JACQUES LAFONTAINE

Mesures de courbure des variétés lisses et des polyèdres

Astérisque, tome 145-146 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 664, p. 241-256
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1985-1986__28__241_0>

Séminaire BOURBAKI
38ème année, 1985-86, n° 664

Juin 1986

MESURES DE COURBURE DES VARIÉTÉS LISSES ET DES POLYÈDRES
[d'après Cheeger, Müller et Schräder]

par Jacques LAFONTAINE

La formule de Gauss - Bonnet pour les surfaces, qui assure que $\int_S K_g v_g = 2\pi\chi(S)$, où v_g est la mesure canonique associée à la métrique et K_g la courbure gaussienne, a un analogue polyèdral immédiat. On peut considérer la courbure d'un polyèdre P comme une mesure concentrée aux sommets : si on associe à chaque sommet σ^0 le défaut angulaire $\Delta(\sigma^0) = 2\pi - \sum_{\sigma^2\supset\sigma^0}(\sigma^0, \sigma^2)$, où (σ^0, σ^2) désigne l'angle en σ^0 de la face σ^2 , la mesure $\sum_{\sigma^0}\Delta(\sigma^0)\delta_{\sigma^0}$ a pour masse totale $2\pi\chi(P)$. De plus (cf. 5.2 infra), pour des approximations polyèdrales convenables de S , ces mesures discrètes convergent en mesure vers l'intégrant $K_g v_g$.

Cheeger, Müller et Schräder démontrent un résultat analogue pour toute variété riemannienne compacte (M,g) : chaque courbure de Lipschitz - Killing R^{2j} , qui est un polynome de degré j par rapport au tenseur de courbure de (M,g) (voir § 2), a son pendant polyèdral, qui est une mesure portée par le squelette de codimension $2j$ du polyèdre. Et on a un théorème de convergence, nettement plus difficile que dans le cas $n = 2$ (théorème 5.1).

Si $n = 4$, alors $R^2 v_g$ est le Lagrangien de la relativité générale ([H], cf. [M-S-W] ch. 21). Son analogue polyèdral a été introduit par Regge ([R]) dont les idées ont suscité un grand intérêt chez les physiciens théoriciens (cf. [C-M-S 1], [M-T-W]). Mais avant [C-M-S 2], les questions de convergence n'étaient pas abordées.

Pour n pair et $j = n/2$, ces résultats donnent une nouvelle démonstration de la formule de Gauss - Bonnet - Chern, reliant directement la courbure à la caractéristique d'Euler - Poincaré vue de façon combinatoire (comparer à [Ch 1], [S-W], [Sp] pour la démonstration originelle de Chern où $\chi(M)$ est reliée aux propriétés des champs de vecteurs, à [P], [A-B-P], [A], [Gi] pour la démonstration analytique de Patodi où $\chi(M)$ apparaît comme l'indice d'un opérateur elliptique). Une telle démonstration avait été pressentie par Allendoerfer et Weil ([A-W]).

Les idées de [C-M-S 2] sont reliées à des développements récents, dus principalement à Cheeger ([C 1], [C 2], [C 3]) d'Analyse sur les variétés riemanniennes singulières, mais aussi à des considérations plus anciennes de Géométrie Intégrale

([C-M-S 3], [S], [S-W], [Wi]) : celle-ci, qui met en jeu des invariants géométriques définis sans hypothèse de lissité, permet de détecter des invariants riemanniens ayant un analogue polyèdral, ainsi que l'expression de ces analogues polyèdraux.

Je remercie M. Berger, P. Marry et P. Pansu pour leurs remarques sur ce texte.

1. UN PEU DE GÉOMÉTRIE INTÉGRALE

On peut rendre compte des propriétés métriques "semi-locales" d'un compact A de $\mathbb{R}^n$, sans hypothèses de lissité ou de dimension, à l'aide des volumes de ses voisinages tubulaires $V_r(A)$, et de ses intégrales transverses (Quermassintegralen, *cf.* [H], [S], [La]), définies par $M_k(A) = c_{N,k}\int_{G_{N,k}} \chi(A \cap P)dP$. On a désigné par $G_{N,k}$ la k-grassmannienne affine munie de "sa" mesure invariante par le groupe des $E(N)$ des isométries de $\mathbb{R}^N$. Avec nos normalisations, $M_{N-k}(A) = \mathrm{vol}_k(A)$ si $\dim(A) = k$ (formule de Cauchy - Crofton, *cf.* [S], ch. 14).

Alors, si A admet un "rayon d'injectivité externe" strictement positif, il y a une relation remarquable entre volumes des tubes et intégrales transverses. Plus précisément, soit $r(A)$ la borne inférieure des $\rho \geq 0$ tels que, si $r \leq \rho$, tout point de $V_r(A)$ admet une projection unique sur A. Par exemple, $r(A) = +\infty$ si et seulement si A est convexe, et $r(A) > 0$ si A est une sous-variété à bord lisse. Alors, si $r < r(A)$,

$$\mathrm{vol}_N(V_r(A)) = \sum_{k=0}^{N} \mathrm{vol}_k(B_k(1))M_k(A)r^k . \tag{1}$$

Cette formule est due à Steiner dans le cas convexe (*cf.* [Ha] ch. 6, §1, [Br 1], 12.10.6, [S] ch. 13), à Weyl et Chern dans le cas lisse ([W], [Ch 2], [S-W]), à Federer dans le cas général ([F]).

Si $r(A) = 0$, la formule (1) n'est plus vraie (voir cependant [C-M-S 3], th. 8). Mais les M_k gardent une signification géométrique dans le cadre des polyèdres riemanniens (voir [A-W] ou [Wi] pour une définition en forme) : elles apparaissent dans la formule cinématique de Chern ([Ch 2], [S]), étendue à ce cas par Wintgen ([Wi]) : si dg est la mesure de Haar du groupe $E(N)$, on a

$$\int_{E(N)} \chi(A \cap gB)dg = \sum_{k=0}^{N} d(N,k)M_k(A)M_{N-k}(B) .$$

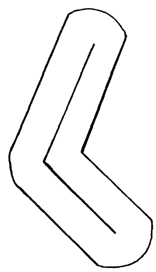

Fig. 1

De plus, ces intégrales transverses sont additives, puisque $\chi(A \cap B) + \chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B)$; elles ne dépendent que de l'espace métrique A et non de son plongement dans $\mathbb{R}^N$ (*cf.* [Wi] pour le cas général ; par exemple, si $D \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine de bord S, alors $M_2(D)$ est donnée par l'intégrale de la courbure moyenne de S, qui est un invariant extrinsèque pour S, mais intrinsèque pour D). Nous verrons aux paragraphes 2 et 3 comment les M_k s'expriment en fonction de la courbure dans le cas lisse (d'où la terminologie de *mesure de courbure* proposée par Federer), des angles dièdres et des aires des faces dans le cas des polyèdres P.L. A ce stade, le théorème d'approximation annoncé dans l'introduction est démontré pour les hypersurfaces convexes de $\mathbb{R}^N$: il suffit d'utiliser la continuité des M_k pour la distance de Hausdorf sur les convexes compacts, résultat qui remonte à Minkowski (*cf.* [Br 1] 12.10.6 ou [Ha] 6.1), ainsi que [F] 5.9 pour une généralisation intéressante). Faute d'un théorème de continuité suffisamment général (penser au lampion de Schwarz, *cf.* [B-G], ou [Ra] p. 6-7), l'étude du cas général des variétés riemanniennes se fera plutôt d'un point de vue intrinsèque, et n'utilisera les résultats de ce paragraphe qu'à titre d'illustration.

