Astérisque

JEAN PIERRE BOURGUIGNON

L'équation de la chaleur associée à la courbure de Ricci

Astérisque, tome 145-146 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 653, p. 45-61
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1985-1986__28__45_0>

Séminaire BOURBAKI
38 ème année, 1985/1986, n°653 Novembre 1985

L'ÉQUATION DE LA CHALEUR ASSOCIÉE A LA COURBURE DE RICCI
(d'après R.S. Hamilton)

Jean Pierre BOURGUIGNON

Sur une variété différentielle compacte, il est souvent important de pouvoir disposer de métriques riemanniennes spéciales afin d'en déduire des propriétés (par exemple topologiques) de la variété. Partant d'une métrique satisfaisant éventuellement à certaines conditions, on peut *essayer de déformer cette métrique pour la rendre plus spéciale.* Cette méthode a été utilisée avec succès à de nombreuses reprises :

- *soit de façon infinitésimale* (par exemple dans [2] et [17], il est prouvé que, si une variété a une métrique à courbure de Ricci non négative et positive en au moins un point, elle admet aussi une métrique à courbure de Ricci positive et par suite a un groupe fondamental fini ; le résultat [18] que nous mentionnons plus tard utilise aussi cette méthode) ;
- *soit de façon finie* (le fameux article [34], considéré par son auteur comme une étape pour prouver la conjecture de Poincaré en dimension 3 par une méthode riemannienne, se proposait par une déformation conforme de métriques de construire des métriques à courbure scalaire constante ; après de nombreuses années de travail, grâce à [3] complété par [31], on croit savoir aujourd'hui que le résultat est vrai ; un autre exemple : dans [1], repris dans [19], l'existence sur toute variété compacte de dimension au moins 3 d'une métrique à courbure scalaire négative constante est obtenue par une déformation définie globalement sur la variété).

Dans [22] (une extension de [21]), R.S. Hamilton prouve l'important résultat suivant :

THÉORÈME 1 (cf [22]).– *Toute variété compacte de dimension* 3 *à courbure de Ricci positive ou nulle est difféomorphe à un quotient de S^3, de $S^2 \times \mathbf{R}$ ou de $\mathbf{R}^3$ par un groupe d'isométries de leur métrique standard sans point fixe.*

Dans cette direction, le seul résultat connu auparavant est contenu dans [18] où il est montré qu'une telle variété a une métrique à courbure sectionnelle positive dès qu'elle en admet une à courbure de Ricci positive et à courbure sectionnelle positive ou nulle.

Sur les surfaces compactes, le résultat analogue est une conséquence facile du théorème de

Gauss-Bonnet. Il ne peut se généraliser tel quel en dimension plus grande car, dès la dimension 4, il y a de nombreux exemples de variétés à courbure de Ricci positive (comme $S^2 \times S^2, \mathbf{C}P^2$ et les variétés obtenues à partir de lui en éclatant au plus 7 points en position générale). Les généralisations de ce résultat aux dimensions plus grandes sont discutées au §6.

Comme on sait par ailleurs (cf [32]) qu'une variété non compacte à courbure de Ricci positive est difféomorphe à $\mathbf{R}^3$ (la preuve utilise une toute autre technique, celle des surfaces minimales), ce théorème ramène la classification différentiable des variétés de dimension 3 à courbure de Ricci positive à celle des espaces à courbure constante positive.

La preuve du théorème s'obtient en *intégrant la courbure de Ricci vue comme champ de vecteurs sur l'espace des métriques riemanniennes* de la variété. R.S. Hamilton montre que, lorsque le temps tend vers l'infini, le flot renormalisé de ce champ de vecteurs converge vers une métrique à courbure constante. Le résultat est en fait plus précis : l'homotopie entre la métrique de départ et la métrique à courbure constante a lieu parmi les métriques à courbure de Ricci positive. La résolution de ce problème est possible parce qu'il peut s'interpréter comme *une équation de la chaleur non linéaire.* On peut noter que, dans [16], J. Eells et J.H. Sampson avaient déjà utilisé une telle équation pour établir l'existence d'une application harmonique entre variétés riemanniennes lorsque la source est compacte et le but à courbure sectionnelle négative. C'était aussi l'approche suivie par A. Inoue pour le problème de Yamabe dans [24].

Plusieurs parties de la preuve donnée dans [21] sont d'intérêt général comme l'existence d'un flot local pour la courbure de Ricci, ou l'utilisation d'un principe du maximum vectoriel. Dans la dernière version du travail d'Hamilton (cf [22]), et aussi dans [27], on trouve une approche intéressante des déformations de métriques dans l'esprit des théories de jauge (nous revenons sur ce point au §2).

Le plan de ce rapport est le suivant :

§1 Une brève introduction à la courbure de Ricci
§2 La courbure de Ricci comme champ de vecteurs sur l'espace des métriques
§3 Existence locale du flot
§4 Un principe du maximum vectoriel
§5 Existence globale du flot et renormalisation
§6 D'autres applications géométriques de la méthode

1. Une brève introduction à la courbure de Ricci

La *géométrie riemannienne* est l'étude des invariants que l'on peut, sur une variété différentielle M de dimension n, déduire de la donnée sur chaque espace tangent d'un produit scalaire g dépendant de façon C^∞ du point (i.e. une section positive du fibré $S^2T^*M \to M$ des 2-tenseurs symétriques). Dans sa leçon inaugurale [29] prononcée en 1854, B. Riemann a montré qu'un certain champ de tenseurs d'ordre 4 mesurait l'écart à la platitude de la métrique g : ainsi était né *le tenseur de courbure de Riemann* que nous notons R^g pour souligner sa dépendance de la métrique. On rappelle qu'en utilisant la métrique g pour considérer R^g comme un tenseur 4 fois covariant, on a, pour tous vecteurs tangents X, Y, V et W, *les relations d'antisymétrie*

$$R^g_{X,Y,V,W} = -R^g_{Y,X,V,W} = -R^g_{X,Y,W,V}$$

ce qui permet de considérer R^g comme un endomorphisme du fibré $\Lambda^2 TM \to M$; c'est *l'opérateur de courbure* que nous notons alors $\hat{R}^g$, (cf par exemple [10] pour plus de détails). Comme R^g vérifie aussi *la première identité de Bianchi* qui, pour tous vecteurs tangents X, Y, V et W, s'énonce

$$R^g_{X,Y,V,W} + R^g_{Y,V,X,W} + R^g_{V,X,Y,W} = 0 \ ,$$

$\hat{R}^g$ est un endomorphisme symétrique dont la décomposition spectrale $\hat{R}^g = \sum_\alpha \rho_\alpha \omega_\alpha \otimes \omega_\alpha$ vérifie la relation supplémentaire $\sum_\alpha \rho_\alpha \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha = 0$. Nous notons $RM \to M$ le fibré des tenseurs ayant les symétries algébriques de la courbure de Riemann. Malgré ces symétries, R^g est en général un objet complexe à cause de son ordre sauf dans deux cas :

- celui des surfaces où il se ramène à la *courbure de Gauss*, fonction dont le caractère intrinsèque (i.e. attaché seulement à la métrique g) constitue le "theorema egregium" de C.F. Gauss (cf [15] pour une présentation avec commentaires) ;
- celui des variétés de dimension 3 où il se ramène à l'étude d'un champ de tenseurs symétrique puisqu'alors $\Lambda^2 T^*M$ est isomorphe à TM (ce point joue un rôle fondamental dans le travail [21] d'Hamilton).

