soit X une variété projective complexe, $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, et K un groupe de Lie compact opérant sur X par l'intermédiaire d'un morphisme $\varphi : K \longrightarrow U(n+1)$. Une telle action est symplectique, X étant muni de la structure symplectique induite par sa struc-

(1) Voir note de la page précédente.

ture kälhérienne, et il existe une application moment naturelle Φ pour cette action. On la définit comme suit. Soit $x \in X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ et $x^* = (x_0, \dots x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $x = (x_0 : \dots : x_n)$. Alors pour tout $a \in \underline{k}$,

$$\langle\Phi(x), a\rangle = (2\pi i \|x^*\|^2)^{-1}\, {}^t\bar{x}^*\, T\varphi(a) x^* \quad ([Ki]) .$$

2. PROPRIÉTÉS DE CONVEXITÉ DE L'APPLICATION MOMENT

Le cas de l'action d'un tore

Commençons par un exemple. Soit $T \subset U(n+1)$ le groupe des matrices unitaires diagonales, que l'on identifie à $\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{Z}^{n+1}$. Alors T opère linéairement sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, avec pour application moment

$$\Phi : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \longrightarrow \underline{t}^* \simeq \mathbb{R}^{n+1}$$

$$(x_0 ; \dots ; x_n) \longmapsto \left(\frac{1}{\Sigma |x_i|^2}\right)(|x_0|^2, \dots, |x_n|^2) .$$

L'image de Φ est donc un polyèdre convexe, enveloppe convexe des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Atiyah et, simultanément et indépendamment, Guillemin et Sternberg ont montré que ceci restait vrai pour toute action hamiltonienne d'un tore.

THÉORÈME 2 (Atiyah ; Guillemin - Sternberg, 1982).- *Soit X une variété symplectique compacte connexe sur laquelle un tore T opère symplectiquement. Supposons qu'il existe une application moment $\Phi : X \longrightarrow \underline{t}^*$ pour cette action, et notons X^T l'ensemble des points fixes de X sous l'action de T. Alors :*

1) *l'ensemble $\Phi(X^T)$ est un sous-ensemble fini de $\underline{t}^*$ dont les éléments sont appelés les* poids de l'action de T sur X ;

2) *l'image de Φ est l'enveloppe convexe de l'ensemble des poids $\Phi(X^T)$;*

3) *les fibres de Φ sont connexes.* □

Ce théorème avait été démontré par Kostant (1973) dans le cas où X est une orbite de la représentation co-adjointe de K. Nous donnons une esquisse de la démonstration d'Atiyah ([A]), analogue, en plus simple, à celle de Guillemin - Sternberg ([G-S1]).

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\varphi : \underline{t}^* \longrightarrow E$ une application linéaire surjective. Soit $\Psi = \varphi \circ \Phi : X \longrightarrow E$ et considérons les assertions suivantes :

(P_n) Les fibres de Ψ sont connexes.

(Q_n) L'image de Ψ est convexe.

On démontre que (P_n) implique (Q_{n+1}), puis (P_n) par récurrence, le cas difficile étant $n = 1$.

1) $(P_n) \Longrightarrow (Q_{n+1})$. Soit $\Psi : X \longrightarrow E$, avec $\dim(E) = n+1$. Pour toute droite affine L de E , il existe un espace vectoriel E' de dimension n et une application linéaire surjective $\pi : E \longrightarrow E'$ envoyant L sur un point $p \in E'$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "\Psi' = \pi\circ\Psi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ & E' \end{tikzcd}$$

Si (P_n) est satisfaite, les fibres de Ψ' sont connexes, donc $\Psi(X) \cap L = \Psi(\Phi'^{-1}(p))$ est un intervalle de L , d'où la convexité de $\Psi(X)$.

2) (P_1) . Pour $\beta \in \underline{t}$, notons Φ_β la fonction $\langle\Phi,\beta\rangle$. Il s'agit de montrer que les fibres de Φ_β sont connexes. Atiyah démontre ce résultat par la théorie de Morse. Si M est une variété $\mathcal{C}^\infty$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, notons $Cr(f)$ le lieu critique de f et pour tout $x \in Cr(f)$, soit $H_f(x)$ le Hessien de f en x . La fonction f est dite non dégénérée au sens de Bott si $Cr(f)$ est une sous-variété de M , et si pour tout $x \in Cr(f)$, $\mathrm{Ker}(H_f(x)) = T_x Cr(f)$.

On a le lemme suivant :

Lemme 1.- Soit M *une variété compacte connexe orientée, et* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *une fonction de Morse non dégénérée au sens de Bott. Si ni* f *, ni* $-f$ *n'ont de points critiques d'indice* 1 *, les fibres de* f *sont connexes.* □

Esquisse de démonstration.- Soit $n = \dim M$, et pour $c \in \mathbb{R}$, $M_c^+ = f^{-1}([c,+\infty[)$, $M_c^- = f^{-1}(]-\infty,c])$ et $M_c = f^{-1}(c)$. Quand c croît, il apparaît une nouvelle composante connexe de M_c au passage de tout minimum local de f . Deux composantes ne peuvent fusionner qu'au passage de points critiques d'indice 1 , ce qui est ici exclu. De même pour $-f$; M_c^+ et M_c^- sont donc connexes, et les extrema de f sont tous globaux. On a $H_{n-1}(M_c^-) = 0$ pour $c < \sup(f)$, car ce groupe n'est modifié qu'au passage de points critiques d'indice 0 ou 1 pour $-f$. Pour c valeur non critique, $\partial M_c^- = M_c$ est alors connexe ; par un argument de topologie générale, cela reste vrai pour tout c . ■

L'assertion (P_1) résulte donc du lemme suivant :

Lemme 2.- Pour tout $\beta \in \underline{t}$ *, la fonction* Φ_β *est non dégénérée au sens de Bott, et n'a que des points critiques d'indice pair.* □

Démonstration.- Remarquons que dans le cas général où K opère symplectiquement sur X , il existe sur X une structure presque complexe et une structure riemannienne compatibles avec l'action de K , telles qu'on ait pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$:

$$\mathrm{grad}(f) = i\xi_f .$$

Fixons de telles structures dans le cas qui nous intéresse ($K = T$). Notons $f = \Phi_\beta$ et soit $T_\beta = \overline{\exp \mathbb{R}\beta}$; on a $\xi_f = \beta_X$ donc $Cr(f) = X^{T\beta}$. Lorsqu'un tore opère sur une variété $\mathcal{C}^\infty$, son action est linéarisable au voisinage de tout point fixe. Il en résulte que $Cr(f)$ est une sous-variété que nous noterons Z . Pour tout $x \in Z$, le sous-groupe à un paramètre $\exp t\beta$ opère $\mathbb{C}$-linéairement sur T_xX , d'où une décomposition :

$$T_xX = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{R}} V_\lambda ,$$

où V_λ correspond au caractère $t \longmapsto e^{-i\lambda t}$. Comme $\operatorname{grad}(f) = i\xi_f = i\beta_X$, V_λ est le sous-espace propre de la forme quadratique $H_f(x)$ correspondant à la valeur propre λ . On a : $V_0 = (T_xX)^{T\beta} = T_xZ$, donc f est non dégénérée au sens de Bott; les V_λ sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, donc l'indice de $H_f(x)$ est pair. Notons que $Cr(f)$ est une sous-variété presque complexe, donc symplectique, de X . ■

3) $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})$. Supposons (P_n) vrai. Soient $\beta_1, \dots, \beta_{n+1} \in \underline{t}$ et $f_1, \dots, f_{n+1}$ définis par : $f_i = \Phi_{\beta_i}$. Il s'agit de montrer que l'application

$$\Psi : X \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$
$$x \longmapsto (f_1(x), \dots f_{n+1}(x))$$

est à fibres connexes. Soit $c \in \mathbb{R}^{n+1}$ une valeur non critique de Ψ . Soit $M = f_1^{-1}(c_1) \cap \dots \cap f_n^{-1}(c_n)$, sous-variété de codimension n de X , connexe par (P_n) . On a $\Psi^{-1}(c) = (f_{n+1|M})^{-1}(c_{n+1})$, donc il suffit de démontrer que $f_{n+1|M}$ est non dégénérée au sens de Bott, et n'a que des points critiques d'indice pair (d'où la connexité des fibres par le lemme 1).

Soit donc $x \in Cr(f_{n+1|M})$. Il existe $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $d\varphi(x) = 0$, où $\varphi = f_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(f_i - c_i)$. On a : $\varphi_M = f_{n+1|M}$, et φ n'a que des points critiques d'indice pair, donc il suffit de montrer que M coupe $Cr(\varphi) = Z$ transversalement en x . Or Z est une sous-variété symplectique T-invariante. Les $(\xi_{fi})_{1\leq i\leq n}$ sont donc tangents à Z et indépendants en x , ainsi que les formes duales pour $\omega_{|Z}$, c'est-à-dire $(df_1, \dots df_n)_{|Z}$; d'où la transversalité en x .

Soit K l'ensemble des valeurs critiques de Ψ . Pour tout $c \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe une droite L passant par c , telle que $L \cap K$ soit de mesure nulle dans L (Fubini). Par (P_n) , $\Psi^{-1}(L)$ est connexe. Pour tout $c' \in L \setminus K$, $\Phi^{-1}(c')$ est connexe ; $\Phi^{-1}(c)$ est donc connexe (même argument de topologie général que pour le lemme 1).