2. COURBURES DE LIPSCHITZ - KILLING

Pour une variété riemannienne (M,g), l'application exponentielle $\exp_x : M_x \longrightarrow M$ envoie isométriquement les droites vectorielles du tangent M_x sur les géodésiques issues de x. On a $T_0 \exp_x = I$, et la courbure riemannienne rend compte des propriétés d'ordre deux. Plus précisément, soient u, $v \in M_x$, de norme 1, engendrant un 2-plan P_x, et soit $\alpha = \measuredangle(u,v)$. Alors (*cf.* [Br 2]), $d^2(\exp_x tau, \exp_x tbv) = (b^2+c^2-2bc\cos\alpha)t^2 - \frac{1}{3}K(P_x)b^2c^2\sin^2\alpha\, t^4 + 0(t^5)$ où $K(P_x)$ est la courbure sectionnelle de (M,g) en P_x. Si $\alpha_e(t)$ est l'angle correspondant à α dans le triangle euclidien de côtés $d(\exp_x tau, \exp_x tbv)$, tb, tc, on en déduit que

$$\alpha_e(t) = \alpha - \frac{1}{6}K(P_x)bc\sin\alpha\, t^2 + 0(t^3)\,, \tag{2}$$

uniformément en α si $|\sin\alpha| \geq |\sin\alpha_0| > 0$.

Si $n = 2$, $K(P_x) = K(x)$ est la courbure gaussienne. Pour $n \geq 2$, la courbure riemannienne est la section du fibré $\Lambda^2M \circ \Lambda^2M$ (ici $\circ$ est le produit symétrique) satisfaisant $R_x(u,v,u,v) = K(P_x)\sin^2\alpha$ et l'identité de Bianchi. La métrique g permet d'associer à R un champ d'endomorphismes symétriques $\hat{R}$, l'*opérateur de courbure*. Pour $n = 2$; $K(x) = \operatorname{tr}\hat{R}_x$. Plus généralement, en utilisant les puissances extérieures de $\hat{R}$, on attache à R, donc à (M,g), des invariants scalaires.

DÉFINITION 2.1.- *La* 2p-ième *courbure de Lipschitz - Killing est le scalaire* $R^{2p} = (1/(2\pi)^p p!)\operatorname{tr}_{\Lambda^{2p}}\hat{R}^p$; *on pose* $R^{2p+1} = 0$.

Nous noterons $\bar{R}^k$ la mesure de densité R^k par rapport à la mesure canonique de (M,g). Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 2.2.- i) $R^k(t\,g) = t^{-k}R^k(g)$; $R^k = 0$ *si* $k > \dim M$.

ii) *Si* $g = g_1 + g_2$ *est une métrique produit,* $R^p = \sum_{i+j=p} R_1^i R_2^j$.

iii) *Si* $R(u,v,w,z) = h(u,w)h(v,z) - h(u,z)h(v,w)$, *où* $h \in \Gamma(S^2M)$, $R^{2p} = (2p)!/(4\pi)^p p!\ \sigma_{2p}(h)$ (2p-ième *fonction symétrique fondamentale des valeurs propres de* h).

D'après ii) et iii) , $\bar{R}^{2n}(S^{2n}) = 2$, $\bar{R}^{2n}((S^2)^n) = 2^n$, ce qui justifie nos normalisations. Précisant ce que nous annoncions au §1, on a le

THÉORÈME 2.3. (H. Weyl, [W]).- *Si* M^n *est une sous-variété compacte de* R^N , *munie de la métrique induite* , $\bar{R}^p(M^n) = M_{N-n+p}(M^n)$.

Pour les hypersurfaces, ce résultat est une conséquence immédiate de 2.2, iii), appliqué à la 2e forme fondamentale (équation de Gauss).

Les R^p admettent une caractérisation algébrique (th. d'Abramov Gilkey, *cf.* [Gi] p. 121, et comparer à [A]), dont la version affaiblie suivante jouera un rôle clé. $\mathbb{R}^n$ étant muni de sa structure euclidienne canonique, $\Lambda^2\mathbb{R}^2 \circ \Lambda^2\mathbb{R}^n$ hérite d'une structure de $O(n)$-module. Soit $\mathcal{R}_n$ le sous-module défini par l'identité de Bianchi (tenseurs de courbure algébriques), et $\mathcal{P}_{n,k} = \mathrm{Hom}_{O(n)}(S^k\mathcal{R}_n, \mathbb{R})$. Soit $r : \mathcal{P}_{n,k} \longrightarrow \mathcal{P}_{n-1,k}$ la "restriction" déduite de l'injection $\mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

THÉORÈME 2.4.- i) *Si* $k < n/2$, r *est un isomorphisme* ;

ii) *Si* $n = 2p$, *le noyau de* $r : \mathcal{P}_{2p,p} \longrightarrow \mathcal{P}_{2p-1,p}$ *est engendré par* R^{2p} .

Nous retrouverons tout à l'heure le fait qu'en dimension n , R^n est l'intégrant de Gauss - Bonnet. Moralité : contrairement aux classes de Pontrjagin (*cf.* [A] ou [Gi] 2.5) la classe d'Euler est instable ; mais ses représentants riemanniens se propagent en dimension supérieure et donnent des invariants riemanniens intéressants. La courbure scalaire (*cf.* [BB]) est au facteur 2 près la suspendue de la courbure gaussienne en dimension 2 . En dimension $n+k$, on pourra caractériser la n-ième courbure de Lipschitz - Killing comme la suspendue par $(r^{-1})^k$ de l'intégrand de Gauss - Bonnet en dimension n .

3. PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES POLYÈDRES

Rappelons qu'un polyèdre est un espace topologique homéomorphe à un complexe simplicial ; un tel homéomorphisme est une triangulation de P .

