DANIEL BENNEQUIN

Problèmes elliptiques, surfaces de Riemann et structures symplectiques

Astérisque, tome 145-146 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 657, p. 111-136

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1985-1986__28__111_0>

Séminaire BOURBAKI
38ème année, 1985-86, n° 657

Février 1986

PROBLÈMES ELLIPTIQUES, SURFACES DE RIEMANN ET STRUCTURES SYMPLECTIQUES [d'après M. GROMOV]

par Daniel BENNEQUIN

1. FLEXIBILITÉ ET RIGIDITÉ DU SYMPLECTIQUE

1.1. Les transformations canoniques

1.1.1. Une *structure symplectique* ω sur une variété différentiable W est une forme différentielle *fermée* de degré 2 sur W, qui induit sur chacun des espaces tangents de W une forme symplectique (forme bilinéaire alternée inversible) (*réf.* [V.I.A.1], [A.W]). Le couple (W,ω) (ou simplement W) porte le nom de *variété symplectique*. Les exemples *standard* sont : $\mathbb{R}^{2n}$ avec $\omega_0 = dx \wedge dy$, les variétés kählériennes, les espaces cotangents T^*V des variétés différentiables. La notation générique pour ces exemples est ω_0. Une application entre variétés symplectiques $f : (W',\omega') \longrightarrow (W,\omega)$ est *symplectique* si $f^*\omega = \omega'$. Un difféomorphisme symplectique d'un ouvert de W sur un autre s'appelle une *transformation canonique*.

1.1.2. On ne compte plus les questions de géométrie, d'analyse et d'algèbre qui doivent faire appel à la géométrie symplectique (*réf.* [V.I.A.2], [G.S.]) ...l'algébrisation, la bourbakisation, la complexification, la superisation, la symplectisation... proclame Arnold dans [V.I.A.3].

Certainement, après la mécanique classique et l'optique (Lagrange, Hamilton, ...) et la mécanique quantique (Dirac,...), c'est l'analyse des équations aux dérivées partielles linéaires qui contribue le plus à relancer l'intérêt pour les choses symplectiques (Maslov, Hörmander, S.K.K.,...).

Pour situer le niveau de profondeur auquel intervient le symplectique, les études de Lie et Cartan sur les groupes infinis sont précieuses. Disons qu'un (pseudo-) groupe de difféomorphismes d'une variété X est *primitif* s'il ne laisse invariante aucune autre partition de X que la partition grossière (X elle-même) et la partition discrète (les points de X). Il semble bien que les seuls (pseudo-)groupes de Lie primitifs de dimension infinie soient les suivants :

$\mathfrak{D}$, tous les difféomorphismes locaux de X ,

$\mathfrak{V}$, les difféomorphismes locaux préservant une forme volume Ω sur X ,

$\mathfrak{CV}$, la version conforme du précédent ; $f^*\Omega = c\,.\,\Omega$, $c \in \mathbb{R}$,

$\mathfrak{S}$, les transformations canoniques d'une structure symplectique ω sur X ,

$\mathfrak{CS}$, la version conforme de $\mathfrak{S}$; $f^*\omega = c\,.\,\omega$, $c \in \mathbb{R}$,

$\mathfrak{C}$, les transformations de contact d'une structure de contact sur X (une *structure de contact* F sur X est un champ d'hyperplans tangents à X , tel que pour toute équation locale $\alpha = 0$ de F , la restriction de $d\alpha$ à chaque F_x soit une forme symplectique : exemple F_0 d'équation $dz + x\,.\,dy = 0$ sur $\mathbb{R}^{2n+1}$, *réf.* [V.I.A.1], [S.L.]).

(La validité de cette liste a été établie dans la version analytique complexe par Guillemin, Quillen, Sternberg (*cf.* [V.G.]).)

1.1.3. La géométrie symplectique locale (ainsi que la géométrie de contact locale) est *flexible*. Un résultat typique est le théorème de Guivental : étant donnés deux germes Y et Z de sous-variétés d'une variété symplectique (W,ω) , tout germe de difféomorphisme de Y sur Z qui rappelle la forme induite par ω sur Z sur la forme induite par ω sur Y , s'étend en un germe de transformation canonique de W . Corollaire (Darboux) : localement ω est isomorphe à ω_0 .

Contrairement à ce qui se passe en géométrie riemannienne, il n'y a pas d'invariants extrinsèques locaux en géométrie symplectique.

Pourtant, il faut maintenant prendre en compte la *rigidité topologique* de la géométrie symplectique : préserver ω est une condition C^0-fermée.

THÉORÈME A (Eliashberg - Gromov).- *Soient* (W,ω) *une variété symplectique, et* f *un difféomorphisme de* W ; *s'il existe une suite* f_n *de difféomorphismes symplectiques de* W *tendant vers* f , *pour la topologie de la convergence compacte* C^0 , *alors* f *est symplectique.*

Ce théorème a été conjecturé, et vraisemblablement en grande partie démontré (mais pas publié) par Eliashberg [J.E.1]. Il vient d'être confirmé par M. Gromov ([M.G.1,2]). Il manifeste l'existence d'une topologie symplectique, telle que V.I. Arnold l'avait prévue.

Lemme.- *Soit* (W^{2n},ω) *une variété symplectique ; il n'existe pas de (pseudo-)groupe de difféomorphismes de* W *contenant* $\mathfrak{S}$ *(pseudo-groupe des transformations canoniques) autre que* $\mathfrak{V}$ *(préservant le volume* ω^n *) et* $\mathfrak{S}$.

(Ingrédients de la preuve : algèbre linéaire & Nash - Moser, *cf.* [M.G.2]).

Pour démontrer le théorème A, il suffit donc d'exhiber un difféomorphisme à support compact, préservant ω^n qui ne puisse pas être approché d'aussi près qu'on veut en topologie C^0 par des difféomorphismes symplectiques (lorsque $n > 1$ bien sûr).

Plusieurs cas particuliers du théorème de non C^0-densité étaient connus avant le travail de Gromov ; lorsque W est le tore T^{2n} , M. Herman [M.H.] avait montré comment le déduire du théorème des points fixes de Conley - Zehnder ([C.C.E.Z], [M.C.1]).

Gromov démontre également l'analogue de contact du Théorème A : préserver une structure de contact est une condition C^0 - fermée. L'analogue du lemme restant vrai en géométrie de contact (en remplaçant (W,ω) par (M,F), $\mathcal{S}$ par $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ par $\mathfrak{D}$), il suffit, là aussi, d'établir un théorème de non C^0-densité. (En dimension 3, cela résultait ([D.B.]) de l'étude globale des courbes de Legendre de $(\mathbb{R}^3, F_0)$ (*cf.* [A.D.], [D.B.]).)

1.1.4. Si l'on remplace la forme ω par une métrique riemannienne g dans l'énoncé du Théorème A, celui-ci devient évident, car une métrique définit une distance. De même, si l'on met une forme volume Ω à la place de ω, car un volume définit une mesure. Dans le cas de g, ou de Ω, le Théorème A a donc une preuve "locale". Il en va tout autrement dans le cas de ω, ou de F ; car on ignore ce que pourrait être une structure symplectique (ou une structure de contact) "topologique". (Par contre, il existe une notion d'*homéomorphisme* symplectique.)

Il faut passer par des résultats franchement globaux pour obtenir A. Ces résultats s'intègrent à tout un ensemble conjecturé par Arnold dans les années 60, à partir de son étude des points périodiques des transformations canoniques [V.I.A.4]. (Voir le § 4).

1.1.5. Le détour effectué par Gromov pour arriver à la rigidité symplectique passe par l'examen des courbes holomorphes des structures presque complexes. Il révèle les liens profonds entre la géométrie symplectique et les problèmes elliptiques non linéaires. Aussi l'importance du travail de Gromov tient autant à ses corollaires symplectiques qu'à ses corollaires analytiques. Il en sort une théorie géométrique globale des équations aux dérivées partielles, au sens où la théorie des systèmes dynamiques se propose d'être une approche globale des équations différentielles ordinaires.

1.2. Constructions lagrangiennes

1.2.1. En 1970, au contraire, Gromov [M.G.3] mettait en évidence une grande flexibilité globale de la géométrie symplectique et de la géométrie de contact. L'origine de cette flexibilité est l'abondance des immersions lagrangiennes. Si (W,ω) est une variété symplectique, une immersion $f : V \longrightarrow W$ est *lagrangienne* si $\dim V = \frac{1}{2} \dim W$ et si $f^*\omega = 0$. D'après Weinstein, le voisinage (immergé) de V dans W est alors symplectiquement isomorphe au voisinage de la section nulle V dans T^*V. Les graphes dans T^*V des formes différentielles fermées sur V sont des sous-variétés lagrangiennes de T^*V. Par conséquent, les déformations d'une immersion lagrangienne $f : V \longrightarrow W$ sont localement paramétrées à l'aide de fonctions sur V. D'autre part, étant données deux variétés symplectiques (W,ω) et

(W',ω') , un difféomorphisme de W' dans W est symplectique si son graphe est une sous-variété lagrangienne de $(W' \times W , \omega' - \omega)$. D'où l'apparition des fonctions génératrices de transformations canoniques.

1.2.2. Les immersions lagrangiennes vérifient le principe d'homotopie (théorème de Gromov-Lees [M.G.2,3], [J.L.]) : le passage aux jets d'ordre 1 induit une équivalence d'homotopie faible entre l'espace des immersions lagrangiennes de V dans W (topologie C^∞) et l'espace des applications continues fibrées injectives de l'espace tangent TV dans TW , lagrangiennes dans chaque fibre, telles que la classe de cohomologie de ω s'annule sur les images des cycles de V (le même principe vaut pour les immersions isotropes $(\dim V \leq \frac{1}{2}\dim W , f^*\omega = 0)$ et les immersions horizontales pour F , lorsque F est une structure de contact).