Les assertions (P_n) et (Q_n) sont donc démontrées. En particulier, $\Phi(X)$ est convexe et les fibres de Φ sont connexes. Soit $Z = \{x \in X | d\Phi(x) = 0\} = X^T$; Z est une sous-variété presque complexe de X ; soit $Z_1, \dots Z_m$ ses composantes connexes, et soit $\alpha_i = \Phi(Z_i)$ le poids correspondant à Z_i . On a donc $\operatorname{Conv}(\alpha_i)_{1\leq i\leq m} \subset \Phi(X)$. Supposons : $c \in \underline{t}^* \setminus \Phi(X)$. Il existe $\beta \in \underline{t}$

tel que $\langle c, \beta\rangle \notin \Phi_\beta(X)$. On peut imposer la condition dense : $T_\beta = T$. Alors $Cr(\Phi_\beta) = Z$, donc $\Phi_\beta(X) = \mathrm{Conv}(\langle \alpha_i, \beta\rangle)$. D'où $c \notin \mathrm{Conv}(\alpha_i)_{1\leq i\leq m}$, et le théorème est démontré. ∎

Remarques.- 1) Les valeurs critiques de Φ constituent un ensemble négligeable, réunion finie de polyèdres convexes de $\underline{t}^*$ dont les sommets sont des poids de l'action de T sur X .

2) Les fonctions Φ_β sont remarquables à plus d'un titre : elles sont parfaites au sens ordinaire et au sens T-équivariant (proposition 5) et elles vérifient le lemme de la phase stationnaire avec reste nul (§ 6).

Le cas général

Tout d'abord, un exemple : le groupe $SO(3)$ opère sur $\mathbb{R}^3 \simeq \underline{so}(3)^*$ par la représentation co-adjointe, d'où une action hamiltonienne de $SO(3)$ sur l'orbite $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, et l'inclusion $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ est une application moment dont l'image n'est pas convexe. On a cependant le théorème suivant.

THÉORÈME 3 (Atiyah ; Guillemin - Sternberg ; Kirwan, 1984).- *Soit K un groupe de Lie compact connexe. En fixant un produit scalaire euclidien K-invariant sur $\underline{k}$, on identifie $\underline{k}$ et $\underline{k}^*$. Supposons donnée une action hamiltonienne de K sur une variété symplectique compacte connexe X , et soit $\Phi : X \longrightarrow \underline{k}$ une application moment pour cette action. Alors :*

1) *L'image de Φ est K-invariante*

2) *Pour tout tore maximal $\underline{t} \subset \underline{k}$ et toute chambre de Weyl (fermée) $\underline{t}_+ \subset \underline{t}$, $\Phi(X) \cap \underline{t}_+$ est un polyèdre convexe.* □

Ce théorème, qui généralise le précédent, a été démontré par Guillemin et Sternberg dans le cas où X est une variété Kählérienne ([G - S2], 1984), puis par F.C. Kirwan dans le cas général ([Ki1], 1984). La démonstration de Kirwan repose sur le corollaire 1 du théorème 5, c'est-à-dire la connexité de l'ensemble des points de X où $\|\Phi\|^2$ atteint son minimum.

Esquisse de démonstration.- Soit $P = \Phi(X) \cap \underline{t}_+$. Guillemin et Sternberg ont montré que P est un polyèdre connexe ([G - S1]). Leur méthode consiste à considérer $\underline{t}_+^o$, intérieur de $\underline{t}_+$, et à montrer que $Y = \Phi^{-1}(\underline{t}_+^o)$ est une sous-variété localement fermée, symplectique, de X . On a $\overline{KY} = X$ donc $P = \overline{\Phi(Y)}$. Or $\Phi_{|Y} : Y \longrightarrow \underline{t}$ est une application moment pour l'action de T sur Y . Bien que Y ne soit pas compact, ils montrent, par un raisonnement analogue à celui du théorème 2, que $\overline{\Phi(Y)}$ est un polyèdre connexe, mais n'obtiennent pas sa convexité.

Supposons P non convexe. F.C. Kirwan utilise le lemme suivant :

Lemme.- *Soit P un polyèdre connexe, non convexe, d'un espace euclidien E . Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe $\alpha \in \mathrm{Conv}(P)$ tel que la boule de centre α et de rayon ε intersecte P exactement en deux points α_1, α_2 situés sur la sphère.* □∎

En appliquant ce lemme à $P = \Phi(X) \cap \underline{t}_{+} \subset \underline{t}$, on peut supposer que $H = \mathrm{Stab}(\alpha)$ laisse fixes α_1 et α_2 . L'espace K/H est muni d'une forme symplectique naturelle ; on le note $(K/H)^-$ lorsqu'on le munit de la forme symplectique opposée. Soit $X_\alpha = X \times (K/H)^-$. Alors K agit symplectiquement sur X_α avec application moment

$$\Phi : X_\alpha \longrightarrow \underline{k}$$
$$(x, \mathrm{cl}(k)) \longmapsto \Phi(x) - \mathrm{Ad}(k) . \alpha .$$

Il est clair que $\|\Phi_\alpha\|^2$ atteint son minimum exactement sur

$$K(\Phi^{-1}(\alpha_1) \times \{H\}) \cup K(\Phi^{-1}(\alpha_2) \times \{H\}) ,$$

qui est non connexe ; ceci contredit le corollaire 1 du théorème 5, donc P est convexe. ∎

3. COHOMOLOGIE DES ESPACES QUOTIENTS EN GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE (D'APRÈS F.C. KIRWAN, [Ki])

Dans tout ce paragraphe, soit K un groupe de Lie compact connexe. Fixons une norme euclidienne K-invariante $\|\cdot\|$ sur $\underline{k}$. Soit X une variété symplectique compacte connexe sur laquelle K agit symplectiquement, et soit $\Phi : X \longrightarrow \underline{k}^*$ une application moment pour cette action.

Considérons la condition :

(R) Le stabilisateur dans K de tout $x \in \Phi^{-1}(0)$ est fini.

Lorsque (R) est satisfaite, le quotient $\Phi^{-1}(0)/K$ est muni d'une structure de variété symplectique singulière. On l'appelle réduction de Marsden - Weinstein de X par K , et il joue en géométrie symplectique le rôle de quotient de X par K ([Ki,D-H]).

F.C. Kirwan, utilisant la fonction $f = \|\Phi\|^2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ comme "fonction de Morse", construit une stratification K-invariante de X ; elle montre que cette stratification est parfaite au sens K-équivariant (*cf.* infra), et en déduit une formule permettant de calculer par récurrence les nombres de Betti K-équivariants des strates. Ce résultat est particulièrement intéressant dans le cas où la condition (R) est satisfaite. La cohomologie de la réduction de Marsden - Weinstein $\Phi^{-1}(0)/K$ est alors isomorphe à la cohomologie K-équivariante de l'unique strate ouverte (en supposant : $\Phi^{-1}(0) \neq \emptyset$).

Une des difficultés de cette méthode réside dans le fait que f n'est pas une fonction de Morse au sens habituel, d'où la nécessité d'étendre la théorie de Morse à une classe plus large de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, dites "à dégénérescence minimale".

Théorie de Morse étendue

Soit M une variété $\mathcal{C}^\infty$ compacte connexe, et soit $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Soit $\mathrm{Cr}(h)$

le lieu critique de h , et pour $x \in Cr(h)$ notons $H_h(x)$ le Hessien de h en x .

DÉFINITION.- *On dit que* h *est à* dégénérescence minimale *(minimally degenerate) si* $Cr(h)$ *admet une partition fermée finie* $(C_\beta)_{\beta\in B}$ *telle que pour tout* $\beta \in B$ *il existe une sous-variété localement fermée équidimensionnelle* $\Sigma_\beta \subset M$ *et un supplémentaire orientable* N^β *de* $T\Sigma_\beta$ *dans* $TM_{|\Sigma_\beta}$ *, vérifiant pour tout* $\beta \in B$:

1) $C_\beta \subset \Sigma_\beta$ *et* $h_{|\Sigma_\beta}$ *atteint son minimum exactement sur* C_β ,

2) *Pour tout* $x \in \Sigma_\beta$, $dh(x)_{|N_x^\beta} = 0$,

3) *Pour tout* $x \in C_\beta$, $H_h(x)_{|N_x^\beta}$ *est négatif non dégénéré.*

Remarque.- Ces conditions signifient qu'au voisinage de tout point critique de h , on peut, par un choix judicieux de coordonnées locales, se ramener à $M = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, et h de la forme $h(x,y) = h'(x) - \|y\|^2$, la fonction h' ayant pour seule valeur critique son minimum global.

Soit $h \in \mathscr{C}^\infty(M)$ une fonction à dégénérescence minimale, équipée de (C_β) , (Σ_β) et (N^β) . Une métrique riemannienne g sur M est dite *adaptée à* h si pour tout $\beta \in B$ la décomposition $TX_{|\Sigma_\beta} = T\Sigma_\beta \oplus N^\beta$ est g-orthogonale. Supposons donnée une telle métrique (il en existe toujours). Pour tout $x \in M$, notons $\omega(x)$ l'ensemble limite de la trajectoire de $-\mathrm{grad}\, h$ issue de x lorsque le paramètre tend vers $+\infty$; $\omega(x)$ est donc un fermé connexe contenu dans $Cr(h)$. Pour tout $\beta \in B$ notons $S_\beta = \{x \in M | \omega(x) \subset C_\beta\}$.

THÉORÈME 4.- *Soit* h *une fonction à dégénérescence minimale et* g *une métrique adaptée à* h *. Alors :*

1) *Les* $(S_\beta)_{\beta\in B}$ *constituent une stratification lisse de* M *, l'ordre sur les strates étant défini par :* $\beta < \gamma \Longleftrightarrow h(C_\beta) < h(C_\gamma)$.

Cette stratification est appelée stratification de Morse de h .

2) *Pour tout* $\beta \in B$, S_β *coïncide avec* Σ_β *au voisinage de* C_β *, et l'inclusion* $C_\beta \hookrightarrow S_\beta$ *est une équivalence de cohomologie de Čech.* □

L'assertion 1) signifie que les $(S_\beta)_{\beta\in B}$ constituent une partition de M , et que pour tout $\beta \in B$, S_β est une sous-variété localement fermée de M vérifiant

$$\bar{S}_\beta \setminus S_\beta \subset \bigcup_{\substack{\gamma\in B \\ \gamma>\beta}} S_\gamma .$$

Inégalités de Morse.- Soit $P_t(M) = \sum_{j\geq 0} t^j \dim H^j(X;\mathbb{Q})$ le polynôme de Poincaré de M . Pour tout $\beta \in B$, l'indice de H_h est constant le long de C_β , et vaut $\lambda(\beta) = \mathrm{rang}(N^\beta)$.