DÉFINITION 3.1.- *Une* métrique polyèdrale *sur* P (P.L. *flat space dans* [C-M-S 2]) *est une métrique telle que*

i) *chaque* k-*face est isométrique à un* k-*simplexe* σ^k *de* $\mathbb{R}^k$;

ii) P *est un espace de longueur* ([Gr]), *c'est-à-dire que la distance de deux points est la borne inférieure des longueurs des courbes les joignant.*

Une telle métrique est déterminée par les longueurs des arêtes, choisies de façon que l'inégalité du triangle soit satisfaite pour chaque 2-face. Remarquons que si P est une variété de dimension n , le complémentaire du squelette de codimension 2 est une variété riemannienne plate (*cf.* le "développement" de la pyramide), non complète.

Les notions d'isométrie (linéaire par morceaux), de sous-polyèdre, de produit, s'introduisent naturellement. On définit aussi des polyèdres sphériques, en remplaçant dans la définition 3.1 $\mathbb{R}^k$ par S^k.

Rappelons aussi qu'un *cone métrique* est un espace métrique complet muni d'une action de $\mathbb{R}^*$ par homothéties. Ces homothéties ont un unique point fixe commun, appelé le *sommet* du cone ; l'ensemble des points à distance 1 du sommet est la *base*. Le cone de base L sera noté $C(L)$. Tout k-simplexe sphérique est la base d'un cone simplicial de $\mathbb{R}^{k+1}$, et tout polyèdre sphérique la base d'un *cone polyèdral*, notion que le lecteur dégagera sans peine.

Exemples 3.2.- Si $\sigma^\ell \subset \sigma^k$ est une ℓ-face d'un simplexe σ^k de $\mathbb{R}^k$, le *cone normal* $C^\perp(\sigma^\ell, \sigma^k)$ est formé des rayons issus d'un $q \in \mathrm{int}(\sigma^\ell)$, orthogonaux à σ^ℓ et pointant dans σ^k. Sa base est un simplexe sphérique noté $L(\sigma^\ell, \sigma^k)$ et $L(\sigma^\ell) = \bigcup_{\sigma^k \supset \sigma^\ell} L(\sigma^\ell, \sigma^k)$ est un polyèdre sphérique, homéomorphe au lien des topologues. Le cone métrique $C(L(\sigma^\ell))$, noté aussi $C^\perp(\sigma^\ell)$, est appelé le *cone normal* à σ^ℓ.

L'*angle dièdre intérieur* (σ^ℓ, σ^k) (noté parfois en abrégé (ℓ,k)) est la mesure de $L(\sigma^\ell, \sigma^k)$ dans $S^{k-\ell-1}$, normalisée en décidant que toutes les sphères sont de volume 1. L'*angle dièdre extérieur* $(\sigma^\ell, \sigma^k)^*$ est la mesure du simplexe sphérique formé des vecteurs de $S^{k-\ell-1}$ qui font un angle obtus avec ceux de $L(\sigma^\ell, \sigma^k)$.

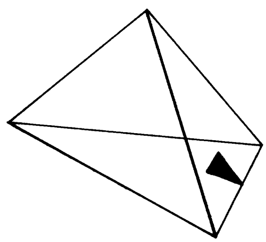

Fig. 2

Avec des arguments de régionnement, on prouve les faits élémentaires suivants :

Lemme 3.3.- i) *Pour tout* k-*simplexe*, $\sum_{\sigma^0 \subset \sigma^k} (\sigma^0, \sigma^k)^* = 1$

ii) *Si* $\sigma^\ell \subset \sigma^k$, $\sum_{\sigma^\ell \subset \sigma^j \subset \sigma^k} (\sigma^\ell, \sigma^j)(\sigma^j, \sigma^k)^* = 1$ *(avec la convention* $(\sigma^j, \sigma^j) = (\sigma^j, \sigma^j)^* = 1$).

L'expression du volume d'un n-simplexe euclidien en fonction des arêtes fait intervenir un déterminant d'ordre $n+2$, dit déterminant de Cayley (*cf.* [Br 1], t. 2). Celle du volume d'un simplexe sphérique, étudiée par Schläfli ([Sc]), ne passe pas pour simple ; elle fait intervenir le dilogarithme. D'où l'utilité des formules variationnelles ci-dessous. La première, due à Regge ([R], *cf.* [C-M-S 2], §2), équivaut à la nullité du flux des champs constants à travers σ^n, la seconde, due à Schläfli (*cf.* [Kn]) est l'analogue infinitésimal de la formule de Gauss-Bonnet pour les triangles sphériques. Le signe ' désigne la différentiation par rapport aux longueurs des arêtes.

Lemme 3.4.- i) *Si* σ^n *est un* k-*simplexe euclidien*,

$$\sum_{\sigma^{n-2}\subset\sigma^n} (\sigma^{n-2}, \sigma^n)' \mathrm{vol}(\sigma^{n-2}) = 0 .$$

ii) *Si* $L(\sigma^0, \sigma^n)$ *est un simplexe sphérique*,

$$(\sigma^0, \sigma^n)' = \sum_{\sigma^0\subset\sigma^{n-2}\subset\sigma^n} (\sigma^0, \sigma^{n-2})(\sigma^{n-2}, \sigma^n)' .$$

Nous sommes maintenant en mesure d'introduire et d'étudier les analogues polyèdraux des courbures de Lipschitz - Killing. La caractéristique d'Euler - Poincaré d'un polyèdre est donnée par $\sum_k (-1)^k \operatorname{card}\{\sigma^k\}$. Compte tenu du lemme 3.3 , i) appliqué à chaque simplexe, elle apparaît comme la masse totale d'une somme de mesures de Dirac portées par les sommets, la masse correspondant au sommet σ^0 étant

(3) $$\sum_{\sigma^k\supset\sigma^0} (-1)^k (\sigma^0, \sigma^k)^* \qquad \text{(voir par exemple [Ba])}$$

Pour introduire un analogue polyèdral des courbures de Lipschitz - Killing, satisfaisant à 2.2, i) et ii), remarquons que si $p \in \sigma^i$ est un point d'un polyèdre, alors p admet un voisinage isométrique à $U^i \times V^i$, où $U^i \subset \overset{\circ}{\sigma}{}^i$ est plat, et $V^i \subset C^\perp(\sigma^i)$. Cela conduit à introduire, généralisant (3),

(3') $$P(C^\perp(\sigma^{n-j})) = \sum_{\sigma^k\supset\sigma^{n-j}} (-1)^{n-j-k} (\sigma^{n-j}, \sigma^k)^* ,$$

ainsi que la "*mesure de courbure*"

$$\bar{R}^j(U) = \sum_{\sigma^{n-j}} P(C^\perp(\sigma^{n-j}))\mathrm{vol}(\sigma^{n-j} \cap U) .$$