A cause de ces symétries, par contraction de R^g, on ne peut construire qu'un champ de 2-tenseurs (au signe près), ce champ étant de plus symétrique : c'est *la courbure de Ricci* r^g (pour deux vecteurs X et Y, $r^g(X,Y) = Trace(Z \mapsto R^g_{X,Z}Y)$. C'est au début de ce siècle seulement qu'elle a été introduite par G. Ricci-Curbastro (cf [28]), apparemment pour avoir sur une variété riemannienne générale des directions privilégiées en chaque point comme le sont les directions principales de courbure sur une hypersurface de l'espace euclidien. D'une certaine façon, bien que son étude soit aujourd'hui un thème important de recherche en géométrie riemannienne, on peut dire que sa signification géométrique n'est pas encore complètement éclaircie. C'est seulement dans le cas kählérien qu'elle est bien comprise grâce à la solution de la conjecture de Calabi (cf [35], [8], [33] et [6]). Elle s'interprète dans ce cas comme la courbure du fibré des éléments de volume complexe ce qui en fait un représentant de la première classe de Chern du fibré tangent holomorphe. La courbure de Ricci semble jouer des rôles très différents suivant le problème considéré. Nous présentons certains d'entre eux reliés au résultat d'Hamilton (cf [5] pour un autre point de vue).

D'un point de vue purement algébrique, en chaque point m de M, l'espace R_mM des tenseurs de courbure de Riemann est un $O(T_mM)$-module qui se décompose en trois sous-espaces irréductibles dès que $n \geq 4$ (comme nous l'avons mentionné plus haut, les cas $n = 2$ et $n = 3$ sont plus simples et pour eux apparaissent respectivement une et deux représentations). La représentation triviale apparaît une fois et la composante S^g de la courbure suivant cette droite s'écrit $S^g = \frac{1}{n(n-1)} s^g R^c_{S^n}$ où $s^g (= g^{-1}(r^g))$ désigne *la courbure scalaire* de la métrique g (i.e. la trace de la courbure de Ricci) et $R^c_{S^n}$ le tenseur de courbure de la métrique canonique c à courbure sectionnelle constante 1 de la sphère S^n. La deuxième composante irréductible Z^g de R^g est complètement déterminée par la partie à trace nulle z^g de la courbure de Ricci (par définition, $z^g = r^g - \frac{1}{n} s^g g$). Ces deux composantes sont donc déterminées par la courbure de Ricci. La troisième composante W^g est alors *le tenseur de courbure conforme de Weyl.* Le champ de tenseurs $C^g = Z^g + W^g$, qui était appelé *tenseur de courbure concirculaire* au temps où la théorie des invariants était à la mode, mesure donc la déviation de la métrique g à être à courbure sectionnelle constante.

Pour comprendre la courbure de Ricci *d'un point de vue différentiel,* il est utile de travailler dans le cadre de *l'espace* $\mathcal{M}$ *des métriques riemanniennes de la variété* M qui est un cône convexe positif ouvert de l'espace $C^\infty(S^2T^*M)$ des champs de 2-tenseurs symétriques. C'était l'approche de D. Hilbert quand il dérivait les équations d'Einstein de la gravitation du principe variationnel associé au potentiel de gravitation identifié à la courbure scalaire totale $g \mapsto \int s^g v_g$, (où v_g désigne *l'élément de volume* de g) et obtenait comme gradient de ce potentiel *le tenseur d'Einstein* $E^g(r^g) = r^g - \frac{1}{2} g^{-1}(r^g) g$. Le groupe $\mathit{Diff}(M)$ des difféomorphismes de M agit sur $\mathcal{M}$ par image réciproque, et toutes les propriétés géométriques sont invariantes par cette action. Par naturalité, le tenseur de Ricci r^g vérifie la propriété d'équivariance fondamentale

$$r^{\phi^* g} = \phi^*(r^g). \tag{1}$$

Pour mieux comprendre analytiquement la courbure de Ricci, considérons son expression dans un système de coordonnées locales (x^i)

$$(r^g)_{ij} = -\frac{1}{2} g^{ab} \Big(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^a \partial x^b} - \frac{\partial^2 g_{ai}}{\partial x^b \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{aj}}{\partial x^b \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{ab}}{\partial x^i \partial x^j} \Big) + \\ + \textit{ termes quadratiques en les } \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}.$$

où (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}). (Pour des résultats fondamentaux d'existence et de régularité sur la courbure de Ricci, voir [12] et [14]). Les termes de plus haut degré définissent le symbole principal de ce système différentiel du second ordre quasi-linéaire ; dans une direction cotangente ξ et pour un 2-tenseur symétrique h, ce symbole est donné par

$$\mathit{Symb}(\mathit{Ric}(g))_\xi(h) = -\frac{1}{2}\, g(\xi,\xi)\, h' - \frac{1}{2}\, g^{-1}(h')\, \xi \otimes \xi, \tag{2}$$

où $h = \lambda\, \xi \otimes \xi + \xi \odot \xi' + h'$ est la décomposition de h en blocs adaptée à ξ avec $g(\xi, \xi') = 0$ et $h'(\xi, .) = 0$ et où $\odot$ désigne le produit symétrique. Tous les 2-tenseurs de la forme $\xi \odot \eta$ où η est un vecteur quelconque de $T^*_m M$ sont annulés par le symbole, rendant toute direction ξ caractéristique. Ce phénomène s'explique géométriquement de la façon suivante : si on prend une famille de difféomorphismes $(\phi_t)_{t \in I}$ telle que $\phi_0 = Id$ et dont le 1-jet $\frac{d\phi_t}{dt}_{|t=0}$ est le champ de vecteurs X, on peut dériver l'identité (1). On a

$$(T_g \mathit{Ric})(L_X g) = L_X r^g \ ,$$

d'où l'assertion précédente, le membre de droite étant d'ordre 1 en X. On remarque que l'opérateur différentiel $X \mapsto L_X g$ (que nous *notons* ultérieurement 2 δ_g^*) a, dans la direction cotangente ξ, pour symbole l'élément générique du noyau du symbole de Ric $\xi \odot g(X)$.

