JACQUES DIXMIER

Quelques résultats de finitude en théorie des invariants

Astérisque, tome 145-146 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 659, p. 163-175
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1985-1986__28__163_0>

Séminaire BOURBAKI
38ème année, 1985-86, n° 659

Février 1986

QUELQUES RÉSULTATS DE FINITUDE EN THÉORIE DES INVARIANTS
[d'après V.L. Popov]

par Jacques DIXMIER

INTRODUCTION

0.1. Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie. On note $\mathbb{C}[V] = \oplus_{d\geq 0} \mathbb{C}[V]_d$ l'algèbre graduée des fonctions complexes polynomiales sur V.

Soient G un groupe, ρ une représentation linéaire de G dans V. (Nous parlerons de la représentation ρ, ou (ρ,V), ou (G,V), ou du G-module V). Alors G agit de manière naturelle dans l'algèbre graduée $\mathbb{C}[V]$ par automorphismes. On notera $\mathbb{C}[V]^G = \oplus_{d\geq 0} C[V]_d^G$ la sous-algèbre graduée formée des éléments G-invariants.

0.2. Dans tout l'exposé, G sera un groupe semi-simple complexe connexe. Il sera sous-entendu que les représentations considérées sont rationnelles de dimension finie. On sait que l'algèbre $\mathbb{C}[V]^G$ est de type fini.

0.3. L'étude de l'algèbre $\mathbb{C}[V]^G$, souvent très difficile, a commencé sur des exemples vers 1840. Au 19^e siècle, on a beaucoup approfondi le cas où $G = SL(n,\mathbb{C})$ (avec surtout $n = 2,3,4$), et où ρ est la représentation naturelle de G dans l'espace des formes à n variables de degré donné. En effet, les invariants sont liés alors à des propriétés de géométrie projective (sur la droite pour $n = 2$, dans le plan pour $n = 3$, dans l'espace pour $n = 4$). Par exemple, prenons $G = SL(2,\mathbb{C})$, et faisons opérer naturellement G dans l'espace V_d des formes binaires (= polynômes homogènes en 2 variables) de degré d (on a $\dim V_d = d+1$). Pour $d = 0,1,2,3,4$, on a prouvé il y a longtemps que $\mathbb{C}[V_d]^G$ est une algèbre de polynômes (engendrée par $1,0,1,1,2$ éléments). Pour $d = 5,6$, on savait dès le 19e siècle que $\mathbb{C}[V_d]^G$ n'est plus une algèbre de polynômes (par exemple $\mathbb{C}[V_5]^G$ est de degré de transcendance 3, mais nécessite 4 générateurs liés par une relation).

0.4. L'algèbre $\mathbb{C}[V]^G$ dépend seulement de $\rho(G)$ (et non du couple (G,ρ)). On peut donc toujours supposer que G est simplement connexe, donc produit de groupes simples.

On peut aussi supposer, quand c'est commode, que ρ n'est pas triviale sur un composant simple de G (sinon, on passe à un quotient de G), autrement dit que ρ est localement injective. Le noyau $\operatorname{Ker}\rho$ de ρ est alors un sous-groupe fini de G.

(Attention : on passera souvent à des sous-quotients réductifs de G ; même si les propriétés ci-dessus sont vraies pour la représentation de départ, elles ne le sont plus nécessairement pour les sous-représentations du sous-quotient qu'on en déduit).

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des représentations de G (à équivalence près). Quand on dira qu'une propriété est vraie pour presque tout élément de $\mathcal{R}$, cela voudra dire bien entendu : dans le complémentaire d'une partie finie. De même, dire qu'une fonction sur $\mathcal{R}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ tend vers l'infini a un sens clair.

0.5. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $r = \dim\mathfrak{h}$ le rang de $\mathfrak{g}$, R le système de racines de $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ les racines 2 à 2 distinctes, P l'ensemble des poids entiers dominants, $\omega_1,\ldots,\omega_r$ les poids fondamentaux, W le groupe de Weyl. Les éléments de P sont les $n_1\omega_1 + \ldots + n_r\omega_r$ où $n_1,\ldots,n_r \in \mathbb{N}$.

Pour tout $\lambda \in P$, on note $V(\lambda)$ le G-module simple de plus grand poids λ. L'ensemble des représentations simples de G est ainsi en bijection avec P. "Pour presque toute représentation simple" signifie donc "sauf pour un nombre fini de valeurs de $\lambda \in P$" ; quand c'est commode, on peut toujours supposer alors que l'ensemble exceptionnel est l'ensemble des $n_1\omega_1 + \ldots + n_r\omega_r$ où les n_i sont majorés par des entiers fixés.

0.6. Si $V_1,\ldots,V_s$ sont des G-modules simples, de plus grand poids $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$, on appelle produit de Cartan de $V_1,\ldots,V_s$, et l'on note $V_1 . V_2 \ldots V_s$, le G-module $V(\lambda_1 + \ldots + \lambda_s)$. C'est canoniquement un sous-G-module de $V_1 \otimes \ldots \otimes V_s$.

0.7. Soit (ρ,V) une représentation de G. Soient $v \in V$, et G_v son stabilisateur. L'orbite Gv est une variété affine si et seulement si G_v est réductif. En particulier, si Gv est fermée, G_v est réductif.

Il existe un ouvert de Zariski de V tel que les stabilisateurs de ses points soient conjugués. On peut donc parler *du* stabilisateur générique de (ρ,V).

L'action de G dans V est dite stable (terminologie fâcheuse) si les orbites génériques sont fermées, ce qui entraîne que le stabilisateur générique est réductif.

[Ce qu'on vient de dire dans 0.7 reste valable pour G réductif].

Si G est à nouveau semi-simple, on a : l'action de G dans V est stable $\Longleftrightarrow$ le stabilisateur générique est réductif [11].