C'est d'ailleurs bien $\bar{R}^j(X)$ qui apparaît dans la formule cinématique polyèdrale (*cf.* [C-M-S 3], th. 6). Cela montre *a posteriori* que $\bar{R}^j(X)$ ne dépend pas de la triangulation. Nous allons le vérifier directement, à l'aide d'une expression de $P(C^\perp(\sigma^{n-j}))$ en fonctions des angles dièdres intérieurs. Par des applications répétées de 3.3, ii), on obtient, en notant abusivement (p,q) les angles dièdres (σ^p, σ^q) , $P(C^\perp(\sigma^0)) = (-1)^n + \Sigma(-1)^{\ell+i}(0,i_1)(i_1,i_2)\dots(i_{\ell-1},i_\ell)$, la somme étant prise pour toutes les suites de simplexes telles que $\sigma^0 \subset \sigma^{i_1} \dots \subset \sigma^{i_\ell} \subset \sigma^i$. On en déduit

(4) $$P(C^\perp(\sigma^0)) = \varphi(0) + \Sigma(-1)^{\ell+i_\ell}(0,i_1)\dots(i_{\ell-1},i_\ell)\varphi(i_\ell)$$

où $\varphi(p) = 1 - \chi(L(\sigma^p))$ en général, $\varphi(p) = 1$ si σ^p est maximal. Avec les mêmes notations, on a de même

(4') $$P(C^\perp(\sigma^k)) = \varphi(k) + \Sigma(-1)^{\ell+i_\ell}(k,k+i_1)\dots(k+i_{\ell-1},k+i_\ell)\varphi(k+i_\ell) .$$

En particulier, si X est une variété PL, $\varphi(p) = (-1)^{n-p}$ si $p < n$ et $\varphi(n) = 1$; si de plus la métrique polyèdrale est plate au voisinage de σ^k , $P(C^\perp(\sigma^k)) = 0$, ce qui prouve que ces courbures polyèdrales ne dépendent pas du choix de la triangulation donnant la métrique. On obtient aussi sans difficulté l'analogue suivant de 2.2, ii)

Lemme 3.5.- $\bar{R}^j(X^1 \times X^2) = \sum_{k+\ell=j} \bar{R}^k(X^1)\bar{R}^\ell(X^2)$. *En particulier, si* X^2 *est plat,* $\bar{R}^k(X^1 \times X^2) = 0$ *pour* $k > \dim X^2$.

Toujours quand X est une variété, on voit que $P(C^\perp(\sigma^{n-1})) = 0$ et $P(C^\perp(\sigma^{n-2})) = 1 - \sum_{\sigma^n \supset \sigma^{n-2}} (n-2,n)$, puisque $(k,k+1) = 1/2$ (comparer à l'introduction). C'est sous cette forme que Regge avait introduit l'analogue polyèdral de l'intégrale de la courbure scalaire. Cela suggère une expression de $P(C^\perp(\sigma^k))$ en fonction des angles de dimension paire uniquement. On va voir aussi que, comme dans le cas lisse, il n'y a pas de courbures de Lipschitz - Killing impaires.

THÉORÈME 3.6.- *Si* k *est impair,* $P(C^\perp(\sigma^{n-k})) = 0$. *Si* k *est pair, on a la formule*

(5) $$P(C^\perp(\sigma^{n-k}) = 1 + \sum_\ell (-1)^\ell (n-k, n-k+2i_1) \dots (n-k+2i_{\ell-1}, n-k+2i_\ell) \ ,$$

la somme étant prise pour les suites de la forme $\sigma^{n-k} \subset \sigma^{n-k+2i_1} \dots \subset \sigma^{n-k+2i_\ell}$

Preuve.- Soit ψ l'une des expressions (4) ou (5) vues comme fonctions sur l'ensemble des cones polyèdraux. En utilisant l'additivité de χ , on vérifie que $\psi(A \cup B) = \psi(A) + \psi(B) - \psi(A \cap B)$. Il suffit donc de montrer l'égalité de (4) et (5) pour les cônes s'appuyant sur un simplexe sphérique. S'agissant d'expressions qui sont nulles pour les cônes plats, il suffit de montrer qu'elles ont même dérivée en fonction des longueurs des arêtes. Mais d'après 3.4, ii), (5) a pour dérivée (dans le cas de $P(C^\perp(\sigma^0))$ en dimension paire, mais le cas général est semblable)

$$\sum_\ell (-1)^\ell (0,2)'(2,2i_2) \dots (2i_{\ell-1}, 2i_\ell) \ .$$

De même, et en tenant compte de ce que $(k,k+1) = 1/2$, on voit que (4) a pour dérivée

$$(-1)^{\ell+i} (0,2)'(2,i_2) \dots (i_{\ell-1}, i_\ell)\varphi(i_\ell) \ .$$

Au signe près, les coefficients de $(0,2)'$ dans ces deux sommes sont les expressions (5) et (4) pour le cône $C^\perp(\sigma^2)$ (si $(0,2) = (\sigma^0, \sigma^2)$. Un argument de récurrence sur la dimension des cônes permet de conclure. □

Terminons ce paragraphe par l'énoncé de deux propriétés qui nous serviront au §5. La première est une retombée de la démonstration ci-dessus, la seconde nécessite en plus le lemme de Regge 3.4, i).

Lemme 3.7.- *Soit* C_t^{2m} *une famille à un paramètre de cônes polyèdraux de dimension* $2m$, *telle que le cône* C_0^{2m} *soit plat. Alors les* $(m-1)$ *premières dérivées de* (5) *sont nulles, et la* m-ième *est donnée par*

$$(-1)^m \sum (0,2)'(2,4)' \dots (2m-2,2m)' \ .$$

Lemme 3.8.- *Soit* X_t *une famille à un paramètre de métriques polyédrales. Alors* $R^j(X_t)' = P(C^{\perp}(\sigma^{n-j})|\sigma^{n-j}|'$. *(On désigne par* $|\sigma^k|$ *le* k-*volume euclidien de* σ^k)

4. DES POLYÈDRES AUX VARIÉTÉS : TRIANGULATIONS ÉPAISSES

Pour éviter le phénomène du lampion évoqué plus haut, il nous faut approcher les variétés par des polyèdres dont les simplexes ne s'écrasent pas trop. L'approximation se fera au sens de Lipschitz.