M. Gromov a établi le principe d'homotopie pour les immersions symplectiques jusqu'en codimension 4 : si (W',ω') et (W,ω) sont deux variétés symplectiques, si $(\varphi_0,f_0) : (TW',W') \longrightarrow (TW,W)$ est un morphisme C^∞ de fibrés vectoriels tel que φ_0 soit symplectique sur chaque fibre et que $f_0^*\omega$ soit cohomologue à ω' , et si, en outre, $\dim W \geq \dim W' + 4$ (ou bien si W' est ouverte et si $\dim W \geq \dim W' + 2$), alors il existe une immersion symplectique f_1 de W dans W' telle que (Df_1,f_1) soit homotope à (φ_0,f_0) à travers les morphismes de fibrés symplectiques. De plus, si f_0 est un plongement, f_1 peut être choisie parmi les plongements (*cf.* [M.G.2]) (un corollaire est le théorème de Tischler : toute structure symplectique à périodes entières $(\omega \in H^2(W,\mathbb{Z}))$ est induite par une immersion symplectique de W dans un espace $(P^N(\mathbb{C}) , \omega_0))$.

1.2.3. La flexibilité se traduit encore par des théorèmes d'existence de structures symplectiques sur des variétés ouvertes : si W est ouverte et si le groupe structural de son fibré tangent possède une réduction au groupe symplectique, il existe sur W une structure symplectique induisant cette réduction.

Sur les variétés fermées, les conditions d'existence de structures symplectiques sont mal comprises (voir § 4.). En fait, les exemples sont rares (voir cependant [M.G.2.] et [W.T.]). De même les exemples de *plongements* lagrangiens manquent. Un type de résultat : si V orientée s'immerge lagrangiennement dans $\mathbb{R}^{2n}$, alors $V \times S^1$ se plonge lagrangiennement dans $\mathbb{R}^{2n+2}$ (cf. [M.G.2.])

1.3. <u>Les relations d'incertitude topologique</u>

1.3.1. Notons $B^{2k}(R)$ la boule ouverte euclidienne de rayon R dans $\mathbb{R}^{2k}$, et prêtons lui la structure symplectique induite par ω_0 .

THÉORÈME B (Gromov).- *Il n'existe pas de plongement symplectique de* $B^{2n+2}(R_1')$ *dans* $B^2(R_1) \times B^{2n}(R_2)$ *si* $R_1' > R_1$.

Et cela quel que puisse être le rapport des volumes $\omega_0^{n+1}(B^2(R_1) \times B^{2n}(R_2))$ *et* $\omega_0^{n+1}(B^{2n+2}(R_1'))$.

COROLLAIRE.- *Si* $n = 1$, *les nombres* R_1 *et* R_2 *sont tous les deux des invariants symplectiques des bidisques* $B^2(R_1) \times B^2(R_2)$ *(avec* $R_2 \geq R_1$*)* .

En effet, R_1R_2 est un invariant à cause de la conservation du volume total, et R_1 est un invariant grâce au Théorème B.

Les relations d'incertitude de Heisenberg (façon H. Weyl) traduisent l'invariance symplectique du volume des domaines de $\mathbb{R}^{2n}$ (*cf.* [C.F.]). Quelles sont les conséquences du Théorème B sur l'étude spectrale des opérateurs différentiels linéaires ? (*Voir aussi* [C.F.D.P.].)

1.3.2. Une autre relation d'incertitude mesure l'encombrement symplectique de boules disjointes plongées dans une autre boule. Donnons seulement l'énoncé dans $\mathbb{R}^4$:

THÉORÈME B' (Gromov).- *Soit* d *un nombre entier supérieur ou égal à* 1 *; on ne peut plonger* $d(d+3)/2$ *boules* $B^4(r)$ *symplectiquement dans* $B^4(R)$ *, de manière à ce que leurs images soient deux à deux disjointes, que si l'on a*

$$r \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{d+3}} R .$$

Pour deux boules, on trouve $r^4 \leq R^4/4$; c'est 4 fois moins bien que la restriction euclidienne $r^4 \leq R^4/16$, mais deux fois mieux que la restriction donnée par le volume $r^4 \leq R^4/2$. En particulier, on en déduit qu'une demi-boule euclidienne n'est pas symplectiquement isomorphe à une boule de même volume ; avant le travail de Gromov, on ne connaissait pas deux domaines ouverts de $\mathbb{R}^{2n}$, difféomorphes, de même volume, différents du point de vue symplectique.

Pour cinq boules, le Théorème B' donne $r \leq \sqrt{2/5}\, R$; exercice : démontrer directement cette restriction en géométrie euclidienne.

1.3.3. Le Théorème B entraîne le Théorème A. Il nous suffit, d'après le lemme 1.1.3, d'exhiber un difféomorphisme de $R^{2n+2} (n \geq 1)$ préservant ω_0^n , à support compact et envoyant la boule $B^{2n+2}(R_1')$ dans le domaine $B^2(R_1'/2) \times B^{2n}(2R_1')$.

1.4. Structures presque complexes positives

1.4.1. Gromov va tirer la rigidité symplectique d'une rigidité solidement établie : celle des fonctions d'une variable complexe.

Une *structure complexe* sur un fibré vectoriel F est un endomorphisme de F dont le carré est -1 . Une structure complexe de F donne une structure d'espace vectoriel complexe à chacune de ses fibres. Une *structure presque complexe* sur une variété W est une structure complexe sur le fibré tangent de W . Si (F,ω) est un fibré vectoriel symplectique, une structure presque complexe $J : F \longrightarrow F$ est *positive* (par rapport à ω) si l'on a $\omega(u,Ju) > 0$ pour tout vecteur u non nul d'une fibre de F . Nous dirons que J est *adaptée* à ω si elle est positive et si, de plus, J est un automorphisme symplectique ; alors $\omega(u\,,Ju)$ définit une métrique euclidienne sur F ; les structures presque complexes adaptées à ω forment un sous-espace contractile non vide de $\mathrm{End}(F)$; il en va de même de celles qui sont seulement positives (cf. [M.G.1.], le terme de Gromov pour positive est *tame*, et pour adapté est *calibrated*).

Soit (W,J) une variété presque complexe, en général, il n'y a pas d'autres fonctions holomorphes sur un ouvert de W à valeurs complexes, que les fonctions localement constantes ; par contre, il existe beaucoup de fonctions holomorphes d'ouverts de $\mathbb{C}$ à valeurs dans W ([A.N.W.W.]). Si X est une surface de Riemann, nous appellerons *application holomorphe* de X dans W (ou *solution* de J) toute application f de X dans W de classe C^1 telle que

$$J \circ Df = Df \circ i \ .$$

De même, nous appellerons *courbe complexe* (ou *courbe holomorphe*, ou *intégrale* de J) tout sous-variéré orientée immergée X de W, de dimension 2, dont les plans tangents sont des droites complexes de J. Lorsque X est plongée, nous dirons que la courbe est *lisse*.

1.4.2. Considérons une variété symplectique fermée (W_0^{2n},ω_0'), telle que ω_0' soit à périodes entières sur toutes les classes sphériques de W_0 ; et munissons la variété $W^{2n+2} = S^2 \times W_0$ de la structure symplectique $\omega = \omega_0 + \omega_0'$, en prenant pour ω_0 la structure standard de période 1 sur S^2.

THÉORÈME C (Gromov).- *Soit J une structure presque complexe sur W positive par rapport à ω ; par chaque point (z,w) de W, il passe une application holomorphe de source S^2, homotope à $S^2 \times w$ dans W. De plus, lorsque $n = 1$ (W est de dimension 4), il existe un feuilletage de W dont toutes les feuilles sont des courbes complexes, lisses, isotopes à $S^2 \times w$ dans W.*

1.4.3. Un *pseudo-plan* (complexe) est une structure presque complexe J sur $P^2(\mathbb{C})$, positive par rapport à la structure standard ω_0. Nous appellerons pseudo-droite (resp. pseudo-conique) une intégrale de J homologue à une droite (resp. une conique) de la structure complexe standard J_0 de $P^2(\mathbb{C})$.

THÉORÈME C' (Gromov).- *Toutes les pseudo-droites sont des sphères plongées isotopes à $P^1(\mathbb{C})$ dans P^2. Par deux points distincts de P^2 passe une pseudo-droite, et deux pseudo-droites distinctes se coupent en un point et un seul. Par 5 points (non sur une même pseudo-droite), il passe une pseudo-conique et une seule ; si aucun triplet des cinq points n'est situé sur une pseudo-droite, cette pseudo-conique est une sphère plongée isotope à une conique lisse dans P^2.*

Par $d(d+3)/2$ points en position générale, il passe une courbe complexe (pour J) lisse, qui est une surface de genre $(d-1)(d-2)/2$.

1.4.4. Le Théorème C entraîne le Théorème B. En effet, si l'on a un plongement symplectique de $B = B^{2n+2}(R)$ dans $B^2(R_1) \times B^{2n}(R_2)$, on en déduit aussitôt un plongement symplectique f de B dans $W = S^2 \times T^{2n}$ muni de la forme $\omega = \omega_0 + \omega_0'$ telle que $\omega_0(S^2) = \pi R_1^2$. Soit $R' < R$, notons $B' = B^{2n+2}(R')$, servons-nous de f pour transporter la structure complexe standard J_0 de B' sur $f(B')$, et étendons cette structure sur tout W (par contractilité) en une structure presque complexe positive J . Le Théorème C (après changement d'échelle) nous donne une solution Y de J homologue à $S^2 \times w$ passant par l'image (z,w) du centre 0 de B ; on a $\omega . [Y] = \pi R_1^2$. Considérons $\bar{X} = f^{-1}(Y \cap f(B'))$; c'est une courbe analytique complexe de B' , passant par 0 , donc son aire est supérieure à $\pi R'^2$ (cf. [G.ST.]). Mais l'aire de $\bar{X}$ est égale à $\int_{\bar{X}} \omega_0$ (Wirtinger) (cf. [G.ST.]). Or $\int_{\bar{X}} \omega_0 = \int_{Y \cap f(B')} \omega \leq \int_Y \omega = \pi R_1^2$. D'où l'inégalité $R_1 \geq R'$, mais $R' < R$ est arbitraire, donc $R_1 \geq R$. C.Q.F.D.

