Astérisque

HENRI BERESTYCKI

Solutions périodiques de systèmes hamiltoniens

Astérisque, tome 105-106 (1983), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 603, p. 105-128
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1982-1983__25__105_0>

© Société mathématique de France, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
35e année, 1982/83, n° 603 Février 1983

SOLUTIONS PÉRIODIQUES DE SYSTÈMES HAMILTONIENS

par Henri BERESTYCKI

Les systèmes hamiltoniens de 2N équations différentielles ordinaires décrivent le mouvement d'un système mécanique à N degrés de liberté (voir par exemple les livres de Arnold [7], Abraham-Marsden [1] et Siegel-Moser [68]). Les exemples classiques proviennent de la mécanique céleste. Celle-ci a motivé depuis longtemps la recherche d'orbites périodiques de ces systèmes. Cette question revêt plusieurs aspects, notamment celui qui se situe dans le cadre de la géométrie symplectique. Dans cet exposé, nous retraçons quelques résultats récents concernant les orbites périodiques de systèmes hamiltoniens *dans* $\mathbb{R}^{2N}$ muni de la structure symplectique standard. Des progrès importants ont en effet été réalisés ces dernières années sur cette question depuis les travaux de P.H. Rabinowitz et l'utilisation du calcul des variations au sens large (théorie des points critiques). Le plus souvent, ces méthodes combinent topologie et analyse fonctionnelle et, parfois analyse convexe.

Le calcul des variations a d'abord été utilisé d'un point de vue géométrique avec Seifert [67] qui, dès 1948, obtient une solution périodique d'un système hamiltonien comme géodésique pour une métrique riemannienne (la métrique de Jacobi). A. Weinstein [70, 71] a développé cette approche en utilisant plus généralement des métriques finsleriennes . Cet aspect géométrique ne sera pas abordé ici. Notons aussi les travaux de M.S. Berger [24] et Gordon [46] qui font appel au calcul des variations.

Les travaux de P.H. Rabinowitz depuis 1978 environ [61, 62, 64] ont ouvert une perspective nouvelle dans ce domaine. Les fonctionnelles provenant des principes variationnels (de moindre action) sont étudiées *directement*. Pour cela, des outils nouveaux ont été forgés en théorie des points critiques, outils qui sont par eux-mêmes intéressants et susceptibles d'autres applications. C'est dans cette optique que se situe cet exposé. Nous indiquerons plusieurs résultats en théorie des points critiques avec leurs applications.

Nous allons à présent décrire les problèmes envisagés ici. Un point générique de $\mathbb{R}^{2N}$ est noté $z = (x,p)$, $x = (x_1,\dots,x_N)$, $p = (p_1,\dots,p_N) \in \mathbb{R}^N$. Soit $H \in C^2(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R})$ (H est le hamiltonien). (Dans certaines situations - par exemple en présence de chocs - on est conduit à envisager des hamiltoniens non différentiables et à donner à $(\mathcal{H})$ un sens multivoque. Cf. à ce sujet les travaux de M. Schatzman [69].) Un système hamiltonien autonome dans $\mathbb{R}^{2N}$ s'écrit

$$(\mathcal{H}) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial p_i}(x_1,\dots,x_N,p_1,\dots,p_N) \\ \dfrac{dp_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial x_i}(x_1,\dots\dots,p_N) \end{cases} \qquad i = 1,\dots,N$$

En notant $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ (I est la matrice identité d'ordre N), $z = (x,p)$, $\dot{z} = dz/dt$, $(\mathcal{H})$ s'écrit de façon condensée

$$(\mathcal{H}) \qquad \dot{z} = JH'(z) \ .$$

En présence de forces externes, on considère un système forcé

$$(\mathcal{HF}) \qquad \dot{z} = JH'_z(t,z)$$

où $H \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$. Un cas particulier fondamental en mécanique est celui où

$$H(x,p) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i} p_i^2 + V(x)$$

avec $m_i > 0$, $V \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Le système $(\mathcal{H})$ se réduit alors au système familier

$$(\mathcal{V}) \qquad m_i \ddot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_N) = 0 \ , \quad i = 1,\dots,N$$

ou au système forcé

$$(\mathcal{VF}) \qquad m_i \ddot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial x_i}(t,x) = 0 \ , \quad i = 1,\dots,N \ .$$

Dans l'étude des orbites périodiques de ces systèmes, on peut dégager trois types de problèmes (non exhaustifs et non indépendants).

Problème 1.— *Orbites périodiques sur une surface d'énergie donnée.* $C > 0$ étant une constante, $\Sigma = \{z \in \mathbb{R}^{2N} ; H(z) = C\}$, existence et nombre des orbites périodiques de $(\mathcal{H})$ sur Σ .

Problème 2.— *Vibrations libres ou forcées.* Soit $T > 0$ fixé, existence de solutions T-périodiques, ou de solutions kT-périodiques ("sous-harmoniques", $k \in \mathbb{N}^*$).

Problème 3.— *Perturbations et bifurcation.* Existence (et périodes ?) de solutions périodiques au voisinage d'une solution donnée. Déformations du hamiltonien, développements asymptotiques, etc...

Nous nous intéressons ici surtout aux deux premières questions.

Cet exposé n'a pour seule ambition que de prolonger deux revues de synthèse récentes. L'une de N. Desolneux-Moulis [36], exposée au Séminaire N. Bourbaki en février 1980 et l'autre de P.H. Rabinowitz [63]. L'esprit diffère cependant quelque peu. L'accent ici est mis simultanément sur les développements en théorie des points critiques et leurs applications. Enfin, même si pour la commodité du lecteur nous n'avons pas hésité à faire quelques redites de l'exposé de N. Desolneux-Moulis, presque tous les résultats concernant les systèmes hamiltoniens qui sont indiqués ci-dessous sont nouveaux. Cela permettra de mesurer la vitalité de ce sujet. Nous renvoyons également à L. Nirenberg [56] pour une revue plus générale des méthodes variationnelles dans les problèmes non linéaires.

1. Formulations variationnelles et principes de moindre action

1.1. Le cadre fonctionnel. Nous considérons des fonctions 2π-périodiques définies sur $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. L'espace naturel (qui s'est imposé avec [18]) est l'espace de Sobolev d'ordre fractionnaire

$$E = H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2N})$$

(E s'obtient soit par *interpolation* entre $L^2(S^1)^{2N}$ et $H^1(S^1)^{2N}$ (voir Lions-Magenes [50]) soit comme complétion de $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^{2N})$ pour la norme (1.1)). C'est un espace de Hilbert, muni de la norme

$$\|u\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 + |k|)|u_k|^2 \tag{1.1}$$

où $u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k e^{ikt}$ est le développement en séries de Fourier de u. Dans d'autres situations, on utilisera l'espace $H = H^1(S^1)^{2N}$.

1.2. Principe de moindre action de Maupertuis : Problème 1. On définit l'intégrale d'action

$$\mathcal{A}(z) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \dot{z}.Jz \tag{1.2}$$

($u.v$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^{2N}$; le symbole dt sera économisé dans toute la suite). Une solution du problème 1 est obtenue en trouvant un point critique non constant de $\mathcal{A}$ sur la variété

$$M = \{z \in E \ ; \ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(z) = C\} .$$

En effet $(\mathcal{A}_{|M})'(z) = 0$ et $z \neq$ constante impliquent

$$-J\dot{z} = \lambda H'(z) \tag{1.3}$$

avec $\lambda \neq 0$. En posant $\zeta(t) = z(t/\lambda)$ on obtient une solution périodique de $(\mathcal{H})$, ζ telle que $\zeta(t) \in \Sigma$ $\forall t$ (puisque $H(z(t))$ est constant).

1.3. Principe de Maupertuis : Problème 2. Posons

$$f(z) = \mathcal{A}(z) - \int_0^{2\pi} H(z(t)) . \tag{1.4}$$

On peut sans perte de généralité se ramener au cas $T = 2\pi$. Les solutions 2π-périodiques correspondent aux points critiques de f dans E (ou dans H).

Remarque 1.— L'inconvénient majeur de l'espace E est de ne pas être inclus dans $L^\infty(S^1)^{2N}$ - il s'agit en effet d'un cas limite pour les inclusions de Sobolev. De ce fait, f n'est définie (de classe C^2) que si H (resp. H'') est à croissance polynomiale à l'infini. L'espace E s'impose cependant en raison de la condition de Palais-Smale sur f . On est donc amené, suivant Rabinowitz [61] à effectuer des troncatures/estimations a priori quelquefois laborieuses.