On a :

$$\sum_{\beta\in\mathcal{B}} t^{\lambda(\beta)} P_t(C_\beta) - P_t(M) = (1+t)R(t) ,$$

où $R(t)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{N}$.
(La démonstration, classique en théorie de Morse, utilise les suites exactes longues de Thom-Gysin associées à la stratification. Voir [Ki]).

DÉFINITION.- *Si* R *est nul, on dit que* h *(ou sa stratification de Morse) est* parfaite.

Version équivariante des inégalités de Morse

Rappelons que si G est un groupe topologique, on note BG l'*espace classifiant* de G , $EG \longrightarrow BG$ le *fibré principal universel sur* BG , et pour tout G-espace topologique Y , on pose $Y_G = Y \underset{G}{\times} EG$. La *cohomologie* G-*équivariante* de Y est alors $H^*_G(Y) = H^*(Y_G;\mathbb{Q})$.

Soit M une variété $\mathcal{C}^\infty$ compacte connexe, $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ une fonction à dégénérescence minimale et g une métrique adaptée à h . Soit K un groupe de Lie compact agissant sur M en laissant h et g invariants. Alors K laisse la stratification de Morse de h invariante, et on a la proposition suivante :

PROPOSITION 1.- *Pour tout* $\beta \in \mathcal{B}$ *l'inclusion* $C_\beta \hookrightarrow S_\beta$ *est une équivalence de cohomologie* K-*équivariante.*

D'où les inégalités de Morse équivariantes :

$$\sum_{\beta\in\mathcal{B}} t^{\lambda(\beta)} P^K_t(C_\beta) - P^K_t(M) = (1+t)R(t) ,$$

où $P^K_t(M)$ *est la* série de Poincaré K-équivariante *de* M :

$$P^K_t(M) = \sum_{j\geq 0} t \dim H^j_K(M) ,$$

et $R(t)$ *est une série formelle à coefficients dans* $\mathbb{N}$. □ ■

DÉFINITION.- *Si* R *est nul, on dit que* h *(ou sa stratification de Morse) est* parfaite au sens K-équivariant.

Un critère utile.- Pour tout $\beta \in \mathcal{B}$, supposons que la classe d'Euler K-équivariante du fibré normal à S_β dans M ne soit pas un diviseur de zéro dans $H^*_K(S_\beta)$. Alors la fonction h est parfaite au sens K-équivariant (car les suites exactes longues de Thom-Gysin, version K-équivariante, se scindent).

Le carré de la norme de l'application moment comme "fonction de Morse".

THÉORÈME 5.- *La fonction* $f = \|\Phi\|^2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *est à dégénérescence minimale. Il existe une métrique* K-*invariante adaptée à* f , *et* f *est parfaite au sens* K-*équivariant. De plus, les strates de Morse de* f *sont de dimension paire.* □

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.

1) *Description du lieu critique de* f

Considérons Φ comme à valeurs dans $\underline{k} \simeq \underline{k}^*$. Il résulte de (M2) et de $f = \|\Phi\|^2$ la relation :

$$(\xi_f)_x = 2\Phi(x)_x \qquad \text{pour tout } x \in X .$$

Soit $T \subset K$ un tore maximal, π le projecteur orthogonal de $\underline{k}$ sur $\underline{t}$. Alors $\Phi_T = \pi \circ \Phi : X \longrightarrow \underline{t}$ est une application moment pour l'action de T sur X. Soit $f_T = \|\Phi_T\|^2$. On a donc, pour $x \in \Phi^{-1}(\underline{t})$:

$$x \in Cr(f) \Longleftrightarrow x \in Cr(f_T) .$$

DÉFINITION.- *Soit* $\mathcal{P} = \Phi_T(X^T)$ *l'ensemble des poids de l'action de* T *sur* X. *On appelle* combinaison minimale de poids *tout* $\beta \in \underline{t}^*$ *qui est projection orthogonale de* 0 *sur l'enveloppe convexe d'une partie non vide de* $\mathcal{P}$. *On note* $\mathcal{B}_T$ *l'ensemble des combinaisons minimales de poids.*

Soit $\mathcal{B}$ un système de représentants des orbites de $\mathcal{B}_T$ sous l'action du groupe de Weyl W, et pour tout $\beta \in \mathcal{B}$ posons :

$$C_\beta = K(X^{T_\beta} \cap \Phi^{-1}(\beta)) .$$

PROPOSITION 2.- *Les* C_β *non vides constituent une partition fermée de* $Cr(f)$. □

Démonstration.- Les C_β sont fermés, et disjoints d'après la définition de $\mathcal{B}$. Montrons $\bigcup_{\beta\in\mathcal{B}} C_\beta = Cr(f)$. Si $x \in X^{T_\beta} \cap \Phi^{-1}(\beta)$, on a $(\xi_f)_x = \Phi(x)_x = \beta_x = 0$, donc $x \in Cr(f)$. Réciproquement, soit $x \in Cr(f)$. On peut supposer $\Phi(x) = \gamma \in \underline{t}$. Alors $\gamma_x = 0$, donc $x \in X^{T_\gamma} \cap \Phi^{-1}(\gamma)$ et il reste à montrer que $\gamma \in W\mathcal{B} = \mathcal{B}_T$. Soit Z_1 la composante connexe de X^{T_γ} qui contient x. C'est une variété symplectique sur laquelle T agit avec application moment $\Phi_{T|Z_1} : Z_1 \longrightarrow \underline{t}$. D'après le théorème 2, $\Phi_T(Z_1)$ est l'enveloppe convexe de $\Phi_T(Z^T) \subset \mathcal{P}$. Pour tout $z \in Z_1$, on a $\langle\Phi_T(z),\gamma\rangle = \|\gamma\|^2$, donc γ est la projection orthogonale de 0 sur $\Phi_T(Z_1)$, d'où : $\gamma \in \mathcal{B}_T$. ■

2) *La fonction* f *est à dégénérescence minimale*

Fixons sur X une structure presque complexe et une structure riemannienne compatibles avec l'action de K, telles qu'on ait pour tout $h \in \mathcal{C}^\infty(X)$

$$\operatorname{grad} h = i\xi_h .$$

Pour tout $\beta \in \mathcal{B}$, on a $Cr(\Phi_\beta) = X^{T_\beta}$. Soit $Z_\beta = X^{T_\beta} \cap \Phi_\beta^{-1}(\|\beta\|^2)$, et soit Y_β la strate de Morse de Φ_β associée à Z_β. On a $\operatorname{grad} \Phi_\beta = i\xi_{\Phi_\beta} = i\beta_X$, donc

$$Y_\beta = \{y \in X \mid \lim_{t\to-\infty} \exp(it\beta_X)y \in Z_\beta\} .$$

PROPOSITION 3.- *Il existe un voisinage ouvert* Σ_β *de* C_β *dans* KY_β *vérifiant :*

1) Σ_β *est une sous-variété symplectique localement fermée de* X *;*

2) $f_{|\Sigma_\beta}$ *atteint son minimum exactement sur* C_β *;*

3) *Soit* $N^\beta = T\Sigma_\beta^o$ *(orthogonal de* $T\Sigma_\beta$ *pour* ω_X *) ;*

alors pour tout $x \in \Sigma_\beta$, $df(x)_{|N_x^\beta} = 0$ *et si* $x \in C_\beta$, $H_f(x)_{|N_x^\beta}$ *est négatif non dégénéré.* □

Il résulte immédiatement de la proposition et du théorème 4 que f est à dégénérescence minimale, et que ses strates de Morse sont de dimension paire.

Démonstration de la proposition 3

Notons $\mathrm{Stab}\,\beta$ le stabilisateur de β dans K , qui est connexe, et $\underline{\mathrm{stab}}\,\beta$ son algèbre de Lie. La démonstration de la proposition repose sur le

Lemme.- Pour $x \in Z_\beta \cap \Phi^{-1}(\beta)$ *, on a :*

1) $\{k \in K | kx \in Y_\beta\} = \mathrm{Stab}\,\beta$;

2) $\{a \in \underline{k} | a_x \in T_xY_\beta\} = \underline{\mathrm{stab}}\,\beta$. □

Montrons 1), la démonstration de 2) étant l'analogue infinitésimal. On a l'inclusion $\supset$ car Y_β est invariant par $\mathrm{Stab}\,\beta$. Soit $k \in K$ tel que $kx \in Y_\beta$. On a donc $\Phi_\beta(kx) \geq ||\beta||^2$. Or, $2\Phi_\beta(kx) = 2\Phi(kx)\,.\,\beta = ||\Phi(x)||^2 + ||\Phi(kx)||^2 - ||\Phi(kx) - \Phi(x)||^2 = 2||\beta||^2 - ||k\beta - \beta||^2$ d'où $k\beta = \beta$, et $k \in \mathrm{Stab}\,\beta$. □

Montrons que KY_β est lisse au voisinage de C_β . L'application $\sigma : K \times Y_\beta \longrightarrow X$, définie par l'action de K sur X , induit une application $\bar\sigma : K \underset{\mathrm{Stab}\,\beta}{\times} Y_\beta \longrightarrow X$, d'image KY_β .

Par compacité de K , $\bar\sigma$ est propre à valeurs dans KY_β . D'autre part, il résulte du lemme que $\bar\sigma$ est une immersion locale au voisinage de $\bar\sigma^{-1}(C_\beta)$ et induit un homéomorphisme de ce dernier sur C_β . Il existe donc un voisinage ouvert W de C_β dans KY_β tel que $\bar\sigma_{|\bar\sigma^{-1}(W)}$ soit un plongement.