Comme des métriques appartenant à la même orbite sous le groupe $Diff(M)$ sont géométriquement équivalentes, en un point g de $\mathcal{M}$, il est naturel de décomposer l'espace tangent à $\mathcal{M}$ en espace tangent et normal à l'orbite $Diff(M).g$. L'opérateur δ_g^* ayant un symbole injectif, les sous-espaces apparaissant dans la décomposition

$$T_g\mathcal{M} = C^\infty(S^2T^*M) = Im\ \delta_g^* \oplus Ker\ \delta_g \tag{3}$$

sont fermés de dimension infinie. (Ici δ_g *désigne* l'adjoint formel de l'opérateur δ_g^* ; cet opérateur qui n'est autre que la g-divergence des champs de 2-tenseurs symétriques a pour expression locale $(\delta_g h)_i = -g^{jk}D_j^g h_{ki}$ où D^g est la connexion de Levi-Civita de la métrique g).

Considérons la linéarisation de l'application $Ric : g \mapsto r^g$. Pour un vecteur tangent h en g à $\mathcal{M}$ (i.e. un champ de 2-tenseurs symétriques), on a

$$T_gRic(h) = \frac{1}{2}\Delta_L^g h - \delta_g^*(\delta_g(E^g(h))), \tag{4}$$

où Δ_L^g désigne le laplacien de Lichnerowicz défini en coordonnées locales (x^i) (supposées orthonormées au point m où nous l'évaluons) par

$$(\Delta_L h)_{ij} = -D_kD_kh_{ij} + r_{ik}h_{jk} + r_{jk}h_{ik} - 2R_{ikjm}h_{km}.$$

(Dans la formule, nous avons sommé sur les indices répétés et supprimé la référence à la métrique g pour alléger l'écriture.) Remarquons que transversalement à l'orbite de la métrique g sous $Diff(M)$ (par exemple en restriction à $Ker\ \delta_g$), l'opérateur non-linéaire Ric est elliptique, son linéarisé se réduisant alors à un simple laplacien.

Dans ce cadre, l'expression de la deuxième identité de Bianchi pour la courbure de Ricci s'interprète naturellement.

Rappelons que, pour toute connexion ∇ sur un fibré de base M, la courbure R^∇ qui est une 2-forme sur M à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe structural du fibré vérifie *la deuxième identité de Bianchi* qui, pour des vecteurs tangents X, Y et Z, s'énonce

$$\nabla_X R^\nabla_{Y,Z} + \nabla_Y R^\nabla_{Z,X} + \nabla_Z R^\nabla_{X,Y} = 0. \tag{5}$$

Quand on applique cette formule à la courbure de Riemann R^g obtenue à partir de la connexion de Levi-Civita, on remarque que la courbure prend alors ses valeurs dans un fibré associé au fibré tangent. On peut dans ce cas faire une opération particulière, à savoir prendre la trace de l'identité (5) entre ses variables de forme et ses variables de fibré. Si on fait cette opération deux fois, on trouve

$$\delta_g r^g = -\frac{1}{2}ds^g\ . \tag{6}$$

Cette relation montre que *l'application Ric est surdéterminée.* Elle est directement liée au caractère géométrique (i.e. *Diff*(M)-équivariant) de la courbure de Ricci, car, comme l'avait déjà vu D. Hilbert, elle peut s'écrire $\delta_g E^g(r^g) = 0$ et exprime une loi de conservation, à savoir que le potentiel de gravitation est invariant par l'action des difféomorphismes. Elle joue un rôle très important (et encore un peu mystérieux) dans l'étude de la courbure de Ricci (cf §3 et [13] pour plus de détails).

2. La courbure de Ricci comme champ de vecteurs sur l'espace des métriques

Les considérations précédentes sur la géométrie de $\mathcal{M}$ nous amènent à y considérer *la courbure de Ricci comme un champ de vecteurs.* En fait, sur $\mathcal{M}$, toutes les équations différentielles

$$\frac{dg}{dt} = \alpha r^g + \beta s^g g$$

méritent a priori notre attention, surtout que d'après [9] les champs de vecteurs associés ne sont tangents à l'orbite *Diff*$(M).g$ que si la courbure de Ricci est un multiple de la métrique (nécessairement un multiple constant si $n \geq 3$ par l'identité (6)). On dit alors que la *métrique* est *d'Einstein* (pour un panorama sur ces métriques, voir [6]).

Parmi ces équations différentielles, seules celles dont le second membre est à trace nulle, i.e. celles pour lesquelles $\beta = -\frac{1}{n}\alpha$, ont la propriété de conserver l'élément de volume v_g. Pour toutes les autres, le volume total soit explose, soit implose. En effet, la variation de la fonctionnelle volume total fait intervenir l'intégrale de la trace de la variation de métrique et, à cause du calcul de D. Hilbert sur la fonctionnelle courbure scalaire totale, ces deux fonctionnelles varient donc ensemble. Il est par suite prévisible qu'une renormalisation sera nécessaire pour le flot d'Hamilton (voir §5).

Ce phénomène se voit particulièrement bien si on part d'une métrique d'Einstein avec $r^g = \mu\, g$. Comme $r^{\lambda^2 g} = r^g$ pour tout scalaire positif λ (et que par suite $s^{\lambda^2 g}\, \lambda^2 g = s^g g$), on constate que la métrique évolue homothétiquement à elle-même, ce qui géométriquement ne présente pas beaucoup d'intérêt. Les métriques d'Einstein représentent en quelque sorte les points stationnaires de ce flot. Notons cependant qu'à cause de ces comportements simples par changement homothétique de métrique, on peut normaliser l'équation (à cause de (4), il est commode de prendre $\alpha = \pm\, 2$).

Du calcul du symbole ou de la formule (4), il résulte que pour $\alpha = -2$ et $\beta < \frac{1}{2(n-1)}$ l'équation aux dérivées partielles qui est la traduction locale de ce flot est parabolique dégénérée, la dégénérescence étant due à l'équivariance sous le groupe *Diff*(M). Dans [21] et [22], R.S. Hamilton étudie plus spécialement le cas $\alpha = -2$ et $\beta = 0$ qui se trouve dans la bonne région. Par contre on peut noter que le cas $\alpha = -n\beta$ où le flot préserve l'élément de volume ne s'y trouve pas.