Remarque 2.— $z \in E$ et $f'(z) = 0$ signifient par définition que z est une solution *faible* de $(\mathcal{H})$. Cependant, si $z \in L^\infty(S^1,\mathbb{R}^{2N})$ ou si, par exemple $H'(z)$ est à croissance polynomiale lorsque $|z| \to +\infty$, alors z est une solution *classique*, i.e. $z \in C^1(S^1,\mathbb{R}^{2N})$.

Remarque 3.— Pour le système $(\mathcal{V})$ ou $(\mathcal{VF})$, il est naturellement préférable de travailler avec

(1.5) $$g(x) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\dot{x}|^2 - \int_0^{2\pi} V(x)$$

dans l'espace $H^1(S^1,\mathbb{R}^N)$. Ce qui explique le caractère plus simple sur le plan technique de ces systèmes.

1.4. Principe d'action duale. Lorsque le hamiltonien H est une *fonction convexe*, une formulation - dite duale - a été introduite par Clarke [30] et Clarke-Ekeland [32] (des idées allant dans le même sens avaient été développées au préalable dans des contextes variés, notamment par J.-P. Aubin [9], J.-P. Aubin-Ekeland [10], Auchmuty-Beals [11], Brezis-Ekeland [28], Brezis et l'auteur [20],... On trouvera dans Ekeland-Lasry [42] une présentation générale de cette méthode). Soit H^* la transformée de Legendre de H :

$$H^*(\zeta) = \sup_{z\in\mathbb{R}^{2N}} \{z.\zeta - H(z)\} .$$

Si H est strictement convexe (ce que l'on supposera pour simplifier) alors H^* est différentiable et on a (cf. Ekeland-Temam [43])

(1.6) $$(H^*)' = (H')^{-1} .$$

Soit $A : E \to E'$ l'opérateur auto-adjoint $Az = -J\dot{z}$ (on a identifié L^2 avec son dual, si bien que $E = H^{1/2} \hookrightarrow L^2 \hookrightarrow E' = H^{-1/2}$). Considérons la fonctionnelle

(1.7) $$\varphi(z) = -\frac{1}{2} \langle z,Az\rangle + \int_0^{2\pi} H^*(Az)$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire L^2 . Si z est un point critique de φ , $\varphi'(z) = 0$, on a, tout au moins formellement :

(1.8) $$Az - A(H^*)'(Az) = 0 .$$

En posant $\zeta = (H^*)'(Az)$, (1.8) à l'aide de (1.6) montre que

(1.9) $$A\zeta = H'(\zeta)$$

c'est-à-dire, ζ est une solution 2π-périodique de $(\mathcal{H})$.

Pour rendre l'argument précédent rigoureux, on pose pour $\rho \in R(A)$ (et $A^{-1} = R(A) \longrightarrow R(A)$) :

(1.10) $$\Phi(\rho) = -\frac{1}{2} \langle\rho,A^{-1}\rho\rangle + \int_0^{2\pi} H^*(\rho) .$$

Dans l'application ci-dessus, par exemple, on prendra $D(A) = H$ et $R(A) = \{z \in L^2(S^1,\mathbb{R}^{2N})\ ;\ \int_0^{2\pi} z(t) = 0\}$. On observera que dans cette formulation, la composante de la solution sur le noyau $N(A)$, apparaît comme "multiplicateur de Lagrange" associé à la contrainte $\rho \in R(A)$.

Ce "principe d'action duale" présente de multiples avantages, comme on le verra. En outre, cette approche a des applications variées dont on aura une perspective plus générale dans la revue de H. Brezis [25].

Remarque.— Lorsque la surface Σ est strictement étoilée, on peut également utiliser les deux formulations précédentes pour l'étude du problème 1. On remplace alors le hamiltonien H par $H_1 = \psi \circ j$ où $\psi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow R$ est convenablement choisie et j est la fonction de jauge associée à Σ . (Voir section 6 ci-dessous et [41, 61]).

2. Un résultat de Benci et Rabinowitz pour les fonctionnelles indéfinies

La fonctionnelle $f(z)$ décrite en (1.4) est indéfinie au sens suivant : $\forall h \in C^1(E,\mathbb{R})$ fonctionnelle faiblement continue, $f+h$ n'est bornée ni inférieurement ni supérieurement sur E . Le résultat ci-dessous a pour but d'obtenir des valeurs critiques pour ce type de fonctionnelles en exploitant une propriété des ensembles de niveaux de f . Dans cette section, E désigne un espace de Hilbert, $\|.\|$ sa norme et $(\ ,\ )$ le produit scalaire. On note $B(\rho) = \{x \in E\ ,\ \|x\| < \rho\}$, $S(\rho) = \partial B(\rho)$. On se donne E_1 sous-espace fermé de E et $E_2 = E_1^{\perp}$; $u = u_1 + u_2$ désigne la décomposition associée à $E = E_1 \oplus E_2$. Soit $f \in C^1(E,\mathbb{R})$. On supposera que f vérifie les trois hypothèses essentiellement *techniques* suivantes.

(2.1) $f(u) = \frac{1}{2}(Lu,u) + b(u)$, $Lu = L_1u_1 + L_2u_2$ avec $L_i : E_i \longrightarrow E_i$ opérateur linéaire borné auto-adjoint.

(2.2) b est faiblement continue et uniformément différentiable sur les bornés de E .

(2.3) Si (u_m) est une suite telle que $f(u_m) \leq C < +\infty$ et $f'(u_m) \longrightarrow 0$, alors (u_m) est bornée.

Cette dernière condition est une version affaiblie de la condition de compacité de Palais-Smale (cette condition notée (PS) signifie : $\forall (u_m)$ suite telle que $f(u_m)$ est bornée, $f'(u_m) \longrightarrow 0$, alors (u_m) est précompacte).

THÉORÈME 2.1 (Benci-Rabinowitz [18]).— *On suppose que* $f \in C^1(E,\mathbb{R})$ *vérifie* (2.1)-(2.3) *et la condition suivante. Il existe deux variétés hilbertiennes* S *et* $Q \subset E$, Q *à frontière, et* $\exists \alpha > \beta$ *tels que*

(2.4) $f \geq \alpha$ *sur* $S \subset v + E_1$ *(où* $v \in E_2$*)*

(2.5) $f \leq \beta < \alpha$ *sur* ∂Q

(2.6) S *"enlace"* ∂Q .

Alors f *admet une valeur critique* $c \geq \alpha$.

Il nous faut tout d'abord définir (2.6) : cette condition signifie que toute surface obtenue par déformation "admissible" de Q , sans que ∂Q ne traverse S , intersecte S . Plus précisément :

DÉFINITION 2.2.— S *enlace* ∂Q *si* $\forall \Phi \in C([0,1] \times E , E)$ *tel que* $P_2\Phi(t,u) = P_2 u - W(t,u)$ (P_2 *est la projection orthogonale sur* E_2) *avec* $W(t,.)$ *compact,* $\Phi(0,u) = u$ *et tel que* $\Phi_t(\partial Q) \cap S = \emptyset \quad \forall t \in [0,1] \quad (\Phi_t(.) = \Phi(t,.))$ *alors on a* $\Phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset \quad \forall t \in [0,1]$.

Ce théorème généralise plusieurs résultats antérieurs et notamment (à peu de choses près) le fameux :

THÉORÈME du col de montagne 2.3.— *Soit* $f \in C^1(E,\mathbb{R})$ *vérifiant la condition de Palais-Smale* (PS) *et telle que* $f(0) , f(e) < \inf\limits_{x \in S(\rho)} f(x) \equiv \alpha$ *avec* $0 < \rho < \|e\|$. *Alors* f *admet une valeur critique* $c \geq \alpha$.

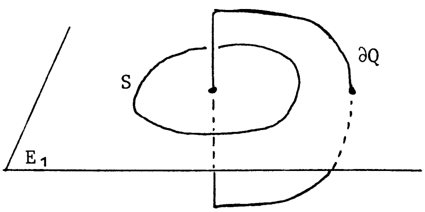
Sous cette forme simple et générale, ce résultat très utile est dû à Ambrosetti et Rabinowitz [6]. Il correspond essentiellement au cas $E_1 = E$, $E_2 = \{0\}$ et $Q = \{re , 0 \leq r \leq 1\}$ $\quad S = S(\rho)$ dans le théorème 2.1.

Donnons deux exemples typiques de cette propriété d'enlacement et qui apparaissent dans les applications aux systèmes hamiltoniens.