Un argument tout proche établit le Théorème B' à partir du Théorème C'.

1.4.5. Les théorèmes C et C', ainsi que la plupart des résultats de [M.G.1], restent valables dans un cadre plus général que le presque-complexe : celui des *systèmes elliptiques en deux variables indépendantes*. C'est dans ce cadre général que nous allons nous placer ; le presque-complexe en est le cas particulier *quasi-linéaire*.

2. RELATIONS ELLIPTIQUES POSITIVES

2.1. Problèmes fortement elliptiques en dimension 4

2.1.1. Soit U un espace vectoriel réel de dimension 4 orienté ; Q désigne la grassmannienne des sous-espaces vectoriels orientés de dimension 2 de U . Si $q \in Q$, l'espace tangent T_qQ s'identifie à $\mathrm{Hom}(q,U/q)$, par conséquent la variété Q possède une structure conforme intrinsèque de type d'inertie $(++--)$: si $\ell \in T_qQ$, l'inéquation $\det(\ell) > 0$ est indépendante d'un choix de bases compatibles avec les orientations sur q et sur U/q .

Une *surface elliptique de type* $+$ (resp. *de type* $-$) est une sous-variété fermée connexe de dimension 2 de Q dont tous les vecteurs tangents appartiennent au cône positif (resp. négatif) de la structure conforme de Q .

Par exemple, la sphère $P^1(J)$ des droites complexes d'une structure complexe J sur U est elliptique. Elle est de type $+$ ou $-$ selon que J donne ou non la bonne orientation de U .

Les structures complexes J sur U forment une variété de dimension 8 (isomorphe à $S^2 \times \mathbb{R}^6$), leurs droites projectives $P(J)$ forment une famille à 6 paramètres. Si E est une surface elliptique, en chaque point e de E il passe une unique $P(J)$ tangente à E en e ; d'où une structure conforme sur E .

Toute structure conforme de type $(++++)$ sur U, fournit un isomorphisme de Q avec $S^2 \times S^2$: l'étoile de Hodge décompose $\Lambda^2 U$ en Λ_+ (autodual) et Λ_- (antidual) de dimension 3 tous les deux ; et si S_+ (resp. S_-) désigne la sphère à l'infini de Λ_+ (resp. Λ_-), on a $Q \cong S_+ \times S_-$. Le changement d'orientation d'un 2-plan est l'antipodale de S_-, le passage à l'orthogonal est l'antipodale de S_+. Un changement d'orientation de U échange les deux sphères S_+ et S_-. Une structure complexe J sur U compatible avec l'orientation et la structure conforme de U a un $P(J)$ parallèle à S_+. La sphère S_- sert à paramétrer les structures complexes compatibles avec la structure conforme orientée de U.

Chaque surface elliptique de type $+$ (resp. de type $-$) est le graphe d'une application contractante de S_+ (resp. S_-) dans S_- (resp. S_+).

Soit E une surface elliptique ; dans chaque hyperplan de U, il existe un plan et un seul appartenant à E. Et deux plans de E ont une intersection positive (resp. négative) si E est de type $+$ (resp. de type $-$) (*référence* [H.G.F.W.]).

2.1.2. Soit W une variété orientée de dimension 4 ; notons G l'espace total du fibré en fibres Q associé à TW.

Une *relation elliptique* (de type $\pm$) sur W est une sous-variété de codimension 2 de G qui coupe transversalement chaque fibre Q de G selon une surface elliptique (de type $\pm$). Lorsque W possède une structure symplectique ω, nous disons qu'une relation elliptique E est *positive* (par rapport à ω) si ω induit un élément d'aire avec la bonne orientation sur les éléments de E.

Par exemple, les droites complexes d'une structure presque complexe sur W forment une relation elliptique.

Si X est une surface de Riemann orientée, nous appellerons *solution* de E toute application f de X dans W de classe C^1, telle que Df envoie TX conformément dans l'un des plans de E. Et nous appellerons *intégrale* de E toute sous-variété orientée immergée X de W, de dimension 2, dont les plans tangents sont des éléments de E.

2.1.3. Lorsque $z = x+iy$ décrit un ouvert Δ de $\mathbb{C}$, soit $w = u+iv$ une fonction de z ; les équations de Cauchy-Riemann $\bar{\partial} w = 0$, i.e. $u'_x = v'_y$ et $u'_y = -v'_x$, définissent une relation elliptique sur $\Delta \times \mathbb{C}$; les graphes des fonctions holomorphes sont des surfaces intégrales de cette relation.

De même les fonctions pseudo-holomorphes, tant étudiées par Bers et Vekua (*cf.* [L.B.1.] et [I.N.V.]), sont des intégrales de relations elliptiques.

C'est Lavrent'ev (*cf.* [M.A.L. 1 & 2]) qui a introduit les systèmes différentiels sur les fonctions de Δ dans $\mathbb{C}$ donnant lieu aux relations elliptiques générales, sous le nom de systèmes fortement elliptiques (voir [B.V.B.T.I.] pour la présentation géométrique dans G).

Remarquons qu'une équation du second ordre

$$f(x,y,\varphi'_x,\varphi'_y,\varphi''_{xx},\varphi''_{xy},\varphi''_{yy}) = 0$$

portant sur une fonction de deux variables $\varphi(x,y)$, sans faire intervenir les valeurs de φ , (par exemple : surfaces minimales dans $\mathbb{R}^3$), entre dans le cadre que nous étudions. Il suffit de poser $\varphi'_x = v$ et $\varphi'_y = u$; on a

$$u'_x = v'_y \quad \text{et} \quad f(x,y,u,v,u'_x,u'_y,v'_x,v'_y) = 0$$

définissant une sous-variété de codimension 2 de $\mathbb{R}^4 \times Q$.

2.1.3. Schapiro et Lavrent'ev ont étendu une grande partie des résultats de Riemann aux systèmes elliptiques les plus non linéaires ; Gromov étend leurs résultats à des situations encore plus globales :

THÉORÈME D (Lavrent'ev) (qui étend le théorème de Riemann pour les domaines simplement connexes du plan).- *Soient* Δ *et* Δ' *deux domaines simplement connexes de* $\mathbb{C}$ *relativement compacts, à bords lisses* γ *et* γ' *; soit* E *une relation elliptique sur* $\Delta \times \Delta'$ *, contenant en chaque point* (z,w) *le plan vertical et le plan horizontal ; étant donnés trois points de* $\gamma \times \gamma'$ *, dont les trois coordonnées sur* γ *, comme sur* γ' *, sont deux à deux distinctes, il existe un disque intégral de* E *, unique, dont le bord contient ces trois points, transverse à toutes les verticales* Δ' *et à toutes les horizontales* Δ .

[M.G.1] retrouve ce théorème et l'étend à des situations où l'on ne se donne plus *a priori* les feuilletages verticaux et horizontaux par des intégrales de E .

THÉORÈME E (Gromov) (généralisant le théorème de Riemann pour les surfaces fermées simplement connexes).- *Équipons la variété* $W = S^2 \times S^2$ *de la structure symplectique standard* $\omega = \omega_0 \oplus \omega_0$ *, où l'intégrale de* ω_0 *sur* S^2 *est égale à* 1, *et considérons une relation elliptique* E *sur* W *positive par rapport à* ω .

Pour tout couple (a,b) *d'entiers strictement positifs, il existe une intégrale lisse de* E *homologue à* $a[S^2 \times 1] + b[1 \times S^2]$ *; cette intégrale est une surface de genre* $(a-1)(b-1)$.

La variété W *possède deux feuilletages transverses par des sphères intégrales de* E *, et cette paire de feuilletages est isotope à la paire (horizontales, verticales).*

[M.G.1] contient des généralisations au produit de S^2 par une autre surface.

Signalons encore que le Théorème C' s'étend aux relations elliptiques positives par rapport à ω_0 sur $P^2(\mathbb{C})$. On peut parler de *pseudo-plans elliptiques*.

2.2. Problèmes fortement elliptiques en dimension > 4

2.2.1. La structure symplectique ω de W n'intervient en dimension 4 que pour garantir un bon comportement global des solutions de la relation elliptique E ; il n'en est plus de même en dimension plus grande, et il ressort apparemment du travail de Gromov une notion maniable d'ellipticité (en 2 variables indépendantes) pour $\dim W > 4$, à condition d'utiliser une forme symplectique dès le niveau linéaire de l'étude.

Soit Q_{2n} la grassmannienne des sous-espaces vectoriels orientés de dimension 2 d'un espace vectoriel réel orienté U de dimension $2n+2$ (Q_{2n} est difféomorphe à une hyperquadrique lisse de dimension complexe $2n$ dans $P^{2n+1}(\mathbb{C})$). Donnons-nous une structure d'espace vectoriel symplectique ω sur U ; Q^+ désigne la sous-variété des plans symplectiques (bien orientés) dans Q . En chaque point q de Q^+ , une structure conforme intrinsèque sur $T_qQ = \mathrm{Hom}(q,U/q)$ de type d'inertie $(2n,2n)$ se présente à nous : un élément ℓ de T_qQ est dans le cône positif C_q^+ si ℓ correspond à un plongement symplectique préservant l'orientation. Cela revient à considérer un pfaffien à la place d'un déterminant :

$$\ell \in C_q^+ \quad \text{si} \quad \mathrm{Pff}({}^t\ell \circ \omega \circ \ell) > 0 \ .$$

Nous dirons qu'une sous-variété fermée connexe de codimension $2n$ (réelle) de Q^+ est une *variété elliptique positive par rapport à* ω si chacun de ses vecteurs tangents appartient au cône positif. Dire que E est elliptique positive revient à dire que pour tout point e de E , l'espace T_eE est un sous-espace vectoriel symplectique de dimension $2n$ dans $q^* \otimes U/q$. Par exemple, les droites d'une structure complexe sur U positive par rapport à ω forment un $P^n(\mathbb{C})$ qui est une sous-variété elliptique positive de Q .