Pour presque tout G-module simple, le stabilisateur générique est égal au noyau [2].

0.8. Si Γ est un groupe algébrique, on note Γ^o sa composante neutre.

0.9. Si $M = \oplus_{i\geq 0} M_i$ est un espace vectoriel gradué sur $\mathbb{C}$, avec $\dim M_i < \infty$ pour tout i, on note $F(M,x)$ la série de Poincaré $\Sigma_{i\geq 0}(\dim M_i)x^i$ (x indéterminée, ou variable complexe).

PREMIÈRE PARTIE

1.1. Soit (ρ,V) une représentation de G. On dira que (ρ,V) est *bonne* si $\mathbb{C}[V]^G$ est une algèbre de polynômes (ou, ce qui revient au même, si $\mathbb{C}[V]^G$ est engendrée par des éléments homogènes algébriquement indépendants).

Soit ρ_0 une représentation triviale de G. Alors, évidemment, ρ est bonne si et seulement si $\rho\oplus\rho_0$ est bonne. *Dans tout l'exposé, nous supposerons sans le dire que les représentations de* G *considérées n'admettent pas de vecteur invariant non nul.*

1.2. Pour tous les groupes G *simples*, on connaît la liste complète des bonnes représentations (pour les représentations simples, *cf.* [5] ; pour les représentations non simples, *cf.* [1] et [12]). La liste est compliquée, mais on constate *a posteriori* que, pour G fixé, il n'y a qu'un nombre *fini* de bonnes représentations.

1.3. THÉORÈME (V.L. Popov [9]) (G non nécessairement simple, mais, rappelons-le, semi-simple).- G *n'a qu'un nombre fini de bonnes représentations.*

1.4. La méthode, qui va être esquissée, permet en principe de dresser effectivement, pour G donné, une liste finie de représentations contenant toutes les bonnes représentations.

1.5. Un résultat combinatoire.

Lemme [13].- *Soient* $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n \in \mathbb{Z}^p$. *Pour tout* $\beta\in\mathbb{Z}^p$, *on note* E_β *l'ensemble des* $(j_1,j_2,\dots,j_n)\in\mathbb{N}^n$ *tels que* $j_1\lambda_1+j_2\lambda_2+\dots+j_n\lambda_n=\beta$, *et l'on pose*

$$\Phi_\beta(t_1,t_2,\dots,t_n) = \Sigma_{(j_1,\dots,j_n)\in E_\beta}\ t_1^{j_1}t_2^{j_2}\dots t_n^{j_n}$$

(Φ_β *est une fraction rationnelle en* $t_1,\dots,t_n$).

Hypothèse : il existe $j_1,\dots,j_n \in\ ]-1,0]\cap\mathbb{Q}$ *tels que* $j_1\lambda_1+\dots+j_n\lambda_n=\beta$.
Alors :

$$\Phi_\beta(t_1^{-1},\dots,t_n^{-1}) = (-1)^{n-\ell}\ t_1t_2\dots t_n\ \Phi_{-\beta}(t_1,\dots,t_n)\ ,$$

où ℓ *est le rang sur* $\mathbb{Z}$ *du système de vecteurs* $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.

1.6. *Lemme* [14].- *Soit* (ρ,V) *une représentation de* G. *Pour tout* $\lambda\in\mathfrak{h}^*$, *soit* $\mathbb{C}[V]^\lambda$ *l'ensemble des* $\mathfrak{h}$-*vecteurs propres de* $\mathbb{C}[V]$ *pour le poids* λ. *On a*

$$F(\mathbb{C}[V]^G,x) = \frac{1}{|W|}\ \Sigma_{s=0}^{p}(-1)^s\ \Sigma_{1\leq i_1<\dots<i_s\leq p}\ F(\mathbb{C}[V]^{\alpha_{i_1}+\dots+\alpha_{i_s}},x)\ .$$

Soit K une forme compacte de G, choisie de telle sorte qu'un certain tore maximal T de K admette $\mathfrak{h}$ pour algèbre de Lie complexifiée. On a

$$F(\mathbb{C}[V]^G,x) = F(\mathbb{C}[V]^K,x) = \int_K \text{dét}(1-x\rho(k))^{-1}dk$$

d'après la formule de Molien-Weyl. D'après la formule d'intégration de Weyl, ceci est égal à

$$\frac{1}{|W|}\int_T \text{dét}(1-x\rho(t))^{-1}(1-e^{\alpha_1}(t))\dots(1-e^{\alpha_p}(t))dt$$

$$= \frac{1}{|W|}\Sigma_{s=0}^{p}(-1)^s\,\Sigma_{1\le i_1<\dots<i_s\le p}\int_T \text{dét}(1-x\rho(t))^{-1}\,e^{\alpha_{i_1}+\dots+\alpha_{i_s}}(t)dt$$

et l'on applique de nouveau la formule de Molien-Weyl, pour T et le module $\mathbb{C}[V]^{-\alpha_{i_1}-\dots-\alpha_{i_s}}$ (rappelons que les racines sont 2 à 2 opposées).