Montrons que KY_β est symplectique au voisinage de C_β . On se place en $x \in Z_\beta \cap \Phi^{-1}(\beta)$; il suffit de montrer que si $u \in T_xKY_\beta \cap T_xKY_\beta^o$, u est nul. On a $T_xKY_\beta = \underline{k}_x + T_xY_\beta$ donc on peut écrire $u = a_x + \zeta$ avec $a \in \underline{k}$, $a_x \in T_xY_\beta^\perp$ et $\zeta \in T_xY_\beta$. Or T_xY_β est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, somme des espaces propres de $H_{\Phi_\beta}(x)$ pour les valeurs propres $\lambda \geq 0$. On a donc $||\zeta||^2 = (a + \zeta)\,.\,\zeta = \omega_X(a_x + \zeta, -i\zeta) = 0$, d'où $\zeta = 0$. Pour tout $b \in \underline{k}$, $d\Phi_b(x)\,.\,a_x = \omega_X(a_x, b_x) = 0$, donc $d\Phi(x)\,.\,a_x = 0$. Comme Φ est K-équivariante, ceci entraîne $[a, \Phi(x)] = [a, \beta] = 0$; donc $a \in \underline{\mathrm{stab}}\,\beta$; $\underline{\mathrm{stab}}\,\beta_x \subset T_xY_\beta$ (lemme) donc $a_x = u = 0$.

Soit Σ_β un voisinage lisse, symplectique de C_β dans KY_β , et soit $N^\beta = T\Sigma_\beta^o$. Si $z \in \Sigma_\beta$, $z = k\,.\,y$ avec $k \in K$ et $y \in Y_\beta$. On a

$f(z) = f(y) = \|\Phi(y) - \beta\|^2 - \|\beta\|^2 + 2\Phi_\beta(y) \geq \|\beta\|^2$, avec égalité si et seulement si $\Phi(y) = \beta$, c'est-à-dire $z \in C_\beta$, d'où l'assertion 2).

Si $x \in \Sigma_\beta$, on a $\underline{k}_x \subset T_x\Sigma_\beta$, donc $N_x^\beta \subset \underline{k} = \operatorname{Ker} d\Phi(x) \subset \operatorname{Ker} df(x)$ d'où $df(x)_{|N_x^\beta} = 0$.

Si $x \in C_\beta$, on peut supposer $x \in Z_\beta \cap \Phi^{-1}\beta$. Si $\beta = 0$, $N^\beta = 0$. Sinon on a $f = \frac{1}{\|\beta\|^2}\Phi_\beta^2 + \Sigma\Phi_{\gamma_i}^2$, les γ_i décrivant une base orthonormée de $\beta^\perp$. D'où

$$H_f(x) = 2H_{\Phi_\beta}(x) + \Sigma d\Phi_{\gamma_i}(x)^{\otimes 2} .$$

Or, $d\Phi(x)$ est nul sur N_x^β . On a donc :

$$H_f(x)_{|N_x^\beta} = 2H_{\Phi_\beta}(x)_{|N_x^\beta} ,$$

et comme $N_x^\beta \subset T_x Y_\beta^0 = T_x Y_\beta^\perp$ sur lequel $H_{\Phi_\beta}(x)$ est négatif non dégénéré, $H_f(x)_{|N_x^\beta}$ est négatif non dégénéré. ∎

Remarque.- La métrique riemannienne qui provient de la structure presque complexe sur X n'est pas forcément adaptée à f .

3) *La fonction* f *est parfaite au sens* K-*équivariant*

Si $\beta \in \mathcal{B}$, soit S_β la strate de Morse correspondante, N^β son fibré normal, et $e_K(N^\beta)$ la classe d'Euler équivariante de N^β . D'après le critère de la p. 10, il suffit de montrer que cette classe n'est pas un diviseur de 0 dans $H_K^*(S_\beta)$. On a l'isomorphisme :

$$H_K^*(S_\beta) \simeq H_K^*(C_\beta) ,$$

et un homéomorphisme (induit par $\bar{\sigma}$) : $K \times_{\text{Stab}\,\beta} (Z_\beta \cap \Phi^{-1}(\beta)) \simeq C_\beta$, d'où un isomorphisme :

$$H_K^*(S_\beta) \simeq H_{\text{Stab}\,\beta}^*(Z_\beta \cap \Phi^{-1}(\beta)) .$$

par lequel $e_K(N^\beta)$ s'identifie à $e_{\text{Stab}\,\beta}(N^\beta|_{Z_\beta \cap \Phi^{-1}(\beta)})$. Or si $x \in Z_\beta \cap \Phi^{-1}(\beta)$, $T \subset \text{Stab}\,\beta$ agit sur N_x^β sans points fixes autres que 0 . Le résultat suivant, dû à Atiyah et Bott, permet donc de conclure.

PROPOSITION 4 (Atiyah - Bott, 1982).- *Soit* Y *un* C.W.-*complexe*, N *un fibré vectoriel complexe sur* Y , K *un groupe de Lie compact connexe agissant* $\mathbb{C}$-*linéairement sur* N , $T \subset K$ *un tore fixant* Y *et agissant sans points fixes autres que* 0 *sur les fibres de* N . *Alors* $e_K(N) \in H_K^*(Y)$ *n'est pas un diviseur de* 0 . □ [A - B] ∎

(Pour appliquer cette proposition, remarquer que l'on peut munir N^β d'une structure complexe compatible avec l'action de K). D'où le théorème 5. ∎

COROLLAIRE 1.- *Soit* K *un groupe de Lie compact connexe opérant symplectiquement sur une variété symplectique compacte connexe* X , *avec application moment*

$\Phi : X \longrightarrow \underline{k}^*$. *Alors, le lieu des points de* X *où* $\|\Phi\|^2$ *atteint son minimum est connexe.* □

En effet, les strates S_β sont de codimension paire. Il y a donc une seule strate ouverte S_{β_o} , et elle est connexe ; C_{β_o} est le lieu des points de X où f atteint son minimum. Il est cohomologiquement équivalent à S_{β_o} , donc connexe. ■

Formules cohomologiques

Afin d'écrire les égalités de Morse K-équivariantes pour f , il convient de raffiner la stratification $(S_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ comme suit : pour tout $\beta \in \mathcal{B}$ et tout $m \in \{0,2,..\dim X\}$ posons (en gardant les notations de la démonstration du théorème 5) :

$$\begin{aligned} Y_{\beta,m} &= \text{la partie de } Y_\beta \text{ de dimension } m\ , \\ Z_{\beta,m} &= Z_\beta \cap Y_{\beta,m}\ , \\ C_{\beta,m} &= C_\beta \cap KY_{\beta,m}\ , \\ S_{\beta,m} &= S_\beta \cap KY_{\beta,m}\ . \end{aligned}$$

La strate $S_{\beta,m}$ est ainsi équidimensionnelle de dimension

$$\lambda(\beta,m) = m + \dim \operatorname{Stab}\beta - \dim K\ .$$

COROLLAIRE 2.- *Soit* K *un groupe de Lie compact connexe agissant symplectiquement sur une variété symplectique connexe compacte* X *avec application moment* $\Phi : X \longrightarrow \underline{k}^*$.

On a la formule suivante :

$$\text{(F)}\quad P_t^K(\Phi^{-1}(0)) = P_t(X)P_t(BK) - \sum_{\substack{\beta\in\mathcal{B}\smallsetminus\{0\} \\ m\in\{0,..\dim X\}}} t^{\lambda(\beta,m)} P_t^{\operatorname{Stab}\beta}(Z_{\beta,m} \cap \Phi^{-1}(\beta))\ . \ \square$$

Remarques. 1) Pour tout β , m , $Z_{\beta,m}$ est une variété symplectique compacte sur laquelle $\operatorname{Stab}\beta$ opère symplectiquement, et la restriction de $\Phi - \beta : Z_{\beta,m} \longrightarrow \underline{\operatorname{stab}}\ \beta$ est une application moment pour cette action ; la formule (F) est donc une formule de récurrence permettant de calculer $P_t^K(\Phi^{-1}(0))$.

2) Lorsque la condition (R) est vérifiée (c'est-à-dire lorsque 0 est une valeur régulière pour Φ), on a un isomorphisme :

$$H^*(\Phi^{-1}(0)/K;\mathbb{Q}) \simeq H_K^*(\Phi^{-1}(0))$$

donc la formule (F) permet de calculer les nombres de Betti de la réduction de Marsden-Weinstein de X par K ([Ki]) .

Démonstration du corollaire 2.- Pour reconnaître les égalités de Morse K-équivariantes pour la fonction f dans la formule (F) , il suffit de remarquer :

1) si $\Phi^{-1}(0) \neq \emptyset$, $0 \in \mathcal{B}$ et $\Phi^{-1}(0) = C_0$;

2) pour tout $\beta \in \mathcal{B}$, $P_t^{\operatorname{Stab}\beta}(Z_{\beta,m} \cap \Phi^{-1}(\beta)) = P_t^K(C_{\beta,m})$;

3) on a la proposition suivante.

PROPOSITION 5.- *Dans les hypothèses du corollaire,* $P_t^K(X) = P_t(X)P_t(BK)$. □

Démonstration de cette proposition.- Un lemme d'Atiyah - Bott affirme que si un groupe de Lie compact connexe K agit sur un C.W complexe Y et si $T \subset K$ est un tore maximal, la fibration

$$K/T \longrightarrow Y_T \longrightarrow Y_K$$

est cohomologiquement triviale (avec coefficients dans $\mathbb{Q}$), d'où

$$P_t^T(Y) = P_t^K(Y)P_t(K/T)\ .\ ([A-B])\ .$$

On se ramène donc à $K = T$.

La suite spectrale de Leray - Serre de la fibration $X \longrightarrow X_T \longrightarrow BT$ a pour terme $E_2^{p,q} = H^p(X;\mathbb{Q}) \otimes H^q(BT;\mathbb{Q})$ et converge vers $H_T^{p+q}(X)$, d'où $P_t^T(X) \leq P_t(X)P_t(BT)$, l'ordre sur les séries formelles étant induit par l'ordre sur les coefficients.