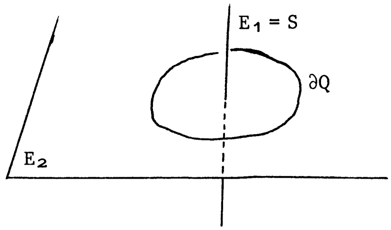
Lemme 2.4.— *Soient* $R_1 , R_2 , \rho > 0$ *tels que* $R_1 > \rho$ *et soit* $e \in S(1) \cap E_1$. *Posons* $Q = \{re / 0 \leq r \leq R_1\} \oplus (B(R_2) \cap E_2)$. *Alors* $S = S(\rho) \cap E_1$ *enlace* ∂Q .

Lemme 2.5.— *Soit* $Q = B_R \cap E_2$, $q \in Q$ *et* $S = q + E_1$. *Alors* S *enlace* ∂Q .

Ces deux lemmes se démontrent à l'aide du degré de Leray-Schauder (la difficulté étant ici que $\dim E = +\infty$).



Lemme 2.4



lemme 2.5

<u>Principe de la démonstration du Théorème</u> 2.1 : Pour éviter les détails techniques (liés au problème de compacité) écrivons la démonstration en dimension finie.

i) <u>Construction d'une valeur critique par mini-max</u> : Soit Λ la famille d'applications

$$\Lambda = \{h \in C([0,1] \times Q,E) \; ; \; h(t,x) = x , \forall t \in [0,1] \quad \forall x \in \partial Q \; ; \; h(0,x) = x \quad \forall x\} .$$

On notera $h_t = h(t,.)$. On pose enfin

(2.7) $$c = \inf_{h\in\Lambda} \max_{x\in h_1(Q)} f(x) .$$

ii) $c \geq \alpha$: En effet, dire que S enlace ∂Q implique précisément $h_1(Q) \cap S \neq \emptyset$ $\forall h \in \Lambda$ et on utilise (2.4). On vérifie incidemment que c est fini.

iii) c <u>est une valeur critique de</u> f : Ceci est essentiellement classique et découle du principe du mini-max de R. Palais [58]. Rappelons succintement le raisonnement. D'après un lemme de déformation standard (cf. [59] par exemple), si c est une valeur régulière et comme f vérifie (PS), alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $0 < \varepsilon < \alpha - \beta$, $\exists \eta \in C([0,1] \times E,E)$ tel que $\eta_0(x) = x$ $\forall x$, $\eta_t(x) = x$ si $f(x) \leq \beta < \alpha - \varepsilon$. En particulier $\eta_t(x) = x$ $\forall x \in \partial Q$. Enfin, $\eta_1 : \{f \leq c + \varepsilon\} \longrightarrow \{f \leq c - \varepsilon\}$. Choisissons $h \in \Lambda$ tel que $\max\limits_{h_1(Q)} f \leq c + \varepsilon$. On obtient une contradiction (de la définition (2.7)) en observant que $\eta_t \circ h_t$ est une déformation de la classe Λ et $\max\limits_{\eta_1 \circ h_1(Q)} f \leq c - \varepsilon$.

Remarque 2.6.— Du fait que $\dim E = +\infty$, la définition de Λ pour la construction de c est plus compliquée dans le cas général (cf. [18]).

Remarque 2.7.— Ce résultat a donné lieu à de nombreuses variantes ou améliorations. Voir V. Benci [16], W.M. Ni [54] (cf. également [56]), P.H. Rabinowitz [65, 66].

3. <u>Vibrations libres de systèmes sur-quadratiques</u>

On suppose dans ce paragraphe que H vérifie

(3.1) $$0 < H(z) \leq \vartheta H'(z).z \quad \forall z \in \mathbb{R}^{2N} , \quad |z| \geq R \quad \text{avec} \quad 0 < \vartheta < 1/2 ,$$

où ϑ et R sont des constantes. Cette condition est une manière restrictive d'écrire que H est *sur-quadratique* avec $|z| \longrightarrow +\infty$. En effet, de (3.1) on déduit

(3.2) $$H(z) \geq a|z|^{1/\vartheta} - b \quad \forall z \in \mathbb{R}^{2N}$$

avec $a , b > 0$ et $1/\vartheta > 2$. On s'intéresse au problème des vibrations libres. Le résultat ci-dessous, le plus général à ce jour, n'utilise que la condition (3.1). Il a été obtenu récemment par P.H. Rabinowitz [65].

THÉORÈME 3.1 [65].— *Soit* $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R})$ *vérifiant* (3.1). *Alors,* $\forall T > 0$ *, il existe une solution* T*-périodique de* $(\mathcal{H})$ *non constante. De plus,* $\forall R > 0$ *, il existe* z *, solution* T*-périodique telle que* $\|z\|_{L^\infty} \geq R$.

Remarques 3.2.— i) $\|z\|_{L^\infty}$ est l'*amplitude* de la solution.

ii) Ce théorème généralise plusieurs résultats antérieurs : [15, 18, 61, 62].

iii) Sur la question de l'existence de solutions de $(\mathcal{H})$ ayant T comme période *minimale*, on ne connaît que peu de choses. (Voir [4, 45B] pour des résultats partiels). Notons que la réponse à cette question ne saurait être affirmative $\forall T > 0$ dans le cas général comme le montre l'exemple suivant. Soit $h \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ tel que $0 < h(s) \leq 2\vartheta h'(s)s \quad \forall s > 0$. Choisissons $H(z) = h(|z|^2)$; h vérifie (3.1). Dans ce cas, une solution de $(\mathcal{H})$ vérifie $\dot{z} = \lambda Jz$ avec $\lambda = 2h'(\mu)$ et $\mu = |z(t)|^2$, $\forall t$. La période *minimale* est donc $T = \pi/h'(\mu)$. Ceci fournit une estimation supérieure sur la période minimale dès lors que $\inf_{\mu>0} h'(\mu) > 0$.

iv) Il n'y a pratiquement pas de résultats pour les hamiltoniens sur-quadratiques ne vérifiant *pas* (3.1).

La démonstration du Théorème 3.1 dans [65] repose sur une formulation de minimax plus élaborée que celle de la section 2. Elle utilise en particulier l'invariance de la fonctionnelle f sous l'action de S^1 , une "théorie de l'indice" (voir Fadell-Rabinowitz [44] et Fadell-Husseini-Rabinowitz [45]) pour cette action et une topologie des ensembles de niveaux de f dans le même esprit que celle du Théorème 2.1.

Suivant [56], montrons comment le Théorème 3.1 se déduit du Théorème 2.1 sous des hypothèses supplémentaires. Admettons pour la suite que H vérifie, outre (3.1)

(3.3) $$|H'(z)| \leq A|z|^p + B \quad \forall z , \qquad (A,B > 0)$$

(3.4) $$H'(0) = 0 , \quad H''(0) = 0$$

(3.5) $$H(z) > 0 , \quad H'(z) \neq 0 \quad \forall z \neq 0 .$$

Désignons par E^+ (resp. E^- ; E^o) les sous-espaces de E engendrés par les fonctions propres de $z \longmapsto -J\dot{z}$ associées aux valeurs propres $k \in \mathbb{N}^*$ (resp. $-k$, $k \in \mathbb{N}^*$; 0). $E = E^- \oplus E^o \oplus E^+$ et $\mathcal{A}(z)$ (resp. $-\mathcal{A}(z)$) est une norme équivalente à $\|z\|$ (définition (1.1)) pour $z \in E^+$ (resp. $z \in E^-$). A partir de (3.3), (3.4) et de l'inclusion compacte (Sobolev) de $E = H^{1/2} \hookrightarrow L^p(S^1, \mathbb{R}^{2N}) \quad \forall p < \infty$, on peut montrer que $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ et f vérifie la condition de Palais-Smale. Les conditions (3.3) et (3.4) s'écrivent aussi :

(3.6) $$\forall \varepsilon > 0 , \quad \exists C_\varepsilon > 0 , \quad H(z) \leq \varepsilon |z|^2 + C_\varepsilon |z|^p , \quad \forall z .$$

On en déduit

(3.7) $$\int_0^{2\pi} H(z) = o(\|z\|^2) \qquad \text{pour } z \xrightarrow{E} 0 .$$

Choisissons S et Q comme dans le lemme 2.4 en prenant $E_1 = E^+$, $E_2 = E_1^\perp = E^o \oplus E^-$. D'après ce qui précède, pour $z \in E^+$, on a $f(z) = \mathcal{A}(z) - \int_0^{2\pi} H(z) \geq \eta \|z\|^2$ pour $\|z\| \leq \rho$, avec $\eta > 0$ et donc :

(3.8) $$f \geq \alpha \quad (= \eta\rho^2) \qquad \text{sur} \quad S = \partial B(\rho) \cap E_1 .$$

Fixons à présent $v \in S(1)$. En remarquant que $\lim_{|\lambda| \to +\infty} f(\lambda v) = -\infty$ (par (3.2)) et que $f \leq 0$ sur E_2 (par (3.5)) on peut construire Q comme dans le lemme 2.4 tel que

(3.9) $\quad f \leq 0 \quad$ sur ∂Q .