1.7. *Lemme.- Soit* (ρ,V) *une représentation de* G *. Soit* $(v_1,\dots,v_n)$ *une base de* V^* *formée de vecteurs poids pour l'action de* $\mathfrak{h}$ *. Soient* $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ *les poids de* $v_1,\dots,v_n$ *.*

Hypothèse (*) : *toute somme* $\alpha_{i_1}+\dots+\alpha_{i_s}$ *de racines distinctes peut s'écrire* $j_1\lambda_1+\dots+j_n\lambda_n$ *avec* $j_1,\dots,j_n \in\,]-1,0]$.
Alors

$$F(\mathbb{C}[V]^G,x^{-1}) = (-1)^{n-r}\,x^n\,F(\mathbb{C}[V]^G,x) .$$

Pour tout $\beta\in\mathfrak{h}^*$, l'espace vectoriel $\mathbb{C}[V]^\beta_d$ admet pour base l'ensemble des monômes $v_1^{j_1}v_2^{j_2}\dots v_n^{j_n}$ tels que

$$(1)\qquad j_1+j_2+\dots+j_n = d \quad j_1\lambda_1+j_2\lambda_2+\dots+j_n\lambda_n = \beta .$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\dim\mathbb{C}[V]^\beta_d &= \text{nombre de solutions du système (1)}\\ &= \text{nombre de monômes de degré total } d \text{ dans } \Phi_\beta(t_1,\dots,t_n)\\ &= \text{coefficient de } x^d \text{ dans } \Phi_\beta(x,x,\dots,x)\ ,\end{aligned}$$

d'où

$$(2)\qquad F(\mathbb{C}[V]^\beta,x) = \Phi_\beta(x,x,\dots,x)$$

D'après l'hypothèse (*), 1.5, et (2), on a

$$F(\mathbb{C}[V]^{\alpha_{i_1}+\dots+\alpha_{i_s}},x^{-1}) = (-1)^{n-r}\,x^n\,F(\mathbb{C}[V]^{-\alpha_{i_1}-\dots-\alpha_{i_s}},x)\ ,$$

car $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ engendrent l'espace vectoriel $\mathfrak{h}$ d'après (*)). On applique enfin 1.6.

1.8. *Lemme.- L'hypothèse* (*) *de* 1.7 *est vérifiée pour presque toute représentation simple localement injective de* G .

Soit ρ une représentation simple localement injective de G . Soit α son plus grand poids. On a $\alpha = t_1\omega_1+\dots+t_r\omega_r$ ($t_1,\dots,t_r$ entiers ≥ 0) . Pour chaque composante simple de $\mathfrak{g}$, l'un au moins des t_i correspondant à cette composante simple est > 0 (sinon ρ ne serait pas localement injective). Soit R_ρ le rayon de la plus grande boule centrée en 0 et contenue dans l'ensemble $\{\Sigma\, j_k \lambda_k \mid \lambda_k$ poids distincts de ρ^*, $j_k \in]-1,0]\}$. On montre que $R_\rho \to \infty$ quand $\sup t_i \to \infty$. C'est un peu délicat (on montre d'abord que le nombre de poids distincts de ρ^* tend vers l'infini quand $\sup t_i \to \infty$; pour cela, on compte le nombre de racines simples qu'il faut retrancher de α pour obtenir $w_0\alpha$, où w_0 est le plus long élément de W).

1.9. *Démonstration du th.* 1.3.- Soit (ρ,V) une représentation de G vérifiant (*). Supposons que $\mathbb{C}[V]^G$ soit engendrée par des éléments homogènes algébriquement indépendants de degrés $d_1,\dots,d_m > 0$. On a $d_1,\dots,d_m \geq 2$ (car un invariant de degré 1 fournirait un hyperplan G-stable de V).
D'autre part,

$$F(\mathbb{C}[V]^G,x) = \frac{1}{(1-x^{d_1})(1-x^{d_2})\dots(1-x^{d_m})}$$

donc

$$F(\mathbb{C}[V]^G,x^{-1}) = (-1)^m \frac{x^{d_1+d_2+\dots+d_m}}{(1-x^{d_1})(1-x^{d_2})\dots(1-x^{d_m})} .$$

D'après 1.7, on a alors

$$n = d_1+d_2+\dots+d_m \geq 2m . \tag{3}$$

Or m est le degré de transcendance de $\mathbb{C}[V]^G$, donc égal à

$$n - (\text{dimension maximale des orbites de } G \text{ dans } V)$$

(car G est semi-simple). Donc

$$n \geq 2(n-\dim G) \tag{4}$$

et finalement $n \leq 2\dim G$. Cela ne laisse qu'un nombre fini de possibilités pour ρ . Compte tenu de 1.8, G n'admet qu'un nombre fini de bonnes représentations simples $\rho_1,\dots,\rho_N$.

On montre assez facilement que, si (G,V) est une bonne représentation de G et U un sous-espace G-stable de V , alors (G,U) est bonne. Donc, si ρ est une bonne représentation de G , ses composantes simples font partie de $\{\rho_1,\dots,\rho_N\}$. Il suffit maintenant de montrer que, pour M entier assez grand, la représentation $M\rho_1$ (par exemple) n'est pas bonne. Passant à un quotient de G , on peut supposer ρ_1 localement injective. Alors, pour M assez grand, la représentation $M\rho_1$ vérifie (*). Si $M\rho_1$ est bonne, on montre comme plus haut que $\dim(M\rho_1) \leq 2\dim G$, donc M est borné.

1.10. Dans la preuve précédente, si ρ est simple, on a $d_i = 2$ pour *au plus* un i . Donc (3) devient $n \geq 2+3(m-1) = 3m-1 \geq 3(n-\dim G)-1$, d'où $2n \leq 3\dim G+1$.

1.11. *Remarque.*- Supposons $G = SL(2,\mathbb{C})$. Soit ω l'unique poids fondamental ; les racines sont $\pm 2\omega$. Pour $d = 0,1,2,\ldots,$ soit V_d le G-module simple de plus grand poids $d\omega$ (on a $\dim V_d = d+1$; la notation est celle de 0.3). La condition (*) est vérifiée pour $d \geq 3$. Si $d \geq 3$ et si (G,V_d) est bonne, on a, d'après 1.10, $2(d+1) \leq 10$, d'où $d \leq 4$. Compte tenu des résultats du 19^e^ siècle,

$$(G,V_d) \text{ bonne} \Leftrightarrow d \leq 4 .$$

1.12. *Remarque.*- Revenons au cas général. Soit V un G-module. Comme $\mathbb{C}[V]^G$ est une algèbre de Gorenstein [4], $F(\mathbb{C}[V]^G,x)$ vérifie une équation fonctionnelle de la forme

$$F(\mathbb{C}[V]^G,x^{-1}) = \pm x^q F(\mathbb{C}[V]^G,x) .$$

Il résulte de ce qui précède que $q = \dim V$ pour presque toute représentation simple (G,V) . Popov conjecture que $q \leq \dim V$ dans tous les cas. La conjecture est vraie pour $G = SL(2,\mathbb{C})$, avec inégalité stricte dans certains cas. (Juillet 1986 : la conjecture vient d'être démontrée par F. Knop).