Soit $\beta \in \underline{t}$ tel que $T^\beta = T$. Alors $Cr(\Phi_\beta) = X^T$ et T agit sur $N(X^T)$ sans points fixes hors de la section nulle ; Φ_β est donc parfaite au sens T-équivariant (proposition 4 et critère de la p. 10). On a donc :

$$P_t^T(X) = \sum_{C \in \pi_0(X^T)} t^{\lambda(C)} P_t(C_T) = P_t(BT)\left(\sum_C t^{\lambda(C)} P_t(C)\right) ,$$

car T agit trivialement sur C . D'après les inégalités de Morse "ordinaires", on a donc $P_t^T(X) \geq P_t(BT)P_t(X)$, d'où l'égalité. Notons que Φ_β est aussi parfaite au sens ordinaire. ■. ■

4. APPLICATIONS À LA GÉOMÉTRIE KÄHLÉRIENNE ET À LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE (D'APRÈS F.C. KIRWAN, [Ki])

En géométrie symplectique, la stratification de Morse de la fonction $f = \|\Phi\|^2$ n'est pas définie de manière intrinsèque : elle dépend du choix d'une métrique adaptée à f (qui ne provient pas nécessairement d'une structure presque complexe sur X). Lorsque X est Kälhérienne, et que l'action de K est induite par une action $\mathbb{C}$-analytique de son complexifié $G = K_{\mathbb{C}}$, la métrique de Kähler est adaptée à f ; les strates sont alors analytiques, G-invariantes. Enfin, dans le cas d'une action linéaire sur une variété projective, la stratification de Morse de f est algébrique, et on peut la décrire dans le cadre de la théorie des invariants géométriques de Hilbert - Mumford. En particulier, la strate associée à la valeur critique 0 coïncide avec l'ouvert des points semi-stables (au sens de Mumford) pour l'action $G = K_{\mathbb{C}}$ sur X , ce qui permet de calculer les nombres de Betti de certains espaces quotients en géométrie algébrique (pour des exemples, voir § 5).

Géométrie Kählérienne

Soit G un groupe réductif, complexifié d'un groupe de Lie compact connexe K, et X une variété Kählérienne connexe compacte sur laquelle G agit analytiquement. On peut toujours supposer que K respecte la forme de Kähler sur X ; on demande en outre que l'action de K sur X soit hamiltonienne, d'application moment $\Phi : X \longrightarrow \underline{k}^*$. Ayant fixé un produit scalaire euclidien K-invariant sur $\underline{k}$, on pose $f = \|\Phi\|^2$.

Choisissons un tore maximal $T \subset K$, et une chambre de Weyl $\underline{t}_+ \subset \underline{t}$. Comme dans la section précédente, on note $\mathcal{B}_T$ l'ensemble des combinaisons minimales de poids de l'action de T sur X , $\mathcal{B} = \mathcal{B}_T \cap \underline{t}_+$, et pour tout $\beta \in \mathcal{B}$, on pose

$$Z_\beta = X^{T_\beta} \cap \Phi_\beta^{-1}(\|\beta\|^2) = Cr(\Phi_\beta) \cap \Phi_\beta^{-1}(\|\beta\|^2) \ ,$$

$$Y_\beta = \text{la strate de Morse de } \Phi_\beta \text{ associée à } Z_\beta \ .$$

Comme Φ_β est une fonction non dégénérée au sens de Bott, on a une rétraction lisse $p_\beta : Y_\beta \longrightarrow Z_\beta$. Le groupe $\mathrm{Stab}\,\beta$, stabilisateur de β dans K , agit symplectiquement sur Z_β et $\Phi - \beta_{|Z_\beta} : Z_\beta \longrightarrow \underline{\mathrm{stab}}\,\beta$ est une application moment pour cette action. Soit $f_\beta = \|\Phi - \beta\|^2{}_{|Z_\beta}$, et soit Z_β^{ss} la strate de Morse de f_β correspondant à la valeur critique 0 , et $Y_\beta^{ss} = p_\beta\ (Z_\beta^{ss})$. Enfin, on note P_β le sous-groupe parabolique de G associé à β . On a

$P_\beta = \{g \in G | \lim_{t \to -\infty} \exp(it\beta)\, g \exp(-it\beta) \text{ existe}\}$, et P_β contient le sous-groupe de Borel B associé à la chambre de Weyl $\underline{t}_+$. On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME 5.- *Avec les hypothèses et les notations exposées ci-dessus, la métrique de Kähler sur* X *est adaptée à* f *; les strates* $(S_\beta)_{\beta \in \mathcal{B}}$ *ainsi définies peuvent être caractérisées comme suit :*

1) *pour tout* $\beta \in \mathcal{B}$, $S_\beta = GY_\beta^{ss}$; S_β *est analytique et isomorphe à* $G \times_{P_\beta} Y_\beta^{ss}$.

2) *si* $x \in X$, $\Phi(\overline{Gx}) \cap \underline{t}_+$ *est convexe, et pour tout* $\beta \in \mathcal{B}$, *on a :*
$x \in S^\beta \Longleftrightarrow \beta$ *est la projection de* 0 *sur* $\Phi(\overline{Gx}) \cap \underline{t}_+$.□

Notons X^{ss} la strate de Morse de f associée à la valeur critique 0 .

COROLLAIRE.- *La formule cohomologique* (F) *s'écrit :*

$$P_t^G(X^{ss}) = P_t(X)P_t(BG) - \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{B} \setminus \{0\} \\ m \in \{0,\dots \dim X\}}} t^{\lambda(\beta,m)} P_t^{\mathrm{Stab}_G \beta}(Z_{\beta,m}^{ss}) \ .$$

Si, de plus, (R) *est vérifiée, (i.e.* 0 *est valeur régulière pour* Φ *), la réduction de Marsden-Weinstein* $\Phi^{-1}(0)/K$ *est homéomorphe à* X^{ss}/G *, et on a alors* $P_t(X^{ss}/G) = P_t^G(X^{ss})$. □

Esquisse de démonstration

Elle repose sur la remarque : $\mathrm{grad}\,\Phi_\beta = i\xi_{\Phi_\beta} = i\xi_X$. On a donc

$Y_\beta = \{y \in X \mid \lim_{t\to-\infty} (\exp it\beta)y \in Z_\beta\}$. Comme Z_β est analytique, Y_β l'est aussi, ainsi que la rétraction $p_\beta : Y_\beta \longrightarrow Z_\beta$.

Il résulte de la définition de P_β que Y_β et Y_β^{ss} sont P_β-invariants. Or il est bien connu en théorie des groupes réductifs que $G = KB$ et $P_\beta = B\,\mathrm{Stab}\,\beta$. Donc $KY_\beta = GY_\beta$ est analytique au voisinage de C_β , ce qui implique que la métrique de Kähler est adaptée à f . On a pour tout $x \in X$: $(\mathrm{grad}\ f)_x = 2i\Phi(x)_x \in \underline{g}_x$, donc la trajectoire de x sous $-\mathrm{grad}\ f$ est contenue dans Gx . Comme $KY_\beta^{ss} = GY_\beta^{ss}$ est un voisinage de C_β dans KY_β , on en déduit $S_\beta \subset GY_\beta^{ss}$. On a le lemme suivant.

Lemme 1.- *Si* $x \in GY_\beta^{ss}$, β *est l'unique point de norme minimale de* $\Phi(Gx) \cap \underline{t}_+$.□

Si $x \in KY_\beta = GY_\beta$, on a $\|\Phi(x)\|^2 \geq \|\beta\|^2$, avec égalité si et seulement si $\Phi(x) \in K\beta$. Il suffit de montrer : $x \in GY_\beta^{ss} \Longrightarrow \beta \in \Phi(\overline{Gx})$. On se ramène à $x \in Y_\beta^{ss}$, et comme $Gp_\beta(x) \subset Gx$ on peut supposer $x \in Z_\beta^{ss}$. Soit $(x_t)_{t\in\mathbb{R}}$ la trajectoire de x sous $-\mathrm{grad}\ f_\beta$. Elle est contenue dans Gx , donc $\beta = \lim_{t\to-\infty} \Phi(x_t) \in \Phi(\overline{Gx})$.■

Il résulte du lemme que les GY_β^{ss} sont disjoints. On a donc $GY_\beta^{ss} = S_\beta$. Pour la convexité de $\Phi(\overline{Gx}) \cap \underline{t}_+$, que nous n'utilisons pas, voir [Ki].

On a une application analytique surjective

$$\bar{\sigma} : G \underset{P_\beta}{\times} Y_\beta^{ss} \longrightarrow S_\beta \ .$$

Il suffit de montrer que $\bar{\sigma}$ est injective, ce qui découle du lemme suivant.

Lemme 2.- *Soit* $y \in Y_\beta^{ss}$. *Alors* $\{g \in G \mid gy \in Y_\beta^{ss}\} = P_\beta$. □

Soit $g \in G$ tel que $gy \in Y_\beta^{ss}$. La décomposition de Bruhat $G = BN_K(T)B$ permet de supposer : $g \in N_K(T)$. Soit Φ_T (projection de Φ sur $\underline{t}$) l'application moment pour l'action de T sur X , et $f_T = \|\Phi_T\|$; pour $\beta \in \mathcal{B}_T$ soit $S_{\beta,T}$, la strate de Morse associée. On a : $S_0 \subset S_{0,T}$ (car $S_{\beta,T} \subset T_{\mathbb{C}}Y_\beta = Y_\beta \subset GY_\beta = \overline{S}_\beta$), et en particulier $Z_\beta^{ss} \subset Z_{\beta,T}^{ss}$ et $Y_\beta^{ss} \subset Y_\beta^{ss}$. En appliquant le lemme 1 à l'action de $T_{\mathbb{C}}$ sur X , on a $y, gy \in Y_{\beta,T}^{ss}$ donc β est l'unique point de norme minimale de $\Phi_T(\overline{T_{\mathbb{C}}y})$ et de $\Phi_T(\overline{T_{\mathbb{C}}gy}) = g\Phi_T(\overline{T_{\mathbb{C}}y})$ (car $g \in N_K(T)$), d'où $\beta = g\beta$ et $g \in \mathrm{Stab}\,\beta \subset P_\beta$ ■. D'où le théorème ■.