2.2.2. *Lemme.- Les sous-variétés elliptiques positives par rapport à* ω *sont toutes isotopes entre elles à travers les sous-variétés elliptiques positives.*

Indication de démonstration : on choisit une structure complexe J_0 *adaptée à* ω , on note $g_0 = \omega(\cdot, J_0 \cdot)$ la métrique euclidienne de U qui s'en déduit, et P_0 la sous-variété de Q^+ formée par les droites complexes de J_0 . Sur $Q^+ \setminus P_0 = Q_0^+$, le fibré tautologique ϑ de rang 2 est trivial, car sa classe d'Euler est portée par P_0 ; soit s une section jamais nulle de ϑ au-dessus de Q_0^+ , et, pour chaque point q de Q_0^+ , soit σ_q la réflexion orthogonale pour g_0 dans q par rapport à $S(q)$, $J_0 \circ \sigma_q$ définit un champ de vecteur ξ sur Q_0^+ . Le flot de ξ rétracte Q_0^+ dans un voisinage aussi petit qu'on veut de P_0 dans Q^+ en préservant la positivité.

Contrairement à ce qui se passe pour $n = 1$ $(\dim W = 4)$, il n'y a pas, en général, de variété des droites d'une structure complexe qui soit tangente à E en un point donné e de E , mais il y a toujours des structures complexes adaptées à ω dont e est une droite complexe *et cela nous suffira.*

2.2.3. Soient (W,ω) une variété symplectique de dimension $2n+2$, et G (resp. G^+) le fibré associé à TW de fibre type Q (resp. Q^+) ; nous définissons une *relation elliptique positive* (r.e.p.) sur W comme étant une sous-variété de codimension $2n$ de G^+ transverse aux fibres, dont la trace sur chaque fibre Q^+ est une sous-variété elliptique positive de Q . Comme en dimension 4 , nous définissons les *solutions* et les *intégrales* d'une relation.

2.2.4. *Micro-structure complexe.* Considérons au-dessus de G^+ le fibré H^+ , dont la fibre en $q \in Q^+_x$ $(x \in W)$, est formée des structures complexes de T_xW adaptées à ω_x dont q est une droite complexe. Les fibres de H^+ sont contractiles ; on peut donc se donner *a priori* une section $\tilde{J}$ de classe C^∞ de H^+ au-dessus de E . Cette construction donne à toute intégrale de E une structure complexe.

2.2.5. Soit X une surface (réelle) orientée C^∞ , munie d'une métrique riemannienne g_0 ; notons ω_0 la forme d'aire associée sur X . Soit $\tilde{J}$ une microstructure complexe sur E . En chaque point (x,y) de $X \times W$, considérons la grassmannienne $Q_{x,y}$ des plans tangents orientés à $X \times W$ en (x,y) , et définissons $\tilde{E}_{x,y} \subset Q_{x,y}$ comme étant la réunion des graphes d'applications *conformes* de (T_xX, g_0) dans l'un des plans q de $E \cap G^+_y$ équipé avec la structure conforme $\tilde{J}_q$. La réunion $\tilde{E}$ des $\tilde{E}_{x,y}$ se prolonge en une relation elliptique positive $\hat{E}$ sur $X \times W$ (pour la forme symplectique $\omega_0 \oplus \omega$). On appelle $\hat{E}$ une structure *d'espace des phases elargi* pour E . Une solution de E de source X peut s'interpréter comme une intégrale d'une structure $\hat{E}$; cette construction a l'avantage de tout rendre lisse. Lorsque E est donnée par une structure presque-complexe sur W , $\hat{E}$ peut être donnée par une structure presque-complexe sur $X \times W$.

2.2.6. Si E est une r.e.p. sur (W,ω) , on peut construire sur la variété E une forme symplectique et une relation elliptique positive $E^{(1)}$ possédant la propriété suivante : si $f : X \longrightarrow W$ est une solution lisse de E , l'application $Qf : X \longrightarrow E$ qui à $x \in X$ associe l'image par Df de T_xX , est une solution de $E^{(1)}$. On appelle $E^{(1)}$ une *structure dérivée* de E .

2.2.7. Pour les germes de solutions d'une r.e.p., on dispose des résultats classiques sur les systèmes d'e.d.p. non linéaires elliptiques ; par exemple le *principe du maximum* (Hopf, Bers) (*cf.* [L.B.2]), ou le *principe de Carleman* : si une solution $f : X \longrightarrow W$ de E a un contact d'ordre infini en un point $x \in X$ avec une application constante, elle reste constante au voisinage de x . En particulier, les singularités d'une solution de E sont isolées.

Sont également disponibles les résultats classiques de *régularité* (*cf.* [A.D.L.N.]) (par exemple : la continuité hölderienne d'une solution entraîne que la solution est C^∞ , si E est C^∞ elle-même), mais les méthodes géométriques de Gromov établiront (en général) ces résultats directement en passant à une équation dérivée $E^{(1)}$.

2.3. Contrôle topologique *a priori* en dimension 4

2.3.1. Il s'agit d'exploiter au mieux l'avantage donné par l'extension de la remarque fondamentale de Lefschetz : l'intersection de deux plans distincts appartenant à une même surface elliptique de type + est +1 .

Soit E une relation elliptique de type + sur une variété orientée W ; deux germes d'intégrales X et Y en $x \in W$ ont un contact d'ordre fini (Carleman), et l'ordre du contact compte le nombre local d'intersection pour toute perturbation transverse du couple (X,Y) (dans des coordonnées analytiques complexes adéquates, le contact d'ordre n avec 0 s'exprime par une équation

$$w = z^n + 0(z^{n+1}) \;).$$

2.3.2. De plus, si $f : X \longrightarrow W$ est une solution C^∞ de E définie au voisinage de $0 \in X$, il est toujours possible de perturber E en E' au voisinage de $f(0)$ pour trouver une solution $f' : X \longrightarrow W$ de E' , C^∞ voisine de f , près de 0 , qui est une immersion (appliquer la transversalité au niveau du premier jet non nul). Lorsque f a une singularité en 0 , l'application f' possède au moins un point double.

2.3.3. Soit X une intégrale fermée de E dans W^4 ; si le nombre d'Euler du fibré normal N de X dans W est strictement négatif (pour les orientations déduites de W et X), en vertu de 2.3.1, il n'existe pas d'intégrale voisine de X qui ne soit pas confondue avec X .

2.3.4. Soit E une relation elliptique de type + sur une variété orientée W^4 ; d'après 2.1.1, W admet une structure presque complexe J telle que la relation elliptique P_J de type Cauchy-Riemann définie par J soit isotope à E . Notons c_1 la première classe de Chern du fibré complexe de rang 2 (TW,J) . A présent, soit X une surface immergée dans W ; notons $c = c_1 . [X]$ son nombre de Chern et ν le nombre d'Euler de son fibré normal dans W . Supposons X en position transverse par rapport à J ; il y a quatre types de points où le plan tangent de X devient une droite complexe de J , en quantités e^+, e^-, h^+, h^-, le + ou le - selon que l'orientation est la bonne ou non, le e ou le h selon que l'application qui à un point de X associe son plan tangent coupe P_J avec intersection +1 ou -1 dans G .

Soit χ la caractéristique d'Euler de X ; on a les *formules de Lai* (*cf.* [H.F.L.], [J.E.V.H.] ou [D.B.]).

$$\chi + \nu = e^+ + e^- - h^+ - h^-$$

$$c = e^+ - e^- - h^+ + h^- \;.$$

Par conséquent, si X est une intégrale de E, l'homotopie de E à J nous donne la *formule du genre*

$$\chi + \nu = c .$$

De là, on déduit des résultats de régularité *a priori* :

2.3.5. *Lemme.- Si* E *est une r.e.p. par rapport à* ω_0 *sur* $P^2(\mathbb{C})$ *, et si* $f : X \longrightarrow P^2$ *est une solution de source connexe et fermée de* E *, telle que* $f_*[X] . f_*[X] = 1$ *en homologie, alors* f *est un plongement,* X *est une sphère* S^2 *, et* f *est régulièrement homotope à* $P^1(\mathbb{C}) \subset P^2$.

En effet, quitte à perturber E, on trouve E' et f' solution de E' homotope à f, qui est une immersion à points doubles ordinaire, le nombre de points doubles de f' comptant l'ordre des singularités de f. Si c, ν, χ sont respectivement le nombre de Chern de f', le nombre d'Euler de son fibré normal, et la caractéristique de X, et si δ est le nombre de points doubles de $f'X$, on a

$$1 = f(X) . f(X) = f'(X) . f'(X) = \nu + 2\delta$$

et

$$\chi + \nu = c = 3 ;$$

or $\chi \leq 2$, donc $\nu \geq 1$ donc $\delta = 0$, $\nu = 1$ et $\chi = 2$.

2.3.6. De façon analogue, on montre que sur $S^2 \times V^2$, toute solution d'une r.e.p./ ω_0 homologue à $S^2 \times v$ est une sphère plongée de dimension 2 régulièrement homologue à $S^2 \times v$.

2.4. Analyse fonctionnelle

2.4.1. Soit (W, ω) une variété symplectique fermée de dimension $2n+2$; considérons la variété de Fréchet $\mathcal{F}$ des sous-variétés immergées fermées de dimension 2 de W à croisements normaux (éventuellement des points multiples à plans tangents transverses, mais pas de contact) ; $\mathcal{F}$ est une *bonne* variété de Fréchet (tame), dans la catégorie de Nash-Moser introduite par Hamilton (voir [R.S.H.] dont nous allons librement utiliser la méthode). Une autre bonne variété de Fréchet est la variété $\mathcal{E}$ de toutes les relations elliptiques positives par rapport à ω. L'espace qui nous intéresse est $\mathcal{M}$, ensemble des couples (X,E), $X \in \mathcal{F}$, $E \in \mathcal{E}$, tels que X soit intégrale de E.