DEUXIÈME PARTIE

2.1. Soit (ρ,V) une représentation de G . Une résolution minimale de $\mathbb{C}[V]^G$ se construit de la manière suivante. On choisit un système générateur minimal homogène $(f_1,\ldots,f_m)$ de l'algèbre $\mathbb{C}[V]^G$. Soit A l'algèbre des polynômes à coefficients complexes en m indéterminées, d'où une suite exacte $A \longrightarrow \mathbb{C}[V]^G \longrightarrow 0$. Le noyau de $A \longrightarrow \mathbb{C}[V]^G$ est un A-module (en fait, un idéal de A), qu'on réalise comme quotient d'un A-module libre A^r avec r minimal, d'où $A^r \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{C}[V]^G \longrightarrow 0$. On considère $\mathrm{Ker}(A^r \longrightarrow A)$, etc. Le processus s'arrête d'après Hilbert. La longueur de la résolution obtenue est indépendante des choix faits ; on l'appellera la *complication* de ρ et on la notera $cp\ell(\rho)$. Ainsi,

$$\rho \text{ bonne} \Leftrightarrow cp\ell(\rho) = 0 .$$

D'après le théorème de Hochster-Roberts [4], $\mathbb{C}[V]^G$ est une algèbre de Cohen-Macaulay, de sorte que $cp\ell(\rho) = m - \deg\,\mathrm{tr}\, \mathbb{C}[V]^G$.

2.2. THÉORÈME (V.L. Popov [10]).- *Soit* $c \in \mathbb{N}$. *Alors* G *n'a qu'un nombre fini de représentations de complication* $\leq c$.

Naturellement, 2.2 implique 1.3. Mais 1.3 sert dans la preuve de 2.2.

2.3. Soit V/G la variété affine définie par l'algèbre $\mathbb{C}[V]^G$ ("quotient de Mumford" de V par G). Soit $\pi : V \longrightarrow V/G$ le morphisme canonique, et notons encore 0 l'image de $0 \in V$ par π . Alors

$$cp\ell\ \rho = \dim \Theta_{0,V/G} - \dim V/G$$

où $\Theta_{0,V/G}$ désigne l'espace tangent de Zariski à V/G en 0 .

2.4. *Lemme.- Si* V_1, V_2 *sont des* G-*modules, on a*

$$\mathrm{cp}\ell(V_1 \oplus V_2) \geq \mathrm{cp}\ell\, V_1 + \mathrm{cp}\ell\, V_2 \; .$$

C'est une conséquence facile de 2.3.

2.5. *Il suffit de prouver* 2.2 *pour les représentations simples de* G . Supposons en effet que les représentations simples de complication $\leq c$ soient $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N$. Une représentation non simple de complication $\leq c$ est, d'après 2.4, de la forme $j_1\rho_1 \oplus j_2\rho_2 \oplus \ldots \oplus j_N\rho_N$. Montrons qu'on peut majorer par exemple j_1 . Si $\mathrm{cp}\ell\, \rho_1 \geq 1$, on a $j_1 \leq c$ toujours d'après 2.4. Supposons $\mathrm{cp}\ell\, \rho_1 = 0$. *D'après* 1.3, il existe un entier $p > 1$ tel que $p\rho_1$ ne soit pas bonne, d'où $\mathrm{cp}\ell(p\rho_1) \geq 1$; alors $[j_1/p] \leq c$, d'où encore une majoration de j_1 .

2.6. Soient (ρ, V) une représentation de G , et $v \in V$ un point dont l'orbite Gv est fermée. Alors le stabilisateur G_v de v dans G est réductif. Soit M l'espace tangent en v à Gv (considéré par translation comme sous-espace vectoriel de V) ; il est stable par G_v ; soit N un sous-espace supplémentaire de M dans V stable par G_v . La représentation (G_v, N) s'appelle la *représentation tranchée de* ρ *en* v ("slice representation"). L'emploi des représentations tranchées en théorie des invariants remonte à [5]. On a $(G_v, V) = (G_v, M) \oplus (G_v, N)$; d'autre part, $M = \mathfrak{g} . v \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_v$ (où $\mathfrak{g}_v$ est le stabilisateur infinitésimal de v dans $\mathfrak{g}$), donc

$$(G_v, V) \oplus (G_v, \mathfrak{g}_v) = (G_v, \mathfrak{g}) \oplus (G_v, N) \tag{5}$$

où $(G_v, \mathfrak{g}_v), (G_v, \mathfrak{g})$ désignent les représentations adjointes. Cette formule permet de calculer la représentation tranchée dès qu'on connaît G_v .

2.7. *Lemme.- Avec les notations de* 2.6, *on a* $\mathrm{cp}\ell(G_v, N) \leq \mathrm{cp}\ell(G, V)$ ("la représentation tranchée est meilleure que la représentation de départ").

Cela résulte de 2.3 et du théorème de Luna [7] selon lequel il existe un morphisme *étale* d'un voisinage de 0 dans N/G_v sur un voisinage de $\pi(v)$ dans V/G (notations de 2.3).

2.8. On peut maintenant expliquer la tactique de tout ce qui suit. On va choisir v tel que :

1) Gv soit fermée ;

2) $\mathrm{cp}\ell(G_v, N)$ soit calculable et pas trop petite.

