

# *Astérisque*

PIERRE CARTIER

**Décomposition des polyèdres : le point sur le troisième problème de Hilbert**

*Astérisque*, tome 133-134 (1986), Séminaire Bourbaki, exp. n° 646, p. 261-288

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1984-1985\\_\\_27\\_\\_261\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1984-1985__27__261_0)

© Société mathématique de France, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DÉCOMPOSITION DES POLYÈDRES :  
LE POINT SUR LE TROISIÈME PROBLÈME DE HILBERT

par Pierre CARTIER

Introduction

En 1900, se tient l'Exposition Universelle, à Paris. A cette occasion, le Second Congrès International des Mathématiciens rassemble la fine fleur de l'époque, sous la présidence de Poincaré. L'exposé de Hilbert est l'un des plus attendus. Il le donne le mercredi matin, 8 août 1900, par une grande chaleur, et y présente sa fameuse liste de 23 problèmes. D'ailleurs, pressé par le temps, il suit le conseil de Hurwitz et de Minkowski, et n'expose qu'une sélection de 10 problèmes. Le texte de son exposé paraîtra en 1902, en allemand -c'est le texte reproduit dans ses oeuvres complètes- et en anglais -traduction dans le Bulletin de la Société Mathématique Américaine, reprise dans le symposium de 1974.

Voici le troisième problème, tel que je le traduis de l'allemand :

"3. *L'égalité du volume de deux tétraèdres ayant des bases et des hauteurs égales.*

Gauss exprime, dans deux lettres à Gerling, son regret que certains théorèmes de la géométrie des solides dépendent de la méthode d'exhaustion, c'est-à-dire, pour employer la locution moderne, de l'axiome de continuité (ou de l'axiome d'Archimède). Gauss cite en particulier le théorème d'Euclide (livre XII, prop. 5), selon lequel deux pyramides à base triangulaire de même hauteur sont dans le même rapport que leurs bases. Mais le problème analogue pour les aires planes a été complètement résolu ; Gerling a aussi réussi à démontrer l'égalité des volumes de deux polyèdres symétriques au moyen d'une subdivision en parties superposables (par déplacement). Cependant, il me semble impossible de prouver en général de cette manière le théorème d'Euclide cité plus haut, et il s'agirait de donner une démonstration rigoureuse de cette impossibilité. Une telle démonstration serait obtenue, si nous réussissions à trouver deux tétraèdres de même base et de même hauteur, qui ne se subdivisent d'aucune manière en tétraèdres superposables, et qui aussi ne se laissent pas compléter par des tétraèdres superposables en des polyèdres pour lesquels une telle subdivision en tétraèdres superposables soit possible."

L'histoire de ce problème est curieuse. Avant la publication de Hilbert, Dehn ([11] et [12]) a donné une solution sous la forme réclamée par Hilbert ; ce qui

est plus important, il a défini l'invariant qui porte son nom, et sur lequel nous reviendrons plus loin. D'ailleurs, lors de la présentation orale, Hilbert n'avait pas gardé le 3ème problème dans sa liste restreinte. Considéré comme résolu -et comme faisant partie de la géométrie élémentaire- il ne continue à occuper que quelques géomètres suisses, danois ou russes. En 1974, un Symposium à De Kalb (U.S.A.) fait le point sur les problèmes de Hilbert. Il y a bien un exposé oral sur le 3ème problème, mais aucun texte dans les deux volumes publiés [2].

Pourtant, depuis 1975, divers problèmes de topologie et de géométrie différentielle amènent à considérer la cohomologie des groupes de Lie rendus discrets, et des algèbres de Lie réelles vues comme algèbres sur le corps des nombres rationnels. Les mêmes groupes se retrouvent en K-théorie algébrique. L'analogie de méthode avec les problèmes contemporains liés aux champs de jauge est troublante ; elle laisse supposer des liens inattendus entre arithmétique, topologie et physique mathématique, exprimés par l'homologie cyclique. D'une certaine manière, cet exposé n'est donc que la suite de mon exposé précédent (n° 621).

Je remercie bien chaleureusement J.-L. Cathelineau, K. Chemla, D. Husemoller et J. Milnor pour la documentation qu'ils m'ont fournie, et aussi C. Kassel, J.-L. Loday et C.H. Sah pour m'avoir permis d'utiliser leurs notes inédites lors de la préparation de cet exposé.

## 1. PRÉLUDE : AIRES ET VOLUMES AVANT 1900

### 1.1. Euclide et les aires planes

Dans les *Éléments*, la fin du Livre I et le Livre VI sont consacrés aux aires planes. Le début du Livre I est consacré aux cas d'égalité des triangles ; on devrait plutôt dire "congruence des triangles" si l'on nomme congruentes deux figures A et B pour lesquelles il existe un déplacement direct amenant A en coïncidence avec B. A partir de la proposition I.34, on s'intéresse à diverses situations où l'on peut affirmer que des triangles ou des parallélogrammes ont la même aire (voir Table I). En particulier, on a la proposition I.41, que l'on pourrait paraphraser par l'énoncé classique : l'aire d'un triangle est la moitié du produit de la base par la hauteur. Mais rien ne serait plus contraire à l'esprit d'Euclide ; il ne définit nulle part la notion d'aire, et il n'est pas question d'attribuer une valeur numérique à une aire.

Si l'on analyse les démonstrations d'Euclide et que l'on se réfère aux *notions communes* (ou NC, axiomes généraux qui suivent au début des *Éléments* la liste des postulats géométriques), on se rend compte qu'il considère dans l'ensemble des polygones <sup>(1)</sup> une relation d'équivalence que l'on interprétera comme signifiant que

---

<sup>(1)</sup> Euclide ne donne pas vraiment de définition générale d'un polygone, mais considère surtout des triangles et des quadrilatères (définitions 19 à 22).

A et B ont même aire. Cette relation d'équivalence<sup>(1)</sup> satisfait aux règles suivantes :

- a) des figures congruentes sont équivalentes (NC 4) ;
- b) si la figure A est composée de deux morceaux A' et A'', et de même B est composée de B' et B'', de l'équivalence de A' avec B' et de A'' avec B'', on conclut à l'équivalence de A avec B (NC 2) ;
- c) sous les hypothèses de b), si A est équivalente à B, et A' à B', alors A'' est équivalente à B'' (NC 3) ;
- d) si la figure A est composée de n parties équivalentes à A', et B de n parties équivalentes à B', de l'équivalence de A et B on infère celle de A' et B'.

Le couronnement du Livre I est le *théorème de Pythagore* : dans un triangle rectangle ABC de côtés  $a, b, c$ , où l'angle en A est droit, on a  $a^2 = b^2 + c^2$ . Cette égalité s'interprète de la manière littérale suivante<sup>(2)</sup> : le carré construit sur le côté a est équivalent à une figure composée de deux carrés égaux à ceux construits sur les côtés b et c. Dans la Table II, on a reproduit diverses configurations qui établissent ce théorème par des manipulations d'aires.

Au Livre VI, Euclide utilise les résultats acquis au Livre V sur les proportions ; il va pouvoir étudier les similitudes, et démontrer les deux résultats fondamentaux suivants :

- a) Si la figure A' est semblable dans le rapport t à la figure A, le rapport des aires de A' et A est  $t^2$ .
- b) Si, dans un parallélogramme, on multiplie deux côtés parallèles dans le rapport t et les deux autres dans le rapport t', alors l'aire est multipliée par  $tt'$ .

Au passage, on établit le théorème de Thalès par la méthode des équivalences d'aires.

### 1.2. La théorie des aires planes au 19ème siècle

L'idée de développer complètement la notion d'aire sans recourir à la continuité est reprise au 19ème siècle par de nombreux auteurs, dont Bolyai le père. Le résultat de ces travaux est synthétisé au chapitre 4 des "Grundlagen der Geometrie" de Hilbert [7] (voir aussi le supplément III). Tout d'abord, il faut définir clairement la notion de polygone (ou plutôt de domaine polygonal) dans le plan, comme réunion finie de domaines triangulaires. On dit qu'un polygone A est décomposé en deux polygones B et C si l'on a  $A = B \cup C$  et que l'intersection  $B \cap C$

---

(1) Euclide n'éprouve pas le besoin de distinguer la congruence des figures et leur équivalence, et parle d'égalité dans les deux cas.

(2) On sait que les manipulations d'aires sont un substitut d'algèbre chez Euclide (voir en particulier le Livre II).

est réunion de segments de droites ; définition analogue pour la décomposition en un nombre fini de polygones.

DÉFINITION 1.- Deux polygones  $A$  et  $A'$  sont équivalents par décomposition ("zerlegungsgleich") si l'on peut décomposer  $A$  en triangles  $T_1, \dots, T_n$  et  $A'$  en triangles  $T'_1, \dots, T'_n$  de sorte que chaque triangle  $T_i$  soit congruent au triangle  $T'_i$ .

DÉFINITION 2.- Deux polygones  $A$  et  $A'$  sont équivalents par complémentation ("ergänzungsleich") s'il existe deux polygones équivalents par décomposition  $C$  et  $C'$  tels que  $C$  soit décomposé en  $A$  et  $B$ , et  $C'$  en  $A'$  et  $B'$ , avec  $B$  et  $B'$  équivalents par décomposition.

Il est clair que deux polygones équivalents au sens 1 le sont au sens 2. La réciproque est vraie en géométrie plane réelle, mais ne le serait plus dans la géométrie plane sur un corps ordonné non archimédien. Dans le cas réel, qui nous occupe seul ici, il y a donc une seule notion d'équivalence ; elle répond à toutes les exigences d'Euclide. En adaptant ses raisonnements, on prouve par des méthodes élémentaires le résultat suivant (Euclide, I.45) :

Soit  $AB$  un segment, pris comme unité de longueur. Pour tout polygone  $P$ , il existe un rectangle  $ABCD$  équivalent à  $P$ , et un seul<sup>(1)</sup>.

On prendra comme unité d'aire le carré de côté  $AB$  ; l'aire du polygone  $P$  précédent sera mesurée, dans cette unité, par le rapport  $CB/AB$  (voir la Table III).

### 1.3. Généralisation en dimension $\geq 3$

Donnons d'abord quelques constructions générales. Soient  $K$  un corps ordonné,  $T$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur  $K$  et  $E$  un espace affine d'espace de translations  $T$ . Un simplexe  $[s_0, \dots, s_p]$  de dimension  $p$  dans  $E$  est défini par  $p+1$  points  $s_0, s_1, \dots, s_p$  tels que les vecteurs  $\overrightarrow{s_0 s_i}$  (pour  $1 \leq i \leq p$ ) soient linéairement indépendants dans  $T$  ; il se compose des points de la forme  $\sum_{i=0}^p c_i s_i$  avec des coefficients  $c_i \geq 0$  dans  $K$  tels que  $\sum_{i=0}^p c_i = 1$ . Un polytope<sup>(2)</sup> dans  $E$  (on dit polyèdre en dimension 3) est un ensemble réunion d'un nombre fini de simplexes, et il est dégénéré si tous ces simplexes sont de dimension  $< n$ .