Pour le corollaire, remarquer que $K \hookrightarrow G$ est une équivalence d'homotopie, et que l'application $\Phi^{-1}(0)/K \longrightarrow X^{ss}/G$ est continue, surjective. On montre facilement qu'elle est injective. Si (R) est satisfaite, elle est bicontinue car l'application $\Phi^{-1}(0) \times \underline{k} \longrightarrow X^{ss}$, $(x,a) \longmapsto \exp ia\,.\,x$ est alors un difféomorphisme local au voisinage de $\Phi^{-1}(0) \times \{0\}$ ■.

Géométrie algébrique

Soit k un corps algébriquement clos. Les schémas et les morphismes sont définis sur k . Soit G un groupe réductif agissant sur une variété projective

$X \subset \mathbb{P}^n$. On peut sans perte de généralité supposer $G \subset GL(n+1,k)$ [1].

En utilisant des travaux de Kempf et Hesselink ([K],[H]), Kirwan construit dans cette situation une stratification $(S_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ de X qui coïncide avec la stratification de Morse de f lorsque $k = \mathbb{C}$ et X est lisse.

Soit $Y(G)$ l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de G . Si $x \in X$, choisissons $x^* = (x_0,x_1,..x_n) \in K^{n+1}\setminus\{0\}$ tel que $x = (x_0:x_1:\ldots:x_n)$.

DÉFINITION (Hesselink).- *Si* $x \in X$ *et* $\lambda \in Y(G)$ *, on appelle* mesure d'instabilité de x le long de λ *, et on note* $m(x;\lambda)$ *, l'ordre d'annulation en* 0 *de* $k^* \ni z \longmapsto \lambda(z) . x^* \in K^{n+1}$

Pour calculer $m(x;\lambda)$, remarquer que pour tout $g \in G$, $m(x;g\lambda g^{-1}) = m(gx;\lambda)$. On peut donc supposer : $\lambda(z) = \mathrm{diag}(z^{r_0}, \ldots z^{r_n})$. Alors $m(x;\lambda) = \inf\{r_j | s_j \neq 0\}$. Mumford a démontré ([M]) :

$$x \in X^{ss} \Longleftrightarrow \forall\lambda \in Y(G), m(x;\lambda) = 0 .$$

Soit $M(G)$ le quotient de $Y(G) \times \mathbb{N}^*$ par la relation d'équivalence : $(\lambda,m) \sim (\mu,n) \Longleftrightarrow \lambda^n = \mu^m$. Si T est un tore de dimension r , on a $Y(T) \simeq \mathbb{Z}^r$ et $M(T) \simeq \mathbb{Q}^r$. Le groupe G opère sur $M(G)$ par conjugaison, et on peut définir $m(x;\lambda)$ pour $x \in X$ et $\lambda \in M(G)$ de telle sorte qu'on ait $m(x;\lambda^q) = qm(x;\lambda)$ pour tout $q \in \mathbb{Q}_+$.

On appelle *norme sur* $M(G)$ toute application G-invariante $q : M(G) \longrightarrow \mathbb{Q}$ telle que pour tout tore $T \subset G$, la restriction de q à $M(T)$ soit une forme quadratique positive non dégénérée.

Fixons une norme sur $M(G)$. Pour tout $x \in X$, on définit :

$$q_G(x) = \sup\{q(\lambda) \mid \lambda \in M(G) \text{ et } m(x;\lambda) \geq q(\lambda)\}$$

$$\Lambda_G(x) = \{\lambda \in M(G) \mid m(x;\lambda) = q(\lambda) = q_G(x)\} .$$

On a donc $x \in X^{ss} \Longleftrightarrow q_G(x) = 0 \Longleftrightarrow \Lambda_G(x) = \{0\}$.

Exemple.- Supposons G = un tore T de dimension r . La représentation de T dans k^{n+1} se décompose en une somme de caractères $\alpha_0, \alpha_1, ..\alpha_n \in X(T)$ appelés poids de l'action de T sur $\mathbb{P}^n$. On a $X(T) = Y(T)^* \subset M(T)^* \simeq M(T)$ donc on considère les poids $\alpha_0, \ldots \alpha_n$ comme des éléments de $M(T) \simeq \mathbb{Q}^r$.

Soit $\mathcal{B}_T$ l'ensemble des combinaisons minimales de poids.

Par conjugaison, on peut supposer pour tout $t \in T$ et tout $x \in X$:

$$\text{(D)} \qquad t.(x_0 : \ldots : x_n) = (\alpha_0(t)x_0 : \ldots : \alpha_n(t)x_n) .$$

Si $x \in X$, soit $\beta(x)$ la projection de 0 sur $\mathrm{Conv}\{\alpha_i | x_i \neq 0\}$.

Alors $\beta(x) \in \mathcal{B}_T$, et on a

---

[1] En effet, si X n'est contenu dans aucun hyperplan de $\mathbb{P}^n$, il existe un revêtement fini G' de G dont l'action sur X est linéaire. L'action sur X de l'image de G' dans $GL(n+1,k)$ est essentiellement la même que celle de G .

$$\Lambda_T(x) = \{\beta(x)\} \quad \text{et} \quad q_T(x) = q(\beta(x)) \ .$$

(soit en effet $\beta = \beta(x)$ et $I = \{i | x_i \neq 0\}$. Alors $m(x;\lambda) = \inf_{i \in I} \alpha_i . \lambda$, donc si $m(x;\lambda) \geq \lambda^2$ on a : $\forall i \in I$, $\alpha_i \lambda \geq \lambda^2$. D'où $\beta . \lambda \geq \lambda^2$. On a $\beta^2 - \lambda^2 = (\beta - \lambda)^2 + 2(\lambda . \beta - \lambda^2)$ donc $\beta^2 \geq \lambda^2$, avec égalité si et seulement si $\lambda = \beta$) .

En général, on dit qu'un sous-groupe $H \subset G$ est *optimal* pour $x \in X$ si $q_H(x) = q_G(x)$. Hesselink montre que pour tout $x \in X$ il existe un tore optimal ; en particulier $\Lambda_G(x) \neq \emptyset$.

Pour tout $\lambda \in Y(G)$ soit P_λ le sous-groupe parabolique associé à λ ; on a $P_\lambda = \{g \in G | \lim_{z \to 0} \lambda(z) g \lambda(z)^{-1}$ existe $\}$; pour $\lambda \in M(G)$, on définit P_λ de telle sorte qu'on ait $P_{q\lambda} = P_\lambda$ pour tout $q \in \mathbb{Q}_+^*$

Lemme (Hesselink).- Pour tout $x \in X$ *, on a*

1) P_λ *est indépendant de* $\lambda \in \Lambda_G(x)$ *; on le note* $P(x)$ *,*

2) $\Lambda_G(x)$ *est une* $P(x)$*-orbite contenue dans* $M(P(x))$ *, et pour* $g \in G$ *,* $g . \Lambda_G(x) \cap \Lambda_G(x) \neq \emptyset \Rightarrow g \in P(x)$. □ ([H]) ■.

La stratification.- Fixons un tore maximal $T \subset G$ et une chambre de Weyl $\underline{t}_+ \subset M(T)$. Soit $\mathcal{B}_T$ l'ensemble des combinaisons minimales de poids de l'action de T sur $\mathbb{P}^n$, et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_T \cap \underline{t}_+$. Pour tout $\beta \in \mathcal{B}$, posons $S_\beta = \{x \in X | \Lambda_G(x) \subset G\beta\}$.

On a donc : $X^{ss} = S_0$ si $0 \in \mathcal{B}$, $\emptyset$ sinon.

PROPOSITION 6.- *Les* $(S_\beta)_{\beta \in \mathcal{B}}$ *constituent une stratification de* X *, l'ordre sur les strates étant défini par :* $\beta < \beta' \Leftrightarrow q(\beta) < q(\beta')$. □

Il résulte du lemme que les S_β non vides constituent une partition G-invariante. Supposons comme dans l'exemple que T agit diagonalement par la formule (D), et soit pour tout $\beta \in \mathcal{B}$

$$W_\beta = \{x \in X \,|\, \alpha_i . \beta < \beta^2 \Rightarrow x_i = 0\} \ .$$

On montre aisément que W_β est invariant par P_β . On a $\beta \in \Lambda_G(x) \Rightarrow x \in W_\beta$ donc $S_\beta \subset GW_\beta$. Comme G/P_β est complet, GW_β est fermé dans X . On a donc $\overline{S_\beta} \subset GW_\beta$. Il suffit donc de montrer : $W_\beta \subset S_\beta \cup \bigcup_{\beta' > \beta} S_{\beta'}$. Pour $x \in W_\beta$, on a soit $\beta(x) = \beta$, soit $\beta(x)^2 \geq \beta^2$, donc $x \in S_\beta \cup \bigcup_{\beta' > \beta} S_{\beta'}$. ■

Autre description de la stratification

Choisissons $T \subset \mathrm{Diag}(n+1)$, de telle sorte que son action sur X vérifie la formule (D). Pour tout $\beta \in \mathcal{B}$, posons :

$Z_\beta = \{x \in X \,|\, x_j = 0$ si $\alpha_j . \beta \neq \beta^2\}$ (réunion des composantes connexes de X^T associées au poids β)

$$Y_\beta = \{x \in X \mid x_j = 0 \ \text{pour} \ \alpha_j . \beta < \beta^2 \ \text{et} \ \exists j \ \text{tel que} \ \alpha_j . \beta = \beta \ \text{et} \ x_j \neq 0\}$$
$$= \{x \in X \mid \lim_{z \to 0} \beta(z)x \in Z_\beta\} \ ,$$

et définissons $p_\beta : Y_\beta \longrightarrow Z_\beta$ par $p_\beta(x) = \lim_{z \to 0} \beta(z)x = x'$, avec $x'_j = x_j$ si $\alpha_j . \beta = \beta^2$, $x'_j = 0$ sinon.

Soit $Z_\beta^{ss} = \{x \in Z_\beta \mid \beta \in \Lambda_G(x)\}$ et $Y_\beta^{ss} = p_\beta^{-1}(Z_\beta^{ss})$.