On conclut que f admet une valeur critique > 0 en invoquant le Théorème 2.1.

Remarque 3.3.— Pour un hamiltonien convexe et avec des hypothèses supplémentaires Ekeland [37] a donné une autre démonstration de ce résultat. Celle-ci consiste à appliquer le Théorème du col 2.3 à la fonctionnelle duale $\varphi(\rho)$ (cf. (1.10)). On définit l'indice (resp. le coïndice) de Morse pour un point critique z de f comme la dimension maximale d'un sous-espace de E sur lequel $f''(z)$ est définie < 0 (resp. > 0). Il est immédiat de voir que tout point critique z a un indice et un coïndice infini pour f (à cause du terme $\mathcal{A}(z)$). Cependant, par le Théorème du col on trouve - en général - un point critique de coïndice 1 au regard de $\varphi(\rho)$. C'est là un des avantages de la formulation duale. Une étude systématique et rigoureuse de la façon dont changent les indices et coïndices par une transformation de Legendre reste semble-t-il à faire.

4. Formulation duale et sous-harmoniques

Considérons le système forcé

$$(\mathcal{HF}) \qquad \dot{z} = JH'_z(t,z)$$

en supposant $H \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$, T-périodique en temps. Dans cette section on s'intéresse à l'existence de sous-harmoniques de $(\mathcal{HF})$, i.e. de solutions kT-périodiques $(k \in \mathbb{N}^*)$. Toute solution T-périodique étant kT-périodique, l'objectif est, naturellement, de montrer que la période minimale est arbitrairement grande. On se placera ici dans le cadre *sous-quadratique*. Les premiers résultats sont dus à Clarke-Ekeland [32]. Depuis, Rabinowitz [64] (par une variante du Théorème de la section 2), Brezis-Coron [26] et Willem [75] ont amélioré ces résultats. Citons le récent résultat de [75] et qui est le plus général (cf. [26] pour le cas autonome).

THÉORÈME 4.1 [75].— *Soit* $H \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ *,* $H(t,z)$ *étant convexe en* z *et* 2π*-périodique en* t . *On suppose que* H *vérifie*

(4.1) $\quad H(t,z) \longrightarrow \infty \quad$ *avec* $|z| \to \infty$

(4.2) $\quad H(t,z)/|z|^2 \longrightarrow 0 \quad$ *avec* $|z| \to \infty$

(les limites étant uniformes par rapport à t*). Alors,* $\forall k \in \mathbb{N}^*$ *, il existe une solution* u_k *de* $(\mathcal{HF})$ *,* $2k\pi$*-périodique et telle que la période minimale de* u_k *ainsi que* $\|u_k\|_{L^\infty}$ *tendent vers* $+\infty$ *lorsque* $k \to +\infty$.

La démonstration de ce résultat reprend la méthode de Clarke-Ekeland [32] en utilisant le principe d'action duale exposé ci-dessus. Elle utilise également des estimations sur la période dues à Brezis-Coron [26]. Nous indiquons le schéma de cette démonstration, d'ailleurs très simple. On pose $H^*(t,u) = \sup_{z \in \mathbb{R}^{2N}} \{z.u - H(t,z)\}$ et

$$\varphi(z) = \int_0^{2\pi} H^*(t,-J\dot{z}) + \int_0^{2\pi} J\dot{z}.z \ .$$

i) Estimations : A partir de (4.2) et par dualité, il est aisé de voir que $\forall a > 0$, $\exists C = C(a) > 0$ tel que

(4.3) $$H^*(t,u) \geq a|u|^2 - C(a) \ .$$

D'autre part, on a par l'inégalité de Wirtinger (ou en développant en séries de Fourier) :

(4.4) $$\int_0^{2\pi} J\dot{z}.z \leq \int_0^{2\pi} |J\dot{z}|^2 \qquad \forall z \in H \quad (= H^1(S^1,\mathbb{R}^{2N})) \ .$$

En combinant ces deux inégalités, on a

(4.5) $$\varphi(z) \geq \int_0^{2\pi} |J\dot{z}|^2 - C \ .$$

(Nous adoptons dorénavant la convention de la constante C générique.)

ii) Existence d'un min. : Par (4.5) $\inf_{z \in H} \varphi(z) > -\infty$. Soit z_n une suite minimisante ; $\|J\dot{z}_n\|_{L^2} \leq C$. Par compacité de l'injection $H^1 \hookrightarrow H^{1/2}$ et en se restreignant aux fonctions de moyennes nulles (noter que $\varphi(z) = \varphi(z+\chi)$ $\forall \chi \in \mathbb{R}^{2N}$ constant), on peut supposer que $z_n \longrightarrow z$ dans $H^{1/2}(S^1)^{2N}$ ainsi que $z_n \rightharpoonup z$ dans $H^1(S^1)^{2N}$ (convergence faible). On peut donc passer à la limite dans le terme $\int_0^{2\pi} z_n.J\dot{z}_n$. Quant à l'autre terme, puisque H^* est convexe continue, on a

$$\int_0^{2\pi} H^*(t,z) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} H^*(t,z_n) \ .$$

Ceci montre que $\varphi(z) \leq \underline{\lim}\, \varphi(z_n) = \inf_H \varphi$; z est donc une solution du problème de minimisation.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $T = 2k\pi$. Appelons H_k l'espace des fonctions de classe H^1, $2k\pi$-périodiques et φ_k la fonctionnelle correspondante sur l'intervalle $[0,2k\pi]$. Le raisonnement précédent (il suffit de modifier (4.4)) montre que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists z_k \in H_k$ solution de $\varphi_k(z_k) = \min_{H_k} \varphi_k$.

iii) On a :

(4.6) $$c_k = \varphi_k(z_k) \leq -bk^2 + a \qquad \text{avec } a,b > 0 \ .$$

Observons tout d'abord que l'hypothèse (4.1) et la convexité de H impliquent $H(u) \geq \alpha|u| - \beta$ $\forall u \in \mathbb{R}^{2N}$, $\alpha, \beta > 0$. On en déduit par dualité

(4.7) $$H^*(\zeta) \leq \beta \qquad \forall \zeta \in \mathbb{R}^{2N} \ , \ |\zeta| < \alpha \ .$$

Prenons $z \in H$ tel que $\int_0^{2\pi} J\dot{z}.z < 0$ et tel que $0 < \|\dot{z}\|_{L^\infty} < \alpha$. On pose $\zeta_k = kz(t/k)$. Alors, $\zeta_k \in H_k$, et

(4.8) $$\varphi_k(\zeta_k) = k\int_0^{2\pi} H^*(-J\dot{z}) + k^2\int_0^{2\pi} J\dot{z}.z \ .$$

D'où $\overline{\lim}_{k\to+\infty} \varphi_k(\zeta_k)/k^2 = \int_0^{2\pi} J\dot{z}.z < 0$, ce qui implique (4.6) puisque $c_k = \varphi_k(z_k) \leq \varphi_k(\zeta_k)$.

iv) $\|z_k\|_{L^\infty} \longrightarrow \infty$ avec $k \longrightarrow \infty$: On raisonne par l'absurde. Si $\|z_k\|_{L^\infty} \leq C$, alors l'équation montre $\|z_k\|_{W^{1,\infty}} = \|z_k\|_{L^\infty} + \|\dot z_k\|_{L^\infty} \leq C$. Ceci conduit de façon évidente à $\varphi_k(z_k) \geq -Ck - C$ avec $C > 0$, ce qui contredit (4.6).

v) <u>La période minimale de</u> z_k <u>tend vers</u> $+\infty$ <u>avec</u> $k \longrightarrow +\infty$: Soit $2r\pi$ la période *minimale* de z_k ; $(r = r_k)$. Comme $k/r \in \mathbb{N}^*$, on voit que

$$c_k = \varphi_k(z_k) = (k/r)\varphi_r(z_k)$$

ce qui implique $c_k \geq (k/r)c_r$. Tant que r demeure fini, c_r est borné et, par conséquent, (4.6) montre que $\lim_{k\to+\infty} r_k = +\infty$. Ceci achève la démonstration du Théorème.