On dit que le polytope  $P$  est décomposé en les polytopes  $P_1, \dots, P_r$  si l'on a  $P = P_1 \cup \dots \cup P_r$  et que  $P_i \cap P_j$  est dégénéré pour  $i \neq j$ .

Pour fonder la notion de volume des polytopes, il n'y a pas besoin d'une métrique ; il suffit d'une forme  $n$ -linéaire anti-symétrique  $\omega$  sur  $T$ . Par définition,

<sup>(1)</sup> Euclide n'éprouve pas le besoin de démontrer l'unicité qui découle pour lui de l'axiome : "le tout est plus grand que la partie" (NC 5).

<sup>(2)</sup> La simplicité et la généralité de cette définition ne doivent pas masquer la difficulté du cheminement historique (voir là-dessus la discussion de Lakatos [8], à propos de la relation d'Euler  $F - A + S = 2$ ).

le volume du  $n$ -simplexe  $[s_0, s_1, \dots, s_n]$  est égal à  $\frac{1}{n!} |\omega(v_1, \dots, v_n)|$  où  $v_i$  est le vecteur  $\overrightarrow{s_0 s_i}$ ; le volume d'un  $p$ -simplexe est nul par convention si  $p < n$ . Un polytope  $P$  peut se décomposer en simplexes  $T_1, \dots, T_r$ , et l'on prouve par des méthodes purement algébriques que la somme des volumes des simplexes  $T_1, \dots, T_r$  ne dépend que de  $P$ ; on l'appelle le volume de  $P$ , noté  $\text{vol}(P)$ . Avec ces définitions, on a les propriétés suivantes (Hadwiger [5, chap. 2]) :

a) Si  $P$  et  $P'$  sont deux polytopes, on a

$$(1) \quad \text{vol}(P \cap P') + \text{vol}(P \cup P') = \text{vol}(P) + \text{vol}(P') .$$

b) Si le polytope  $P$  est dégénéré, on a  $\text{vol}(P) = 0$ .

c) Si  $u$  est un automorphisme de l'espace affine  $E$ , et  $u_T$  l'automorphisme associé de  $T$ , on a

$$(2) \quad \text{vol}(u(P)) = |\det(u_T)| \cdot \text{vol}(P)$$

pour tout polytope  $P$ .

Revenons à la géométrie euclidienne; le corps  $K$  est celui des nombres réels, et  $T$  est muni d'un produit scalaire défini positif; on normalise  $\omega$  par  $|\omega(e_1, \dots, e_n)| = 1$  pour toute base orthonormale  $e_1, \dots, e_n$  de  $T$ ; il y a deux choix possibles pour  $\omega$ , à savoir  $\omega_0$  et  $-\omega_0$ , correspondant aux deux orientations possibles de  $T$  (ou de  $E$ ). Quitte à remplacer "triangle" par "simplexe" et "polygone" par "polytope", on peut répéter les définitions 1 et 2 du n° 1.2. Dans le cas  $n = 3$ , Sydler a montré dans [18] que les deux équivalences n'en font qu'une; ce résultat a été généralisé en dimension quelconque par Zylev [20, 21] et Hadwiger [5].

#### 1.4. Le 3ème problème de Hilbert et l'invariant de Dehn

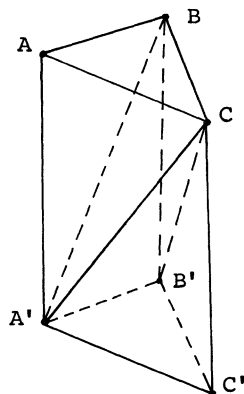
Toute isométrie d'un espace euclidien est de déterminant égal à 1 ou -1; d'après la propriété c) du volume, deux polytopes congruents ont même volume. Il en résulte que deux polytopes équivalents ont même volume. Le 3ème problème de Hilbert se précise ainsi :

*Deux polytopes de même volume sont-ils équivalents ?*

La réponse est oui lorsque  $n = 2$  (Bolyai, vers 1832; voir le n° 1.2.).

En dimension 3, un résultat crucial (Euclide, XII.7) affirme que les trois pyramides  $ABCA'$ ,  $BCA'B'$  et  $A'B'C'C$  en lesquelles se décompose un prisme à base triangulaire  $ABCA'B'C'$  ont même volume (cf. Euclide, I.34, pour le cas plan).

Pour établir cela, on montre que deux tétraèdres  $ABCD$  et  $ABCD'$  ont même volume si la droite  $DD'$  est parallèle au plan  $ABC$ , et ceci résulte de Euclide, XII.5. Mais ce dernier résultat nécessite chez Euclide aussi bien que chez Legendre par exemple <sup>(1)</sup>, la méthode d'exhaustion, c'est-à-dire un découpage continué indéfiniment et une application de l'axiome d'Archimède. Le problème est donc de voir si de tels tétraèdres sont équivalents.



Dehn a montré que l'on peut trouver, lorsque  $n = 3$ , deux polyèdres de même volume qui ne sont pas équivalents. De manière générale, un invariant  $I$  est défini pour les polytopes, si l'on a associé à chaque polytope  $P$  un élément  $I(P)$  d'un groupe commutatif  $\Gamma$ , de manière à satisfaire aux axiomes suivants :

a) Si  $P$  et  $P'$  sont deux polytopes, on a

$$I(P \cap P') + I(P \cup P') = I(P) + I(P') .$$

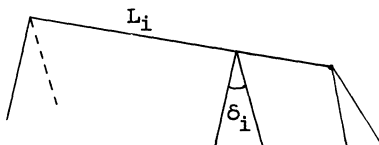
b) Si le polytope  $P$  est dégénéré, on a  $I(P) = 0$ .

c) Si  $P$  et  $P'$  sont deux polytopes pour lesquels il existe un élément  $g$  du groupe  $G$  (des déplacements) avec  $P' = g(P)$ , on a  $I(P) = I(P')$ .

Il est alors immédiat qu'on a  $I(P) = I(P')$  si les polytopes  $P$  et  $P'$  sont équivalents. Or Dehn a construit, en dimension 3, un invariant  $D$  comme suit : le groupe des angles de droites <sup>(2)</sup> dans le plan étant noté  $\Delta$ , on pose  $\Gamma = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Delta$ ; si  $P$  est un polyèdre, avec les arêtes  $L_1, \dots, L_r$ , on pose

$$D(P) = \sum_{i=1}^r |L_i| \otimes \delta_i ,$$

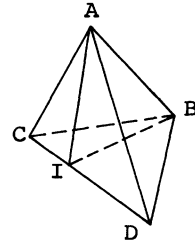
où  $|L_i|$  est la longueur du segment  $L_i$  et  $\delta_i$  l'angle dièdre formé par les deux faces du polyèdre  $P$  s'appuyant sur  $L_i$ .



<sup>(1)</sup> Il est remarquable que, malgré la différence notable des points de vue, et l'éloignement géographique et culturel, la même construction se retrouve tant dans Euclide, XII.3, que chez Liu Hui (劉徽), un auteur chinois du 3ème siècle (voir D.B. WAGNER dans *Historia Mathematica* 6(1979), p. 164-188).

<sup>(2)</sup> Ce groupe s'identifie naturellement à  $SO_2(\mathbb{R})/\{1,-1\}$ ; au moyen de la mesure des angles en radians, on peut l'identifier à  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ .

Pour vérifier l'additivité de l'invariant de Dehn, on se ramène au cas élémentaire d'un tétraèdre  $P = ABCD$  décomposé en deux tétraèdres  $P' = ABCI$  et  $P'' = ABDI$  ; l'arête  $CD$  est décomposée en deux arêtes  $CI$  et  $ID$ , mais les deux angles dièdres sont égaux à  $\delta$ , d'où  $|CD| \otimes \delta = |CI| \otimes \delta + |ID| \otimes \delta$ , et



$$|CD| \otimes \delta = |CI| \otimes \delta + |ID| \otimes \delta .$$

De même l'arête  $AB$  est commune aux trois tétraèdres avec des angles  $\delta_1$  pour  $P$ ,  $\delta_2$  pour  $P'$  et  $\delta_3$  pour  $P''$  ; comme on a  $\delta_1 = \delta_2 + \delta_3$ , on a

$$|AB| \otimes \delta_1 = |AB| \otimes \delta_2 + |AB| \otimes \delta_3 .$$

Pour  $AI$  (et  $BI$ ) la somme des deux angles dièdres est un angle plat, nul dans  $\Delta$ . Les autres arêtes et dièdres sont communs aux deux tétraèdres, et l'on a finalement  $D(P) = D(P') + D(P'')$ .

Considérons maintenant un cube  $C$  et un tétraèdre régulier  $T$  de même volume que  $C$ . Soit  $l$  la longueur des arêtes de  $C$ , et  $l'$  celle des arêtes de  $T$ . Les angles dièdres du cube sont tous égaux à  $\frac{\pi}{2}$ , et il y a 12 arêtes du cube, d'où

$$D(C) = 12l \otimes \frac{\pi}{2} = 6l \otimes \pi = 0$$

car l'angle plat  $\pi$  est nul dans le groupe  $\Delta$ . De manière analogue, on a  $D(T) = 6l' \otimes \delta$ . Or dans le groupe  $\Gamma = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Delta$ , on a  $l' \otimes \delta = 0$  si et seulement si  $\delta$  est un multiple rationnel de  $\pi$  ; mais on a  $\cos \delta = \frac{1}{3}$ , ce qui exclut que  $\delta/\pi$  soit rationnel, d'où  $D(T) \neq 0$ .

En conclusion, on a  $\text{vol}(C) = \text{vol}(T)$  et  $D(C) \neq D(T)$ , les polyèdres  $C$  et  $T$  ne sont pas équivalents.

*Remarque.* - Dans le groupe  $\Delta$  des angles, les éléments d'ordre fini sont les multiples rationnels de l'angle plat  $\pi$ , et forment un sous-groupe  $\Delta_0$  de  $\Delta$  isomorphe à  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . Le quotient  $\Delta/\Delta_0$  peut être considéré comme un espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$ , et le groupe  $\Gamma = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Delta$  est isomorphe à  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} (\Delta/\Delta_0)$ . En particulier, on a un homomorphisme injectif de  $\Delta/\Delta_0$  dans  $\Gamma$ , et la démonstration ci-dessus repose sur cette propriété. Ces notions étant totalement inconnues en 1900, la manière de s'exprimer de Dehn était forcément indirecte, et a paru souvent peu convaincante.

## 2. GROUPES DE POLYÈDRES

### 2.1. Le théorème de Sydler (1965)

Le résultat de Dehn semblait clore la discussion, et de fait, il n'y eut que des



progrès insignifiants jusqu'en 1940. C'est sans doute Hopf qui ramena l'intérêt sur ce problème et les progrès viendront d'un de ses élèves, nommé Sydler. Il commença à y travailler vers 1943, et démontra finalement en 1965 le résultat suivant [19] qui lui vaudra un prix de la Société Royale Danoise :

*Deux polyèdres sont équivalents si et seulement s'ils ont même volume et même invariant de Dehn.*

La démonstration a été ensuite fortement simplifiée par Jessen et ses élèves [15, 16] en 1968 ; c'est leur version que nous allons décrire <sup>(1)</sup>.