THÉORÈME 6.- *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, on a :*

1) *pour tout* $\beta \in \mathcal{B}$, $S_\beta = GY_\beta^{ss}$;

2) *si de plus* X *est lisse, il en va de même pour* Z_β , *et* p_β *est une fibration localement triviale en espaces affines. En outre,* S_β *est isomorphe à* $G \times_{P_\beta} Y_\beta^{ss}$, *donc lisse* . □

Remarque.- Soit $k = \mathbb{C}$, et G le complexifié d'un sous-groupe compact connexe K de $U(n+1)$. Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ une variété projective lisse sur laquelle opère G , et soit $\Phi : X \longrightarrow \underline{k}^*$ l'application moment naturelle pour l'action de K sur X . Fixons un produit scalaire euclidien K-invariant sur $\underline{k}$, ce qui définit une norme sur $M(G)$. Soit T un tore maximal de K contenu dans $\mathrm{Diag}(n+1)$, $\underline{t}_+$ une chambre de Weyl de $\underline{t}$, et $\mathcal{B}$ l'ensemble des combinaisons minimales de poids de l'action de T sur X contenues dans $\underline{t}_+$. Pour tout $\beta \in \mathcal{B}$, les ensembles Z_β et Y_β introduits p. 16 coïncident avec ceux que nous venons de définir. Soit $f = \|\Phi\|^2$ et $(S_\beta^f)_{\beta \in \mathcal{B}}$ la stratification de Morse de f . Il résulte du théorème 5 et du théorème 6 : $\bar{S}_\beta^f = \bar{S}_\beta$, donc $(S_\beta)_{\beta \in \mathcal{B}}$ est la stratification de Morse de f .

Esquisse de démonstration

1) Soit $y \in Y_\beta^{ss}$, et supposons $y \in S_{\beta'}$. Alors $p(y) \in X_\beta^{ss} \subset S_\beta$, et $p_\beta(y) \in Gy \subset \bar{S}_{\beta'}$; donc $\beta' \leq \beta$. D'autre part, $y \in Y_\beta \subset W_\beta \subset \bigcup_{\beta' \geq \beta} S_{\beta'}$, donc $\beta' = \beta$, et $Y_\beta^{ss} \subset S_\beta$. On a donc $GY_\beta^{ss} \subset S_\beta$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $y \in S_\beta$. On peut supposer : $\beta \in \Lambda_G(x)$; alors $\beta = \beta(y)$, ce qui entraîne $y \in Y_\beta$. Soit $x = p_\beta(y)$. On a $x \in \overline{Gy}$ donc $q_G(x) \geq q_G(y)$. D'autre part, il résulte de la définition de p_β que $\beta(x) = \beta(y) = \beta$, donc $\beta \in \Lambda_G(x)$, d'où $x \in Z_\beta^{ss}$ et $y \in Y_\beta^{ss}$. On a donc $S_\beta \subset GY_\beta^{ss}$.

2) L'assertion sur P_β est un théorème de Białynicki - Birula ([B-B]). L'isomorphisme entre S_β et $G \times_{P_\beta} Y_\beta^{ss}$ se démontre de façon standard (*cf*. [Ki]).

Remarque sur le calcul des nombres de Betti d'espaces quotients en géométrie algébrique.- Soit X une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$, et G un groupe réductif, complexifié d'un groupe de Lie connexe compact K , opérant linéairement sur X . Soit X^s l'ouvert des points de X^{ss} dont le stabilisateur est fini.

Lorsque $X^s = X^{ss}$, le corollaire du théorème 5 permet de calculer les nombres de Betti du quotient X^{ss}/G . F.C. Kirwan a mis au point une méthode permettant de calculer les nombres de Betti d'intersection du bon quotient X^{ss}/G dans le cas où X^s est non vide. Par une suite d'éclatements le long de sous-variétés G-invariantes, elle construit de façon naturelle une variété projective lisse $\tilde{X}$ sur laquelle G opère linéairement, ainsi qu'un G-morphisme birationnel $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ de telle sorte qu'on ait :

$$\tilde{X}^s = \tilde{X}^{ss} = \pi^{-1}(X^{ss}) .$$

On peut donc calculer les nombres de Betti de $\tilde{X}^{ss}/G$, et une formule explicite permet d'en déduire les nombres de Betti d'intersection de X^{ss}/G ([Ki2]).

5. EXEMPLES DE CALCULS DE NOMBRES DE BETTI D'ESPACES QUOTIENTS EN GÉOMETRIE ALGÉBRIQUE

1) *Un exemple simple traité en détail*

Soit $G = SL(2,\mathbb{C})$ opérant diagonalement sur $X = (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n$, avec $n \geq 1$. Alors $G = K_{\mathbb{C}}$, avec $K = SU(2)$. Lorsqu'on identifie $\underline{k}^*$ à $\mathbb{R}^3$ euclidien et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ à $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, S^2 est une orbite de la représentation co-adjointe de K , d'où l'application moment :

$$\Phi : (S^2)^n \longmapsto \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, .. x_n) \longmapsto x_1 + ... + x_n$$

pour l'action de K sur X . Ainsi 0 est valeur régulière pour Φ si et seulement si n est impair. On a $f(x_1 , .. x_n) = ||x_1 + ... + x_n||^2$ et les points critiques de f sont les n-uplets de somme nulle et les n-uplets dont les composantes $x_1 , ... x_n$ sont choisies parmi deux points antipodaux de S^2 . Soit T le tore maximal $T = \left\{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \bar{\alpha}\end{pmatrix}, |\alpha| = 1\right\}$. Alors X^T est l'ensemble des n-uplets polaires (i.e. dont chaque composante est un pôle de S^2). En identifiant $\underline{t}$ à $\mathbb{R}$ et en choisissant pour chambre de Weyl $\mathbb{R}_+$, on obtient les poids de l'action de T sur X : $-n , -n+2 , .. +n$ et 0 ; et $\mathcal{B} = \{0 , 1 , 3 , ... n\}$ si n est impair, $\{0 , 2 , .. n\}$ si n est pair. On a $C_0 = \{(x_1 , .. x_n) \mid x_1 + ... + x_n = 0\}$ et pour $\beta \in \mathcal{B}\setminus\{0\}$, $C_\beta = \{(x_1 , .. x_n) \mid \frac{n+\beta}{2}$ composantes coïncident, les autres coïncident avec le point antipodal$\}$. La strate S_β est alors l'ensemble des n-uplets dont $(n+\beta)/2$ composantes coïncident, mais pas davantage ; et $S_0 = X^{ss}$ est l'ensemble des n-uplets dont au plus $n/2$ composantes coïncident. L'ensemble X^T est constitué des n-uplets polaires, et $X^T \cap \Phi^{-1}(\beta)$ est l'ensemble des n-uplets formés de $(n+\beta)/2$ pôles Nord et $(n-\beta)/2$ pôles Sud. L'indice de f le long de C_β vaut $n+\beta$, d'où la formule cohomologique :

$$P_t^K(X^{ss}) = P_t(X)\, P_t(BSU(2)) - \sum_{\beta\in\mathcal{B}\setminus\{0\}} \binom{n+\beta}{2}\, t^{n+\beta} P_t(BS^1) .$$

Lorsque n est impair, on obtient

$$\dim H^{2i}(X^{ss}/G;\mathbb{Q}) = \sum_{j=0}^{\inf(i,n-3-i)} \binom{n-1}{j} .$$

Lorsque n est pair, la remarque de la p. 20 permet de calculer les nombres de Betti d'intersection de X^{ss}/G, qui sont donnés par la même formule.

On peut calculer de même les nombres de Betti d'intersection de $(\mathbb{P}^{2g+2})^{ss}/SL(2,\mathbb{C})$, qui est un complété de l'espace des modules des courbes hyperelliptiques de genre $g \geq 2$.

2) *Espace de Modules des surfaces algébriques* $K-3$ *de degré* 2

J. Shah a montré que K_2, espace de modules des surfaces algébriques $K-3$ de degré 2 (c'est-à-dire admettant un fibré en droites ample de degré 2), admet le complété :

$$\overline{K}_2 = \text{l'éclaté de } \{\text{courbes de degré 6 dans } \mathbb{P}^2\}^{ss}/SL(3,\mathbb{C}) \text{ au point } (xy+z^2)^3 = 0 .$$

F.C. Kirwan et R. Lee ont calculé les nombres de Betti de K_2 jusqu'à la dimension $16 = \dim K_2/2$ et on obtenu des inégalités au-delà. [Ki-L].

3) *Espace de Modules de fibrés vectoriels stables sur une surface de Riemann*

Soit M une surface de Riemann de genre g, et pour tout $(r,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, soit $\mathfrak{M}(r,d)$ l'espace de modules des fibrés semi-stables de rang r et de degré d sur M. On suppose r et d premiers entre eux et $d > r(2g-1)$. Posons $N = d+r(1-g)$. Alors $\mathfrak{M}(r,d)$ est isomorphe à X^{ss}/G, où X est le schéma des morphismes de degré d de M dans la grassmannienne $Gr(p,N)$ des quotients de $\mathbb{C}^N$ de dimension p, et $G = SL(N,\mathbb{C})$.

Bien que X ne soit pas projectif, mais seulement quasi-projectif, F.C. Kirwan parvient (en adaptant sa méthode au moyen de résultats de G. Segal) à retrouver la formule de récurrence permettant de calculer les nombres de Betti de $\mathfrak{M}(r,d)$. ([Ki3]). Cette formule avait été obtenue par Atiyah et Bott ([A-B]) en appliquant la théorie de Morse équivariante à la fonctionnelle de Yang-Mills sur un certain espace de dimension infinie (la fonctionnelle de Yang-Mills peut être considérée comme l'analogue de la fonction $f = \|\Phi\|^2$).