5. Théories du type Liusternik-Schnirelman pour l'action de S^1

Les démonstrations précédentes ne faisaient intervenir que les propriétés topologiques ou analytiques des ensembles de niveaux ou des minima des fonctionnelles envisagées. Pour ces problèmes, cependant, on dispose également d'une action de S^1, les translations en temps. Pour $\tau \in S^1 \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $z \in E$, on pose $(T_\tau z)(t) = z(t+\tau)$. Dans le cas des systèmes autonomes tels que $(\mathcal{H})$ ou $(\mathcal{V})$, les fonctionnelles correspondantes, $f(z)$ ou $g(x)$ sont *invariantes* sous cette action : par exemple $f(T_\tau z) = f(z)$ $\forall \tau \in S^1$. Cette invariance confère une structure beaucoup plus riche au problème. Ainsi, la démonstration générale du Théorème 3.1 dans [65] fait largement usage de cette invariance.

De même que pour les fonctionnelles paires ($\mathbb{Z}_2$-invariantes), la méthode de Liusternik et Schnirelman permet de montrer l'existence de *multiples* points critiques pour des fonctionnelles S^1-invariantes. Dans le cas $\mathbb{Z}_2$, une des pierres d'angle de la théorie est le Théorème de Borsuk-Ulam. Ce résultat s'étend à l'action de S^1 selon l'énoncé ci-dessous. Dans la suite, on identifie $\mathbb{R}^{2N} \simeq \mathbb{C}^N$. Une représentation unitaire T de S^1 dans $\mathbb{C}^k$ (appelée "action de S^1 sur S^{2k-1} ou sur $\mathbb{C}^k$ " dans la suite) sera dite "régulière" si l'espace des points fixes de T est trivial. D'après le Théorème de Peter-Weyl, cette action sur S^{2k-1} s'écrit, dans une base convenable,

$$T_\tau\zeta = (e^{i\omega_1\tau}\zeta_1,\dots,e^{i\omega_k\tau}\zeta_k) ,$$

$\zeta = (\zeta_1,\dots,\zeta_k) \in S^{2k-1}$ $(\subset \mathbb{C}^k)$, $\omega_1,\dots,\omega_k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Une application $h : S^{2k-1} \longrightarrow S^{2j-1}$ est $T-R$ équivariante si $h \circ T_\tau = R_\tau \circ h$ $\forall \tau \in S^1$.

THÉORÈME 5.1.– *Soient* T *et* R *des actions régulières de* S^1 *sur* S^{2k-1} *et* S^{2j-1} . *Si* $k > j$ *, il n'existe pas d'application continue* $h : S^{2k-1} \longrightarrow S^{2j-1}$ *qui soit* $T-R$ *équivariante.*

On a également une version plus générale, pour des actions dont les sous-espaces de points fixes ne sont pas triviaux.

THÉORÈME 5.2.– *Soient* T *et* R *des actions régulières de* S^1 *sur* $\mathbb{C}^k$ *et* $\mathbb{C}^j$. *Si* $k > j$ *,* *il n'existe par d'application continue* $h : S^{2k+a-1} \longrightarrow S^{2j+a-1}$ *vérifiant les propriétés suivantes (où* $S^{2k+a-1} = \{(\zeta,u) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{R}^a\ ,\ |\zeta|^2 + |u|^2 = 1\}$ *et* $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{C}^j \times \mathbb{C}^a$ *) :*

(5.1) $\qquad h_1(T_\vartheta\zeta,u) = R_\vartheta h_1(\zeta,u) \qquad \forall\vartheta \in S^1$

(5.2) $\qquad h_2(T_\vartheta\zeta,u) = h_2(\zeta,u) \qquad \forall\vartheta \in S^1$

(5.3) $\qquad h(0,u) = (0,u) \qquad \forall u \in \mathbb{R}^a\ ,\ \ |u| = 1\ .$

Une démonstration analytique très élégante de ce résultat utilisant le degré de Leray et Schauder est indiquée par Nirenberg [55]. Pour des résultats plus généraux, voir Fadell-Husseini-Rabinowitz [45].

En vue de l'application au paragraphe suivant et à titre d'exemple, citons le résultat suivant de [22] qui est une variante d'un Théorème de Benci [16].

THÉORÈME 5.3.— *Soit* E *un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie et soit* T *une représentation unitaire de* S^1 *dans* E *dont l'espace des points fixes,* E^o *, est de dimension finie. Soit* $f \in C^1(E,\mathbb{R})$ *une fonctionnelle invariante sous l'action de* S^1 *satisfaisant la condition de Palais-Smale et telle que* $f(0) = 0$ *. On suppose qu'il existe deux sous-espaces de* E *invariants,* V *et* W *, vérifiant les hypothèses suivantes.*

(5.1) $\qquad f \geq -C > -\infty$ *sur* V *et* $V \subset (E^o)^\perp$.

(5.2) $\qquad W \supset E^o$ *et* $\exists\rho > 0$ *tel que* $f(u) < 0 \quad \forall u \in W\ ,\ \ \|u\| = \rho$.

(5.3) $\qquad \operatorname{codim} V = p < \infty\ , \qquad \dim W = m < +\infty$.

(5.4) $\qquad x \in E^o\ ,\quad f(x) \leq 0$ *et* $f'(x) = 0$ *impliquent* $x = 0$.

Alors, f *possède au moins* $m-p$ *orbites périodiques critiques correspondant à des niveaux critiques de* f *négatifs.*

La démonstration du Théorème est détaillée dans [22]. Elle utilise en particulier une théorie de l'indice associée à une action de S^1 et qui remplace la notion de catégorie de Liusternik-Schnirelman ou de "genre" (voir, pour cette dernière [59]). Nous en indiquons ici les grandes lignes.

i) <u>Indice</u> γ_o : Soit $\Sigma(E) = \{A \subset E - \{0\}$, A fermé et invariant par T$\}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et pour une action régulière R de S^1 sur $\mathbb{C}^k$, on dit qu'une application $\varphi : A \longrightarrow E^o \times \mathbb{C}^k$, $\varphi = (\varphi^o,\psi)$ appartient à $M_k^o(A,R)$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

(5.5) $\qquad (0,0) \notin \varphi(A)$.

(5.6) $\qquad \varphi^o$ est T-invariante et ψ est $T-R$ équivariante.

(5.7) $\qquad u \in A \cap E^o \Rightarrow \varphi(u) = (u,0)$.

Enfin, on pose $\gamma^o(A) = \inf\{k \in \mathbb{N}^*\ ;\ \exists R$ action régulière de S^1 sur $\mathbb{C}^k$ telle que $M_k^o(A,R) \neq \emptyset\}$. (Voir [16]).

ii) <u>Minimax</u> : On pose $\Gamma_k = \{A \in \Sigma(E)\ ;\ \gamma^o(A) \geq k\}$ et

$$c_k = \inf_{A\in\Gamma_k} \max_{x\in A} f(x)\ .$$

iii) Estimations : Posons $\ell = \dim E^o$. Du fait que $\operatorname{codim} V = p$, on montre que $\forall A \in \Gamma_k$, $\forall k > p-\ell$, on a $A \cap V^\perp \neq \emptyset$. En effet, sinon, il existerait $\varphi : A \longrightarrow V^\perp$ (la projection orthogonale) telle que φ vérifie (5.5)-(5.7). Ceci impliquerait $\gamma^o(A) \leq \dim V^\perp = p-\ell$ et est donc absurde. Par conséquent

$$c_k \geq \inf_V f > -\infty \quad \forall k > p-\ell \,. \tag{5.8}$$

Par ailleurs, en prenant $A = \{x \in W \; ; \; \|x\| = \rho\}$, on a par le Théorème 5.2, $\gamma^o(A) = m-\ell$. En effet $i(x) = x$ vérifie $i \in M^o_{m-\ell}(A,T)$. D'autre part, le Théorème 5.2 montre que $M^o_k(A,R) = \emptyset$ si $k < m-\ell$. D'où, grâce à (5.2), $c_j < 0$ $\forall j \leq m-\ell$. On a donc :

$$-\infty < c_{p-\ell-1} \leq \ldots \leq c_{m-\ell} < 0 \,. \tag{5.9}$$

iv) Conclusion : En appliquant les techniques classiques du principe du minimax (Palais [58]), on montre que c_j est une valeur critique $\forall j$, $p < j \leq m$. Enfin, à l'aide des propriétés de γ^o, on montre que si $c_j = c_{j+1}$, alors il existe une infinité d'orbites périodiques critiques correspondantes. Ce qui permet de conclure à l'existence d'au moins $m-p$ orbites critiques distinctes.

6. Orbites périodiques sur une surface d'énergie donnée

Dans cette section, nous envisageons les problèmes du type 1 de l'introduction. Etant donnée une surface d'énergie $\Sigma = \{z \in \mathbb{R}^{2N} \; ; \; H(z) = C\}$, montrer l'existence d'orbites périodiques (multiples) de $(\mathcal{H})$ sur Σ. Le résultat le plus général et global sur cette question, pour le moment, est le suivant (voir Lasry, Mancini, Ruf et l'auteur [22]). On suppose dans la suite que Σ vérifie les conditions ci-dessous où $R = \{x \in \mathbb{R}^{2N} \; ; \; H(x) \leq C\}$.