On a défini au n° 1.4. ce qu'il faut entendre par invariant de polyèdres. Suivant l'usage éprouvé des groupes de Witt ou de Grothendieck, on introduit un groupe commutatif  $\mathcal{P}$  ayant des générateurs  $[P]$  correspondant aux polyèdres et soumis aux relations

$$(3) \quad [P \cup P'] = [P] + [P'] \quad \text{si } P \cap P' \text{ est dégénéré,}$$

$$(4) \quad [g(P)] = [P] \quad \text{si } g \text{ est un déplacement.}$$

Les invariants  $I$  à valeurs dans un groupe commutatif  $\Gamma$  correspondent bijectivement aux homomorphismes  $\varphi$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\Gamma$  par la relation  $I(P) = \varphi([P])$ . En particulier, le volume et l'invariant de Dehn définissent des homomorphismes

$$\text{vol} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad D : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Delta.$$

De plus, deux polyèdres  $P$  et  $P'$  sont équivalents si et seulement si l'on a  $[P] = [P']$  dans le groupe  $\mathcal{P}$ .

Soit  $\mathcal{Z}$  le sous-groupe de  $\mathcal{P}$  engendré par les prismes ; en s'appuyant sur les résultats démontrés pour les polygones plans, on démontre que tout prisme est équivalent à un prisme rectangulaire ayant pour base un carré fixe de côté 1 ; par suite, le volume définit un isomorphisme de  $\mathcal{Z}$  sur  $\mathbb{R}$ , et le théorème de Sydler résulte de l'égalité de  $\mathcal{Z}$  et du noyau de  $D$ . Il est d'ailleurs facile de montrer que l'invariant de Dehn d'un prisme est nul, donc  $D$  définit un homomorphisme  $\bar{D}$  de  $\mathcal{P}/\mathcal{Z}$  dans  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Delta$ . En fait, on prouve l'exactitude de la suite de Jessen

$$(J) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{P}/\mathcal{Z} \xrightarrow{\bar{D}} \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Delta \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}} \longrightarrow 0,$$

qui entraîne le théorème de Sydler. On a noté  $\Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$  le module des différentielles de Kähler de l'extension  $\mathbb{R}$  du corps  $\mathbb{Q}$  (voir par exemple Bourbaki, Algèbre, V, § 16), et  $d_{\mathbb{Q}}$  la dérivation canonique de  $\mathbb{R}$  dans  $\Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$ . D'après Cathelineau [22], l'homomorphisme  $\delta$  se définit comme suit : un angle de droites  $\vartheta$  est représenté par deux matrices  $\pm \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  avec  $a^2 + b^2 = 1$ , ou par la tangente  $t = b/a$  (égale à  $\infty$  si  $a = 0$ ). On définit un homomorphisme  $\delta_{\mathbb{Q}}$  de  $\Delta$  dans  $\Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$  par

<sup>(1)</sup> Un exposé détaillé se trouve dans l'ouvrage de Boltianskii [1] et dans celui de Sah [9]. Je recommande fortement la lecture des articles de Jessen [15, 16, 17] et de Dupont [23].

$$(5) \quad \delta_{\mathbb{Q}}(\vartheta) = a d_{\mathbb{Q}} b - b d_{\mathbb{Q}} a = d_{\mathbb{Q}} t / (1 + t^2)$$

(en convenant  $d_{\mathbb{Q}} \infty = 0$ ). On a  $a = \cos \vartheta$ ,  $b = \sin \vartheta$ ,  $t = \operatorname{tg} \vartheta$  et si l'on mesure  $\vartheta$  en radians, on est tenté d'écrire  $\delta_{\mathbb{Q}}(\vartheta) = d\vartheta$  en vertu des règles

$$d(\cos \vartheta) = -\sin \vartheta \cdot d\vartheta, \quad d(\sin \vartheta) = \cos \vartheta \cdot d\vartheta;$$

c'est à la fois une bonne analogie et un piège. Noter que la tangente identifie le groupe  $\Delta$  à  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  muni de la loi de composition

$$(t, t') \mapsto (t + t') / (1 - tt').$$

Avec ces conventions, on pose

$$(6) \quad \delta(x \otimes \vartheta) = x \delta_{\mathbb{Q}}(\vartheta) = \frac{x}{1+t^2} d_{\mathbb{Q}} t,$$

et  $\delta$  est donc un homomorphisme surjectif de  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Delta$  sur  $\Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$ .

## 2.2. Démonstration du théorème de Sydler

Choisissons une origine  $O$  dans l'espace euclidien  $E_3$  de dimension 3, et notons  $h_t$  l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $t$ . On définit une action du groupe  $\mathbb{R}^*$  sur le groupe  $\mathcal{P}$  par la règle

$$(7) \quad H_t[\mathcal{P}] = \begin{cases} [h_t \mathcal{P}] & \text{si } t > 0 \\ -[h_t \mathcal{P}] & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Alors le volume est de poids 3 et l'invariant de Dehn de poids 1

$$(8) \quad \operatorname{vol}(H_t \xi) = t^3 \operatorname{vol}(\xi), \quad D(H_t \xi) = t D(\xi)$$

pour  $\xi$  dans  $\mathcal{P}$ . Comme une homothétie transforme un prisme en un prisme, l'action de  $\mathbb{R}^*$  passe à  $\mathcal{P}/\mathbb{Z}$ ; de plus, pour tout tétraèdre  $P = ABCD$ , et tout nombre réel  $t$  compris entre 0 et 1, le tétraèdre  $P$  est décomposé en deux tétraèdres  $P'$  et  $P''$  congruents respectivement à  $h_t P$  et  $h_{1-t} P$ , et en deux prismes (voir Table IV). On en déduit la relation

$$(9) \quad \xi = H_t \xi + H_{1-t} \xi \quad (\xi \text{ dans } \mathcal{P}/\mathbb{Z})$$

d'où, aussitôt, l'existence d'une structure d'espace vectoriel réel sur  $\mathcal{P}/\mathbb{Z}$ , pour laquelle  $H_t$  soit la multiplication par  $t$ .

Étant donnés deux nombres  $a, b$  dans l'intervalle  $]0, 1[$ , notons  $T(a, b)$  la classe dans  $\mathcal{P}/\mathbb{Z}$  de tout tétraèdre  $ABCD$  dont les arêtes  $AB$ ,  $BC$  et  $CD$  sont deux à deux orthogonales, de longueurs données par

$$(10) \quad |AB|^2 = a^{-1} - 1, \quad |CD|^2 = b^{-1} - 1, \quad |BC| = |AB| \cdot |CD|$$

Il est clair qu'on a

$$(11) \quad T(a, b) = T(b, a),$$

et un raisonnement géométrique permet d'établir la formule

$$(12) \quad T(a,b) + T(ab,c) = T(a,c) + T(ac,b) .$$

Prouvons qu'il existe une famille d'éléments  $U(a)$  de  $\mathbb{P}/\mathbb{Z}$  (pour  $a$  dans  $]0,1[$ ) tels que l'on ait

$$(13) \quad T(a,b) = U(a) + U(b) - U(ab) .$$

Pour cela, considérons dans l'ensemble  $W_0 = ]0,1[ \times \mathbb{P}/\mathbb{Z}$  la loi de composition commutative

$$(14) \quad (a,P) \cdot (b,Q) = (ab, P + Q - T(a,b)) .$$

On vérifie que tout élément est simplifiable, donc  $W_0$  se plonge dans son groupe des fractions  $W$ . On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{P}/\mathbb{Z} \longrightarrow W \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow 0 ,$$

et comme le groupe  $\mathbb{P}/\mathbb{Z}$  est divisible, cette suite exacte est scindée ; il existe un homomorphisme de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $W$  relevant  $\pi$ , donc de la forme  $a \mapsto (a, U(a))$  et la relation (13) résulte de (14).

*Problème* : existe-t-il une construction explicite de  $U(a)$  ?

Dans l'étape suivante, on pose (pour  $a > 0$ ,  $b > 0$ )

$$(15) \quad G(a,b) = aU\left(\frac{a}{a+b}\right) + bU\left(\frac{b}{a+b}\right) ,$$

d'où les relations évidentes (pour  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $\lambda > 0$ )

$$(16) \quad G(a,b) = G(b,a) \quad G(\lambda a, \lambda b) = \lambda G(a,b) .$$

On prouve ensuite l'égalité

$$(17) \quad G(a,b) + G(a+b,c) = G(a,c) + G(a+c,b)$$

de manière géométrique, au moyen de deux décompositions d'un tétraèdre  $OABC$ , dont les arêtes deux à deux orthogonales  $OA$ ,  $OB$  et  $OC$  satisfont à  $|OA|^2 = bc$ ,  $|OB|^2 = ca$ ,  $|OC|^2 = ab$ . Au moyen du cocycle  $G$ , on fabrique cette fois un anneau commutatif  $A$  ayant  $\mathbb{R} \times \mathbb{P}/\mathbb{Z}$  comme ensemble sous-jacent et les opérations

$$(18) \quad (a,P) + (b,Q) = (a+b, P+Q - G(a,b)) \quad (\text{pour } a > 0, b > 0)$$

$$(19) \quad (a,P) \cdot (b,Q) = (ab, aQ + bP) .$$

Alors  $I = \mathbb{P}/\mathbb{Z}$  est un idéal de carré nul dans  $A$ , et  $A/I$  est isomorphe au corps  $\mathbb{R}$ . On choisit un homomorphisme  $\sigma$  de  $\mathbb{R}$  dans  $A$  relevant la projection  $\tau$  de  $A$  sur  $A/I$  (voir Bourbaki, Algèbre commutative, IX), d'où une application  $H$  de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{P}/\mathbb{Z}$  qui vérifie les relations

$$(20) \quad G(a,b) = aH(a) + bH(b) - (a+b)H(a+b)$$

$$(21) \quad H(ab) = H(a) + H(b)$$

$$(22) \quad \sigma(a) = (a, aH(a)) .$$

On définit enfin une application  $\varphi$  de  $\Delta$  dans  $\mathbb{P}/\mathbb{Z}$  par

$$(23) \quad \varphi(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha \cdot [U(\sin^2 \alpha) - H(\sin^2 \alpha)] .$$

Il reste à vérifier que  $\varphi$  est un homomorphisme ; on le prolonge alors en une application  $\mathbb{R}$ -linéaire  $\Phi$  de  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Delta$  dans  $\mathbb{P}/\mathbb{Z}$ , et l'on prouve que  $\Phi \circ \bar{D}$  est l'identité de  $\mathbb{P}/\mathbb{Z}$  en remarquant que l'espace vectoriel  $\mathbb{P}/\mathbb{Z}$  est engendré par les éléments  $T(a,b)$  dont on calcule facilement l'invariant de Dehn.