La souplesse (microlocale) de $\mathcal{E}$ entraîne immédiatement que la projection $pr_1 : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{F}$ est une *bonne* fibration sur son image. Donc $\mathcal{M}$ est une bonne sous-variété de $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$.

Remarque.- Même si l'on autorisait les contacts pour les éléments de $\mathcal{F}$ (et sans doute les autres points singuliers), $\mathcal{M}$ serait une bonne sous-variété de $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$. Mais ce $\mathcal{F}$ suffit pour les applications qu'on a en vue.

2.4.2. THÉORÈME F.- *La restriction à* M *de la seconde projection,* $\Delta : M \to E$ *, est une bonne application de Fredholm, et son indice en un point* (X_0, E_0) *de* M *est égal à*

$$2\nu + n\chi$$

où ν *est le nombre d'Euler du fibré normal* N *de* X_0 *dans* W *, et* χ *la caractéristique d'Euler de* X_0 (et $2n+2 = \dim W$).

Démonstration.- L'espace tangent à E en E_0 s'écrit naturellement comme somme directe de $\mathcal{E}_0$ (les déformations de E_0 fixes le long de la sous-variété $\tilde{X}_0$ de E_0 formée par les plans tangents à X_0) et de $\Gamma(M)$ (espace des sections C^∞ du fibré M sur X_0 obtenu par restriction à $\tilde{X}_0$ du fibré normal à E_0 dans G). D'autre part, l'espace tangent à M en (X_0, E_0) , lui, s'identifie à la somme directe de $\mathcal{E}_0$ et de $\Gamma(N)$ (espace des sections C^∞ du fibré normal N à X_0 dans W), l'application $T_{(X_0,E_0)}\Delta$ étant l'identité sur le facteur $\mathcal{E}_0$ et la variation du plan tangent de $\Gamma(N)$ dans $\Gamma(M)$.

En fait, à l'aide d'une connexion sur TG , il n'est pas difficile d'identifier un voisinage de E_0 dans E à $\mathcal{E}_0 \times \Gamma(M)$ et un voisinage de (X_0, E_0) dans M à $\mathcal{E}_0 \times \Gamma(N)$, de sorte que Δ lui-même s'écrive $(\varphi, \bar{\Delta})$ où φ est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathcal{E}_0$ sur un voisinage de 0 dans $\mathcal{E}_0$, et $\bar{\Delta}$ un *opérateur différentiel non linéaire du premier ordre* (au sens de Palais [R.S.P.]). Ceci nous autorisera à utiliser, sans modification aucune, le traitement que Hamilton applique à ces opérateurs dans [R.S.H.].

Soient $x \in X_0$, et $\ell \in E_0$ le point de $\tilde{X}_0$ au-dessus de x (i.e. $T_x X_0$) , notons V_ℓ l'espace $T_\ell(E_0)_x$; l'espace M_x s'identifie à $T_\ell \Omega_x / V_\ell$ et $T_\ell \Omega_x$ à $\mathrm{Hom}(T_x X_0, N_x) = T_x^* X_0 \otimes N_x$. Modulo ces identifications, le symbole $\sigma(x,\xi)$ de $T_{X_0}\bar{\Delta} = T_{(X_0,E_0)}(\Delta)|_{\Gamma(N)}$ au point (x,ξ) de T^*X_0 , est le morphisme de N_x dans $T_x^* X_0 \otimes N_x / V_\ell$ qui à $\delta \in N_x$ associe $\xi \otimes \delta$ modulo V_ℓ . Dans $\mathrm{Hom}(T_x X_0, N_x)$, l'élément $\xi \otimes \delta$ est de rang 1 (sauf si $\xi = 0$ ou $\delta = 0$), mais V_ℓ est constitué d'éléments de rang 2 (ou 0) (l'hypothèse d'ellipticité), donc $\sigma(x,\xi)$ est injectif si $\xi \neq 0$; mais $\dim N_x = \dim M_x = 2n$, par suite $T_{X_0}\bar{\Delta}$ est *elliptique* au sens ordinaire du terme, et $\bar{\Delta}$ (donc Δ) est Fredholm.

Le calcul de l'indice de $T\bar{\Delta}$ résulte du lemme 2.2.2 ; E_0 est isotope à travers les r.e.p. à une structure presque complexe J_0 , pour laquelle on dispose de la formule de Riemann - Roch - Atiyah - Hirzebruch.

En appliquant le Théorème F au cas où W est un espace de phases élargi $X \times W'$ ($\dim W' = 2n$) , et X_0 le graphe d'une solution f d'un E' sur W' , on trouve comme indice

$$2c + n\chi$$

où c est le nombre de Chern $c_1(f^*(TW'), J') . [X]$, pour une quelconque structure presque complexe J' homotope à E' .

2.4.3. Pour les pseudo-droites d'un (P^2,E) l'indice de Δ est 4, pour les pseudo-génératrices d'un $(S^2 \times V^2,E)$ l'indice est 2.

Dans ces deux cas, $T\Delta$ est *surjectif* (théorème d'annulation).

En effet, l'adjoint de $T\bar{\Delta}$ est alors lui aussi du type $T\bar{\Delta}$ mais en remplaçant N par un N' de nombre d'Euler $\nu' = -\nu - \chi < 0$. La remarque 2.3.3 entraîne donc l'annulation du conoyau de $T\bar{\Delta}$.

Dans ce cas, Hamilton montre que le théorème du "rang constant" à la Nash-Moser s'applique, Δ aura des sections locales ; par suite, dans le cas des pseudo-droites de P^2 , $\Delta^{-1}(E)$ est une variété de dimension 4 *si elle n'est pas vide*, et dans le cas des pseudo-génératrices d'une surface réglée, $\Delta^{-1}(E)$ est une variété de dimension 2 *si elle n'est pas vide*. Gromov élimine cette alternative en montrant que Δ est *propre*. C'est à l'étude de la propreté de Δ en général que nous allons consacrer le §3.

3. GÉOMÉTRIE DES SURFACES INTÉGRALES

3.1. La méthode

3.1.1. On ne peut pas espérer, en général, la compacité des solutions d'une relation elliptique positive, même en bornant l'aire, même en fixant la classe d'homologie. L'exemple des coniques dans le plan complexe standard nous le montre bien ; la famille des coniques non dégénérées $xy = \varepsilon$ (qu'on peut paramétrer par $z \mapsto (z,\frac{\varepsilon}{z})$ de $P^1(\mathbb{C})$ dans $P^2(\mathbb{C})$) "converge" lorsque ε tend vers 0 vers la réunion des droites $x = 0$ et $y = 0$; il faut deux sphères pour paramétrer cette limite. On tombe sur le phénomène des "bulles" que Sacks et Uhlenbeck ([J.S.K.U.]) ont repéré et étudié dans le cas des applications harmoniques d'une surface dans une variété riemannienne. Ce phénomène a acquis droit de cité en analyse non linéaire.

Cependant Gromov a réussi a contrôler la perte de compacité ; par exemple :

THÉORÈME G (Gromov).- *Soient* (W^{2n},ω) *une variété symplectique fermée,* E_k *une suite de r.e.p. qui converge, dans la topologie* C^∞ *, vers une r.e.p.* E_∞ *, et, pour chaque* $k < \infty$ *, une solution* f_k *de* E_k *de source fermée fixe* (X,ω_0) *; supposons que les* $f_k(X)$ *soient homologues entre eux, alors il existe un sous-ensemble fini* F *de* X *, une solution* $f_\infty : X \to W$ *de* E_∞ *, et une sous-suite* f_{k_m} *de* $(f_k)_{1\le k<\infty}$ *, tels que* f_{k_m} *converge vers* f_∞ *, en dehors de* F *(* C^∞ *uniformément sur tout compact), et, pour la distance de Hausdorff, les graphes* X_{k_m} *des* f_{k_m} *convergent dans* $X \times W$ *vers la réunion du graphe* X_∞ *de* f_∞ *et d'un nombre fini de fermés de la forme* $x_\ell \times g_\ell(S^2)$ *, où* $x_\ell \in F$ *et* $g_\ell : S^2 \to W$ *est une solution de* E_∞ *. De plus, si* $x_\ell \in F$ *et si* $f_{k_m}(x_\ell)$ *ne converge pas vers* $f_\infty(x_\ell)$ *, l'application* g_ℓ *n'est pas constante.*

3.1.2. Disons qu'une classe d'homologie de dimension 2 d'une variété symplectique est *simple* si on ne peut pas l'écrire comme somme de deux classes sur lesquelles $\omega > 0$. Si l'on ne regarde que les solutions d'une r.e.p. appartenant à une classe simple, la compacité a lieu :

THÉORÈME H (Gromov).- *Soient* (W^{2n},ω) *une variété symplectique fermée,* $a \in H_2(W;\mathbb{Z})$ *une classe simple,* E_k *une suite de r.e.p. qui converge* C^∞ *vers une r.e.p.* E_∞ *, et, pour chaque* $k < \infty$ *, une solution* $f_k : S^2 \to W$ *de* E_k *, telle que* $[f_k(S)] = a$ *, alors il existe une suite de difféomorphismes* h_k *de* S *, tels qu'une sous-suite de* $f_k \circ h_k$ *converge* C^∞ *vers une solution* $f_\infty : S \to W$ *de* E_∞ .

Joint à l'analyse de 2.4, ce théorème entraîne rapidement le Théorème C et la partie du Théorème C' concernant les pseudo-droites, d'où B, B' et A. Pour le reste du théorème C' et pour le Théorème E, on fait appel au Théorème G.