Tous ces champs de vecteurs sont naturels et donc leur flot, lorsqu'il existe (ce problème est discuté au §3), préserve des propriétés géométriques de la métrique comme la présence d'un groupe d'isométries ou le caractère kählérien.

Il avait déjà été remarqué qu'en déformant de façon infinitésimale une métrique dans la direction opposée à sa courbure de Ricci, on pouvait rendre la courbure plus positive. (Ce n'est pas vraiment étonnant puisque le tenseur d'Einstein s'identifie au gradient de la fonctionnelle courbure scalaire totale). C'est la méthode employée dans [7] et dans [25] pour montrer que "*toute métrique à courbure scalaire positive ou nulle sur une variété qui n'admet pas de métrique à courbure scalaire positive est en fait à courbure de Ricci identiquement nulle*" et dans [18] pour prouver le résultat mentionné dans l'introduction.

Grâce à une approche inspirée des théories de jauge et utilisant les connexions de Cartan, M. Min'Oo et E. Ruh mettent en évidence dans [27] un phénomène intéressant. Rappelons que les connexions de Cartan sont un outil technique très utile pour appréhender la structure des espaces symétriques. Sur une variété M, une connexion de Cartan est définie sur le fibré $CM = TM \oplus \Lambda^2 TM$ et fait intervenir en même temps une connexion sur le fibré tangent et une transformation de jauge. De façon plus spécifique, sur une variété riemannienne (M, g), à une connexion métrique ∇ sur $TM \to M$ (éventuellement avec torsion) et à une application inversible θ de TM dans lui-même (qu'il faut considérer comme une transformation de jauge), on associe la *connexion de Cartan* $\bar\nabla$ *adaptée à* g en posant pour des vecteurs X et Y de TM et pour une transformation antisymétrique A, élément de $\Lambda^2 TM$,

$$\bar\nabla_X Y = \nabla_X Y + \theta(X) \wedge Y \ ,$$

$$\bar\nabla_X A = -(A \circ \theta)(X) + \nabla_X A \ .$$

La connexion $\bar\nabla$ ainsi définie est dite de type *hyperbolique* car elle préserve le crochet de Lie défini sur CM par $[X + A, Y + B] = A(Y) - B(X) + [A, B] + X \wedge Y$ qui rend chacune des fibres de $CM \to M$ isomorphe à $O_{n,1}$ qui est le groupe d'isométries de l'espace hyperbolique. La courbure $R^{\bar\nabla}$ d'une connexion de Cartan $\bar\nabla$ se définit de la façon habituelle comme défaut de commutation des dérivées secondes. Elle *contient* la torsion de Cartan $T^{\bar\nabla}$ qui, pour des vecteurs tangents X et Y, vaut

$$T^{\bar\nabla}_{X,Y} = \nabla_X(\theta(Y)) - \nabla_Y(\theta(X)) - (\theta \circ [X, Y]) \ .$$

M. Min'Oo et E. Ruh relient des déformations de connexions de Cartan à des déformations de métriques sur M. Si $\bar\nabla^t = (\nabla^t, \theta_t)$ est une famille de connexions de Cartan adaptées à une métrique g_0, on lui associe la famille de métriques $\theta_t^* g_0$. Comme la nullité de la torsion de Cartan de $\bar\nabla$ assure que la connexion de Levi-Civita de g s'identifie à $\theta^{-1} \circ \nabla \circ \theta$, connexion transformée de jauge de la connexion ∇ par θ, la correspondance est complète.

On a alors la proposition suivante qui donne un statut variationnel au flot étudié par Hamilton, statut qu'il n'avait pas a priori.

PROPOSITION 1 (cf [27]).– *Dans l'espace des connexions de Cartan de type hyperbolique adaptées à une métrique g, le flot défini par le gradient de la fonctionnelle de Yang-Mills* $\bar{\nabla} \mapsto \int_M |R^{\bar{\nabla}}|_g^2 v_g$ *préserve les connexions de Cartan adaptées à g à torsion nulle et induit, à une normalisation près, le flot d'Hamilton* $\frac{dg}{dt} = -2\ r^g$ *sur les métriques.*

Dans [22], R.S. Hamilton présente indépendamment une partie de ce résultat (voir le §4 pour les simplifications qui en résultent). Si, à l'instant $t = 0$, on fixe une isométrie τ d'un fibré $F \to M$ muni d'une métrique h avec le fibré $TM \to M$ muni de la métrique g_0, et qu'on la fait évoluer par l'équation $\frac{d\tau}{dt} = -\frac{1}{2} g^{-1}.\frac{dg}{dt}.\tau$, alors la métrique image réciproque $\tau^* g_t$ reste constante au cours du temps de telle sorte que τ réalise une isométrie entre la métrique variable g_t sur TM et la métrique h fixe sur F. Mais τ n'est pas en général la composée de τ_0 et de la différentielle d'un difféomorphisme et par suite les métriques g_t et $g_0 = h$ sont d'un point de vue géométrique tout à fait différentes.

Une telle construction est classique en mécanique des milieux continus. Elle consiste à travailler à cheval entre le corps déformé et le corps non-déformé. Le tenseur des déformations décrit dans ces variables s'appelle en mécanique le tenseur de Piola-Kirchhoff.

En dimension finie, en poussant une sous-variété par le flot défini par son vecteur courbure moyenne, on tend à uniformiser sa courbure ; il s'agit là d'un sujet déjà classique (cf [11]) et une relation étroite avec le flot d'Hamilton a été mise en évidence (cf [23] où G. Huisken construit grâce au flot défini par le vecteur courbure moyenne une déformation d'une hypersurface convexe de l'espace euclidien sur une sphère).

3. Existence locale du flot

Le point de départ d'Hamilton est le théorème suivant.

THÉORÈME 2 (cf [21]).– *Si M est une variété compacte de dimension n, il existe un flot local pour l'équation différentielle sur M*

$$\frac{dg}{dt} = -2\ r^g\ . \tag{7}$$

La méthode utilisée par Hamilton s'appuie sur le puissant théorème de Nash-Moser (cf [20] pour une exposition systématique par Hamilton lui-même). Nous présentons une preuve plus classique due à D. DeTurck (cf [13] et sa correction).