(6.1) Σ est une variété de classe C^1 ; $\Sigma = \partial R$.

(6.2) R est compact et strictement étoilé.

Cette dernière condition signifie que l'origine peut être choisie de sorte que $x \longmapsto x/|x|$ soit un difféomorphisme de Σ sur S^{2N-1}. Pour $\rho > 0$ suffisamment petit, on sait par (6.2), que

$$T_x\Sigma \cap B_\rho = \emptyset \quad \forall x \in \Sigma \,. \tag{6.3}$$

On appelle ρ le *plus grand réel* vérifiant (6.3). Enfin, on note Ω la matrice diagonale d'ordre $2N$ $\Omega = \mathrm{dg}(\omega_1,\ldots,\omega_N,\omega_1,\ldots,\omega_N)$ où $\omega_1,\ldots,\omega_N \in \mathbb{R}^*_+$. On désigne par $\mathcal{E}$ l'ellipsoïde

$$\mathcal{E} : \{x \in \mathbb{R}^{2N} \; ; \; \tfrac{1}{2}\,\Omega x.x \leq 1\} \,.$$

THÉORÈME 6.1.— *Sous les hypothèses* (6.1) *et* (6.2), *il existe une constante positive* δ (*déterminée explicitement à partir de* $\omega_1,\ldots,\omega_N$ *et* ρ ; *voir* (6.4)-(6.7) *ci-dessous telle que si, de plus,* $\mathcal{E} \subset R \subset \sqrt{1+\delta}\,\mathcal{E}^\circ$, *alors il existe au moins* N *orbites périodi-*

ques distinctes de $(\mathcal{H})$ *sur* Σ .

Indiquons d'abord une définition de δ . Soit ℓ le nombre de classes d'équivalence de $\{\omega_1,\ldots,\omega_N\}$ dans $\mathbb{R}^*/\mathbb{Q}^*$. C'est-à-dire,
$\{\omega_1,\ldots,\omega_N\} = \{\omega_1^1,\ldots,\omega_{p_1}^1,\ldots,\omega_1^\ell,\ldots,\omega_{p_\ell}^\ell\}$ avec $\omega_j^i \in \mathbb{R}_+^*$, $p_1 + \ldots + p_\ell = N$ et

$$(6.4) \qquad \omega_j^i = n_j^i \omega^i \quad , \quad n_j^i \in \mathbb{N}^* \quad , \quad j = 1,\ldots,p_i \quad , \quad i = 1,\ldots,\ell \ ,$$

où ω^i désigne le plus grand réel vérifiant (6.4). On remarquera que $\omega^i/\omega^j \notin \mathbb{Q}$ si $i \neq j$. On pose

$$(6.5) \qquad \delta_1 = \min_{i=1,\ldots,\ell} \{\omega^i \rho^2\}$$

et

$$(6.6) \qquad \delta_2 = \min\{\frac{n}{m}\frac{\omega^i}{\omega^j} - 1 \ ; \ 1 \le n \ , \ m < 1 + (1/\delta_1) \ , \ 1 \le i \neq j \le \ell \ , \ n\omega^i > m\omega^j\} \ .$$

Comme $\omega^i/\omega^j \notin \mathbb{Q}^*$, on a $\delta_2 > 0$. Enfin, on pose

$$(6.7) \qquad \delta = \min\{\delta_1,\delta_2\} \ .$$

Remarque 6.2.— Lorsque ω^i/ω^j est voisin d'un rationnel, cette estimation devient peu précise car δ est alors voisin de 0 . Une meilleure estimation de δ est alors possible (voir [22]).

Remarque 6.3.— Sur les formules (6.4)-(6.7), on voit que δ est invariant par homothétie : $\delta(\omega_1,\ldots,\omega_N,\rho) = \delta(\mu\omega_1,\ldots,\mu\omega_N,\mu\rho) \quad \forall\mu > 0$.

Remarque 6.4.— Le Théorème 6.1 étend plusieurs résultats antérieurs et les unifie :

i) Dans le cas $\omega_1 = \ldots = \omega_N = \omega$ et si R *est convexe*, on peut choisir $\rho^2 = \omega$, dès lors que $\mathcal{E} \subset R$ puisque dans ce cas $\mathcal{E} = \overline{B}_a$ avec $a = \sqrt{1/\omega}$. On a alors $1 + \delta = 2$. Le Théorème précédent montre donc que si R est convexe et $\overline{B}_a \subset R \subset B_{a\sqrt{2}}$, alors il y a N orbites périodiques de $(\mathcal{H})$ sur Σ . Ce sont précisément les hypothèses du Théorème d'Ekeland et Lasry [14] qui a été le premier résultat *global* d'existence de N orbites (cf. également les démonstrations de Hofer [47] et Ambrosetti-Mancini [4]).

ii) De façon plus précise, dans [22], nous montrons que $\forall p \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le N$, $\exists\delta^p > 0$ tel que si $\mathcal{E} \subset R \subset \sqrt{1+\delta^p}\,\mathcal{E}^\circ$, alors il existe au moins p orbites périodiques de $(\mathcal{H})$ sur Σ . Les valeurs de δ^p sont explicitées en fonction de $\omega_1,\ldots,\omega_N$ et ρ et telles que $0 < \delta^N \le \delta^{N-1} \le \ldots \le \delta^1 = +\infty$. On retrouve en particulier le résultat d'Ambrosetti et Mancini [4] lorsque $\mathcal{E}$ est une boule.

iii) Comme, dans ce qui précède, $\delta^1 = +\infty$, on obtient l'existence d'une orbite périodique sur Σ sous les seules hypothèses (6.1) et (6.2). Cette méthode permet donc de retrouver également les résultats de Rabinowitz [62] et A. Weinstein [72] : il existe au moins une orbite périodique sur Σ dès lors que Σ est une variété C^1 strictement étoilée.

iv) Soit $H \in C^2$, $H(0) = 0$, $H'(0)$, $H''(0)$ définie positive. Pour $\varepsilon > 0$, après une transformation canonique, il est aisé de montrer que la surface $\{H = \varepsilon\}$ vérifie les hypothèses du Théorème 6.1. On retrouve ainsi le théorème local de A. Weinstein [71] : sous ces conditions, pour $\varepsilon > 0$, $\{H = \varepsilon\}$ contient N orbites périodiques distinctes. Notons qu'une version plus générale due à J. Moser [53] permet d'affaiblir l'hypothèse que $H''(0)$ soit définie positive. □

Indiquons à présent le principe de la démonstration.

i) <u>Redéfinition du hamiltonien et formulation duale</u> : On suppose, dans un premier temps $\ell = 1$ et on note $\omega = \omega^1$. On a donc $\delta = \delta_1 = \omega\rho^2$. Soit $j(x)$ la fonction de jauge associée à Σ : $j(x) = \inf\{\lambda > 0\,, x \in \lambda R\}$. Soit $\psi \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ vérifiant $\psi(0) = 0$, $\psi''(s) < 0$, $\sup\{s^2|\psi''(s)|\,;\, s \in \mathbb{R}_+\} < \infty$. Notons que $\exists \beta < \sqrt{1+\delta}$ tel que $R \subset \beta\mathcal{E}$. On suppose que ψ vérifie également

$$(6.8) \qquad (1/\omega) - \varepsilon \leq \varphi'(\infty) \equiv b < (1/\omega) < \beta/\omega < \ldots < a < \varphi'(0) < (\beta/\omega) + \varepsilon\ .$$

$\varepsilon > 0$ est suffisamment petit. Il existe $K > 0$ tel que la fonction $G(x) = \psi(j(x)^2) + \frac{K}{2}(x)^2$ soit strictement convexe sur $\mathbb{R}^{2N}$. Enfin, pour $u \in H = H^1(S^1, \mathbb{R}^{2N})$, on pose

$$\varphi(u) = \int_0^{2\pi} (J\dot{u} - Ku).u + G^*(-J\dot{u} + Ku)$$

où G^* désigne la transformée de Legendre de G. En posant $Au = -J\dot{u} + Ku$, les orbites critiques de f vérifient, comme nous l'avons vu dans la section 1, $Au = A(G^*)'(Au)$ soit $Au = G'(u)$, ou encore :

$$(6.9) \qquad -J\dot{u} = \psi'(j^2(u))(j^2)'(u)\ .$$

On a - puisque le hamiltonien est conservé - $j^2(u) =$ constante et donc $-J\dot{u} = \gamma(j^2)'(u)$ avec $\gamma > 0$ constante. Posant $z(t) = u(t/\gamma)$, on obtient une solution périodique de l'équation

$$(6.10) \qquad -J\dot{z} = (j^2)'(z)\ .$$

Comme $(j^2)'$ est homogène de degré 1, en remplaçant z par λz, on peut toujours supposer que $z(t) \in \Sigma$, $\forall t$. Enfin, comme $\Sigma = \{j = 1\}$, il est classique que (6.10) et $(\mathcal{H})$ admettent - à une reparamétrisation du temps près - les mêmes orbites périodiques sur Σ (cf. [62] ou [41] ; ceci est évident, en observant qu'il existe une fonction $\alpha : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que $H'(z) = \alpha(z)(j^2)'(z) \quad \forall z \in \Sigma$).