3.1.3. Les Théorèmes G et H découlent de la compacité des "*courbes-cusp*". Soit X une surface fermée et soit Γ une collection finie de courbes simples fermées disjointes γ_i sur X ; la *courbe-cusp* $C(X,\Gamma)$ est le complexe obtenu en écrasant chaque γ_i en un point. Ce complexe s'obtient aussi en identifiant deux par deux un nombre fini de points d'une collection de surfaces fermées Y_j ; une *solution cuspidale* d'une r.e.p. E sur W est une application de $C(X,\Gamma)$ dans W qui est solution ordinaire de E sur chaque surface Y_j .

THÉORÈME K (Gromov).- *Sous les hypothèses du Théorème G, il existe une sous-variété de dimension un,* Γ *de* X *, une solution cuspidale* $f_\infty : C(X,\Gamma) \to W$ *de* E_∞ *, et une suite de difféomorphismes* h_k *de* X *, tels qu'on puisse extraire de* $(f_k \circ h_k)_{1<k<\infty}$ *une sous-suite convergeant vers* f_∞ *, uniformément en topologie* C^∞ *sur tout compact de* $X \setminus \Gamma$ *. De plus, on peut faire en sorte que les images de cette sous-suite convergent au sens de Hausdorff vers l'image de* f_∞ .

3.1.4. La démonstration de K procède de la manière suivante : quitte à reparamétrer X et à extraire une sous-suite de f_k , on trouve des anneaux A_i sur X tels que $X' = X \setminus \cup A_i$ s'envoie par f_k sur une surface à rayon d'injectivité minoré ; puis on enlève, convenablement, un nombre fini de points P_j à X' , de manière à pouvoir choisir une suite de métriques g_k sur $X'' = X' \setminus \cup P_j$ qui converge modulo reparamétrage de X'' , et pour laquelle les f_k sont équicontinues.

On trouve alors une limite d'une sous-suite par Ascoli, et on termine en démontrant le prolongement aux points P_j .

Le point crucial est l'équicontinuité, qui nécessite une bonne version du *lemme de Schwarz*. C'est l'un des aspects les plus intéressants de [M.G.1].

Des textes de Marie-Paule Muller, Julien Duval, Pierre Pansu, Jean-Claude Sikorav et Daniel Bennequin, sur ce sujet, seront prochainement réunis dans une publication de l'IRMA de Strasbourg. Ce qui peut m'éviter un trop gros dépassement du nombre de pages imposé.

3.2. Outils pour la démonstration (de K)

3.2.1. *Lemme de Schwarz - Gromov, version Pansu*

Soit (X,g) une surface de Riemann ; appelons *profil isopérimétrique* (ou simplement *profil*) de (X,g) toute application continue $I : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui envoie 0 sur 0 et qui vérifie

$$\text{longueur de } \partial\Delta \geq I \ (\text{aire de } \Delta)$$

pour tout disque immergé Δ dans X .

Exemple.- $I(a) = \sqrt{4\pi a - Ka^2}$ pour une surface de courbure constante $K \leq 0$ (Bernstein).

Lemme.- Soit I *un profil de* (X,g) *qui soit* réaliste, *i.e.* $I(a) = 4\pi a(1+\varepsilon(a))$ *avec* $\int_0^c \frac{|\varepsilon(a)|}{a} < \infty$, *et* meilleur qu'euclidien *à l'infini, i.e.*

$$\int_c^\infty I(a)^{-2}\, da < \infty ,$$

alors il existe une constante $C(I) < \infty$ *telle que*

$$|f'(0)| \leq C(I)$$

pour toute immersion conforme f *du disque unité de* $\mathbb{C}$ *dans* X .

3.2.2. *Inégalité isopérimétrique de Bol - Fiala* (1941) (*cf.* [G.B.])

Soit (X,g) une surface de Riemann dont la courbure de Gauss K_g est majorée en tout point de X par une constante K , alors, quel que soit le disque immergé dans X de périmètre L et d'aire A , on a

$$L^2 \geq 4\pi A - KA^2 .$$

3.2.3. *Majoration de la courbure*

Soit E une structure elliptique positive sur une variété compacte W , et soit g une métrique riemannienne sur W ; il existe une constante $K < \infty$ (qui ne dépend que de la norme C^1 de E), telle que, pour tout germe d'intégrale de E $j : S \hookrightarrow W$ en $x \in W$, la courbure de Gauss de $(S, j^*(g))$ soit majorée par K .

Hint : utiliser une microstructure complexe $\tilde{J}$ sur E (2.2.4) et passer par une majoration de la courbure moyenne.

3.2.4. *Wirtinger et monotonie* (où l'on voit apparaître la structure symplectique).

Soit E une r.e.p. sur une variété symplectique et riemannienne compacte (W,ω,g) ; il existe une constante $\varepsilon_1 > 0$ et une constante $C_1 > 0$, telles que, pour toute boule B de rayon $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ contenue dans W et pour toute solution S de E relativement fermée dans B , on ait

$$\text{aire de } S \cap B \geq C_1 \varepsilon^2$$

et longueur de $\partial(S \cap B) \geq C_1 \times$ (aire de $S \cap B$).

Hint : formule de Stokes et comparaison (aire) / ω .

Remarque.- 3.2.4 et (3.2.3, 3.2.2) fournissent un bon profil pour les germes d'intégrales de r.e.p..

3.3. Indications de démonstration (de K)

Soit (W,ω,g) une variété symplectique et riemannienne compacte ; nous considérons une suite E_k de structures elliptiques positives qui converge vers E_∞ , une surface fermée X , et, pour tout k , une solution $f_k : X \longrightarrow W$ de E_k , d'aire uniformément majorée ($\exists C\ \forall k$ aire $(f_k(X)) \leq C$).

3.3.1. *Majoration topologique*

Quitte à extraire une sous-suite de (f_k) , il existe une décomposition finie $X = \cup X_i$ de X en surfaces connexes compactes X_i à bord Γ_i , telle que les $f_k(\Gamma_i)$ soient totalement géodésiques dans $f_k(X)$, que les longueurs des $f_k(\Gamma_i)$ tendent vers 0 et que le rayon d'injectivité de chaque composante X_j dont le diamètre ne tend pas vers 0 soit minoré.

Hint : utiliser la monotonie, le lemme des petites géodésiques de Klingenberg et le théorème de Gauss - Bonnet.

3.3.2. *Les suites de métriques*

Soit X_i l'un des morceaux de X donné par 3.3.1 ; si $\chi(X_i) < 0$, on met, pour chaque k , sur X_i la métrique g_i^k conforme à $f_k^*(g)$ de courbure constante -1 , qui rend les bords géodésiques avec mêmes longueurs que pour $f_k^*(g)$ (Fricke - Klein) ; si X_i est un disque, un anneau ou une sphère, on met sur lui la métrique de révolution de courbure constante $+1$ qui donne la bonne longueur aux bords (le bord n'est plus géodésique), et si X_i est un tore, on prend une métrique plate et fixe.

Alors, pour chaque X_i , on peut extraire de la suite $(g_i^k)_{k<\infty}$ une sous-suite de métriques qui converge vers g_i , métrique complète (à cusp) sur la surface Y_i obtenue à partir de X_i en écrasant chaque composante du bord en un point.

Hint : utiliser le module conforme des anneaux et la minoration du rayon d'injectivité.

3.3.3. *Estimée périmètre - diamètre*

Quel que soit $\varepsilon > 0$, quitte à extraire une sous-suite de f_k et à reparamétrer les X_i, il existe un nombre $\eta_1 > 0$, tel que, pour tout disque $\Delta \subset X_i$, et tout k assez grand, l'inégalité $\text{longueur}(f_k(\partial\Delta)) \leq \eta_1$ entraîne $\text{diamètre}(f_k(\Delta)) \leq \Sigma$.

Hint : courbure majorée, aire petite, rayon d'injectivité minoré...

3.3.4. *Argument longueur - aire*

Un argument longueur - aire typique de la géométrie conforme montre, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un nombre $\eta_2 > 0$ et d'un entier k tels que tout disque $\Delta \subset X_i$ de diamètre pour g_i (3.3.2) plus petit que η_2 s'envoie par f_k $(k \geq k_1)$ (reparamétrée) dans une boule de W de rayon $\leq \varepsilon$.

3.3.5. *Schwarz - Ascoli*

Le n° 3.3.4 nous permet d'appliquer le lemme de 3.2.1 avec le profil isopérimétrique donné par 3.2.4 et 3.2.3. - 3.1.1. aux petits disques des (X_i, g_i). Cela nous donne la convergence C^0 d'une sous-suite reparamétrée des f_k avec dérivées bornées sur les Y_i. Pour la convergence C^1 (puis C^∞), on refait tout le travail avec une structure dérivée $E^{(1)}$ à la place de E.

3.3.6. Pour conclure, on utilise le lemme suivant :

Lemme (prolongement en un point).- *Soit* E *une r.e.p.* C^∞ *sur une variété symplectique et riemannienne compacte* (W,ω,g) *et soit* $D^* = D \setminus \{0\}$ *le disque unité de* $\mathbb{C}$ *épointé ; si* ω *est exacte et si* $f : D^* \longrightarrow W$ *est une solution de* E *d'aire bornée, il existe un prolongement* C^∞ *de* f *à* D *en une solution de* E.

4. DE POINCARÉ - BIRKHOFF À RIEMANN - HILBERT

4.1. Peu avant sa mort, Poincaré conjectura "un certain théorème de géométrie" ([H.P.1]) : "J'ai démontré, il y a longtemps déjà, l'existence des solutions périodiques du problème des trois corps ; le résultat laissait cependant à désirer ; car, si l'existence de chaque sorte de solution était établie pour les petites valeurs des masses, on ne voyait pas ce qui devait arriver pour des valeurs plus grandes, quelles étaient celles de ces solutions qui subsistaient et dans quel ordre elles disparaissaient. En réfléchissant à cette question, je me suis assuré que la réponse devait dépendre de l'exactitude ou de la fausseté d'un certain théorème de géométrie dont l'énoncé est très simple, du moins dans le cas du problème restreint et des problèmes de Dynamique où il n'y a que deux degrés de liberté." L'énoncé du théorème : tout difféomorphisme de l'anneau, isotope à l'identité, préservant les aires et "faisant tourner les bords dans des sens opposés", possède au moins deux points fixes.