On a donc prouvé que  $\bar{D}$  est injectif. Pour achever de démontrer l'exactitude de la suite (J), on utilise le fait que les homomorphismes d'anneau de  $\mathbb{R}$  dans  $A$  relevant  $\tau$  forment un espace principal homogène sous le groupe des homomorphismes de  $\Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$  dans  $I = \mathbb{P}/\mathbb{Z}$ .

### 2.3. Problèmes ouverts

Hadwiger [5] a généralisé l'invariant de Dehn en dimension plus grande que 3. Soit  $E_n$  l'espace euclidien de dimension  $n$ . On construit comme au n° 2.1. un groupe  $\mathbb{P}_n$  engendré par les polytopes de  $E_n$ . Si  $i$  est un entier tel que  $1 \leq i \leq (n-1)/2$ , on définit l'invariant de Dehn-Hadwiger  $D_i(P)$  d'un polytope comme la somme des éléments  $\operatorname{vol}(P_i) \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_i$  de  $\Delta^i = \mathbb{R} \otimes \Delta \otimes \dots \otimes \Delta$  ( $i$  facteurs  $\Delta$ ) étendue à toutes les suites décroissantes  $P = P_0 \supset P_1 \supset \dots \supset P_i$  où  $P_j$  est une facette de dimension  $n-2j$  de  $P$  et  $\alpha_j$  l'angle dièdre défini dans  $P_{j-1}$  par les deux facettes de dimension  $n-2j+1$  de  $P_{j-1}$  contenant  $P_j$ . On peut aussi poser  $D_0(P) = \operatorname{vol}(P)$ .

*Problème : prouver que l'homomorphisme de  $\mathbb{P}/\mathbb{Z}$  dans  $\Delta^0 \times \Delta^1 \times \dots \times \Delta^{[(n-1)/2]}$  défini par  $D_0, D_1, \dots, D_{[(n-1)/2]}$  est injectif.*

Pour  $n = 3$ , c'est le théorème de Sydler. Pour  $n = 4$ , Jessen (Göttingen Nachr. 1972, p. 47-53) a montré comment se ramener au cas  $n = 3$ . On ne sait rien pour  $n \geq 5$ .

On peut se poser des problèmes analogues pour le cas des espaces non-euclidiens, elliptiques ou hyperboliques. Dehn a résolu le cas de dimension 2 ; on ne sait rien au-delà.

## 3. INTERPRÉTATION HOMOLOGIQUE

### 3.1. Décomposition des polytopes par translation

Soit  $E$  un espace affine de dimension  $n$ , d'espace de translations  $T$  ; pour le moment, nous ne considérons pas de métrique euclidienne. Par analogie avec le n° 2.1, on définit un groupe  $\Pi(E)$  engendré par les polytopes, soumis aux relations

$$(24) \quad [P \cup P'] = [P] + [P'] \quad \text{si } P \cap P' \text{ est dégénéré,}$$

$$(25) \quad [u(P)] = [P] \quad \text{si } u \text{ est une translation.}$$

Ce groupe est adapté à l'étude de la décomposition des polytopes avec les translations comme déplacements permis. On fait agir les homothéties sur  $\Pi(E)$  comme au n° 2.2, par la formule  $H_t[P] = (\text{sgn } t)^n \cdot [h_t P]$ .

Hadwiger [5] et Jessen-Thorup [17] ont précisé la structure du groupe  $\Pi(E)$  comme suit : On peut munir  $\Pi(E)$  d'une structure d'espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{R}$ , et d'une décomposition en somme directe  $\Pi^1(E) \oplus \dots \oplus \Pi^n(E)$  telles que  $H_t \xi = t^i \xi$  pour  $t$  dans  $\mathbb{R}^\times$  et  $\xi$  dans  $\Pi^i(E)$ .

Nous donnons les principales étapes de la démonstration.

Munissons  $E$  d'une structure d'espace vectoriel par choix d'une origine  $O$ . Supposons donnée une décomposition de  $E$  en somme directe de sous-espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_i$  et identifions  $E_1 \times \dots \times E_i$  à  $E$  par la bijection  $(v_1, \dots, v_i) \mapsto v_1 + \dots + v_i$ . Si  $P_1$  est un polytope dans  $E_1$ ,  $P_2$  dans  $E_2, \dots$ , alors le produit cartésien  $P_1 \times \dots \times P_i$  est un polytope dans  $E$ . On note  $Z_i$  le sous-espace de  $\Pi(E)$  engendré par tous ces polytopes, pour toutes les décompositions de  $E$  en somme directe  $E_1 \oplus \dots \oplus E_i$ . Or on a

$$\Pi(E) = Z_1 \supset Z_2 \supset \dots \supset Z_n \supset Z_{n+1} = 0,$$

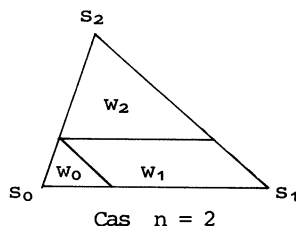
et  $Z_n$  est le sous-groupe engendré par les parallélotopes (qui généralisent parallélogrammes et parallélépipèdes). Lorsque  $n$  est égal à 3,  $Z_2$  est le sous-groupe engendré par les prismes.

La formule (9) se généralise comme suit :

$$(26) \quad H_{t'+t} \xi \equiv H_{t'} \xi + H_t \xi \pmod{Z_2} \quad (\text{pour } \xi \in Z_1).$$

On la prouve en se ramenant au cas où  $\xi$  est défini par un simplexe  $\sigma = [S_0, \dots, S_n]$  avec  $O = s_0$ . Posons  $\sigma'_i = [s_0, \dots, s_i]$ ,  $\sigma''_i = [s_i, \dots, s_n]$ . Alors le simplexe  $h_{t'+t} \sigma$  se décompose en polytopes  $w_0, w_1, \dots, w_n$ ,

où  $w_i$  est équivalent par translation à  $h_{t'} \sigma'_i \times h_t \sigma''_i$  pour  $1 \leq i \leq n-1$ , alors que l'on a  $w_0 = h_{t'} \sigma$  et que  $w_n$  est équivalent par translation à  $h_t \sigma$ . On a  $w_i \in Z_2$  pour  $1 \leq i \leq n-1$ , d'où (26). On déduit de là la congruence



$$(27) \quad H_t \xi \equiv t \xi \pmod{Z_2} \quad \text{pour tout entier } t \neq 0,$$

puis on passe à la congruence

$$(28) \quad H_t \xi \equiv t^i \xi \pmod{Z_{i+1}} \quad (\text{pour } \xi \in Z_i)$$

lorsque  $t$  est entier : se ramener au cas où  $\xi$  est défini par un polytope  $P_1 \times \dots \times P_i$ , d'où  $H_t \xi = [h_t P_1 \times \dots \times h_t P_i]$ ; mais en appliquant (27) à l'espace

affine  $E_j$ , on voit que  $h_t P_j$  se décompose en  $t$  polytopes équivalents par translation à  $P_j$ , et en des polytopes de la forme  $P'_j \times P''_j$  correspondant chacun à une décomposition  $E_j = E'_j \oplus E''_j$ , d'où la formule (28).

Pour tout entier  $t \neq 0$ , l'homothétie  $H_t$  de  $\Pi(E)$  est un automorphisme; il induit un automorphisme de  $Z_1/Z_{i+1}$ , et d'après la formule (28), chacun des groupes commutatifs  $Z_1/Z_{i+1}$  est uniquement divisible. Il en est donc de même de  $\Pi(E)$ , qui se trouve muni d'une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$ .

La démonstration de la formule (26) enseigne aussi que, pour tout entier  $t \geq 1$ , le simplexe  $h_t \sigma$  se décompose en polytopes  $w_i$ , où  $w_i$  est équivalent par translation à  $h_{t-1} \sigma'_i \times \sigma''_i$ . Par une double récurrence sur  $n$  et  $t$ , on voit que pour tout  $\xi$  dans  $\Pi(E)$ , il existe des éléments  $\xi_j$  de  $Z_j$  (pour  $1 \leq j \leq n$ ) tels que

$$(29) \quad H_t \xi = \sum_{j=1}^n \binom{t}{j} \xi_j$$

pour tout entier  $t \neq 0$ . Autrement dit, il existe des opérateurs  $\mathbb{Q}$ -linéaires  $e_1, \dots, e_n$  dans  $\Pi(E)$  tels que l'on ait

$$(30) \quad H_t \xi = \sum_{i=1}^n t^i e_i(\xi).$$

Utilisant la relation  $H_t H_t \xi = H_{t^2} \xi$ , il vient  $e_i^2 = e_i$  et  $e_i e_j = 0$  pour  $i \neq j$ , d'où une décomposition  $\Pi(E) = \Pi^1(E) \oplus \dots \oplus \Pi^n(E)$  telle que  $e_j$  soit le projecteur correspondant de  $\Pi(E)$  sur  $\Pi^j(E)$ ; on a aussi  $Z_i = \sum_{j \geq i} \Pi^j(E)$  et la relation  $H_t \xi = t^i \xi$  est valable pour  $\xi$  dans  $\Pi^i(E)$  et  $t \neq 0$  entier (ou rationnel). En particulier, on a  $Z_n = \Pi^n(E)$ .

Pour la dernière étape, fixons  $i$  entre 1 et  $n$ ; identifions  $\Pi^i(E)$  à  $Z_1/Z_{i+1}$  et considérons, pour  $\xi$  fixé, l'application  $t \mapsto H_t \xi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\Pi^i(E)$ . Si  $\xi$  est associé à un polytope de la forme  $P_1 \times \dots \times P_i$ , il résulte de la formule (26) (imiter la démonstration de la formule (28)), qu'il existe une application  $\mathbb{Q}$ -multilinéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^i$  dans  $\Pi^i(E)$  telle que

$$(31) \quad f(t_1, \dots, t_i) \equiv [h_{t_1} P_1 \times \dots \times h_{t_i} P_i] \pmod{Z_{i+1}}.$$

On généralise ensuite le théorème de Thalès, en montrant que si un polytope  $P$  est de la forme  $P' \times P''$ , alors  $h_t P' \times P''$  et  $P' \times h_t P''$  sont équivalents (moyennant décomposition et translation) à une somme de polytopes de la forme  $Q_1 \times Q_2 \times Q_3$ . Autrement dit, la quantité (31) ne dépend que du produit  $t_1 \dots t_i$  et il existe une application  $\mathbb{Q}$ -linéaire  $g_\xi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\Pi^i(E)$  telle que  $f(t_1, \dots, t_i) = g_\xi(t_1 \dots t_i)$ , et en particulier

$$(32) \quad g_\xi(t^i) \equiv [h_t P_1 \times \dots \times h_t P_i] = H_t \xi \pmod{Z_{i+1}}.$$

La structure d'espace vectoriel réel sur  $\Pi^i(E)$  se définit au moyen de l'application  $(t, \xi) \mapsto g_\xi(t)$ , d'où  $H_t \xi = t^i \xi$ .