ii) <u>Etude de la fonctionnelle</u> φ : Observons tout d'abord que $\mathcal{E} \subset R \subset \beta\mathcal{E}$ se traduit par

$$(6.11) \qquad \frac{1}{2\beta^2}\,\Omega u.u \leq j(u)^2 \leq \frac{1}{2}\,\Omega u.u\ , \qquad \forall u \in \mathbb{R}^{2N}\ .$$

Identifions $\mathbb{R}^{2N}$ et $\mathbb{C}^N$ de sorte que $u = (u_1, \ldots, u_N) \in \mathbb{C}^N$ et $\Omega u.u = \sum_{i=1}^{N} \omega_i |u_i|^2$. De l'hypothèse (6.11), de la condition sur ψ et par dualité, on obtient les estimations, pour $0 < b = \varphi'(\infty) < a < \varphi'(0)$:

(6.12) $\qquad G^*(z) > \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(b\omega_k + K)^{-1}|z_k|^2 - C \,, \qquad \forall z \in \mathbb{C}^N$

(6.13) $\qquad G^*(z) \le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(\frac{a}{\beta}\,\omega_k + K)^{-1}|z_k|^2 \,, \qquad \forall z \in \mathbb{C}^N \,,\ \|z\| < \delta \,,$

avec $\delta > 0$.

En notant $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N)$ la base canonique de $\mathbb{C}^N$, et $u = \sum_{\substack{1\le k\le N \\ n\in\mathbb{Z}}} u_{kn}e^{int}\varepsilon_k$ le développement en séries de Fourier de u , on déduit de (6.12) et (6.13) les estimations suivantes pour f :

(6.14) $\qquad f(u) \ge \frac{1}{2}\,\Sigma(n+K)[(b\omega_k+K)^{-1}(n+K) - 1]|u_{nk}|^2 - C$

(6.15) $\qquad f(u) \le \frac{1}{2}\,\Sigma(n+K)[(\frac{a}{\beta}\,\omega_k+K)^{-1}(n+K) - 1]|u_{nk}|^2 \,, \quad \|u\|_H < \delta \,.$

Posons alors $V^{\perp} = \mathrm{Vect}\{e^{int}\varepsilon_k \,;\, -K < n < b\omega_k\}$ et $W = \mathrm{Vect}\{e^{int}\varepsilon_k \,;\, -K < n < \frac{a}{\beta}\,\omega_k\}$. De (6.14), on a immédiatement $\inf_V f > -\infty$ et (6.15) montre que pour $u \in W$, $\|u\| = \rho$ ($\rho > 0$ petit), $f(u) < 0$.

On peut donc appliquer le Théorème 5.3. f possède au moins j orbites périodiques critiques distinctes, avec $j = \dim W - \dim V^{\perp}$. Montrons que $j \ge N$. Une estimation inférieure de j est fournie par

(6.16) $\qquad j \ge \mathrm{Card}\{(n,k) : b\omega_k < n < \frac{a}{\beta}\omega_k\}$.

Choisissons

(6.17) $\qquad b = \varphi'(\infty) = \frac{1}{\omega}(1-\varepsilon) \quad$ et $\quad \frac{\beta}{\omega} < a < \varphi'(0) < \frac{\beta}{\omega} + \varepsilon$

avec $\varepsilon > 0$ petit. Comme $\omega_k = n_k\omega$, on a d'après (6.16) $j \ge N$.

iii) Conclusion : On a donc montré l'existence de N orbites distinctes de f . Il faut maintenant s'assurer que les N solutions de $(\mathcal{H})$ sur Σ auxquelles ces orbites conduisent sont bien elles-aussi distinctes. (On notera que pour l'existence d'*une* solution non triviale au moins, aucune restriction n'est nécessaire : β est quelconque.) Ceci est montré à l'aide d'estimations serrées sur les *périodes minimales* des orbites ainsi obtenues, à l'aide des contraintes (6.17).

Enfin, dans le cas général, on conclut en traitant séparément chacune des familles $\omega_1^i,\dots,\omega_{p_j}^i$ pour lesquelles on montre l'existence de p_i orbites périodiques. Celles-ci ne se mélangent pas grâce à la condition $\delta \le \delta_2$.

Remarque 6.5.— Une autre démonstration du même résultat est indiquée dans [22]. Celle-ci repose sur le principe de Maupertuis indiqué au § 1 ci-dessus et sur un théorème de points critiques "avec contraintes" abstrait.

7. Hamiltoniens asymptotiquement quadratiques et théorie de Morse

Dans le panorama précédent du problème à période fixée, n'ont pas été abordés les cas limites des hamiltoniens asymptotiquement quadratiques, i.e. $H'(z) \sim Az$ lorsque $|z| \longrightarrow \infty$, A étant une matrice symétrique. Les résultats sont évidemment de nature différente. Amann et Zehnder [2] les premiers ont obtenu des résultats basés sur l'indice homotopique de Conley [33]. Ceux-ci ont été généralisés par K.C. Chang [29] dont la démonstration élégante n'utilise que les inégalités de Morse. Le résultat le plus récent et le plus général dans cette voie est dû à Conley et Zehnder [34]. La méthode de Conley et Zehnder utilise une généralisation de la théorie de Morse due à Conley [33]. Nous renvoyons le lecteur à [34], la description précise de ces résultats ici, serait trop longue.

Indiquons pour finir que Conley et Zehnder [35] viennent d'annoncer la résolution de la conjecture d'Arnold à l'aide de solutions périodiques de systèmes hamiltoniens sur la variété symplectique $T^{2N} = \mathbb{R}^{2N}/\mathbb{Z}^{2N}$. Leur démonstration est basée sur le résultat suivant concernant $(\mathcal{HF})$ sur T^{2N} :

THÉORÈME 7.1.— *Soit* $H \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N})$ *périodique, de période* 1 *en chacune des variables. Alors* $(\mathcal{HF})$ *possède au moins* $2N+1$ *solutions périodiques de période* 1 .

8. Vibrations forcées pour les systèmes sur-quadratiques

Les méthodes développées précédemment ne s'appliquent pas en général au système $(\mathcal{HF})$ avec un hamiltonien sur-quadratique. Par exemple, pour le système forcé

(8.1) $$-J\dot{z} = H'(z) + f(t)$$

la fonctionnelle $f(z) = \frac{1}{2} \langle -J\dot{z}, z\rangle - \int_0^{2\pi} H(z) - \langle f,z\rangle$ $\left(\langle u,v\rangle = \int_0^{2\pi} u.v\right)$ n'est *pas* invariante sous l'action de S^1 à cause du dernier terme. Les premiers résultats pour ce problème ont été obténus par I. Ekeland [38, 38B] et étaient de nature perturbative. (Existence d'au moins *une* solution périodique de (8.1) pour $\|f\|_{L^1}$ suffisamment petit.) Rabinowitz [64] et Benci [16] fournissent également des résultats pour $(\mathcal{HF})$ mais qui ne s'appliquent pas à (8.1).

Le seul résultat général concernant (8.1) dans le cas sur-quadratique est dû à A. Bahri et l'auteur [13].

THÉORÈME 8.1.— *Soit* $H \in C^2(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ *vérifiant* (3.1) *et*

(8.2) $$a|z|^{p+1} - b \leq H(z) \leq a'|z|^{q+1} + b' , \qquad 1 < p \leq q < 2p+1$$

où a, b, a', b' *sont des constantes. Alors,* $\forall f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2N})$ *,* T*-périodique, le système* (8.1) *admet une infinité de solutions* T*-périodiques. De plus, en désignant ces solutions par* $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$*, on a* $\|z_k\|_{L^\infty} \longrightarrow +\infty$ *avec* $k \to \infty$.

La démonstration est détaillée dans [13]. Elle fait appel au calcul de certains groupes d'homotopie des ensembles de niveaux de f , à la théorie de Morse et à des résultat de Marino et Prodi [51] et A. Bahri [12].