Peu après la mort de Poincaré, en 1913, ce théorème fut démontré géométriquement par Birkhoff [G.D.B.1].

Mais dans ses "méthodes nouvelles" ([H.P.2]), Poincaré avait montré comment se servir des points critiques de fonctions génératrices des transformations canoniques pour trouver leurs points fixes, ou leurs points périodiques (solutions périodiques du deuxième genre). Cette voie fut généralisée par Birkhoff [G.D.B.2], puis par Arnold [V.I.A.4] qui proposa une conjecture précise, étendant le théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff aux transformations de $T^*\mathbb{T}^n$ et de $\mathbb{T}^{2n}$. C'est par le calcul des variations que Conley et Zehnder ([C.C.E.Z.],[M.C.1]) ont démontré récemment cette conjecture. Comme l'a indiqué Weinstein, leur méthode est un recours aux fonctions génératrices en dimension infinie ; Chaperon ([M.C.2]) a réussi à faire redescendre cette méthode en dimension finie, et il a montré comment elle s'appliquait au problème de "disjonction hamiltonienne" de $\mathbb{T}^n$ dans son cotangent. Ce problème de disjonction dans le cotangent a depuis reçu une solution complète.

THÉORÈME L (Laudenbach-Sikorav [F.L.J.C.S.], Hofer [H.H.]).- *Soit* V *une variété fermée de dimension* n *(identifiée à la section nulle de son espace cotangent* T^*V *), et soit* $(\varphi_t)_{0\leq t\leq 1}$ *une isotopie hamiltonienne à support compact de* T^*V *(i.e.* φ_t *intègre un champ* ξ_t *qui dérive d'une famille de hamiltoniens globaux* h_t *à supports compacts sur* T^*V *) ; alors* $\varphi_1(V) \cap V$ *contient au moins* $C(V)$ *points, où* $C(V)$ *est le nombre minimum de points critiques que peut avoir une fonction numérique* C^∞ *sur un fibré vectoriel* E *de base* V *, en étant quadratique non dégénérée, à l'infini dans les fibres de* E *.*

Un travail récent de Sikorav (à paraître aux CRAS) rend encore plus claire la méthode des fonctions génératrices pour trouver des points fixes.

4.2. Cette méthode a encore permis de trouver le bon nombre de points fixes des transformations "globalement" canoniques dans le cas de $P^n(\mathbb{C})$ ([B.F.A.W]), dans le cas des surfaces ([J.C.S], [A.F]), et même dans le cas d'une variété symplectique quelconque, pour les isotopies qui restent C^0-petites ([A.W.2]) (ce dernier résultat découle d'ailleurs immédiatement du Théorème L).

Auparavant, Eliashberg ([J.E.2]) avait proposé une preuve dans le cas des surfaces, suivant la voie tracée par Poincaré dans [H.P.2]. Et c'est toujours dans cette direction qu'il a été amené à toutes ses conjectures de rigidité.

Cependant, il revient à Gromov d'avoir établi le résultat le plus général sur les points fixes :

THÉORÈME M (Gromov).- *Soit* (W^{2n},ω) *une variété symplectique fermée, et soit* $(\varphi_t)_{0\leq t\leq 1}$ *une isotopie hamiltonienne de* W *; alors,* φ_1 *a au moins deux points fixes.*

Ce théorème est démontré dans [M.G.1], avec la restriction que $[\omega]$ s'annule sur les classes d'homologie sphériques de dimension 2 de W. Pour l'instant, il manque une borne inférieure convenable du nombre des points fixes.

4.3. Pour démontrer M, Gromov étend la théorie des courbes pseudo-holomorphes aux surfaces de Riemann à bord. Ceci est également nécessaire pour obtenir la généralisation non linéaire de la représentation conforme (Théorème D).

Si E est une r.e.p. sur une variété symplectique (W,ω), et si V est une sous-variété lagrangienne immergée de W, nous dirons que V est *orthogonale* à E s'il existe un voisinage U de V dans W et une involution τ de U, dont l'ensemble des points fixes est exactement V, et telle que $\Lambda^2 D\tau$ envoie E sur $\bar{E}$, où $\bar{E}$ est la sous-variété des 2-plans tangents à W appartenant à E avec l'orientation *inverse*.

Si V est fermée et orthogonale à E, les *solutions de* E *à bord dans* V, $f : (X,\partial X) \longrightarrow (W,V)$, se traitent comme des solutions fermées de E. L'analyse fonctionnelle (2.4) est tout à fait analogue ; l'indice en (X_0,∂_0) de l'opérateur de Fredholm adéquat Δ (pour le problème paramétré) devient

$$\mu + n\chi ,$$

où μ est le *nombre de Maslov* de $(X_0,\partial_0) \subset (W,V)$ ([V.I.A.5]).

Quant à l'étude de la compacité, elle se traite "à la source" en doublant $(X,\partial X)$ en $X+\bar{X}$.

Gromov obtient ainsi une formidable version non linéaire de l'*alternative de Fredholm* (cf. [M.G.1]), qui implique :

THÉORÈME N (Gromov).- *Soit* V *une sous-variété lagrangienne immergée fermée de* $(\mathbb{C}^n,\omega_0)$ *; il existe un disque holomorphe, non constant,* $(D^2,S^1) \longrightarrow (\mathbb{C}^n,V)$.

COROLLAIRE.- *La classe* $[\omega_0] \in H^2(\mathbb{C}^n,V;\mathbb{R})$ *est non nulle.*

Dans $\mathbb{R}^{2n}$, on dit qu'une sous-variété lagrangienne immergée V est *exacte*, si la forme de Liouville $x\,.\,dy$ est exacte sur V. Il résulte du corollaire qu'il n'existe pas de sous-variété fermée lagrangienne exacte *plongée* dans $\mathbb{R}^{2n}$. Par exemple, il n'existe pas de sous-variété fermée plongée lagrangienne simplement connexe dans $\mathbb{R}^{2n}$; en particulier, pour les sphères, Gromov règle le dernier cas en suspens, celui de S^3 dans $\mathbb{R}^6$ (en contraste avec le cas totalement réel [M.G.4]).

4.4. Le Théorème N est la confirmation d'une étonnante intuition de Riemann ([B.R]); en effet (histoire récurrente caractérisée), comment interpréter autrement ce que dit Riemann à propos des informations nécessaires à la détermination d'une fonction analytique sur le disque :

"Cette détermination peut aussi être effectuée de telle sorte que pour chaque point de l'encadrement une équation contenant les deux termes et variant de forme d'une manière continue avec la position du point soit donnée ; ou bien la détermination peut être effectuée simultanément pour plusieurs parties d'encadrement, de telle sorte qu'à chaque point d'une de ces parties soient associés $n-1$ points déterminés, dont chacun tire son origine d'une des autres parties respectives, et de telle façon qu'alors pour chaque groupe de n points ainsi associés soit donné un groupe de n équations, variant d'une manière continue avec la situation de ces points. Mais ces conditions, dont la totalité forme une variété continue, et qui sont exprimées par des équations entre des fonctions arbitraires, doivent encore, en général, pour être admissibles et suffisantes à la détermination d'une fonction partout continue à l'intérieur du domaine de grandeurs, être soumises à une restriction ou bien à une extension qui sont données par des équations de condition particulières (équations relatives aux constantes arbitraires), car l'exactitude de nos estimations ne s'étend pas évidemment jusqu'à ce dernier point relatif aux constantes".

4.5. Pour démontrer le Théorème M, Gromov généralise le Théorème N en remplaçant $\mathbb{C}^n$ par une variété de la forme $W \times \mathbb{C}$; puis il montre comment construire une variété lagrangienne contredisant le corollaire dans $W \times W \times \mathbb{C}$, à partir d'une isotopie hamiltonienne sur W dont l'extrémité n'aurait pas de point fixe (on recolle le graphe de l'isotopie convenablement avec le graphe de l'isotopie retourné). Pour se familiariser avec cette construction, le lecteur pourra commencer par former directement un tore T^2 lagrangien exact dans $\mathbb{C}^2$, en recollant le graphe de l'identité d'un anneau avec le graphe d'une transformation de l'anneau qui satisfait les hypothèses du dernier théorème géométrique de Poincaré.

4.6. Gromov montre aussi que N entraîne l'existence de structures symplectiques exotiques sur $\mathbb{R}^{2n}$. De même, en analysant certaines sphères plongées dans les bords des domaines strictement pseudo-convexes de $\mathbb{C}^n$, Gromov prouve l'existence de structures de contact exotiques sur $\mathbb{R}^{2n+1}$ (pour $n = 1$, voir [A.D], [D.B.] et [J.E.1]).

Une différence importante se manifeste à ce propos entre le contact et le symplectique ; il semble bien qu'en symplectique, on doive perturber la structure ω_0 jusqu'à l'infini pour la rendre exotique, ce qui n'est pas nécessaire en contact. Par exemple, en utilisant le Théorème E, Gromov démontre :

THÉORÈME O (Gromov).- *Soit* (W^4,ω) *une variété symplectique connexe ouverte de dimension* 4, *telle que* $[\omega]$ *s'annule sur* $\pi_2(W)$; *s'il existe un ensemble compact* K *dans* W , *un ensemble compact* K_0 *dans* $\mathbb{R}^4$, *et un difféomorphisme* f *de* $W\setminus K$ *sur* $\mathbb{R}^4\setminus K_0$, *tel que* $f^*\omega_0 = \omega$ *sur* $W\setminus K$, *alors* (W^4,ω) *est* symplectiquement isomorphe *à* $(\mathbb{R}^4,\omega_0)$.

4.7. Gromov montre une foultitude d'autres beaux théorèmes dans son texte [M.G.1], mais je voudrais terminer en signalant un résultat tout à fait remarquable que Dusa Mc Duff vient d'obtenir à partir de [M.G.1].