Si l'on prend $v = 0$, on a $G_v = G$, $N = V$ et l'on n'a rien gagné. Si, au contraire, on prend v générique, il arrivera très souvent que Gv soit fermée mais que $G_v = \mathrm{Ker}\, \rho$; on a bien $N \neq V$, mais (G_v, N) est triviale et l'on n'a rien gagné non plus.

On va donc faire des choix de v assez délicats. On s'arrangera pour que G_v soit d'un type très spécial. Il faudra alors des renseignements directs sur les représentations de ces groupes spéciaux ; c'est ce qu'on va obtenir dans 2.9 - 2.11.

2.9. Soit $T = \mathbb{C}^*$ un tore de dimension 1. Soit χ un caractère engendrant le groupe $\mathrm{Hom}(T,\mathbb{C}^*)$. Tout caractère de T est de la forme χ^s avec $s \in \mathbb{Z}$. Soit V un T-module. Notons V^+ la somme des sous-espaces poids de V correspondant aux caractères χ^s avec $s > 0$. Définissons de même V^- et V^o.

Lemme.- Soient $p = \dim V^+$, $q = \dim V^-$. *Si* $p > 0$ *et* $q > 0$, *on a*

$$\mathrm{cp}\ell\, V \geq (p-1)(q-1) .$$

On a $V^* = (V^+)^* \oplus (V^-)^* \oplus (V^o)^*$. Soit $(x_1,\ldots,x_p)$ une base de $(V^+)^*$ formée de vecteurs poids. Définissons de même $(y_1,\ldots,y_q)$ pour $(V^-)^*$ et $(z_1,\ldots,z_t)$ pour $(V^o)^*$. On voit facilement que l'algèbre $\mathbb{C}[V]^T$ a un système générateur minimal homogène formé de monômes en les x_i, y_i, z_i. Soit $(f_1,\ldots,f_s)$ un tel système. En outre, tout élément de $\mathbb{C}[V]^T$ qui est un monôme en les $x_i, y_i . z_i$ est en fait un monôme en les f_i. Si les poids de x_1 et y_1 sont χ^m et χ^{-n}, on a $x_1^n y_1^m \in \mathbb{C}[V]^T$. Choisissons a,b entiers > 0 tel que $x_1^a y_1^b \in \mathbb{C}[V]^T$ t que $a+b$ soit aussi petit que possible. Alors, d'après ce qui précède, $x_1^a y_1^b$ est l'un des f_i. Raisonnant de même sur tous les couples (x_i, y_j), et tenant compte des z_i, on voit que $s \geq pq+t$. D'autre part, comme $\dim T = 1$, on a $\deg\mathrm{tr}\, \mathbb{C}[V]^T = \dim V - 1 = p+q+t-1$ (il faut s'assurer que l'action de T dans V est stable, mais c'est facile). Alors

$$\mathrm{cp}\ell(V) \geq pq+t-(p+q+t-1) = (p-1)(q-1) .$$

2.10. *Lemme.- Soit* $G = SL(2,\mathbb{C})$.

i) *Soit* V *un* G-*module simple de dimension impaire* $2\ell+1$, *avec* $\ell \geq 2$. *Alors :*

$$\mathrm{cp}\ell\, V \geq (\ell-2)^2 \quad \textit{si } \ell \textit{ est impair ;}$$

$$\geq \frac{1}{2}(\ell-2)(\ell-3) \quad \textit{si } \ell \textit{ est pair.}$$

ii) *Soit* V *un* G-*module simple de dimension paire* 2ℓ, *avec* $\ell \geq 3$. *Alors :*

$$\mathrm{cp}\ell\, V \geq \ell^2-2\ell-2 .$$

(Pour des estimations meilleures, *cf.* [10] et [6]).

i) Supposons $\dim V = 2\ell+1$. Identifions V à l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré 2ℓ en x et y, avec l'action naturelle de $SL(2,\mathbb{C})$. Soit $v = x^\ell y^\ell \in V$. On vérifie facilement que Gv est fermée, que $G_v = T$ (le tore diagonal de $SL(2,\mathbb{C})$) si ℓ est impair, et que G_v est le normalisateur T' de T dans G si ℓ est pair. Supposons ℓ impair. Avec les mêmes notations qu'en 2.9, on a

$$(T,V) = \chi^{2\ell} \oplus \chi^{2\ell-2} \oplus \ldots \oplus \chi^{-2\ell}, (T,\mathfrak{g}_v) = \chi^0, (T,\mathfrak{g}) = \chi^2 \oplus \chi^0 \oplus \chi^{-2} .$$

Alors, d'après (5), la représentation tranchée est

$$(T,N) = \oplus_{-\ell\leq j\leq \ell,\, j\neq \pm 1}\ \chi^{2j}\ .$$

D'après 2.9, $\mathrm{cp}\ell(T,N) \geq (\ell-2)^2$. Donc $\mathrm{cp}\ell(G,V) \geq (\ell-2)^2$ d'après 2.7.

Si ℓ est pair, on procède de manière analogue, mais il faut avoir fait l'analogue de 2.9 pour un groupe du type T' (qui admet T pour sous-groupe d'indice 2).

ii) Si $\dim V = 2\ell$, on réalise V comme l'espace des polynômes homogènes de degré $2\ell-1$ en x et y . Soit $v = x^{2\ell-1} - y^{2\ell-1}$. Cette fois, G_v est le groupe cyclique formé des éléments $\mathrm{diag}(e^{2i\pi k/2\ell-1}, e^{-2i\pi k/2\ell-1})$ où $k = 0,1,\ldots,2\ell-2$, et il faut une autre variante de 2.9.