6. QUELQUES AUTRES RÉSULTATS RÉCENTS

Théorème de la phase stationnaire de Duistermaat et Heckman

Soit X une variété symplectique compacte connexe de dimension $2n$, et $\mu = \frac{1}{n!}\omega_X^n$ la mesure de Liouville sur X. Considérons une action hamiltonienne d'un tore T sur X, avec application moment $\Phi : X \longrightarrow \underline{t}^*$. Il résulte du théorème 2 que l'ensemble C des valeurs critiques de Φ est une réunion finie de polyèdres convexes d'intérieur vide dont les sommets sont des poids de l'action de T sur X. La mesure $\Phi_*\mu$ a pour support un polyèdre convexe, et elle admet sur $\underline{t}^* \smallsetminus C$ une densité $\mathcal{C}^\infty$ f. Duistermaat et Heckman ont montré que f est polynomiale de degré $\leq n-1$ sur chaque composante connexe de $\underline{t}^* \smallsetminus C$ (pour $\xi \in \underline{t}^* \smallsetminus C$,

$f(\xi)$ est la mesure totale de la réduction de Marsden-Weinstein $\Phi^{-1}(\xi)/T$. Ils en ont déduit que les composantes de Φ vérifient le lemme de la phase stationnaire avec reste nul. Plus précisément, soit $\beta \in \underline{t}$ et supposons pour simplifier que $Cr(\Phi_\beta) = X^{T_\beta}$ est fini. Alors on a :

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_X e^{i\Phi_\beta}\mu = \sum_{p \in X^{T_\beta}} c(p) e^{i\Phi_\beta(p)}$$

où $c(p) = |\det H_{\Phi_\beta}(p)|^{-1/2} \exp\left\{i \frac{\pi}{2}(n - \mathrm{Ind}\, H_{\Phi_\beta}(p))\right\}$.

Outre la démonstration de [D-H] (1982), on trouvera une démonstration du cas général dans [D-H1] (1983). Une démonstration élémentaire de N. Berline et M. Vergne ([B-V]) est reprise dans [G-S].

Atiyah et Bott [A-B1] ont mis en évidence les rapports entre le théorème de la phase stationnaire de Duistermaat et Heckman, et les "théorème de localisation" en cohomologie équivariante.

Application moment généralisée

Un groupe algébrique G opérant sur une variété algébrique X (le tout sur un corps algébriquement clos k), pour quels ouverts G-invariants U de X existe-t-il un bon quotient, voire un quotient géométrique, U/G ?

Lorsque X est projective et l'action de G linéaire, la théorie des invariants géométriques fournit des éléments de réponse : l'ouvert X^{ss} des points semi-stables admet un bon quotient X^{ss}/G, et l'ouvert X^s des points stables admet un quotient géométrique X^s/G.

A. Białynicki-Birula, A.J. Sommese et J. Święcicka se sont intéressés au cas où X est une variété complète. Bialynicki-Birula et Święcicka ont introduit une notion d'application moment généralisée qui permet, dans une certaine mesure, d'étendre les résultats de la théorie des invariants géométriques à cette situation plus générale.

Soit k un corps algébriquement clos, X une variété algébrique complète normale sur k, sur laquelle opère un tore T de dimension r. Notons $Y(T)$ le groupe des sous-groupes à un paramètre de T, $X(T)$ le groupe des caractères de T, et $X_{\mathbb{R}}(T) = X(T) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{R}$.

Soit $X_1, \dots X_n$ les composantes connexes de X^T. Pour tout $c \in Y(T)$, on définit un ordre $<_c$ sur $\{X_1, \dots X_n\}$ comme suit. Soit X^c le lieu des points fixes de $c(k^*)$ dans X. Alors $X_i <_c X_j$ si et seulement si il existe une suite finie $Z_0, Z_1, \dots Z_m$ de composantes connexes de X^c et des points $x_1, \dots x_m \in X \smallsetminus X^c$ vérifiant : $X_i \subset Z_0$, $X_j \subset Z_m$ et pour $i = 1, 2, \dots m$, $\lim\limits_{t\to 0} c(t)x_i \in Z_{i-1}$ et $\lim\limits_{t\to\infty} c(t)x_i \in Z_i$.

DÉFINITION.- *On appelle* application moment généralisée pour l'action de T sur X *toute application* $\Phi : \{X_1, \dots X_n\} \longrightarrow X_{\mathbb{R}}(T)$ *vérifiant pour tout* $c \in Y(T)$:

a) *si* $X_i <_c X_j$ *alors* $\mathrm{sgn}\, \langle c,\Phi(X_i)\rangle \leq \mathrm{sgn}\, \langle c,\Phi(X_j)\rangle$ *et l'un des deux signes est non nul.*

b) *si* X_i *et* X_j *sont inclus dans la même composante connexe de* X^c *, alors* $\mathrm{sgn}\, \langle c,\Phi(X_i)\rangle = \mathrm{sgn}\, \langle c,\Phi(X_j)\rangle$.

Etant donnée une application moment généralisée $\Phi : \{X_1 , .. X_n\} \longrightarrow X_{\mathbb{R}}(T)$, on définit :

$$X_{\Phi}^{ss} = \{x \in X \ ; \ 0 \in \mathrm{Conv}\{\Phi(X_i) \ ; \ X_i \cap \bar{T}_x \neq \emptyset\}\}$$

$$\text{et} \quad X_{\Phi}^{s} = \{x \in X \ ; \ 0 \in \mathrm{Int}\{\mathrm{Conv}\, \Phi(X_i) \ ; \ X_i \cap \bar{T}_x \neq \emptyset\}\} .$$

Exemple.- Supposons X projective et l'action de T linéaire. Pour tout $i = 1 , \ldots n$, soit α_i le poids associé à la composante X_i de X^T . Posons $\Phi(X_i) = \alpha_i$; alors Φ est une application moment généralisée pour l'action de T sur X . On reconnaît à peine l'application moment usuelle, ainsi réduite à sa plus simple expression combinatoire. On a cependant $X_{\Phi}^{ss} = X^{ss}$ et $X_{\Phi}^{s} = X^{s}$.

Białynicki - Birula et Święcicka montrent le théorème suivant.

THÉORÈME 7.- *Soit* T *un tore opérant sur une variété algébrique complète normale* X *, et soit* Φ *une application moment généralisée pour cette action. Alors* X_{Φ}^{ss} *et* X_{Φ}^{s} *sont ouverts,* T*-invariants, et il existe un bon quotient* $\Phi : X_{\Phi}^{ss} \longrightarrow X_{\Phi}^{ss}/T$, *où* X_{Φ}^{ss}/T *est une variété complète normale.*

De plus, $\alpha_{|X_{\Phi}^{s}} : X_{\Phi}^{s} \longrightarrow \alpha(X_{\Phi}^{s}) \subset X_{\Phi}^{ss}/T$ *est un quotient géométrique.* □ ([BB - S]) ∎ .

Si G est un groupe réductif opérant sur X , soit $T \subset G$ un tore maximal et Φ une application moment généralisée pour l'action de T sur X . Posons

$$X_{G,\Phi}^{ss} = \bigcap_{g \in G} gX_{\Phi}^{ss}$$

$$\text{et } X_{G,\Phi}^{s} = \bigcap_{g \in G} gX_{\Phi}^{s} .$$

Alors, il existe un quotient géométrique $X_{G,\Phi}^{s}/G$, mais l'existence d'un bon quotient $X_{G,\Phi}^{ss}/G$ reste conjecturale. ([BB - S]).

BIBLIOGRAPHIE

[A] M.F. ATIYAH - *Convexity and commuting Hamiltonians*, Bull. London Math. Soc. 14, 1-15 (1982).

[A-B] M.F. ATIYAH et R. BOTT - *The Yang - Mills equation over Riemann surfaces*, Phil. Trans. Royal Soc. London, A 308, 523-615 (1982).

[A-B1] M.F. ATIYAH et R. BOTT - *The moment map and equivariant cohomology*, Topology, 23, n° 1, 1-28 (1984).

[B-V] N. BERLINE et M. VERGNE – *Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes*, Duke Math. Journal 50, N° 2, 539-549 (1983)

[BB] A. BIAŁYNICKI-BIRULA – *Some theorems on actions of algebraic groups*, Annals of Math. 98, 480-497 (1973).

[BB-S] A. BIAŁYNICKI-BIRULA et J. ŚWIĘCICKA – *Generalized moment functions and orbit spaces*, Preprint.

[D-H],[D-H1] J.J. DUISTERMAAT et G.J. HECKMAN – *On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space*, et addendum, Invent. Math. 69, 259-268 (1982) et 72, 153-158 (1983).

[G-S] V. GUILLEMIN et S. STERNBERG – *Symplectic techniques in physics*, Cambridge University Press (1984).

[G-S1],[G-S2] V. GUILLEMIN et S. STERNBERG – *Convexity properties of the moment mapping* I et II, Invent. Math. 67, 491-513 (1982) et 77, 533-546 (1984).

[H] W.H. HESSELINK – *Uniform instability in reductive groups*, J. Reine Angew. Math. 304, 74-96 (1978).

[K] G. KEMPF – *Instability in invariant theory*, Ann. Math. 108, 299-316 (1978).

[Ki] F.C. KIRWAN – *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Princeton University Press, Mathematical Notes 31(1984).

[Ki1] F.C. KIRWAN – *Convexity properties of the moment mapping* III, Invent. Math. 77, 547-552 (1984).

[Ki2] F.C. KIRWAN – *Partial desingularisations of quotients of non singular varieties and their Betti numbers*, preprint soumis à Ann. Math.

[Ki3] F.C. KIRWAN – *On spaces of maps from Riemann surfaces to Grassmannians and applications to the cohomology of moduli of vector bundles*, preprint soumis à Acta. Math.

[Ki-L] F.C. KIRWAN et R. LEE – Article en préparation.

[M-W] J. MARSDEN et A. WEINSTEIN – *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Reports on Math. Phys. 5, 121-130 (1974).

[M] D. MUMFORD – *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag (1965). Seconde édition : D. MUMFORD et J. FOGARTY (1982).

Alain BRUGUIÈRES

Université de Paris 7
U.E.R. de Mathématiques
Tour 45-55, 5e étage
2 place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05