THÉORÈME (Mc Duff ([D.M.D])).- *Il existe une variété fermée (de dimension 8)* Y *, et une famille* C^∞ *à un paramètre* ω_t *,* $t \in \mathbb{R}$*, de structures symplectiques sur* Y *, telles que*

i) *la forme* ω_k *est isomorphe à la forme* ω_{-k} *pour chaque* $k \in \mathbb{Z}$ *;*

ii) *toutes les formes* ω_k *,* $k \in \mathbb{Z}$ *, sont dans la même classe de cohomologie ;*

iii) *deux structures* ω_k *et* ω_ℓ *,* k *,* $\ell \in \mathbb{N}$ *,* $k \neq \ell$ *, ne sont jamais difféomorphes.*

4.8. *Remarque*.- [D.M.D] montre que la variété des courbes complexes d'une structure presque complexe positive, dans une classe d'homologie fixée, possède une structure stablement presque complexe. En fait, il semble sortir de l'étude des r.e.p. faite au § 2. que la variété des solutions d'homologie donnée, d'une r.e.p., possède canoniquement une structure symplectique. Est-ce que ça ne pourrait pas constituer un nouveau moyen pour exhiber des exemples de variétés symplectiques ?

4.9. Une dernière remarque, à propos du théorème A au § 1 ; en fait, je ne connais aucun tenseur τ de classe C^∞ sur une variété qui ne satisfasse pas la propriété de C^0-fermeture. Il semble que, toujours, la limite d'une suite convergente C^0 de difféomorphismes préservant τ , doive encore préserver τ .

BIBLIOGRAPHIE

[V.I.A.1] V.I. ARNOLD - *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, MIR, Moscou, 1974.

[A.W] A. WEINSTEIN - *Lectures on symplectic manifolds*, A.M.S., Conf. board, regional conferences in Math. n° 29, 1977.

[V.I.A.2] V.I. ARNOLD - *Singularities of systems of rays*, Uspeckhi Mat. Nauk 36 (1983).

[G.S] V. GUILLEMIN et S. STERNBERG - *Symplectic techniques in physics*, Cambridge, Cambridge University Press, 1984.

[V.I.A.3] V.I. ARNOLD - *Catastrophe theory*, Springer Verlag, 1984

[S.L] S. LIE - *Geometrie der Berührungstransformationen*, Erster Band, Teubner, Leipzig, 1896.

[V.G] V. GUILLEMIN - *Infinite dimensional primitive Lie algebras*, J. Diff. Geom. 4 (1970), 257-282.

[J.E.1] J. ELIASHBERG - *Rigidity of symplectic and contact structures*, preprint, Leningrad (1981).

[M.G.1] M. GROMOV - *Pseudo-holomorphic curves on almost complex manifolds*, Invent. Math. 82, 307-347 (1985).

[M.G.2] M. GROMOV - *Partial differential relations*, livre à paraître, Springer-Verlag.

[M.H] M. HERMAN - *Une remarque*, manuscrit, Paris, 1983.

[C.C.E.Z] C.C. CONLEY - E. ZEHNDER - *The Birkhoff - Lewis fixed point theorem and a conjecture of V.I. Arnold*, Invent. Math. (1983), 33-49.

[M.C.1] M. CHAPERON - *Quelques questions de géométrie symplectique (d'après, entre autres, Poincaré, Arnold, Conley et Zehnder)*, Sém. Bourbaki, Juin 1983, exposé n° 610, Astérisque 105-106(1983), 231-249.

[A.D] A. DOUADY - *Noeuds et structures de contact en dimension 3 (d'après D. Bennequin)*, Sém. Bourbaki, Février 1983, exposé n° 604, Astérisque 105-106(1983), p. 129-148.

[D.B] D. BENNEQUIN - *Entrelacements et équations de Pfaff*, 3e rencontre de Géométrie de Schnepfenried, Vol. I, Astérisque 107-108(1983), 87-161.

[V.I.A.4] V.I. ARNOLD - *Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 261 (Novembre 1965), Groupe 1, 3719-3722.

[M.G.3] M. GROMOV - *A topological technique for the construction of solutions of differential equations and inequalities*, ICM 1970, Nice, 2, 221-225 (1971).

[J.L] J.A. LEES - *On the classification of Lagrange immersions*, Duke Math. J. 43(1976), 217-224.

[W.T] W. THURSTON - *Some simple examples of symplectic manifolds*, Proc. A.M.S. 55(1976), 467-468.

[C.F] C.L. FEFFERMAN - *The uncertainty principle*, B.A.M.S. (new series), Vol. 9, n° 2 (1983), 129-206.

[C.F.D.P.] C.L. FEFFERMAN & D.H. PHONG - *Symplectic geometry and positivity of pseudo-differential operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 79 (1982), 710-713.

[A.N.W.W.] A. NIJENHUIS, W. WOLF - *Some integration problem in almost complex and complex manifolds*, Ann. Math. 77, 424-489 (1963).

[G.ST] G. STOLZENBERG - *Volumes, limits and extensions of analytic varieties*, Berlin-New York, Springer Verlag, L. N. in Math. 19 (1966).

[H.G.F.W] H. GLUCK et F. WARNER - *Great circle fibrations of the three spheres*, Duke Math. J. 50, 107-132 (1983).

[L.B.1] L. BERS - *An outline of the theory of pseudoanalytic functions*, Bull A.M.S. 62, 291-332 (1956).

[I.N.V] I.N. VEKUA - *Generalized analytic function* (Trad. Sueddon), Pergamon, 1962.

[M.A.L.1] M.A. LAVRENT'EV - *A fundamental theorem of the theory of quasi-conformal mappings of two-dimensional regions*, AMS translations series 1, Vol. 2 (1962), 425-480.

[M.A.L.2] M.A. LAVRENT'EV - *The general problem of the theory of quasi-conformal mappings of plane regions*, AMS translations, Ser. 1, Vol. 2 (1962), 481-532.

[B.V.B.T.I] B.V. BOJARSKI and T. IWANIEC - *Quasi-conformal mappings and non linear elliptic equations in two variables* I, II, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Math. Astronom. Phys., 12(1984), 473-478 & 479-484.

[L.B.2] L. BERS - *Mathematical aspect of subsonic and transonic gas dynamics*, New York, Surveys in applied Math. III, J. Wiley & Sons (1958).

[A.D.L.N] A. DOUGLIS et L. NIRENBERG - *Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations*, Comm. in pure and applied Math. 8, (1955), 505-538.

[H.F.L] H.F. LAI - *Characteristic classes of real manifolds immersed in complex manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 172 (1972), 1-33

[J.E.V.H] J. ELIASHBERG and V. HARLAMOV - *Some remarks on the number of complex points of a real surface in the complex one*, Preprint (1982).

[R.S.H] R.S. HAMILTON - *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bull. AMS (New series), Vol. 7, n° 1 (1982), 65-222.

[R.S.P] R.S. PALAIS - *Foundations of global non-linear analysis*, Math. Lecture Notes series, Benjamin (1968).

[J.S.K.U] J. SACKS and K. UHLENBECK - *The existence of minimal immersions of two-spheres*, Ann. Math. 113, 1-24 (1981).

[G.B] G. BOL - *Isoperimetrische Ungleichungen für Bereiche auf Flächen*, Jahresbericht d. Deutschen Mathem. Vereinigung (1944), 219-251.

[H.P.1] H. POINCARÉ - *Sur un théorème de géométrie*, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 33 (1912), 375-407.

[G.D.B.1] G.D. BIRKHOFF - *Proof of Poincaré's geometric theorem*, Trans. AMS (1913), Vol. 14, p. 14-22.

[H.P.2] H. POINCARÉ - *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, tome III, Gauthier-Villars, Paris, 1899.

[G.D.B.2] G.D. BIRKHOFF - *Une généralisation à n dimensions du dernier théorème de géométrie de Poincaré*, C.R. Acad. Sci. Paris (1931), Vol. 192, 196-198.

[M.C.2] M. CHAPERON - *Une idée du type "géodésiques brisées" pour les systèmes hamiltoniens*, C.R. Acad. Sci. Paris, 298, 293-296 (1984).

[F.L.J.C.S] F. LAUDENBACH et J.-C. SIKORAV - *Persistance d'intersections avec la section nulle au cours d'une isotopie hamiltonienne dans un fibré cotangent*, Invent. Math. 82, n° 2 (1985), 349-358.

[H.H] H. HOFER - *Lagrangian embedding and critical point theory*, (Preprint) (1984).

[B.F.A.W] B. FORTUNE et A. WEINSTEIN - *A symplectic fixed point theorem for complex projective spaces*, (Preprint Berkeley 1984).

[J.C.S] J.-C. SIKORAV - *Points fixes d'une application homologue à l'identité* (Preprint Orsay 1984).

[A.F] A. FLOER - *Proof of the Arnold conjecture for surfaces and generalizations for certain Kähler manifolds* (Preprint Bochum 1984).

[J.E.2] J. ELIASHBERG - *Estimates on the number of fixed points of area preserving transformations* (en russe), Syktyvkar, Preprint, 1978.

[A.W.2] A. WEINSTEIN - *C^0-perturbation theorems for symplectic fixed points and lagrangian intersections*, Séminaire sud-rhodanien de géométrie III, Travaux en cours, Paris, Hermann (1984).

[V.I.A.5] V.I. ARNOLD - *On a characteristic class which enters in quantization conditions*, Funct. Anal. appl. 1 (1967), 1-13.

[M.G.4] M.L. GROMOV - *Convex integration of differential relations*, I, Izv. Akad. Nauk. USSR, Ser. Mat. 37 (1973), 329-343.

[B.R] B. RIEMANN - *Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe*, Dissertation inaugurale, Göttingen, 1851.

[D.M.D] D. Mc DUFF - *Examples of symplectic structures*, Preprint, Stony Brook, 1985.

Daniel BENNEQUIN

Département de Mathématiques
Université de Strasbourg
7, rue R. Descartes
F-67084 STRASBOURG CEDEX