2.11. Soient $G = SL(2,\mathbb{C})$, et V un G-module. Par rapport au tore diagonal T de $SL(2,\mathbb{C})$, on définit V^+, V^-, V^0 comme en 2.9. Si V est simple, on sait que $\dim V^0 = 0$ ou 1 suivant que $\dim V$ est pair ou impair, et que $\dim V^+ = \dim V^-$; donc $\dim V^+ = \dim V^- = \left[\frac{1}{2}\dim V\right]$. Si maintenant $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots$ avec $V_1, V_2, \ldots$ simples, on a donc

$$\dim V^+ = \dim V^- = \left[\frac{1}{2}\dim V_1\right] + \left[\frac{1}{2}\dim V_2\right] + \ldots$$

Ce nombre sera noté $q_{G,V}$.

Lemme.- $\mathrm{cp}\ell(G,V)$ *tend vers l'infini quand* $q_{G,V}$ *tend vers l'infini.*

Si $q_{G,V}$ est très grand, ou bien il apparaît dans V un sous-module simple de dimension très grande (auquel cas, on applique 2.10), ou bien un module simple de dimension fixée apparaît avec une multiplicité très grande (auquel cas, on raisonne comme dans 2.5).

2.12. On revient au cas où G est quelconque. Dans les n^{os} 2.13 à 2.18, on prépare le choix d'un vecteur v auquel on appliquera la tactique de 2.8.

Soient $T \subset G$ un tore de dimension 1 , Z son centralisateur dans G , et $Y = Z/T$. Alors Z et Y sont réductifs connexes. Si V est un G-module, Z et Y opèrent naturellement dans V^T . Soit $K = \mathrm{Ker}(Z,V^T) \supset T$.

2.13. *Lemme.- Soient* T,Z,Y,V,K *comme en* 2.12.

Hypothèse : a) *L'action de* Z *dans* V^T *est stable ;*

b) $K^0 = T$;

c) *Le stabilisateur générique de* (Z,V^T) *est égal à* K .

(c) $\Longrightarrow$ a) *quand* Y *est semi-simple : voir* 0.7).

Alors, pour v *générique dans* V^T *, l'orbite* Gv *est fermée, et* G_v *est un groupe réductif de tore maximal* T *(de sorte que* $G_v^0 = T$ *ou* $SL(2,\mathbb{C})$ *ou* $PSL(2,\mathbb{C})$).

L'orbite Zv est fermée d'après l'hypothèse a), donc Gv est fermée d'après [8]. Alors, G_v est réductif (*cf.* 0.7). Evidemment, $T \subset G_v$; soit T' un tore maximal de G_ν contenant T. Alors $T' \subset Z$. Comme $T'\nu = \{\nu\}$, l'hypothèse c) implique que $T' \subset K$, d'où $T' \subset K^o = T$ et finalement $T' = T$.

2.14. *Lemme.- Soient* T,Z,Y,V,K *comme en 2.12, avec les hypothèses 2.13. Supposons en outre que* T *soit contenu dans un sous-groupe simple connexe* C *de dimension 3 de* G. *Alors* $\mathrm{cp}\ell\, V$ *tend vers l'infini quand* $q_{C,V}$ *tend vers l'infini.*

Soit ν un point générique de V^T. D'après 2.13, on peut considérer la représentation tranchée (G_ν,N). D'après (5), on a $\dim N^\pm = \dim V^\pm + \dim \mathfrak{g}_\nu^\pm - \dim \mathfrak{g}^\pm$, donc $\dim N^\pm \to \infty$ quand $q_{C,V} = \dim V^\pm \to \infty$. D'après 2.9 et 2.11, $\mathrm{cp}\ell(G_\nu,N) \to \infty$ quand $\dim N^\pm \to \infty$. (En fait, G_ν n'est pas forcément connexe, il faut donc des lemmes plus généraux que 2.9 et 2.11). Enfin $\mathrm{cp}\ell(G,V) \geq \mathrm{cp}\ell(G_\nu,N)$ d'après 2.7.

2.15. *Lemme.- Soient* T,Z *comme en 2.12. Soient* $V_1,V_2,\ldots,V_s$ *des G-modules simples. Soient* $W_1 \subset V_1^T,\ldots,W_s \subset V_s^T$ *des sous-Z-modules simples. Alors le produit de Cartan* $W_1 \cdot W_2 \cdots W_s$ *est un sous- -module de* $(V_1 \cdot V_2 \cdots V_s)^T$. (Z est réductif, pas semi-simple, mais ce n'est pas gênant).

Soient U un sous-groupe unipotent maximal de G, et $A = \mathbb{C}[G/U]$, qui est une $\mathbb{C}$-algèbre intègre de type fini. Considérons A comme un G-module pour l'action naturelle de G dans G/U (contrairement aux conventions de 0.2, ce module est de dimension infinie ; mais il est localement fini). On sait que A est somme directe de sous-modules simples A_λ $(\lambda \in P)$, avec A_λ de plus grand poids λ, chaque G-module simple apparaissant une fois et une seule, avec de plus $A_\lambda \cdot A_\mu = A_{\lambda+\mu}$ (compatibilité du produit dans A et du produit de Cartan).

Cela dit, choisissons dans chaque W_i un vecteur de plus grand poids f_i pour l'action de Z. Alors le produit $f_1 f_2 \ldots f_s$ (dans l'algèbre A) appartient à $V_1 V_2 \ldots V_s$, est T-invariant, et non nul puisque A est intègre ; c'est un vecteur de plus grand poids pour l'action de Z, donc il engendre dans $(V_1 V_2 \ldots V_s)^T$ un sous-Z-module isomorphe à $W_1 \cdot W_2 \cdots W_s$.