DÉFINITION 4.1 (*cf.* [Gr], [Pa]).- *La* distance de Lipschitz *de deux espaces métriques* X *et* Y *est la borne inférieure des nombres* $|\log \operatorname{dil} f| + |\log \operatorname{dil} f^{-1}|$ *quand* f *parcourt l'ensemble des homéomorphismes lipschitziens de* X *dans* Y .

La *maille* η et l'*épaisseur* Θ d'un k-simplexe σ^k sont définies par $\eta = \sup\limits_{\sigma^1 \subset \sigma^k} |\sigma^1|$ et $\Theta = \inf\limits_{\sigma^\ell \subset \sigma^k} |\sigma^\ell|\eta^{-1}$ respectivement. Minorer l'épaisseur revient à minorer les angles dièdres ; l'ensemble des classes d'isométries de k-simplexes de maille $\leq \eta_0$ et d'épaisseur $\geq \Theta > 0$ est compact pour la distance de Lipschitz. La maille et l'épaisseur d'un polyèdre triangulé X sont par définition (comparer à [Wh] IV. 14)

$$\eta(X) = \sup_{\sigma^1 \subset X} |\sigma^1| \quad \text{et} \quad \Theta(X) = \inf_{\sigma^1 \subset X} (\sigma^k) .$$

Lemme 4.2.- *Pour tout polyèdre métrique* X , *il existe un* $\Theta > 0$, *tel que, pour tout* $\eta > 0$, X *admette une triangulation de maille inférieure à* η *et d'épaisseur supérieure à* Θ .

La preuve serait un commentaire du dessin ci-contre.

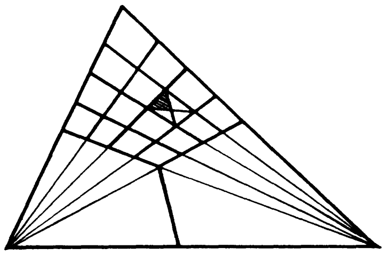

fig. 3

Soit maintenant (M,g) une variété riemannienne compacte de classe C^3 . Après changement d'échelle, on peut supposer que $\exp_x | B(0,1) \subset M_x$ est un difféomorphisme pour tout x . Soit σ^n un simplexe de M_x ayant un sommet en 0 ; soient $(q_i)_{1 \leq i \leq n}$ les autres sommets, ℓ_{ij} les longueurs des arêtes. Alors (*cf.* (2)), pour tout $\Theta_0 > 0$, il existe un $\eta_0 > 0$ et une constante $c > 0$ tels que, si $\eta(\sigma^n) < \eta_0$ et $\Theta(\sigma^n) > \Theta_0$ les nombres $\tilde{\ell}_{ij} = \operatorname{dist}(\exp_x q_i , \exp_x q_j)$ vérifient l'inégalité $|\tilde{\ell}_{ij} - \ell_{ij}| \leq c\,\eta^2$, et sont les arêtes d'un n-simplexe euclidien (ce dernier point peut se voir en utilisant les déterminants de Cayley, ou un argument de fonctions implicites). En utilisant cette remarque et le lemme 4.1, on montre le résultat suivant.

Scholie 4.3.- *Soit* (M^n,g) *une variété riemannienne compacte. Il existe un* $\Theta > 0$ *tel que, pour tout* $\eta > 0$, *on ait une triangulation* $f : K \longrightarrow M$ *possédant les* *propriétés suivantes :*

i) *pour tout* k-*simplexe* σ^k *de* K , *de sommets* σ_i^o $(0 \leq i \leq k)$, *il existe un* k-*simplexe* euclidien *dont les arêtes ont pour longueurs les nombres* $\mathrm{dist}_M(f(\sigma_i^o), f(\sigma_j^o))$;

ii) *le polyèdre métrique ainsi défini, noté* M_η^n , *a une maille inférieure à* η *et une épaisseur supérieure à* Θ ;

iii) *la distance de Lipschitz de* M_η *à* M *tend vers zéro quand* η *tend vers zéro.*

La preuve de iii) utilise la technique des centres de masse riemaniennien, *cf.* [B-K], ch. 8.

5. ÉNONCÉ ET PREUVE DU RÉSULTAT PRINCIPAL DE [C-M-S 2]

(M,g) est une variété riemannienne compacte de classe C^3 à laquelle on applique 4.3. On désignera par $R_\eta^j(\sigma^{n-j})$ les $P(C^\perp(\sigma^{n-j}))$ associés à M_η , et par $\bar{R}_\eta^j$ la mesure de courbure polyèdrale correspondante (*cf.* (3)'). Dans tout ce qui suit, c sera une constante générique qui dépend uniquement de Θ et des normes uniformes du tenseur de courbure et de sa dérivée covariante. Les ouverts considérés seront à bord lisse par morceaux.

THÉORÈME 5.1.- *Il existe un* $\eta_0 > 0$ *tel que, pour toute approximation polyèdrale* M_η^n *de maille inférieure à* η_0 *et d'épaisseur supérieure à* Θ ,

$$|\bar{R}_\eta^j(U) - \bar{R}^j(U)| \leq c(\sqrt{\eta}\ |U| + |V_{\sqrt{\eta}}(\partial U)|) \ .$$

Notons que pour j impair, le résultat est immédiat d'après 3.6.

5.2. <u>Cas de la dimension</u> 2 .- C'est une conséquence immédiate de (2), qui donne, le nombre de simplexes aboutissant à un sommet donné étant borné une fois pour toutes,

$$R_\eta^2(\sigma^o) = \frac{1}{3}K(\sigma^o)\,|\mathrm{Etoile}(\sigma^o)| + 0(\eta^3)$$

soit en sommant sur les $\sigma^o \subset U$ (U contient $0(\eta^{-2})$ 2-simplexes),

$$\bar{R}_\eta^2(U) = \bar{R}^2(U) + 0(\eta)\ (|U| + |\partial U|)\ \square$$

En dimension supérieure, un tel argument direct se heurte à une difficulté technique, la "trigonométrie" des simplexes étant malaisée (*cf.* [Sc]), et surtout à une difficulté conceptuelle : même si on peut trouver des simplexes curvilignes qui soient de bons candidats à une comparaison avec ceux de M_η , les angles dièdres de dimension supérieure à 2 d'un tel simplexe dépendent du point de l'arête correspondante.

On contourne ces difficultés comme suit. En remplaçant chaque $P(C^\perp(\sigma^{n-j}))$ par un développement de Taylor au voisinage d'un cône plat, on approche $\bar{R}_\eta^j$ par un

polynôme par rapport à la courbure, qui dépend bien sûr de la triangulation. Puis on contrôle les différences des polynômes provenant de triangulations différentes. Cela permet de voir que ces polynômes convergent vers un polynôme $0(n)$-invariant, que l'on identifie grâce au théorème 2.4.
Modulo un lemme de théorie de la mesure (lemme 6.1 de [C-M-S 2], l'énoncé 5.1 se ramène au suivant.