3.2. Interprétation homologique du groupe  $\bar{\Pi}(E)$

Un espace affine réel  $E$  possède deux orientations ; on peut considérer que ce sont les deux générateurs d'un groupe cyclique infini, noté  $Or(E)$ . Désormais, nous posons  $\bar{\Pi}(E) = \Pi(E) \otimes_{\mathbb{Z}} Or(E)$ . Si  $\sigma$  est un  $n$ -simplexe de sommets  $s_0, s_1, \dots, s_n$ , on note  $\langle s_0, \dots, s_n \rangle$  l'élément de  $\bar{\Pi}(E)$  égal à  $[\sigma] \otimes \epsilon$  où  $\epsilon$  est l'orientation pour laquelle la base  $\overrightarrow{s_0 s_1}, \overrightarrow{s_1 s_2}, \dots, \overrightarrow{s_{n-1} s_n}$  de  $T$  est directe. On peut montrer par un argument combinatoire -ou un petit peu de topologie- que le groupe  $\bar{\Pi}(E)$  est défini par les générateurs  $\langle s_0, \dots, s_n \rangle$  soumis aux relations <sup>(1)</sup>

$$(33) \quad \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \langle s_0, \dots, \hat{s}_i, \dots, s_{n+1} \rangle = 0$$

$$(34) \quad \langle s_0, \dots, s_n \rangle = \langle a + s_0, \dots, a + s_n \rangle \quad \text{pour } a \text{ dans } T.$$

On peut traduire de la manière suivante. Soit  $C_*(E)$  le complexe standard d'Eilenberg-Mac Lane ; en degré  $p$ , le groupe  $C_p(E)$  est le groupe commutatif libre engendré par les symboles  $(s_0, \dots, s_p)$  formés de  $p+1$  points de  $E$ , et l'opérateur de bord  $\partial : C_p(E) \rightarrow C_{p-1}(E)$  est défini par

$$(35) \quad \partial(s_0, \dots, s_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (s_0, \dots, \hat{s}_i, \dots, s_p).$$

Le groupe  $T$  opère par translation sur  $C_*(E)$  par analogie avec la formule (34). Soit  $D_*(E)$  le sous-complexe de  $C_*(E)$  engendré par les symboles  $(s_0, \dots, s_p)$  pour lesquels il existe un hyperplan de  $E$  contenant les points  $s_i$ . On a alors les groupes d'homologie <sup>(2)</sup>

$$(36) \quad H_p((C_*(E)/D_*(E))_T) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < n \\ \bar{\Pi}(E) & \text{si } p = n. \end{cases}$$

3.3. Invariants de Hadwiger d'un polytope

Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ . Choisissons une orientation  $\epsilon_E$  pour  $E$  et une orientation  $\epsilon_H$  pour  $H$  ; ces choix déterminent un demi-espace  $E_+$  limité par  $H$ . On construit alors, selon Hadwiger [13] un homomorphisme  $R_{H,E}$  de  $\bar{\Pi}(E)$  dans  $\bar{\Pi}(H)$  : soit  $P$  un polytope dans  $E$  ; pour chaque face  $F$  de  $E$ , de dimension  $n-1$  et parallèle à  $H$ , considérons le polytope (unique à translation près)  $F'$  de  $H$  déduit de  $F$  par translation, et le nombre  $t$  égal à  $1$  ou  $-1$  selon que  $P$  se trouve du même côté de  $F$  que  $E_+$  de  $H$ , ou non ; alors  $R_{H,E}$  transforme  $[P] \otimes \epsilon_E$  en  $\sum_F t \cdot [F'] \otimes \epsilon_H$ , somme étendue à toutes les faces  $F$  de  $P$  de dimension  $n-1$ . Cet homomorphisme ne dépend pas des choix de  $\epsilon_E$  et  $\epsilon_H$ .

<sup>(1)</sup> On fait la convention usuelle : le terme  $s_i$  sous le chapeau est à supprimer.

<sup>(2)</sup> Si  $M$  est un groupe commutatif sur lequel opère un groupe  $G$ , on note  $M_G$  le quotient de  $M$  par le sous-groupe engendré par les différences  $gm - m$  pour  $m \in M$  et  $g \in G$  (groupe des coinvariants).

De manière indépendante des orientations, le volume s'exprime comme un homomorphisme  $\text{vol}_n : \bar{\Pi}^n(E) \rightarrow \Lambda^n T$  qui transforme  $\langle s_0, \dots, s_n \rangle$  en  $\frac{1}{n!} v_1 \wedge \dots \wedge v_n$  si  $s_i = v_i + s_0$ . Les invariants de Hadwiger sont des homomorphismes  $V(T_1, \dots, T_p)$  de  $\bar{\Pi}(E)$  dans  $\Lambda^p T_p$ ; pour chaque suite décroissante  $T = T_n \supset T_{n-1} \supset \dots \supset T_p$  formée de sous-espaces  $T_i$  de  $T$  (avec  $\dim T_i = i$ ), c'est le composé

$R_{E_p, E_{p+1}} \circ \dots \circ R_{E_{n-1}, E_n}$  où  $E_i$  est un sous-espace affine de  $E$ , de direction  $T_i$ .

Fixons  $\varepsilon$ ; si  $P$  est un polytope dans  $E$ , on lui associe la famille des éléments  $V(T_1, \dots, T_p)$  ( $[P] \otimes \varepsilon$ ) de  $\Lambda^p T_p$ , appelés invariants de Hadwiger de  $P$ .

L'analogie avec les invariants de Dehn généralisés est évidente.

Le théorème fondamental affirme que deux polytopes  $P$  et  $P'$  ont même classe dans  $\Pi(E)$  - autrement dit, sont équivalents par décomposition et translation - si et seulement s'ils ont les mêmes invariants de Hadwiger.

Il a été démontré par Hadwiger et Glur [14] en 1951, pour la dimension 2, étendu à la dimension 3 par Hadwiger [13] en 1968, puis à la dimension 4 par Jessen (Göttingen Nachr. 1972, p. 47-53). Enfin, le cas général est dû à Jessen et Thorup<sup>(1)</sup> (1972, publié dans [17] en 1978), et indépendamment à Sah [9].

Naturellement, le théorème signifie qu'un élément  $\xi$  de  $\bar{\Pi}(E)$  tel que  $\text{vol}_n(\xi) = 0$  et  $R_{H,E}(\xi) = 0$  pour tout hyperplan  $H$  de  $E$ , est nécessairement nul. Sous cette forme, c'est une conséquence facile des résultats du n° 3.1., moyennant une construction géométrique simple transposée du cas de la dimension 2 [1, § 10].

#### 3.4. Variétés de drapeaux

Dans son livre [9], Sah pose la question des syzygies, c'est-à-dire des relations linéaires entre les invariants de Hadwiger d'un polytope. La réponse est donnée par Dupont [23] au moyen d'un complexe simplicial introduit antérieurement par Tits et utilisé aussi par Lusztig.

Nous ne maintenons plus la distinction entre espace affine et espace vectoriel. Soit donc  $T$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$ . Nous considérons le complexe simplicial  $\mathcal{T}(T)$  dont les sommets sont les sous-espaces vectoriels de  $T$ , distincts de 0 et  $T$ ; un  $p$ -simplexe dans  $\mathcal{T}(T)$  est une suite  $(V_0, V_1, \dots, V_p)$  telle que  $V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_p$ . Etant donné un entier  $q \geq 0$ , on définit le faisceau  $\Lambda_{\mathbb{R}}^q$  sur  $\mathcal{T}(T)$  dont le groupe des valeurs sur le simplexe  $(V_0, \dots, V_p)$  est  $\Lambda_{\mathbb{R}}^q V_p$ , c'est-à-dire la puissance extérieure  $q$ -ième de  $V_p$  considéré comme espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Tout espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  peut aussi être considéré comme espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$ , d'où un autre faisceau  $\Lambda_{\mathbb{Q}}^q$ .

<sup>(1)</sup> Boltianskii ne semble pas avoir eu connaissance de ce résultat; dans son livre de 1978, il détaille le cas de dimension 2 ou 3 et mentionne que le cas général est ouvert.



Soit  $V$  un espace vectoriel réel, et soit  $H_q(V, \mathbb{Z})$  le  $q$ -ième groupe d'homologie du groupe (discret)  $V$  à coefficients entiers ; comme l'homologie des groupes est compatible à la limite inductive, et que l'homologie de  $\mathbb{Z}^n$  est celle d'un tore  $\mathbb{T}^n = B\mathbb{Z}^n$ , on définit un isomorphisme canonique de  $H_q(V, \mathbb{Z})$  sur  $\Lambda_{\mathbb{Z}}^q V$ , égal à  $\Lambda_{\mathbb{Q}}^q V$ .

Soit alors  $\Gamma_q$  le faisceau sur  $\mathcal{U}(T)$  qui à un simplexe  $(V_0, \dots, V_p)$  associe le groupe des  $q$ -chaînes homogènes de  $V_p$  (autrement dit, le groupe des coinvariants de  $V_p$  dans le groupe commutatif libre construit sur les suites  $(v_0, \dots, v_q)$  d'éléments de  $V_p$ ). D'après ce qui précède, on définit donc un complexe

$$\Gamma_* : \Gamma_0 \longleftarrow \Gamma_1 \longleftarrow \dots \longleftarrow \Gamma_q \longleftarrow \Gamma_{q+1} \longleftarrow \dots$$

de faisceaux sur le complexe simplicial  $\mathcal{U}(T)$ , et le  $q$ -ième faisceau d'homologie de  $\Gamma_*$  est  $\Lambda_{\mathbb{Q}}^q$ .

Par utilisation de résultats généraux d'algèbre homologique et de la formule (36), on déduit de là un isomorphisme

$$\bar{\Pi}(T) \longrightarrow \bigoplus_{q=1}^n H_{n-q-1}(\mathcal{U}(T), \Lambda_{\mathbb{Q}}^q) ;$$

la décomposition en somme directe du second membre correspond à la décomposition  $\Pi(T) = \bigoplus_{q=1}^n \Pi^q(T)$  définie par le poids par rapport aux homothéties (n° 3.1.).

Par application du théorème de Jessen - Thorup, on déduit de là les groupes d'homologie de  $\mathcal{U}(T)$

$$(37) \quad H_i(\mathcal{U}(T), \Lambda_{\mathbb{Q}}^q) = H_i(\mathcal{U}(T), \Lambda_{\mathbb{R}}^q)$$

pour  $i \leq n - q - 1$ , ces groupes étant nuls pour  $i \neq n - q - 1$ .