▪ Au §2, nous avons déjà remarqué que l'équation (7) considérée par Hamilton était parabolique transversalement aux orbites. L'idée de DeTurck est de restaurer la parabolicité en détruisant l'invariance sous *Diff*(M). Pour ce faire, étant donné un champ de 2-tenseurs symétriques ρ supposé inversible, il considère le système d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} = -2\ r^\gamma + \delta_\gamma^*(\rho^{-1}\delta_\gamma(2E^\gamma(\rho))). \tag{8}$$

Cette équation non-linéaire en γ est construite pour être parabolique, le terme supplémentaire ayant, dans la direction d'un vecteur cotangent unitaire ξ, pour symbole

$$h \mapsto \xi \odot (2\gamma^{-2}(\rho \otimes h)\rho^{-1}(\xi) + h(\xi) - \gamma^{-1}(h)\xi).$$

(Il ne faut retenir que les termes contenant des dérivées secondes des coefficients de la métrique γ.) Comme les directions de dégénérescence du système initial correspondaient aux tenseurs h de la forme $\xi \odot \eta$, à cause de la compacité de M, il suffit de vérifier que sur ces tenseurs le symbole du terme supplémentaire est injectif. En utilisant pour ρ^{-1} et h une décomposition en blocs adaptée à ξ (on pose $\rho^{-1} = \mu\ \xi \otimes \xi + \xi \odot \varsigma + \rho'$), pour que $h = \lambda\ \xi \otimes \xi + \xi \odot \xi' \neq 0$ soit dans le noyau du symbole, il faudrait que $\gamma^{-2}(\rho \otimes h)\mu = 0$ et $\gamma^{-2}(\rho \otimes h)\varsigma = -\xi'$. Comme ρ est supposé inversible, $\mu \neq 0$ ce qui conduit à $\lambda = 0$, d'où une contradiction.

L'existence d'un flot local pour cette équation découle des théorèmes généraux d'existence de solutions pour les systèmes paraboliques quasi-linéaires dont le symbole principal est sous forme diagonale. Il reste seulement à prouver que par ce biais on peut retrouver le flot de l'équation initiale (7) qui est seule d'intérêt géométrique. Si $(\gamma_t)_{t\in I}$ désigne la solution de (8), on vérifie que le flot cherché est donné par la famille de métriques $g_t = \phi_t^*\gamma_t$ où ϕ_t désigne la solution sur la variété compacte M de l'équation différentielle dépendant du temps

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = -\rho^{-1}(\delta_{\gamma_t}(E^{\gamma_t}(\rho))). \tag{9}$$

En effet, si on calcule $\frac{\partial(\phi_t^*\gamma_t)}{\partial t}$, on trouve $\phi_t^*\frac{\partial\gamma_t}{\partial t} + 2\ \phi_t^*\delta_{\gamma_t}^*(\frac{\partial\phi_t}{\partial t})$, soit précisément

$$\phi_t^*(-2\ r^{\gamma_t}) = -2\ r^{\phi_t^*\gamma_t}$$

et la solution cherchée. ∎

La construction précédente est en fait assez générale. D. DeTurck s'en sert dans [12] pour montrer que tout champ de tenseurs inversible est localement la courbure de Ricci d'une métrique. A cause de l'expression (6) de l'identité de Bianchi pour la courbure de Ricci, le terme supplémentaire disparaît si ρ est la courbure de Ricci de la métrique γ.

4. Un principe du maximum vectoriel

Le tenseur de courbure de Riemann est la quantité fondamentale dont il faut suivre l'évolution le long du flot. Dans un système de coordonnées (x^i) orthonormées au point où nous faisons le calcul, elle satisfait l'équation suivante

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}R_{ijkl} = &- \Delta R_{ijkl} + 2(R_{ipjq}R_{kplq} - R_{ipjq}R_{lpkq} + R_{ipkq}R_{jplq} - R_{iplq}R_{jpkq}) \\ &- (r_{pi}R_{pjkl} + r_{pj}R_{ipkl} + r_{pk}R_{ijpl} + r_{pl}R_{ijkp}).\end{aligned}$$

Il est important de remarquer que dans l'expression précédente le tenseur de courbure est présent à deux titres distincts (d'où la structure subtile de l'équation) : comme commutateur de dérivées covariantes secondes et aussi comme un 4-tenseur dont la divergence est la différentielle extérieure covariante du champ de vecteurs sur M que nous considérons (voir [26] pour les détails). Cette identité reliant la courbure de Ricci et la courbure de Riemann est l'étape intermédiaire reliant la deuxième identité de Bianchi générale (5) à son expression (6) pour la courbure de Ricci. Cela souligne encore le fait que la courbure de Ricci est contrainte par sa dérivée. Il faut aussi prêter attention au fait que la formule de variation change suivant la variance choisie pour le tenseur de courbure puisque la métrique qui sert à monter et à descendre les indices varie avec le paramètre t.

En travaillant à cheval entre la métrique initiale et la métrique à l'instant t comme nous l'avons expliqué au §2, on peut simplifier cette expression quelque peu. Dans cette approche de jauge, le tenseur $\tau_t^* R^{g_t}$ (qu'on note R^t dans la suite) satisfait une équation d'évolution (miraculeusement!) plus simple. En effet, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} R^t_{abcd} = -\Delta^t R^t_{abcd} + 2(R^t_{aebf} R^t_{cedf} - R^t_{aebf} R^t_{decf} + R^t_{aecf} R^t_{bedf} - R^t_{aedf} R^t_{becf})$$

où Δ^t désigne l'opposé de la trace dans la métrique g_t de la dérivée covariante seconde définie par la connexion $\tau_t^{-1} \circ \nabla^g_t \circ \tau_t$. (Ici nous avons noté a, b, c, d les indices dans le fibré de référence F, le corps non déformé).

De plus, dans [22], R.S. Hamilton donne de cette équation une écriture intrinsèque en prenant le point de vue de l'opérateur de courbure. Pour cela, il introduit dans $S^2\Lambda^2 TM$ une opération naturellement définie par le fait qu'en chaque point m, $\Lambda^2 T_m M$ s'identifie à l'algèbre de Lie du groupe $SO(T_m M)$. En effet, si R et R' sont deux éléments de $S^2\Lambda^2 TM$, on peut leur associer un autre élément $R \# R'$ qui dépend bilinéairement de R et de R' défini comme suit

$$R \# R' = \mu \circ (R \otimes R') \circ \mu^*$$

où μ est l'application linéaire factorisant le crochet de Lie et μ^* son adjointe.

On a alors une écriture synthétique de la variation de la courbure en termes d'opérateur de courbure

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{R} = -\Delta^t \hat{R}^t + \hat{R}^t \circ \hat{R}^t + \hat{R}^t \# \hat{R}^t. \tag{10}$$

Remarquons qu'au contraire de leur somme chacun des deux termes quadratiques n'appartient pas à RM.

Il est bien connu que le principe du maximum est un des outils principaux d'étude des solutions de l'équation de la chaleur. R.S. Hamilton donne dans [21] et [22] une extension de ce principe aux systèmes paraboliques. La démonstration du Théorème 1 utilise abondamment cette généralisation. La version donnée dans [22] est particulièrement élégante. C'est elle que nous expliquons maintenant.