THÉORÈME 5.3.- *Sous les hypothèses de* 5.1, *si* $r = \sqrt{\eta}$, *on a*

$$|R^j(x) - \bar{R}^j_\eta(B(x,r))/|B(x,r)|| \leq c\sqrt{\eta}$$

Examinons d'abord le cas de R^n , où n est pair.

Pour chaque sommet σ^0 de la triangulation donnant M^n_η , on peut interpoler entre le cône métrique $c^\perp_\eta(\sigma^0)$ de M^n_η , dont les angles de dimension 2 sont notés $(0,2)_\eta$, et le cône plat $C(L)$ dont la base est donnée par la triangulation induite sur $S^{n-1} \subset M_{\sigma_0}$, d'angles $(0,2)$, en introduisant la famille de cônes d'angles $(0,2) + t((0,2)_\eta - (0,2))$. En calculant $P(C^\perp_\eta(\sigma^0)) - P(C(L)) = R_\eta(\sigma^0)$ au moyen de la formule de Taylor à l'ordre $n/2$, utilisant (2), 3.7 et l'expression des dérivées $(2p-2,2p)'$, on obtient une majoration de la forme

$$|R^n_\eta(\sigma^0) - P_j((0,\sigma^2_1), \ldots (0,\sigma^2_q), K_1|\sigma^2_1|, \ldots K_q|\sigma^2_q|)| \leq C^{n+1}\eta^{n+1}$$

où P_j est C^3 par rapport aux angles $(0,\sigma^2_i)$ des deux-simplexes contenant σ^0 , et polynomiale de degré total $n/2$ par rapport aux $K_i|\sigma|^2_i$ (on a désigné par K_i la courbure sectionnelle en σ^0 du plan tangent aux arêtes de σ^2_i issues de σ^0 . De plus, P_n ne dépend que de la structure combinatoire de $C^\perp(\sigma^0)$.

Visant une approximation en mesure de R^n , nous allons tenir compte de la contribution de "beaucoup" de sommets. Pour chaque boule $B(x,r)$ ($r = \sqrt{\eta}$, donc r/η est grand), on relève dans M_x , grâce à $\exp^{-1}_x$ les sommets des simplexes qui rencontrent $B(x,r)$. Tenant compte de la structure combinatoire, on obtient un polyèdre triangulé $\tilde{T} \subset B(0,r+\eta) \subset M_x$. On recalcule chaque P^n en remplaçant les courbures sectionnelles en σ^0_α par leurs homologues en x , les angles simplexes par leurs homologues pour $\tilde{T}$. On obtient alors un polynôme $P^n(\sigma^0_\alpha,x)$ par rapport à la courbure en x , et on fait une erreur majorée par $cr\eta^n$. Soit alors

$$P(r,T) = |B(x,r)|^{-1} \sum_{\sigma^0_\alpha} P(\sigma^0_\alpha,x) \ . \tag{6}$$

Comme $B(x,r)$ contient $0(r/\eta)^n$ sommets σ^0_α , on a

$$|P(r,T) - |B(x,r)|^{-1}\bar{R}^n_\eta(B(x,r))| \leq c(\eta^{n+1} + c'\eta^n r)\left(\frac{r}{\eta}\right)^n r^{-n} \leq c(\eta + r) \ .$$

On ne sait rien sur $P(r,T)$, sinon que c'est un polynôme de degré $n/2$ par rapport au tenseur de courbure en x , et que ce polynôme ne dépend que de la triangulation de $B(x,r)$. Et comme le groupe orthogonal $0(M_x)$ agit sur les polyèdres de $B(0,r+\eta) \subset M_x$, donc sur ceux de $B(x,r+\eta)$ via $\exp_x$, on a

(7) $$g \cdot P(r,T) = P(r,gT) \quad \text{pour tout } g \text{ de } O(M_x) \ .$$

Fin de la preuve pour R^n *en dimension* n *, modulo un lemme sur les triangulations.*

Lemme 5.4.- *Soient* T_1 *et* T_2 *deux triangulations épaisses de* M^n *de maille inférieure à* η *. Il existe alors une constante* c *telle que*

$$|P(r,T_1) - P(r,T_2)| \leq c(\frac{\eta}{r}+r) \ .$$

Ce lemme admis, notons que nous sommes ramenés à un problème sur les germes de métriques et les germes de triangulations en $0 \in \mathbb{R}^n$. Tout R de $\mathcal{R}_n$ étant la courbure en 0 d'un germe de métrique tel que $g(0) = \Sigma\,(dx^i)^2$ (faire un calcul direct en coordonnées), $P(r,T)$ définit un polynôme sur $\mathcal{R}_n$. D'après 5.4, ces polynômes convergent quand r et η/r tendent vers zéro, et d'après (7), le polynôme limite est $O(n)$-invariant. Si la métrique g de $B(0,r)$ est de la forme $dt^2 + g_1$, où g_1 est une métrique $(n-1)$-dimensionnelle, en prenant pour T un polyèdre produit. Alors, d'après 3.5, on a $P(r,T) = 0$, et le polynôme limite est nul. Enfin, en triangulant $(S^2)^{n/2}$ par des produits de polyèdres de dimension 2 , et en appliquant 3.5 et 2.2 ii), ainsi que le résultat déjà obtenu en dimension 2, on voit que la condition de normalisation est satisfaisante. D'après le théorème d'Abramov-Gilkey (2.4), le polynôme limite est égal à R^n . □

Reste à prouver 5.4. Ce lemme est lui-même la conséquence d'un lemme "élémentaire", mais très technique, sur les triangulations.

Lemme 5.5.- *Soient* T_1 *et* T_2 *deux polyèdres triangulés contenant* $B(0,r)$ *, de mailles* η_1 *et* η_2 $(\eta_1 \leq \eta_2)$ *et d'épaisseur* $\geq \Theta$ *. Alors il existe une constante* $c(\Theta)$ *et des polyèdres triangulés* T_3 *et* T_4 *, contenus dans* $B(0,r)$ *, de mailles inférieures à* $\frac{3}{2}\eta_1$ *et* $\frac{3}{2}\eta_2$ *, d'épaisseur* $\geq c(\Theta)$ *, tel que*

i) $T_1 = T_{1+2}$ $(1 = 1,2)$ *sur* $B(0,r-8\eta_2)$ *;*

ii) T_3 *et* T_4 *aient même bord, et coïncident au voisinage de ce bord .*

On voit que 5.5 implique 5.4 en remarquant que $R^n(T_3) = R^n(T_4)$, puisque $\partial T^3 = \partial T^4$.