### 3.5. Retour au groupe des déplacements

Supposons maintenant que l'espace  $T = \mathbb{R}^n$  soit muni de la forme quadratique usuelle. Tous les isomorphismes précédents sont covariants par rapport au groupe orthogonal  $O_n(\mathbb{R})$ . De plus, par définition même, le groupe de polyèdres  $\mathcal{P}_n$  associé à  $\mathbb{R}^n$  (voir le n° 2.3.) est le groupe des coinvariants de  $O_n(\mathbb{R})$  dans  $\Pi(\mathbb{R}^n)$  ; si l'on pose  $\bar{\mathcal{P}}_n = \mathcal{P}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Or}(\mathbb{R}^n)$ , on a de même un isomorphisme de  $\bar{\mathcal{P}}_n$  avec  $H_0(O_n(\mathbb{R}), \bar{\Pi}(\mathbb{R}^n))$ . Compte tenu de la détermination de  $\bar{\Pi}(\mathbb{R}^n)$  donnée au n° 3.4., on obtient un isomorphisme

$$(38) \quad \bar{\mathcal{P}}_n = \bigoplus_{q=n(2)} H_0(O_n(\mathbb{R}), H_{n-q-1}(\mathcal{U}(\mathbb{R}^n), \Lambda_{\mathbb{Q}}^q)) .$$

En particulier, pour  $n = 3$ , le groupe  $\mathcal{P}_3$  est somme directe du groupe  $\mathcal{Z}_3$  des prismes (de poids 3 pour les homothéties) et du noyau du volume (de poids 1 pour les homothéties). De plus, un cas particulier d'une suite exacte due à Lusztig [25] donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow \bar{\Pi}^1(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \bigoplus_{\mathbb{P}} \bar{\Pi}^1(\mathbb{P}) \longrightarrow \bigoplus_{\mathbb{D}} \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \longrightarrow 0 ,$$

où  $P$  parcourt les plans, et  $D$  les droites de  $\mathbb{R}^3$  ; il s'agit de modules pour le groupe  $O_n(\mathbb{R})$  et en passant à l'homologie, on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow H_2(SO_3(\mathbb{R}), \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathcal{P}_3/\mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Delta \longrightarrow H_1(SO_3(\mathbb{R}), \mathbb{R}^3) \longrightarrow 0 .$$

Tout ceci a été obtenu indépendamment du théorème de Sydler. Celui-ci peut maintenant se réexprimer sous la forme

$$H_1(SO_3(\mathbb{R}), \mathbb{R}^3) = \Omega_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}^1, \quad H_2(SO_3(\mathbb{R}), \mathbb{R}^3) = 0 .$$

Cathelineau a récemment obtenu le résultat analogue suivant

$$H_1(\mathcal{L}_3, \mathbb{R}^3) = \Omega_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}^1 ; \quad H_2(\mathcal{L}_3, \mathbb{R}^3) = 0 ,$$

où  $\mathcal{L}_3$  désigne l'algèbre de Lie de  $SO_3(\mathbb{R})$  considérée comme algèbre de Lie sur  $\mathbb{Q}$  .

### 3.6. Géométries elliptique et hyperbolique

On peut bien entendu poser des problèmes analogues au 3ème problème de Hilbert pour la géométrie des polytopes sphériques, ou des polytopes dans l'espace de Lobatchevski  $H^n$  de dimension  $n$  . Par analogie avec les groupes  $\mathcal{P}_n$  liés à l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  , on définit donc des groupes de polytopes  $\mathcal{P}(S^n)$  et  $\mathcal{P}(H^n)$  . Très peu de choses sont connues sur ces groupes ; cependant, Dupont [23] a appliqué ses méthodes dans ce cas et obtenu deux suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow A \longrightarrow H_3(SU_2(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \xrightarrow{I} \mathcal{P}(S^3)/\mathbb{Z} \xrightarrow{D} \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Delta \longrightarrow H_2(SU_2(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow B \longrightarrow H_3(SL_2(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \xrightarrow{J} \mathcal{P}(H^3) \xrightarrow{D} \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Delta \longrightarrow H_2(SL_2(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 . \end{aligned}$$

Les groupes  $A$  et  $B$  sont annulés par une puissance de 2 ; l'exposant  $\bar{\quad}$  dans la deuxième ligne signifie que l'on prend le groupe des éléments que la conjugaison dans  $\mathbb{C}$  transforme en leur opposé.

Normalisons le volume de la sphère  $S^3$  à l'unité ; alors le volume des polyèdres sphériques définit un homomorphisme de  $\mathcal{P}(S^3)/\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  ; composé avec l'homomorphisme  $I$  , il donne l'homomorphisme de  $H_3(SU_2(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  introduit par Cheeger et Simons [30].

## 4. POSTLUDE : VERS LE 21<sup>e</sup> SIÈCLE

### 4.1. Homologie des groupes de Lie "discrets"

Soit  $G$  un groupe de Lie complexe, réel ou complexe, et soit  $G^\delta$  le même groupe avec la topologie discrète. Les groupes d'homologie d'Eilenberg-Mac Lane  $H_1(G, M)$  apparaissent en  $K$ -théorie algébrique, dans la théorie des feuilletages (voir Haefliger [45]), et dans la théorie des espaces fibrés à connexion intégrable ; des cas particuliers se sont introduits ci-dessus. Rappelons qu'on associe au groupe topologique  $G$  un espace "classifiant"  $BG$  qui est la base d'un espace fibré

principal de groupe  $G$ , dont l'espace total  $EG$  est contractile. L'espace classifiant  $BG^\delta$  est aussi défini et l'application identique de  $G$  est un homomorphisme continu de  $G^\delta$  dans  $G$ , qui induit une application continue de  $BG^\delta$  dans  $BG$ , donc aussi des homomorphismes

$$\mu_i : H_i(BG^\delta, M) \longrightarrow H_i(BG, M) .$$

Il est classique (Hopf-Eilenberg) que  $H_i(BG^\delta, M)$  n'est autre que  $H_i(G, M)$ , où  $G$  agit trivialement sur  $M$ .

Friedlander [33] et Milnor [35] ont conjecturé que  $\mu_i$  est un isomorphisme pour tout  $i \geq 0$  si le groupe de coefficients  $M$  est fini. Naturellement, on conjecture aussi que, par dualité, les homomorphismes

$$\mu^i : H^i(BG, M) \longrightarrow H^i(BG^\delta, M)$$

sont des isomorphismes. Friedlander a aussi formulé dans [33] une variante où l'on remplace  $G$  par un schéma en groupes sur un corps algébriquement clos  $k$ , d'où des isomorphismes putatifs

$$v^i : H_{\text{et}}^i(BG, M) \longrightarrow H^i(BG(k)^\delta, M)$$

( $BG$  est ici un schéma simplicial et  $H_{\text{et}}^i$  est la cohomologie étale).

Un certain nombre de cas sont connus. Tout d'abord, Milnor [35] prouve la conjecture, lorsque  $G$  est résoluble, par un dévissage facile qui ramène au cas commutatif; la même méthode ramène la conjecture générale au cas où  $G$  est simplement connexe, simple et non commutatif. Sous cette dernière hypothèse, Dupont, Parry et Sah [32] viennent de régler le cas  $i \leq 2$  (avec au plus 11 exceptions lorsque  $G$  est de type  $F_4$ ,  $E_6$ ,  $E_7$  ou  $E_8$ ).

On prouve ces résultats en utilisant la  $K$ -théorie algébrique. Si  $F$  est un corps, on note  $F^\times$  son groupe multiplicatif et  $K_2(F)$  le quotient de  $F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times$  par le sous-groupe engendré par les éléments  $a \otimes (1-a)$ . On sait (Steinberg-Matsumoto-Moore) que si  $G$  est un schéma en groupes simple, déployé, et simplement connexe, et  $F$  un corps où tout élément est un carré (en particulier algébriquement clos), alors le multiplicateur de Schur  $H_2(G(F), \mathbb{Z})$  est isomorphe à  $K_2(F)$ .

Venons au cas  $F = \mathbb{C}$ ; alors la conjugaison complexe définit un automorphisme d'ordre 2 de  $K_2(\mathbb{C})$ , d'où une décomposition  $K_2(\mathbb{C}) = K_2(\mathbb{C})_+ \oplus K_2(\mathbb{C})_-$  en parties paire et impaire. Essentiellement par définition,  $H_2(SL_2(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  est égal à  $K_2(\mathbb{C})$ ; Dupont, Parry et Sah démontrent que l'inclusion de  $SU_2(\mathbb{C})$  dans  $SL_2(\mathbb{C})$  définit un isomorphisme <sup>(1)</sup> de  $H_2(SU_2(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  sur  $K_2(\mathbb{C})^+$  (voir Sah-Wagoner [39] pour un résultat préliminaire). Mather (non publié) a étudié l'homomorphisme de  $H_2(U_1(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  dans  $H_2(SU_2(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  et Alperin-Dennis [27] définissent un isomorphisme de

<sup>(1)</sup> C'est ici qu'intervient la décomposition des polyèdres dans l'espace hyperbolique.

$K_2(\mathbb{H})$  sur  $K_2(\mathbb{C})^+$  ( $\mathbb{H}$  est le corps des quaternions). Dans l'étape suivante, due à Sah [38], on montre que, si  $G$  est compact, simplement connexe, simple et non exceptionnel, alors le plongement de  $SU_2(\mathbb{C})$  dans  $G$  associé à une racine simple définit un isomorphisme de  $H_2(SU_2(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$  sur  $H_2(G, \mathbb{Z})$ . Enfin supposons que  $G$  soit un groupe de Lie simplement connexe ; si  $G$  est un groupe simple réel (resp. complexe), alors  $H_2(G, \mathbb{Z})$  est isomorphe à  $K_2(\mathbb{C})^+$  (resp.  $K_2(\mathbb{C})$ ). Il est alors facile de prouver la conjecture de Milnor pour  $i \leq 2$ .

Les résultats les plus impressionnants ont été obtenus par Suslin dans 4 articles [40, 41, 42, 43] et concernent les groupes  $GL_n$ . Le résultat final est que l'homomorphisme  $\mu_i : H_i(BG_n^\delta, M) \rightarrow H_i(BG, M)$  est un isomorphisme si  $M$  est fini, et si  $G$  est  $GL_n(\mathbb{R})$  ou  $GL_n(\mathbb{C})$  avec  $n \geq i$  (cas stable). Suslin [41] démontre d'abord un résultat de stabilité : pour tout corps infini  $F$ , l'homomorphisme canonique de  $H_i(GL_n(F), \mathbb{Z})$  dans  $H_i(GL_{n+1}(F), \mathbb{Z})$  est un isomorphisme pour  $n \geq i$ ; notons  $H_i(GL(F), \mathbb{Z})$  le groupe limite. Notation analogue pour un corps fini  $\mathbb{F}_\ell$  de coefficients. La partie difficile est la comparaison des groupes  $H_i(GL(F), \mathbb{F}_\ell)$  pour les divers corps algébriquement clos  $F$  dont la caractéristique est 0 ou un nombre premier  $p \neq \ell$  : ces groupes ne dépendent pas du corps  $F$ . On se ramène donc au cas où  $F$  est la clôture algébrique du corps  $\mathbb{F}_p$  et ce dernier cas est traité par Quillen [37].