L'idée de base est de remplacer le système d'équations aux dérivées partielles qu'on écrit sous la forme $\frac{\partial f}{\partial t} = -\Delta^t f + \Phi(f)$ (où f est une section du fibré F et Δ^t un laplacien du type considéré précédemment) par une équation différentielle ordinaire qu'on peut examiner dans chaque fibre de F. On peut alors énoncer le principe du maximum vectoriel d'Hamilton.

THÉORÈME 3 (cf [22]).– *Soit* Γ *un sous-fibré fermé convexe de* F *invariant par le transport parallèle de connexions* ∇^t. *Si l'ensemble* Γ *est stable par le flot de l'équation différentielle ordinaire* $\frac{df}{dt} = \Phi(f)$ *(qui s'écrit fibre à fibre), alors toute solution de l'équation parabolique* $\frac{\partial f}{\partial t} = -\Delta^t f + \Phi(f)$ *dont la condition initiale est dans* Γ *y reste.*

■ La preuve (pour laquelle nous renvoyons à [22]) est en fait assez élémentaire et consiste à se ramener à des inéquations scalaires en représentant le convexe Γ comme l'intersection des demi-espaces définis par ses fonctions support linéaires. Pour étudier le comportement des solutions du système parabolique, il est nécessaire d'étendre ces fonctions par transport parallèle, d'où l'hypothèse d'invariance faite sur Γ. A ce point, il est crucial que le laplacien ne contienne que des dérivées secondes symétriques, les seules qu'on puisse annuler par des extensions bien choisies (il y a une phrase malheureuse à ce sujet dans [22]). ■

Le cas scalaire est bien entendu beaucoup plus simple puisque le principe du maximum se ramène à établir une simple inégalité. L'hypothèse sur le comportement de Γ par transport parallèle n'est pas trop gênante, à cause de la naturalité des conditions géométriques qu'on veut étudier (comme la positivité des valeurs propres par exemple).

Le Théorème 3 souligne l'importance de l'équation différentielle $\frac{d\hat{R}}{dt} = \hat{R}\circ\hat{R} + \hat{R}\#\hat{R}$ qui est associée au système (10) dans l'espace vectoriel $R\mathbf{R}^n$. En fait, pour prouver le Théorème 1, il est nécessaire d'appliquer le principe du maximum à toute une série d'équations paraboliques décrivant la variation de diverses quantités géométriques (cf [21]), comme :

- la courbure scalaire (on prouve ainsi qu'elle tend vers l'infini en un temps contrôlé) ;
- la courbure de Ricci (on en déduit que le flot préserve sa positivité comme annoncé dans l'introduction) ;
- des quantités scalaires comme $\frac{|Z^g|^2}{|S^g|^{2-\beta}}$ (pour s'assurer que le terme $|Z^g|$ tend moins vite vers l'infini que le terme $|S^g|$).

A cause de la complexité des termes regroupés dans le terme Φ de l'énoncé du Théorème 3, il est techniquement très difficile de vérifier qu'ils ont le signe voulu. Si [22] constitue un progrès conceptuel certain, il ne dispense pas Hamilton d'avoir à faire des calculs complexes dont la signification géométrique est peu transparente. En s'appuyant sur [10], C. Margerin développe dans [26] une approche différente, mais qui est, elle aussi, assez lourde techniquement.

5. Existence globale du flot et renormalisation

Le théorème d'existence du flot d'Hamilton pour des temps petits est d'une grande importance, mais il ne doit pas engendrer trop d'optimisme. Dans l'approche par l'équation de la chaleur, l'espoir est en effet de voir la solution converger vers une solution de l'équation indépendante du temps, une métrique d'Einstein donc, lorsqu'on tend vers une extrémité de l'intervalle de définition du flot. Dans notre situation, on connaît des exemples explicites où de telles solutions stationnaires n'existent pas. On doit cette remarque à Mc Kenzie Wang et W. Ziller qui ont montré qu'il existe des variétés homogènes qui n'admettent aucune métrique d'Einstein. Comme on sait qu'une condition initiale homogène pour l'équation différentielle d'Hamilton donne naissance à un flot de métriques homogènes, le flot ne peut converger vers une solution de l'équation stationnaire.

Avant de spécialiser notre discussion au cas de la dimension 3, nous donnons quelques résultats généraux.

PROPOSITION 2 (cf [21]).– *Soit M une variété compacte de dimension n. Si l'intervalle maximal de définition du flot de l'équation différentielle* (7) *sur $\mathcal{M}$ est borné, soit $[O,T[$, alors* $\sup_M |R^g_t| \to +\infty$ *lorsque* $t \to T$.

■ La preuve se fait par l'absurde. En effet, si la courbure reste bornée en norme uniforme lorsque t tend vers T, d'abord la courbure de Ricci l'est aussi (par n fois la borne supérieure de la courbure). On en déduit que les métriques g_t définissent des métriques équivalentes entre elles et convergent lorsque $t \to T$ uniformément vers une métrique riemannienne (a priori seulement continue). Ensuite, on montre que les normes L^2 des dérivées de la courbure de Riemann restent aussi bornées lorsque t tend vers T par application d'une des inégalités différentielles faisant intervenir la borne de la courbure vues au §4. Pour en déduire des bornes uniformes des dérivées de la courbure, il suffit de passer par les fonctions scalaires que sont les carrés des normes de ces tenseurs auxquelles on applique à répétition les inégalités de Sobolev. Dans ces inégalités, la métrique riemannienne variable intervient seulement pour évaluer la norme de la différentielle (qui est une notion intrinsèque ne faisant pas intervenir la métrique) et par l'élément de volume, ce qui permet de contrôler les constantes uniformément.

La convergence vers la métrique-limite a donc lieu dans la topologie C^∞ et alors, par le Théorème 2 d'existence du flot local, on peut étendre au-delà de T ce qui contredit le fait qu'il est maximal. ■

Comme nous l'avons déjà remarqué au §2, R.S. Hamilton utilise un flot qui explose forcément en un temps fini. Il renormalise l'équation en considérant sur $\mathcal{M}$ l'équation différentielle

$$\frac{dg}{dt} = -2\, r^g + \frac{2}{n}\frac{\left(\int_M s^g v_g\right)}{\int_M v_g}\, g \tag{11}$$

dont le volume total est une intégrale première.

La solution de l'équation renormalisée (11) se déduit de celle de (7) par un changement d'échelle et d'horloge. Il est utile de noter qu'une métrique d'Einstein est un vrai point stationnaire de l'équation (11).