<u>Indications sur la preuve dans le cas général</u>. La construction des polynômes $P(r,T)$ et l'identification de leur limite à R^j se font d'une façon entièrement analogue. Par contre, l'utilisation du lemme 5.5 pour démontrer 5.4 est plus délicate : il faut contrôler $R^j(T_3) - R^j(T_4)$ en utilisant le lemme de Regge dans sa version 3.8 (*cf.* [C-M-S 2], p. 433-34).

COROLLAIRE (Théorème de Gauss-Bonnet).- *Si* (M^n,g) *est une variété riemannienne compacte de dimension paire, alors*

$$\chi(M) = \int_V R^n \, v_g \ .$$

Preuve : On utilise l'approximation polyèdrale de M . D'après 5.1, $\bar{R}^n(M) = \lim_{\eta\to 0} \bar{R}^n_\eta(M_\eta)$. Mais, d'après la définition même de $\bar{R}^n_\eta$, on a $\bar{R}^n_\eta(M_\eta) = \chi(M)$. □

Signalons enfin que le théorème 5.1 s'étend aux variétés à bord.

6. ANALYSE SUR LES POLYÈDRES

Un autre résultat remarquable de Cheeger est le fait que les courbures de Lipschitz polyèdrales ont une interprétation spectrale analogue à celle de leurs homologues riemanniennes. Disons d'abord ce qui se passe dans le cas lisse. Soit Δ^p le Laplacien de Hodge - de Rham pour les p-formes de M , $(\lambda^p_k)_{k\geq 0}$ son spectre. Un argument classique de théorie des opérateurs elliptiques montre que, si $t > 0$, $\sum_p (-1)^p \operatorname{tr}(\exp(-t\,\Delta^p) = \chi(M^n)$. (*cf.* [A]). D'autre part, $\operatorname{tr}(\exp(-t\,\Delta^p) = \sum_k \exp(-t\,\lambda^p_k)$ admet le développement asymptotique

$$\operatorname{tr}(\exp(-t\,\Delta^p) \sim t^{-n/2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_M u^p_k, v_g\right) t^k \,, \tag{8}$$

où u_k est un polynôme universel par rapport à la courbure et ses dérivées covariantes (*cf.* [CV], [Gi]). On en déduit que $\chi(M^n) = \int_M \sum_{p=0}^{n} (-1)^p u^p_{n/2}\, v_g$. En fait, on a l'égalité ponctuelle $R^n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p u^p_{n/2}$, découverte par Patodi, qui peut se démontrer à l'aide du théorème d'Abramov - Gilkey. Les courbures de Lipschitz - Killing se récupèrent de la même façon. Plus précisément

THÉORÈME 6.1 (Donnelly, [D]).- *Il existe des constantes* $\alpha(j,p)$ *telles que, pour toute variété riemannienne* (M^n,g) , $R^{2j} = \sum_p \alpha(j,p)\, u^p_j$.

Remplaçons maintenant (M^n,g) par une variété polyèdrale X . Nous avons vu que X privée de son squelette de codimension 2 est une variété plate. On trouvera dans [C 1] une théorie de Hodge L^2 pour de telles variétés. On se ramène en fait par des suspensions successives au cas des variétés à singularités coniques. Alors ([C 2] th. 7.2 et 8.2)

i) on a les développements asymptotiques

$$\operatorname{tr}(\exp(-t\,\Delta^p) \sim t^{-n/2} \sum_{k=0}^{n} a^p_k\, t^{k/2} \,,$$

où les a^p_k dépendent des aires des $(n-k)$-simplexes de X et de leurs liens (comparer à (8)) ;

ii) l'analogue du théorème de Donnelly est vrai, c'est-à-dire

$$\bar{R}^{2j}(X) = \alpha(j,p)\, a^p_{2j} \,.$$

Notons que le théorème 3.6 a d'abord été obtenu de cette façon !

Cheeger développe aussi une théorie L^2 pour l'opérateur de la signature, soit $*\,\Delta^{2\ell}$, sur une variété polyèdrale orientée de dimension 4ℓ. D'après le même argument classique qu'au début de ce paragraphe,
$\operatorname{sign}(X) = \operatorname{tr}(*\exp(-t\,\Delta^p)) = \lim_{t\to 0} (\operatorname{tr}(*\exp(-t\,\Delta^{2\ell}))$. Si, comme dans la démonstration analytique du théorème de la signature (*cf.* [A]), on écrit que $\operatorname{sign}(X)$ est égal au terme constant du développement asymptotique de $\operatorname{tr}(*\exp(-t\,\Delta^{2\ell})$, on arrive à la formule ([C 2], th. 9.3)

$$\operatorname{sign}(X) = \sum_{\sigma^0} \eta(L(\sigma^0))$$

qui donne la signature en fonction des η-*invariants* des liens des sommets. C'est une formule combinatoire (prendre la métrique où toutes les arêtes de X sont de longueur 1, et comparer à [MP]), mais la définition du η-invariant est hautement non triviale (*cf.* [A], [Mu], [Gi]) et son calcul difficile ($\eta(L(\sigma^0))$ risque fort par exemple d'être irrationnel). L'analogue de 5.1, pour la signature, à savoir la convergence des mesures $\sum_{\sigma^0} \eta(L(\sigma^0))\delta_{\sigma^0}$ vers l'intégrand de la signature dans le cas lisse, est un problème ouvert...

Signalons enfin que la géométrie des variétés polyèdrales, étudiées pour elles-mêmes, pose des problèmes intéressants. On dira qu'une variété polyèdrale est à courbure non-négative si pour tout $(n-2)$-simplexe de X, $P(C^\perp(\sigma^{n-2})) \geq 0$, ou ce qui revient au même, si le lien $L(\sigma^{n-2})$ a une longueur inférieure à 2π. Vu le résultat suivant, analogue à un théorème de D. Meyer ([G-M]) sur les variétés à opérateur de courbure positif, cette propriété semble plus forte que la positivité de la courbure sectionnelle.

THÉORÈME 6.2 (Cheeger, [C 3]).- *Si* X^n *est une variété polyèdrale à courbure non-négative,* $b^i(X^n) \leq \binom{n}{i}$.

La démonstration se fait par des arguments à la Bochner, et utilise une formule de Weitzenböck pour les formes L^2. Une démonstration géométrique serait évidemment souhaitable. Notons (mais la situation semble moins difficile), que l'analogue polyèdral du théorème de Cartan - Hadamard est vrai, et se démontre géométriquement ([St]).