#### 4.2. Homologie des algèbres de Lie rationnelles

Thurston a introduit une fibre homotopique  $\bar{G}$  pour l'homomorphisme de  $G^\delta$  dans  $G$ . Une réalisation simple s'obtient en prenant le produit fibré  $C \times_G G^\delta$ , où  $C$  est le groupe des chemins continus dans  $G$  issus de l'élément neutre. On peut réaliser  $B\bar{G}$  comme l'espace total de la fibration  $BG_n^\delta \times_{BG} EG$  de base  $BG^\delta$ . Cet espace classe les connexions intégrables sur les fibrés triviaux (potentiels de jauge associés au champ nul). On pourra consulter Suslin [43] pour une autre construction de  $B\bar{G}$ . Tel que  $\bar{G}$  est construit plus haut, il est le même pour  $G$  et pour son revêtement universel ; il ne dépend donc que de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{G}$  de  $G$ , et on peut écrire  $B\mathfrak{G}$  pour  $B\bar{G}$ .

A homotopie près, l'application canonique de  $BG_n^\delta$  dans  $BG$  est une fibration dont la fibre est  $B\mathfrak{G}$ . Par utilisation de la suite spectrale de Serre pour les fibrés, on montre que la conjecture de Milnor équivaut à la suivante :

$$H_i(B\mathfrak{G}, \mathbb{F}_p) = 0 \quad \text{pour } i > 0 \text{ et } p \text{ premier.}$$

Une forme équivalente est que  $H_i(B\mathfrak{G}, \mathbb{Z})$  soit un espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$  (noter l'analogie avec les résultats du n° 3.1. qui montrent que  $\Pi(E)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$ ). Kassel et Loday m'ont communiqué la conjecture (ou question) suivante :

Pour tout entier  $i \geq 1$ , les groupes  $H_i(B\mathfrak{G}, \mathbb{Z})$  et  $H_i(\mathfrak{G}, \mathbb{Q})$  sont isomorphes.

Le groupe  $H_i(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$  désigne ici le  $i$ -ème groupe d'homologie de l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  considérée comme algèbre de Lie sur  $\mathbb{Q}$ , opérant par 0 sur  $\mathbb{Q}$ .

Voici quelques faits à l'appui de cette conjecture.

a) Supposons que le groupe  $G$  soit nilpotent et simplement connexe ; l'espace  $G$  est contractile et il en est de même de  $BG$ . Dans ce cas, les espaces  $B\mathcal{G}$  et  $B\mathcal{G}^\delta$  ont même type d'homotopie, d'où  $H_i(B\mathcal{G}, \mathbb{Z}) = H_i(G, \mathbb{Z})$ . Mais Haefliger [46] a défini un isomorphisme de  $H_i(G, \mathbb{Z})$  sur  $H_i(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$  (voir aussi Blanc [44] pour une autre méthode).

b) Suslin [43] démontre que l'on a <sup>(1)</sup>

$$K_i(\mathbb{C}) = \begin{cases} V_i \oplus \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \text{si } i \text{ est impair} \\ V_i & \text{si } i \text{ est pair,} \end{cases}$$

où  $V_i$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$ . Or, en appliquant la construction " + " de Quillen à une fibration mentionnée plus haut, on obtient une fibration

$$(F) \quad (B\mathcal{G})^+ \longrightarrow (B\mathcal{G}^\delta)^+ \longrightarrow BG.$$

Considérons la suite exacte d'homotopie associée à (F) lorsque  $G$  est le groupe  $GL(\mathbb{C}) = \varinjlim GL_n(\mathbb{C})$ . On sait (par Bott) que  $\pi_i(BG)$  est égal à  $\mathbb{Z}$  si  $i$  est pair et à 0 si  $i$  est impair. D'après la définition de Quillen, on a  $\pi_i((B\mathcal{G}^\delta)^+) = K_i(\mathbb{C})$ . Considérons enfin les groupes d'homotopie de  $(B\mathcal{G})^+$  ; il y a de bonnes raisons de penser que ce sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{Q}$  ; d'après un théorème de Milnor-Moore,  $\pi_i((B\mathcal{G})^+)$  serait alors la partie primitive de  $H_i((B\mathcal{G})^+, \mathbb{Q})$  ; ce dernier groupe est égal par la vertu de la construction " + " à  $H_i(B\mathcal{G}, \mathbb{Q})$ . En admettant la conjecture donnée plus haut, on a  $H_i(B\mathcal{G}, \mathbb{Q}) = H_i(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$ . Or, d'après Loday-Quillen (voir mon exposé n° 621), la partie primitive de  $H_i(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$  est isomorphe à l'homologie cyclique  $HC_{i-1}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$  de  $\mathbb{C}$  considéré comme algèbre sur  $\mathbb{Q}$ . Rasant le tout, on obtient la suite exacte conjecturale

$$\dots \longrightarrow HC_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \longrightarrow HC_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}) \xrightarrow{E_i} K_{i+1}(\mathbb{C}) \longrightarrow HC_{i-1}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \dots$$

Si l'on remarque que  $HC_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$  est égal à  $\mathbb{Z}$  ou 0 selon que  $i$  est pair ou impair, on a bien, conjecturalement, identifié le groupe  $V_i$  de Suslin.

Enfin, on a quelques résultats généraux sur les groupes d'homologie  $H_i(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$ . Lorsque  $\mathcal{G}$  est égal à  $\mathcal{G}_n(\mathbb{R})$  ou  $\mathcal{G}_n(\mathbb{C})$ , cette homologie est reliée à l'homologie cyclique d'après le résultat cité de Loday et Quillen. On a évidemment  $H_0(\mathcal{G}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$  et  $H_1(\mathcal{G}, \mathbb{Q}) = \mathcal{G}/[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ . En spécialisant des résultats de Kassel et Cathelineau, on obtient des isomorphismes (où  $\bar{\mathbb{Q}}$  se compose des nombres algébriques)

$$H_2(\mathcal{G}, \mathbb{Q}) = \Omega_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}^1/d\mathbb{R} \quad , \quad H_3(\mathcal{G}, \mathbb{Q}) = \bar{\mathbb{Q}}$$

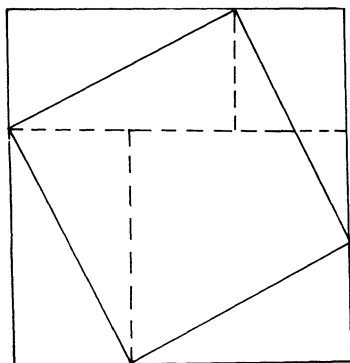
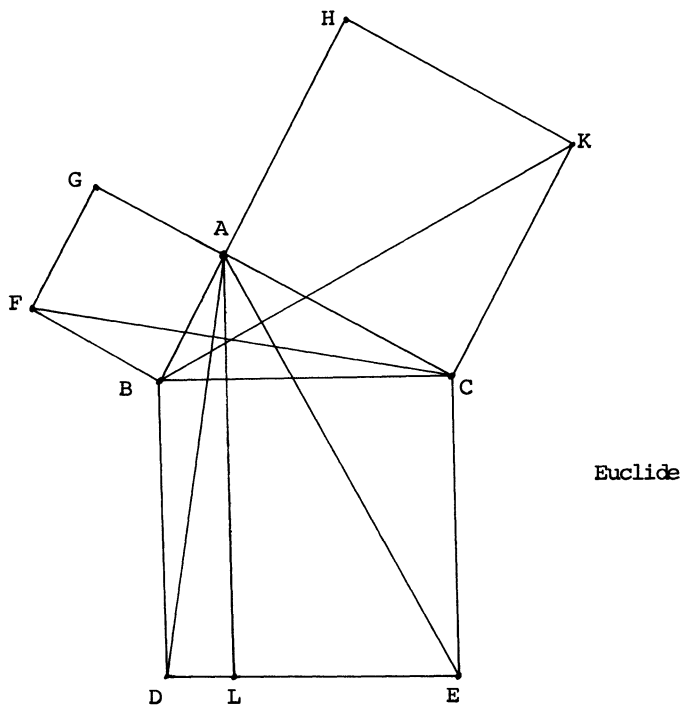
si  $\mathcal{G}$  est simple et déployée sur  $\mathbb{R}$ , non isomorphe à  $\mathcal{S}\ell_n(\mathbb{R})$  dans le cas de  $H_3$ .

<sup>(1)</sup> Le cas  $i = 1$  (où  $K_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ ) est trivial ; le cas  $i = 2$  était connu depuis longtemps.

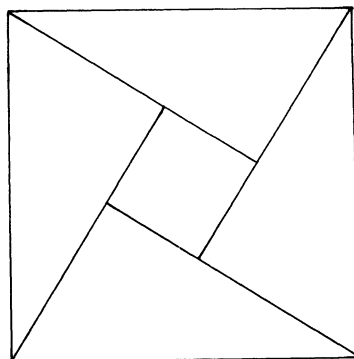


TABLE II

Le théorème de Pythagore



Legendre

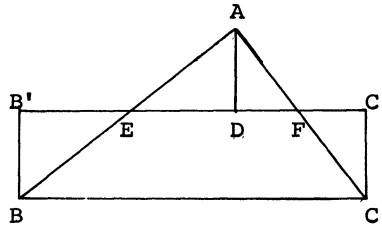


Tradition chinoise  
et indienne

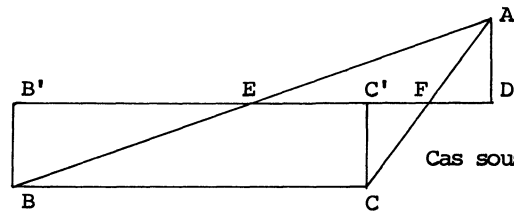
TABLE III

Décomposition des aires

Les triangles  $ADF$  et  $CC'F$  sont congruents, et aussi les triangles  $ADE$  et  $BB'E$ , donc le triangle  $ABC$  est équivalent au rectangle  $BB'C'C$ .

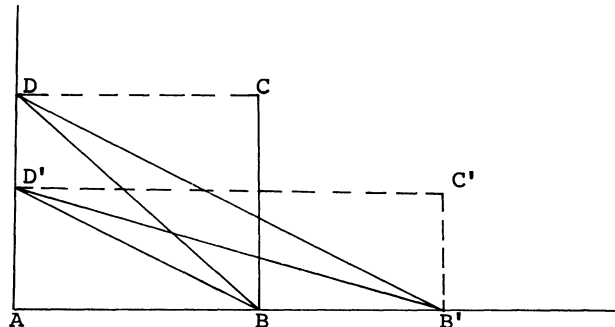


Cas additif



Cas soustractif

D'après I.37, et le parallélisme de  $BD'$  et  $B'D$ , les triangles  $BD'D$  et  $BD'B'$  ont même aire, donc aussi  $ABD$  et  $AB'D'$  (ajouter  $ABD'$ ).



Théorème de Thalès : les rectangles  $ABCD$  et  $AB'C'D'$  sont équivalents si les droites  $BD'$  et  $B'D$  sont parallèles.