Il reste maintenant à trouver des conditions géométriques pour assurer que la métrique-limite est bien celle d'un espace-modèle.

Dans [22], R.S. Hamilton parvient à donner une condition valable en toute dimension pour assurer cette convergence. Pour cela, dans l'espace RM, il définit la notion (très contraignante!) d'*ensemble de pincement* comme étant un sous-fibré P fermé, convexe, invariant sous l'action du groupe orthogonal et par le flot de l'équation différentielle ordinaire (10) et dont les éléments ont une partie concirculaire contrôlée par leur partie diagonale comme suit : pour tout R dans P, il existe deux constantes positives α et β telles que

$$|C(R)|^2 \leq \alpha |S(R)|^{2-\beta} .$$

Il est commode d'étendre cette notion à des parties ouvertes U de RM en demandant que tout sous-ensemble compact de U soit contenu dans un ensemble de pincement au sens précédent.

On a alors le théorème de convergence suivant.

THÉORÈME 4 (cf [22]).– *Soit U un ensemble ouvert de pincement ne contenant que des éléments à courbure scalaire positive. Le flot de (7) partant d'une métrique dont la courbure se trouve dans U tend vers une métrique à courbure sectionnelle constante positive.*

■ Comme la variété M est compacte, on se ramène à un ensemble compact de pincement qui par le principe du maximum du §4 est stable par le flot d'Hamilton. La condition de pincement sur la partie concirculaire est donc assurée. Pour montrer la convergence vers la métrique standard, on utilise le principe du maximum appliqué à la fonction $|C^g|^2|S^g|^{2-\beta}$, puis à des fonctions contenant des dérivées d'ordre plus élevé de la courbure pour s'assurer de la convergence à des ordres plus élevés. Les calculs sont trop techniques pour être présentés ici (cf [21] pour les détails). ■

Pour traiter la partie du Théorème 1 concernant les variétés à courbure de Ricci positive, il suffit de montrer qu'en dimension 3 les tenseurs de courbure à courbure de Ricci positive forment un ensemble de pincement. Dans cette dimension, $\hat{R}$ a 3 valeurs propres (ρ_1, ρ_2, ρ_3) puisque $\Lambda^2 TM$ est de dimension 3. La courbure de Ricci détermine alors $\hat{R}$ comme nous l'avons déjà dit et a pour valeurs propres les $\rho_i + \rho_j$ $(i \neq j)$. L'équation différentielle (10) prend la forme

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \rho_i^2 + \rho_j \rho_k$$

où (i, j, k) est une permutation de $(1, 2, 3)$. On vérifie alors (cf [22]) que les ensembles

$$P_{c,K} = \{\hat{R} \mid 0 \leq \rho_1 + \rho_2, \rho_2 + \rho_3 \leq c(\rho_1 + \rho_2), \rho_3 - \rho_1 \leq K(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)^{1-\epsilon(c)}\}$$

(où ϵ est une fonction de c) sont des ensembles de pincement et qu'ils forment une exhaustion de l'ensemble des tenseurs de courbure à courbure de Ricci positive.

La deuxième partie du Théorème 1 nécessite une idée supplémentaire : celle d'*holonomie riemannienne*. En un point m de M, l'algèbre d'holonomie est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie de $SO(T_m M)$ engendrée par les 2-formes $\hat{R}(X \wedge Y)$ où X et Y parcourent TM ramenées par transport parallèle jusqu'en m, donc s'identifie à la réunion des images de $\hat{R}$. Dans [22], R.S. Hamilton montre que, si $\hat{R} \geq O$, l'image de $\hat{R}$ est une sous-algèbre de Lie de rang constant invariante par transport parallèle et indépendante du temps. Si $\hat{R}$ n'est pas positif, il y a donc réduction du groupe d'holonomie. Pour le cas du Théorème 1, une analyse un peu plus fine est nécessaire puisque $\hat{R}$ peut avoir des valeurs propres négatives. Elle s'appuie sur le fait que si le premier nombre de Betti de M n'est pas nul, il y a une 1-forme parallèle et encore une réduction du groupe d'holonomie. Il reste à montrer la convergence vers une métrique produit standard. Pour cela, nous renvoyons à [22].

6. D'autres applications géométriques de la méthode

Le Théorème 1 a été généralisé en dimensions plus grandes. Sachant qu'il n'est pas suffisant de faire des hypothèses sur la courbure de Ricci, la question principale est de décider quelle est la bonne notion de courbure qu'il faut supposer positive.

Supposant que l'opérateur de courbure est positif, R.S. Hamilton a obtenu le théorème suivant en dimension 4. On peut noter (cf [26]) que le flot d'Hamilton préserve les métriques à opérateur de courbure positive (et positive ou nulle) en toutes dimensions.

THÉORÈME 5 (cf [22]).– *Une variété compacte de dimension 4 admettant une métrique à opérateur de courbure positif ou nul est difféomorphe à un quotient d'un espace riemannien symétrique à courbure positive ou nulle par un groupe discret d'isométries de cette métrique.*

Partant d'une hypothèse de pincement sur le tenseur de courbure concirculaire, C. Margerin a obtenu des théorèmes valables en toutes dimensions tels que le suivant.

THÉORÈME 6 (cf [26]).– *Toute variété compacte de dimension n admettant une métrique g à courbure scalaire positive telle que $|C^g|^2 \leq \frac{1}{4(n-2)}|S^g|^2$ est revêtue par la sphère standard.*

L'hypothèse de pincement faite dans ce théorème implique que la courbure de Ricci est positive, mais pas que l'opérateur de courbure le soit. Le théorème n'est pas optimal ; il faudrait l'améliorer par un facteur 2. La variété qui est alors critique pour ce pincement est $S^1 \times S^{n-1}$ en dimension $n \geq 5$ alors que $S^1 \times S^3$ et $\mathbf{C}P^2$ le sont en dimension 4. On peut reformuler ce théorème en termes de pincement ordinaire (variable!) ce qui améliore un théorème d'E. Ruh (cf [30]).

COROLLAIRE 1 (cf [26]).– *Toute variété compacte de dimension n dont la courbure sectionnelle K vérifie, en chaque point m, le pincement $(1 - 3(2n)^{-\frac{3}{2}})A \leq K \leq A$ (où A est éventuellement une fonction du point m) est revêtue par la sphère standard.*

Une application du travail d'Hamilton d'un esprit tout à fait différent concerne la régularité des métriques riemanniennes et la possibilité de contrôler certaines quantités définies par la métrique uniquement en termes de sa courbure. Quitte à perturber la métrique, une telle estimation est possible comme le dit le théorème suivant.