2.16. *Soient* T,Z,Y *comme en 2.12, et supposons* Y *semi-simple.*

Hypothèses : a) $V(\omega_1)^T \neq 0,\ldots,V(\omega_r)^T \neq 0$;

b) *Pour* $j = 1,\ldots,r$, *il existe* $m_j \in \mathbb{N}$ *et un sous-Y-module simple* M_j *de* $V(m_j\omega_j)^T$ *tel que la représentation* (Y,M_j) *soit localement injective.*

Alors, pour presque tout $\lambda \in P$, *la représentation* $(Y,V(\lambda)^T)$ *admet une sous-représentation simple localement injective dont le stabilisateur générique est égal au noyau (et donc, comme on le voit facilement, la représentation* $(Y,V(\lambda)^T)$ *est localement injective et son stabilisateur générique est égal au noyau).*

Rappelons (0.7) que, pour presque tout Y-module simple, le stabilisateur générique est égal au noyau. Donc, en remplaçant m_j par un de ses multiples, et en utilisant 2.15, on peut supposer en outre, dans l'hypothèse b) que :

1) le stabilisateur générique de (Y,M_j) est égal au noyau (donc fini) ;

2) si le plus grand poids d'une représentation simple de Y a chacune de ses coordonnées qui majore la coordonnée correspondante du plus grand poids de M_j, alors cette représentation simple a encore la propriété 1) (*cf.* 0.5).

On choisit dans chaque $V(\omega_j)^T$ un sous-Y-module simple non nul N_j. Soit $\lambda = n_1\omega_1 + \ldots + n_r\omega_r \in P$. Si $n_1 + \ldots + n_r$ est assez grand, on a par exemple $n_1 \geq m_1$, donc $V(\lambda)^T$ contient $M_1 . N_1^{n_1-m_1} N_2^{n_2} \ldots N_r^{n_r}$ d'après 2.15, donc $(Y,V(\lambda)^T)$ a les propriétés requises.

2.17. Il y a un lemme analogue à 2.16 (que nous n'énonçons pas) lorsque Y n'est pas semi-simple (rappelons que Y est connexe réductif).

2.18. On fait ensuite une longue étude cas par cas des groupes simples pour prouver que, si G est simple, on peut, par un bon choix de T, avoir les hypothèses de 2.16 ou 2.17, et en outre T contenu dans un sous-groupe simple C de dimension 3. Voici 2 exemples (où l'on emploie les notations de [3]) :

A) Supposons G de type C_r $(r \geq 2)$. Soit T le tore "engendré" par H_α où $\alpha = 2\varepsilon_1$. Alors l'algèbre de Lie de Y est de type $C_{\ell-1}$, et $V(\omega_i)^T$, vu comme C_{r-1}-module, est isomorphe à $V(\omega'_{i-2}) \oplus V(\omega'_i)$ (où $\omega'_1,\ldots,\omega'_{\ell-1}$ sont les poids fondamentaux pour C_{r-1} ; on convient que $V(\omega'_{-1}) = V(\omega'_r) = 0$, $V(\omega'_0) = 1$). On peut prendre pour C le sous-groupe d'algèbre de Lie $\mathbb{C}H_\alpha \oplus \mathbb{C}X_\alpha \oplus \mathbb{C}X_{-\alpha}$. Les hypothèses de 2.16 sont vérifiées avec même $m_1 = \ldots = m_r = 1$, sauf pour $r = 2$, car alors la représentation $(Y,V(\omega_2)^T)$ est triviale. Toutefois, $(Y,V(2\omega_2)^T) \supset (A_1,V(2\omega'_1))$ et l'on peut prendre $m_2 = 2$ (et toujours $m_1 = 1$).

B) Supposons G de type F_4 (on a besoin alors des renseignements contenus dans [15]). On prend T engendré par H_α où $\alpha = \tilde{\omega}_1$. Alors Y est de type C_3. On a

$$V(\omega_1)^T = V(2\omega'_1) \oplus 1, V(\omega_2)^T \supset V(2\omega'_1) \oplus V(2\omega'_1 + \omega'_2) ,$$

$$V(\omega_3)^T \supset V(\omega'_1 + \omega'_3) , V(\omega_4)^T = V(\omega'_2) .$$

On peut prendre C engendré par $\mathbb{C}H_\alpha \oplus \mathbb{C}X_\alpha \oplus \mathbb{C}X_{-\alpha}$, et $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$.

2.19. *Démonstration du théorème* 2.2 *pour* G *simple*

On choisit T et C suivant les indications très partielles de 2.18. On a donc les propriétés de 2.16 et 2.17 (!). Limitons-nous ici au cas où Y est semi-simple. Pour presque tout $\lambda \in P$, le Z-module $V(\lambda)^T$ vérifie les hypothèses b) et c) de 2.13, donc aussi a) puisque Y est semi-simple. On peut donc appliquer 2.14. Par ailleurs, $\mathrm{Ker}(G,V(\lambda))$ est fini pour presque tout λ, donc $(C,V(\lambda))$ n'est pas triviale. Notons, comme en 0.3, V_d le C-module simple de dimension $d+1$. Alors $(C,V(\lambda))$ contient un V_d avec $d > 0$. Utilisant 2.15, on voit que, quand $\lambda \longrightarrow \infty$

dans $\mathcal{P}$, $(C,V(\lambda))$ contient un V_e avec $e \longrightarrow \infty$, donc $q_{C,V(\lambda)} \longrightarrow \infty$. Alors $\mathrm{cp}\ell\, V(\lambda) \longrightarrow \infty$ d'après 2.14.

(Lorsque Y n'est pas semi-simple - en fait le centre de Y est alors de dimension 1 - on ne peut utiliser le théorème de Popov que c) $\Rightarrow$ a) dans 2.13. Il faut donc établir de nouveaux critères de stabilité, puis montrer qu'ils s'appliquent dans notre situation.)