TABLE IV

Le tétraèdre  $P = ABCD$  est décomposé  
comme suit :

le tétraèdre  $P' = AB'C'D'$  ,

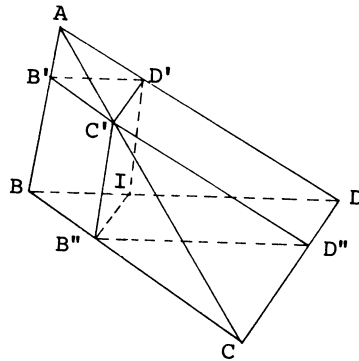
le tétraèdre  $P'' = CC'B''D''$  ,

le prisme  $BB''IB'C'D'$  ,

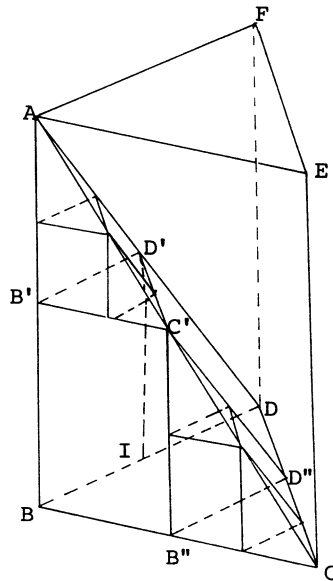
le prisme  $C'B''D''ID'D$  .

$P'$  est homothétique de  $P$  dans le  
rapport  $t = C'A/CA$  ;

$P''$  est homothétique de  $P$  dans le  
rapport  $1-t = C'C/CA$  .



Chacun des prismes  $BB''IB'C'D'$  et  
 $C'B''D''ID'D$  est équivalent à  $\frac{1}{8}$   
du grand prisme  $\Pi = AEFBCD$  . Les  
tétraèdres  $P' = AB'C'D'$  et  
 $P'' = CC'B''D''$  sont égaux et homothé-  
tiques de rapport  $\frac{1}{2}$  de  $P = ABCD$  .  
Si l'on admet que le volume est ho-  
mogène de poids 3 , on a  
 $\text{vol}(P') = \text{vol}(P'') = \frac{1}{8} \text{vol}(P)$   
d'où facilement  $\text{vol}(P) = \frac{1}{3} \text{vol}(\Pi)$  .



N.B. Euclide et Liu Hui continuent la subdivision en 2 , et utilisent un raison-  
nement équivalent à la formule  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots = \frac{1}{3}$  .

## BIBLIOGRAPHIE RAISONNÉE

Je ne répéterai pas les références de mon précédent exposé n° 621.

A. Ouvrages généraux

- [1] V.G. BOLTJANSKII - *Hilbert's third problem*, traduit par R.A. Silverman, Winston and Sons, Washington, 1978.
- [2] F.E. BROWDER (Editeur) - *Mathematical developments arising from Hilbert problems*, Proc. Symp. Pure Math. vol XXVIII (en deux parties), American Mathematical Society, Providence, 1976.
- [3] EUCLIDE - *The thirteen books of Euclid's Elements*, présentés par T.L. Heath, en 3 volumes, Dover, New York, 1976.
- [4] P.J. FEDERICO - *Descartes on polyhedra* (a study of the "De Solidorum Elementis"), Springer, Berlin, 1982.
- [5] H. HADWIGER - *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer, Berlin, 1957.
- [6] D. HILBERT - *Gesammelte Abhandlungen*, 3 vol., Chelsea, New York, 1965.
- [7] D. HILBERT - *Grundlagen der Geometrie*, 11<sup>e</sup> édition, Teubner, Stuttgart, 1968.
- [8] I. LAKATOS - *Proofs and refutations* (The logic of mathematical discovery), Cambridge University Press, Cambridge, 1976.
- [9] C.H. SAH - *Hilbert's third problem : scissors congruence*, Pitman, London, 1979.

B. Solution du 3<sup>e</sup> problème

- [10] R. BRICARD - *Sur une question de géométrie relative aux polyèdres*, Nouv. Ann. Math. 15(1896), p. 331-334.
- [11] M. DEHN - *Über raumgleiche Polyeder*, Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1900, p. 345-354.
- [12] M. DEHN - *Über den Rauminhalt*, Math. Ann. 55(1902), p. 465-478.
- [13] H. HADWIGER - *Translative Zerlegungsgleichheit der Polyeder des gewöhnlichen Raumes*, J. Reine Angew. Math. 233(1968), p. 200-212.
- [14] H. HADWIGER und P. GLUR - *Zerlegungsgleichheit ebener Polygone*, Elem. Math. 6(1951), p. 97-106.
- [15] B. JESSEN - *The algebra of polyhedra and the Dehn-Sydler theorem*, Math. Scand. 22(1968), p. 241-256.
- [16] B. JESSEN, J. KARPf and A. THORUP - *Some functional equations in groups and rings*, Math. Scand. 22(1968), p. 257-265.
- [17] B. JESSEN and A. THORUP - *The algebra of polytopes in affine spaces*, Math. Scand. 43(1978), p. 211-240.

- [18] J.-P. SYDLER - *Sur la décomposition des polyèdres*, *Comment. Math. Helv.* 16 (1943/4), p. 266-273.
- [19] J.-P. SYDLER - *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions*, *Comment. Math. Helv.* 40(1965), p. 43-80.
- [20] V.B. ZYLEV - *Equicomposability of equicomplementable polyhedra*, *Sov. Math. Doklady* 161(1965), p. 453-455.
- [21] V.B. ZYLEV - *G-composedness and G-complementability*, *Sov. Math. Doklady* 179 (1968), p. 403-404.

C. Méthodes homologiques dans le 3<sup>e</sup> problème

- [22] J.-L. CATHELINÉAU - *Remarques sur l'homologie de  $SO(n, \mathbb{R})$  considéré comme groupe discret*, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 295(1982), p. 281-283.
- [23] J.L. DUPONT - *Algebra of polytopes and homology of flag complexes*, *Osaka J. Math.* 19(1982), p. 599-641.
- [24] J.L. DUPONT and C.H. SAH - *Scissor congruences II*, *Journ. Pure Appl. Algebra*, 25(1982), p. 159-195.
- [25] G. LUSZTIG - *The discrete series of  $GL_n$  over a finite field*, *Annals of Math. Studies* 81, Princeton University Press, Princeton, 1974.
- [26] C.H. SAH - *Scissor Congruences, I : The Gauss - Bonnet map*, *Math. Scand.* 49 (1981), p. 181-210.

D. K-théorie et groupes de Lie rendus discrets

- [27] R.C. ALPERIN and R.K. DENNIS -  *$K_2$  of quaternion algebras*, *J. Algebra* 56(1979), p. 262-273.
- [28] S. BLOCH - *Higher regulators, algebraic K-theory and regulators of elliptic curves*, *Publ. Math. IHES*,
- [29] J. CHEEGER - *Invariants of flat bundles*, in *Proc. Int. Congr. Math.*, Vancouver, 1974, p. 3-6.
- [30] J. CHEEGER and J. SIMONS - *Differential characters and geometric invariants*, *Prépublication datée* 1973.
- [31] S. CHEERN and J. SIMONS - *Characteristic forms and geometric invariants*, *Ann. of Math.* 99(1974), p. 48-69.
- [32] J.L. DUPONT, W. PARRY and C.H. SAH - *Schur multipliers of classical Lie groups II, à paraître.*
- [33] E.M. FRIEDLANDER and G. MISLIN - *Cohomology of classifying spaces of complex Lie groups and related discrete groups*, *Comment. Math. Helv.* 59(1984), p. 347-361.

- [34] M. KAROUBI - *Homology of the infinite orthogonal and symplectic groups over algebraically closed fields*, *Inv. Math.* 73(1983), p. 247-250.
- [35] J. MILNOR - *On the homology of Lie groups made discrete*, *Comment. Math. Helv.* 58(1983), p. 72-85.
- [36] W. PARRY and C.H. SAH - *Third homology of  $SL(2, \mathbb{R})$  made discrete*, *Journ. Pure Appl. Algebra* 30(1983), p. 181-209.
- [37] D. QUILLEN - *On the cohomology and K-theory of the general linear group over a finite field*, *Ann. of Math.* 96(1972), p. 552-586.
- [38] C.H. SAH - *Schur multipliers of classical Lie groups, I, à paraître.*
- [39] C.H. SAH and J.B. WAGONER - *Second homology of Lie groups made discrete*, *Comm. in Algebra*, 5(1977), p. 611-642.
- [40] A. SUSLIN - *Stability in algebraic K-theory*, *Springer Lecture Notes in Math.* vol. 967 (1982), p. 304-333.
- [41] A. SUSLIN - *Homology of  $GL_n$ , characteristic classes and Milnor K-theory*, *Lecture Notes Math.*, vol. 1046 (1984), p. 357-375.
- [42] A. SUSLIN - *On the K-theory of algebraically closed fields*, *Inv. Math.* 73 (1983), p. 241-245.
- [43] A. SUSLIN - *On the K-theory of local fields*, *Journ. Pure App. Algebra* 34 (1984), p. 301-318.

E. Feuilletages et homologie des groupes de Lie

- [44] P. BLANC - *(Co)homologie différentiable et changement de groupe*, *Astérisque* vol. 124-125, 1985, p. 13-29.
- [45] A. HAEFLIGER - *Sur les classes caractéristiques des feuilletages*, *Sém. Bourbaki*, n° 412 (Juin 1972), *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 317, 1973.
- [46] A. HAEFLIGER - *The homology of nilpotent Lie groups made discrete*, *Astérisque* vol. 113-114, 1984, p. 206-211.
- [47] W.T. VAN EST - *A generalization of the Cartan - Leray spectral sequence*, *Nederl. Akad. Wet. Proc. Serie A*, 61(1958), p. 399-405 et 406-413.

F. Volume des tétraèdres

- [48] K. AOMOTO - *Analytic structure of Schläfli function*, *Nagoya Math. Journ.* 68 (1977), p. 1-16.
- [49] H.S.M. COXETER - *The functions of Schläfli and Labatschefsky*, *Quart. J. Math.* (Oxford) 6(1935), p. 13-29.
- [50] L. LEWIN - *Polylogarithms and associated functions*, North Holland, New York, 1981.
- [51] J. MILNOR - *Hyperbolic geometry : the first 150 years*, *Bull. Amer. Math. Soc.* 6(1982), p. 9-24.

- [52] J. MILNOR - *On the Schläfli differential equality*, à paraître.
- [53] SCHLÄFLI - *On the multiple integral  $\int^n dx dy \dots dz$  where limits are  $p_1 = a_1x + b_1y + \dots + h_1z > 0, p_2 > 0, \dots, p_n > 0$ , and  $x^2 + y^2 + \dots + z^2 < 1$* , in *Gesammelte Mathematische Abhandlungen II*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1953, p. 219-270.

G. Références supplémentaires (ajoutées en Septembre 1985)

- [54] LOBATCHEVSKI - *La théorie des parallèles* (réimpression 1980 de la traduction Houel), Monom Editeur.
- [55] C. ROGER - *Caractères différentiels*, in *Differential Geometry and Topology* (Journées de Dijon 1974), Lect. Notes in Math., vol. 484, Springer, 1975.

Pierre CARTIER  
Ecole Polytechnique  
Centre de Mathématiques Pures  
F-91128 PALAISEAU CEDEX