THÉORÈME 7 (cf [4]).– *Si on se donne un nombre positif* ϵ *et un entier* k, *il existe une constante* $C_{n,k,\epsilon}$ *et un opérateur de lissage* $S_\epsilon : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ *tels que*

$$i) \ \|S_\epsilon(g) - g\|_{C^0} < \epsilon \ ,$$

$$ii) \ \|D^k R^{S_\epsilon(g)}\|_{C^0} < C_{n,k,\epsilon} \ \|R^g\|_{C^0} \ .$$

Le résultat d'Hamilton a donc déjà trouvé des applications diverses. Il semble cependant qu'on puisse envisager d'aller plus loin et d'en faire le point de départ d'une véritable méthode. Pour cela, il faudrait disposer d'un théorème assurant l'existence globale du flot dans des cas beaucoup plus généraux (i.e. sans que la métrique obtenue comme limite soit aussi symétrique que celles obtenues jusqu'à présent). Un problème typique de cette famille est le suivant.

PROBLÈME.– *Est-il possible de déformer une métrique* g *qui est presque d'Einstein (i.e. telle que* $\|Z^g\|$ *est assez petit) en une métrique d'Einstein ?*

Remarquons que les obstructions topologiques à l'existence d'une métrique d'Einstein connues à ce jour ne s'opposent pas à ce que ce problème soit résolu positivement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. AUBIN, Sur la courbure scalaire des variétés riemanniennes compactes, C. R. Acad. Sci. Paris 262 (1966), 130-133.

[2] T. AUBIN, Métriques riemanniennes et courbure, J. Differential Geom. 4 (1970), 383-424.

[3] T. AUBIN, Equations différentielles non linéaires et le problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, J. Math. Pures Appl. 55 (1976), 269-296.

[4] J. BEMELMANS, M. MIN'OO, E. RUH, Smoothing Riemannian metrics, Preprint, Bonn University (1984).

[5] P. BERARD, The Bochner technique revisited, Preprint, Université de Savoie (1985).

[6] A. BESSE, *Einstein manifolds,* Ergebn. Math., Springer, Berlin-Heidelberg-New York, (1986).

[7] J.P. BOURGUIGNON, *L'espace des métriques riemanniennes d'une variété compacte,* Thèse d'Etat, Université Paris VII (1974).

[8] J.P. BOURGUIGNON, Premières formes de Chern des variétés kählériennes compactes (d'après E. Calabi, T. Aubin et S.T. Yau), in *Séminaire Bourbaki 1977-1978*, Exposé n°507, Lecture Notes in Math. n°710, Springer, Berlin (1979), 1-21.

[9] J.P. BOURGUIGNON, Ricci curvature and Einstein metrics, in *Global Differential Geometry and Global Analysis,* Lecture Notes in Math. n°838, Springer, Berlin (1981), 42-63.

[10] J.P. BOURGUIGNON, H. KARCHER, Curvature operators : pinching estimates and geometric examples, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris 11 (1978), 71-92.

[11] K.A. BRAKKE, *The motion of a surface by its mean curvature,* Math. Notes n°20, Princeton Univ. Press, Princeton (1978).

[12] D. DETURCK, Existence of metrics with prescribed Ricci curvature : local theory, Inventiones Math. 65 (1981), 179-207.

[13] D. DETURCK, Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors, J. Differential Geom. 18 (1983), 157-162 ; idem : improved, to appear.

[14] D. DETURCK, J.L. KAZDAN, Some regularity theorems in Riemannian geometry, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris 14 (1981), 249-260.

[15] P. DOMBROWSKI, *150 Years after Gauss' "Disquisitiones generales circa superficies curvas",* Astérisque n°62 (1979).

[16] J. EELLS, J.H. SAMPSON, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. J. Math. 86 (1964), 109-160.

[17] P. EHRLICH, Metric deformations of curvature I : local convex deformations, Geom. Dedicata 5 (1976), 1-23.

[18] P. EHRLICH, Metric deformations of curvature II : compact 3-manifolds, Geom. Dedicata 5 (1976), 147-161.

[19] H. ELIASSON, On variations of metrics, Math. Scand. 29 (1971), 317-327.

[20] R.S. HAMILTON, The inverse function theorem of Nash and Moser, Bull. Amer. Math. Soc. 7 (1982), 65-222.

[21] R.S. HAMILTON, Three-manifolds with positive Ricci curvature, J. Differential Geom. 17 (1982), 255-306.

[22] R.S. HAMILTON, Four-manifolds with positive curvature operator, Preprint, U.C. San Diego (1985).

[23] G. HUISKEN, Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres, J. Differential Geom. 20 (1984), 237-266.

[24] A. INOUE, On Yamabe's problem by a modified direct method, Tôhoku Math. J. (1982), 499-507.

[25] J.L. KAZDAN, F. WARNER, Prescribing curvatures, in *Differential Geometry* Proc. Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math. XXVII, Stanford (1975), 309-319.

[26] C. MARGERIN, Pointwise pinched manifolds are space forms, in *Geometric measure theory,* Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math. 44, Arcata (1985).

[27] M. MIN'OO, E. RUH, Curvature deformations, Preprint, Bonn University (1985).

[28] G. RICCI-CURBASTRO, Direzioni e invarianti principali di una varietà qualunque, Atti Real Inst. Venezio, 63 (1904), 1233-1239.

[29] B. RIEMANN, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zur Grunde liegen, in *Gaussche Flächentheorie, Riemannsche Räume und Minkowski-Welt,* Teubner-Archiv zur Mathematik, Band 1 (1984), 68-83.

[30] E. RUH, Riemannian manifolds with bounded curvature ratios, J. Differential Geom. 17 (1982), 255-206.

[31] R. SCHOEN, Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature, J. Differential Geom. 20 (1984), 479-495.

[32] R. SCHOEN, S.T. YAU, Complete 3-dimensional manifolds with positive Ricci curvature and scalar curvature, in *Seminar on Differential Geometry,* ed. by S.T. Yau, Ann. Math. Studies n°102, Princeton Univ. Press, Princeton (1982), 209-228.

[33] Séminaire Palaiseau 1978, *Première classe de Chern et courbure de Ricci : preuve de la conjecture de Calabi,* Astérisque n°58 (1978).

[34] H. YAMABE, On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds, Osaka J. Math. 12 (1960), 21-37.

[35] S.T. YAU, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I, Comm. Pure Appl. Math. XXXI (1978), 339-411.

Jean Pierre BOURGUIGNON

Centre de Mathématiques
Unité Associée au CNRS n°169
Ecole Polytechnique

F-91128 PALAISEAU Cedex
(France)