BIBLIOGRAPHIE

[A-W] C. ALLENDOERFER and A. WEIL - *The Gauss - Bonnet theorem for Riemannian polyhedra*, Trans. Amer. Math. Soc. VI, 53, 101-129.

[A] M.F. ATIYAH - *The Heat Equation in Riemannian Geometry, after Patodi, Gilkey, etc.*, Sém. Bourbaki 1973/74, exposé n° 436, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 431(1975), 1-11.

[A-B-P] M.F. ATIYAH, R. BOTT and V.K. PATODI - *On the Heat Equation and the Index Theorem*, Inv. Math 19 (1973), 279-330.

[Ba] T. BANCHOFF - *Critical points and curvature for embedded polyhedra*, J. Diff. Geom. 1 (1967), 245-256.

[BB] L. BÉRARD BERGERY - *La courbure scalaire des variétés riemanniennes*, Sém. Bourbaki 1979/80, exposé n° 556, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 842(1981), 225-245.

[Br 1] M. BERGER - *Géométrie*, tomes 2 et 3, Cedic-Nathan, Paris, 1980.

[Br 2] M. BERGER - *La géométrie métrique des variétés riemanniennes*, Colloque Elie Cartan, Astérisque, hors série (1985), 9-66.

[B-G] M. BERGER et B. GOSTIAUX - *Géométrie différentielle*, Armand Colin, Paris, 1972.

[B-K] P. BUSER et H. KARCHER - *Gromov's almost flat manifolds*, Astérisque 81, (Société Mathématique de France).

[C 1] J. CHEEGER - *On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds*, Proc. Symp. Pure Math. A.M.S. 36 (1980), 91-145.

[C 2] J. CHEEGER - *Spectral Geometry of Singular Riemannian Spaces*, J. Diff. Geom. 18 (1983), 575-657.

[C 3] J. CHEEGER - *A Vanishing Theorem for Piecewise Constant Curvature Spaces*, pré-publication Stony Brook.

[C-M-S 1] J. CHEEGER, W. MÜLLER, R. SCHRADER - *Lattice Gravity or Riemannian Structure on Piecewise Linear Spaces*, in Unified theories of elementary particles (Heisenberg Symposium 1981), Lect. Notes in Phys., Breitenlohner P., dürr, H.P. (eds), Springer, 1982.

[C-M-S 2] J. CHEEGER, W. MÜLLER, R. SCHRADER - *On the Curvature of Piecewise Flat Spaces*, Commun. Math. Phys. 92 (1984), 405-454.

[C-M-S 3] J. CHEEGER, W. MÜLLER, R. SCHRADER - *Kinematic and tube formulas for Piecewise Linear Spaces*, pré-publication Stony Brook.

[Ch 1] S.S. CHERN - *A simple intrinsic proof of the Gauss - Bonnet formula for closed Riemannian manifolds*, Ann. Math. 45 (1944), 747-752.

[Ch 2] S.S. CHERN - *On the kinematic formula in integral geometry*, J. Math. Mech. 16 (1966), 101-118.

[CV] Y. COLIN de VERDIÈRE - *Propriétés asymptotiques de l'équation de la chaleur sur une variété compacte, d'après P. Gilkey*, Sém. Bourbaki 1973/74, exposé n° 439, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 431(1975), 58-68.

[D] H. DONNELLY - *Heat equation and the volume of tubes*, Inv. Math. 29(1975), 239-243.

[F] H. FEDERER - *Curvature measures*, Trans. Amer. Math. Soc., 93(1959), 418-491.

[Fe] B.V. FEDOSOV - *Asymptotic formulas for the eigenvalues of the Laplace operator for a polyhedron*, Dodkl. Akad. Nauk, SSSR, 157 (1964), 536-538.

[G-M] S. GALLOT, D. MEYER - *Opérateur de courbure et Laplacien des formes différentielles*, J. Math. Pures et Appl., 54 (1975), 285-304.

[Gi] P. GILKEY - *Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah - Singer Index Theorem*, Publish or Perish, Wilmington, 1984.

[Gr] M. GROMOV - *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu, Cedic-Nathan, Paris, 1980.

[Ha] H. HADWIGER - *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche and Isoperimetrie*, Springer-Verlag, Berlin, 1957.

[H] D. HILBERT - *Die Grundlagen der Physik*, Nach. Ges. Wiss. Göttingen (1915), 461-472.

[K] H. KNESER - *Der Simplexinhalt in der nichteuklischen Geometrie*, Deutsch. Math. 1 (1936), 337-340.

[La] R. LANGEVIN - *Courbures, feuilletages et surfaces (mesures et distributions de Gauss)*, thèse, Orsay, 1980.

[MP] R. MacPHERSON - *The combinatorial formula of Gabrielov, Gelfand and Losik for the first Pontrjagin class*, Sém. Bourbaki 1976/77, exposé n° 497, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 677(1978), 105-124.

[M-S-T] C.W. MISNER, K.S. THORN, J.A. WHEELER - *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973.

[Mu] W. MÜLLER - *Spectral theory for Riemannian manifolds with cusps and a related trace formula*, preprint, I.H.E.S., 1982.

[Pa] P. PANSU - *Effondrement des variétés riemanniennes, d'après J. Cheeger et M. Gromov*, Sém. Bourbaki 1983/84, exposé n° 618, Astérisque 121-122 (1985), 63-82.

[P] V.K. PATODI - *Curvature and the Eigenforms of the Laplace Operator*, J. Diff. Geom. 5(1971), 233-249.

[R] T. REGGE - *General Relativity without coordinates*, Nuovo Cimento 19 (1961), 551-571.

[Ra] T. RADO - *Length and area*, Amer. Math. Soc. Coll. Publications, 30(1948).

[S] L.A. SANTALO - *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison-Wesley, Reading, 1976.

[Sc] L. SCHLÄFLI - *Gesammelte Werke*, Birkhaüser.

[Sp] M. SPIVAK - *Differential Geometry*, t. 5, Publish or Perish.

[St] D. STONE - *Geodesics in piecewise linear manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., 215 (1976), 1-44.

[S-W] R. SULANKE, P. WINTGEN - *Differential Geometrie and Faserbündel*, Birkhaüser, Berlin, 1972.

[W] H. WEYL - *On the volume of tubes*, Amer. J. of Math. 61 (1939), 461-472.

[Wh] H. WHITNEY - *Geometric Integration Theory*, Princeton University Press, Princeton, 1957.

[Wi] P. WINTGEN - *Normal cycle and integral curvature for polyhedra in Riemannian manifolds*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolya, Budapest, 1978.

Jacques LAFONTAINE

Université de Paris 7
U.E.R. de Mathématiques
Laboratoire Associé au CNRS n° 212
Tour 45-55 - 5e étage
2 place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05