2.20. Lorsque G est semi-simple quelconque, les mêmes raisonnements réussissent le plus souvent, avec beaucoup de complications techniques. Toutefois, les cas suivants nécessitent un changement sérieux :

$$G = SL(2,\mathbb{C}) \times SL(r_1+1,\mathbb{C}) \times \ldots \times SL(r_p+1,\mathbb{C}) ,$$

avec $p \geq 1$, et $r_1,\ldots,r_p$ pairs ≥ 2 . Par exemple, prenons $G = SL(2,\mathbb{C}) \times SL(5,\mathbb{C})$. Soient ω l'unique poids fondamental de $SL(2,\mathbb{C})$ et ω_1 le poids fondamental de $SL(5,\mathbb{C})$ correspondant à la représentation évidente de dimension 5. Alors le G-module $V = V(n\omega+\omega_1)$, avec n impair, a la propriété suivante : pour tout $v \in V-\{0\}$, tel que l'orbite Gv soit fermée, G_v est un groupe fini.

Impossible donc de raisonner comme ci-dessus.

On peut procéder ainsi. Soit $\varepsilon = e^{2i\pi/11}$. Soit

$$g = (\mathrm{diag}(\varepsilon,\varepsilon^{-1}) , \mathrm{diag}(\varepsilon^2,\varepsilon,1,\varepsilon^{-1},\varepsilon^{-2})) \subset SL(2,\mathbb{C}) \times SL(5,\mathbb{C}) .$$

Soit A le sous-groupe à 11 éléments de G engendré par g . Alors son centralisateur dans G est le produit $T \times T'$ des tores diagonaux de $SL(2,\mathbb{C})$ et $SL(5,\mathbb{C})$. Si n est assez grand, on a les propriétés suivantes : $T \times T'$ agit stablement dans V^A ; si v est générique dans V^A , l'orbite Gv est fermée, et G_v est fini ; la projection de G_v sur $SL(2,\mathbb{C})$ contient le sous-groupe d'ordre 11 engendré par $\mathrm{diag}(\varepsilon,\varepsilon^{-1})$, donc ne peut être ni le groupe du tétraèdre, ni le groupe de l'octaèdre, ni le groupe de l'icosaèdre, donc est cyclique ou diédral ; on arrive alors à prouver que le cardinal de G_v est ≤ 220 .

Or, soit Γ un groupe fini. Soient $\rho_1,\ldots,\rho_N$ ses représentations simples non triviales. Si p est un entier ≥ 2 , le théorème de Chevalley-Shephard-Todd prouve que la représentation $p\rho_1$ n'est pas bonne. Raisonnant comme en 2.5, Γ n'a qu'un nombre fini de représentations de complication majorée par un entier donné (à condition d'exclure les composantes triviales).

Revenons à G_v . Puisque $|G_v| \leq 220$, il n'y a qu'un nombre fini de groupes G_v possibles à isomorphismes près. Quand $n \longrightarrow \infty$, on voit facilement que $\dim V - \dim V^{G_v} \longrightarrow \infty$. Si (G_v,N) désigne la représentation tranchée, on déduit alors de (5) que $\dim N - \dim N^{G_v} \longrightarrow \infty$. Donc $\mathrm{cp}\ell(G,V) \longrightarrow \infty$.

2.21. Tout au long de [10], Popov établit des majorations plus précises que celles qui sont esquissées ci-dessus. Comme conséquence, il obtient par exemple ceci :

soit V un E_8-module simple (non trivial). Si (E_8,V) est la représentation adjointe, (E_8,V) est bonne ; mais, sinon, sa complication est ≥ 9000 . Il est à présumer qu'une résolution explicite des algèbres d'invariants correspondantes doit être délicate à obtenir.

BIBLIOGRAPHIE

[1] O.M. ADAMOVICH and E.M. GOLOVINA - *Simple linear Lie groups having a free algebra of invariants*, *Questions in group theory and homological algebra*, Vyp. 2, Izdat. Yaroslav Gos. Univ., Yaroslav, 1979, 3-41.

[2] E.M. ANDREEV and V.L. POPOV - *On stationary subgroups of points in general position in the representation space of a semisimple Lie group*, Funktsional Anal. i Prilozhen, 5, 1971, 1-8.

[3] N. BOURBAKI - *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 7-8, Paris, 1975.

[4] M. HOCHSTER and J.L. ROBERTS - *Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay*, Adv. in Math., 13, 1974, 115-175.

[5] V.G. KAC, V.L. POPOV et E.B. VINBERG - *Sur les groupes linéaires algébriques dont l'algèbre des invariants est libre*, C.R. Acad. Sci. Paris, 283, 1976, 875-878.

[6] V.G. KAC - *Root systems, representations of quivers and invariant theory*, Lecture Notes in Math., 996, 1982.

[7] D. LUNA - *Slices étales*, Mém. Soc. Math. France, 33, p. 81-105.

[8] D. LUNA - *Adhérences d'orbites et invariants*, Invent. Math., 29, 1975, 231-238.

[9] V.L. POPOV - *A finiteness theorem for representations with a free algebra of invariants*, Izv. Akad. Nauk SSSR, 46, 1982, 347-370.

[10] V.L. POPOV - *Syzygies in the theory of invariants*, Izv. Akad. Nauk SSSR, 47, 1983, 544-622.

[11] V.L. POPOV - *Stability criteria for the action of a semisimple group on a factorial manifold*, Izv. Akad. Nauk SSSR, 34, 1970, 523-531.

[12] G.W. SCHWARZ - *Représentations of simple Lie groups with regular ring of invariants*, Invent. Math., 49, 1978, 167-191.

[13] R.P. STANLEY - *Combinatorial reciprocity theorems*, Adv. in Math., 14, 1974, 194-253.

[14] R.P. STANLEY - *Combinatorics and invariant theory*, Proc. Sympos. Pure Math., 34, 1979, 345-355.

[15] E.B. VINBERG and A.L. ONISHCHIK - *Seminar on algebraic groups and Lie groups*, Izdat. Moskov. Gos. Univ., Moscow, 1969.

Jacques DIXMIER

7 Résidence "Les Clos de Bures"
91440 - BURES-sur-Yvette