Un résultat plus général a enfin été obtenu pour $(\mathcal{VF})$:

THÉORÈME 8.2.— *Soit* $V \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ *, vérifiant* $0 < V(x) \leq \vartheta V'(x).x \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$, $|x| \geq R$ *avec* $0 < \vartheta < 1/2$ *et* $R > 0$. *Alors,* $\forall f \in L^2(S^1, \mathbb{R}^N)$ *, le système* $(\mathcal{VF})$ *admet* *une infinité de solutions* 2π*-périodiques dont l'amplitude est non bornée.*

Pour la démonstration, voir [14].

9. Quelques conjectures et compléments

9.1. Orbites périodiques sur une surface donnée. Le résultat du paragraphe 6 ne devrait avoir qu'un caractère intermédiaire :

CONJECTURE 1.— *Sous les hypothèses* (6.1) *et* (6.2), $(\mathcal{H})$ *admet au moins* N *orbites périodiques distinctes sur* Σ .

Dans une situation plus générale, la conjecture suivante a été formulée par A. Weinstein [74].

CONJECTURE 2 (Weinstein).— *Soit* (P,Ω) *une variété symplectique et* $S \subset P$ *une hypersurface munie d'une structure de contact telle que* $H^1(S;\mathbb{R}) = 0$. *Tout champ de contact sur* S *admet une orbite périodique.*

9.2. Systèmes conservatifs. Une généralisation naturelle des systèmes hamiltoniens est celle de système conservatif : un système

$$(9.1) \qquad \dot{x} = \varphi(x)$$

avec $\varphi \in C(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R}^{2N})$ est conservatif si $\exists G \in C^1(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R})$, $\varphi(x).G'(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^{2N}$. $G(x(t))$ est alors conservé le long des trajectoires de (9.1) mais ce problème ne se déduit pas, à la différence d'un système hamiltonien, de principes variationnels. Il faut donc utiliser des approches tout à fait différentes. Des résultats locaux ont été obtenus pour ces systèmes par Liapunov [49] et Moser [53]. Des résultats de nature plus globale concernant l'existence d'orbites périodiques de (9.1) sur une surface $\{G = C\}$ sont obtenus dans Berestycki-Lasry [21] (voir également [19]) par une méthode basée sur la théorie de l'homotopie équivariante [1)]

Rappelons la conjecture de Seifert concernant le cas $G(x) = |x|^2$.

CONJECTURE 3 (Seifert).— *Soit* $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R}^{2N})$ *vérifiant* $\varphi(x).x = 0$ *et* $\varphi(x).Jx \neq 0$ $\forall x \in S^{2N-1}$. *Alors* (9.1) *admet au moins une orbite périodique sur* S^1 .

Avec l'hypothèse supplémentaire $|\varphi(x) - J(x)| < \frac{1}{3}|x|$ $\forall x \in S^{2N-1}$, ce résultat est démontré dans [21].

9.3. Vibrations forcées de systèmes sur-quadratiques. L'hypothèse (8.2) dans le Théorème 8.1 ne semble avoir qu'un caractère technique.

CONJECTURE 4 [13].— *Soit* $H \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R})$, $H(t+T,x) = H(t,x)$ *et* H *vérifiant*

$$0 < H(t,x) \le \vartheta H'_x(t,x).x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{2N}, \quad |x| \ge R \ ; \quad \forall t \in \mathbb{R} ,$$

où $0 < \vartheta < 1/2$ *et* $R > 0$. *Alors* $(\mathcal{H}\mathcal{F})$ *admet une infinité de solutions périodiques dont la période est non bornée.*

---

1) et un résultat de Husseini [47B].

9.4. Périodes minimales pour des systèmes autonomes. Très peu de résultats sont connus sur cette question dans le contexte sur-quadratique (voir cependant [5] et [45B]). Dans [61], a été formulée la

CONJECTURE 5 (Rabinowitz).— *Soit* $H \in C^2(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R})$, H *vérifiant* (3.1), $H(0) = 0$, $H'(0) = 0$, $H''(0) = 0$ *et* $H \geq 0$. *Alors,* $\forall T > 0$, $(\mathcal{H})$ *admet une solution* T-*périodique dont* T *est la période minimale.*

Plus généralement, on peut envisager la

CONJECTURE 6.— *Soit* $H \in C^2(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R})$ *vérifiant* (3.1). *Alors* $\exists T^* > 0$ *tel que* $\forall T \leq T^*$, $(\mathcal{H})$ *admet une solution* T-*périodique de période minimale* T .

De même, dans le cas sous-quadratique :

CONJECTURE 7.— *Soit* $H \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N},\mathbb{R})$ *vérifiant les hypothèses du Théorème* 4.1. *Alors* $\exists k_* \geq 0$ *tel que* $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_*$, $(\mathcal{HF})$ *admette une solution ayant la période minimale* $2k\pi$.[1)]

Pour conclure, indiquons que l'on trouvera dans Ekeland [39, 40] une approche nouvelle pour les problèmes perturbatifs dans les systèmes hamiltoniens (problème de type 3 dans l'introduction). Enfin, de nombreux résultats concernant l'existence de solutions périodiques dans l'équation des ondes à une dimension ont été démontrés ces dernières années. Il s'agit d'un exemple de système hamiltonien à une infinité de degrés de liberté. Voir Rabinowitz [60], Brezis-Coron-Nirenberg [27] et Brezis [25].

TABLE DES MATIÈRES

1) Dans le cas autonome, ce problème est résolu par Brezis-Coron [26] qui démontrent : Soit $H \in C^1(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R})$, convexe et vérifiant (4.1), (4.2) - H ne dépendant pas de t - alors $\exists T^* > 0$ tel que $\forall T \geq T^*$, $(\mathcal{H})$ admet une solution ayant la période minimale T .

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. ABRAHAM, J.E. MARSDEN - Foundations of Mechanics, 2nd edition, Benjamin, New York (1967).

[2] H. AMANN, E. ZEHNDER - *Nontrivial solutions for a class of nonresonance problems and applications to nonlinear differential equations*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa Serie IV, 7(1980), 539-603.

[3] H. AMANN, E. ZEHNDER - *Periodic solutions of asymptotically linear hamiltonian systems*, Manuscripta Math. 32(1980), 149-189.

[4] A. AMBROSETTI, G. MANCINI - *On a theorem by Ekeland and Lasry concerning the number of periodic hamiltonian trajectories*, J. Diff. Equ. 43(1981), 1-6.

[5] A. AMBROSETTI, G. MANCINI - *Solutions of minimal period for a class of convex hamiltonian systems*, Preprint.

[6] A. AMBROSETTI, P.H. RABINOWITZ - *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14(1973), 349-381.

[7] V.I. ARNOLD - Méthodes mathématiques de la mécanique classique, Editions Mir, Moscou (1976).

[8] V.I. ARNOLD, A. AVEZ - Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier-Villars, Paris (1967).

[9] J.-P. AUBIN - *Variational principles for differential equations of elliptic, parabolic and hyperbolic type*, Cahiers CEREMADE n° 7912, Univ. Paris-Dauphine.

[10] J.-P. AUBIN, I. EKELAND - *Second order evolution equations associated with convex hamiltonians*, Bull. Canad. Math. (1979).

[11] J.F.G. AUCHMUTY, R. BEALS - *Variational solutions of some nonlinear free boundary problems*, Arch. Ration. Mech. Anal. 43(1971), 255-271.

[12] A. BAHRI - *Groupes d'homotopie des ensembles de niveaux pour certaines fonctionnelles à gradient Fredholm*, à paraître.

[13] A. BAHRI, H. BERESTYCKI - *Forced vibrations of superquadratic hamiltonian systems*, Acta Math. (1983), sous presse.

[14] A. BAHRI, H. BERESTYCKI - *Existence of forced oscillations for some nonlinear differential equations*, Comm. Pure Applied Math. (1983), sous presse.

[15] V. BENCI - *Some critical point theorems and applications*, Comm. Pure Applied Math. 33(1980), 147-172.

[16] V. BENCI - *On critical point theory for indefinite functionals in the presence of symmetries*, Trans. Amer. Math. Soc. 274(1982), 533-572.

[17] V. BENCI - *A geometrical index for the group* S^1 *and some applications to the research of periodic solutions of* O.D.E.'s, Comm. Pure Appl. Math. 34(1981), 393-432.

[18] V. BENCI, P.H. RABINOWITZ - *Critical point theorems for indefinite functionals*, Invent. Math. 52(1979), 241-273.

[19] H. BERESTYCKI - *Orbites périodiques de systèmes conservatifs*, Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz, Exposé n° XXIV, 1981-82, Ec. Polytechnique, Palaiseau.

[20] H. BERESTYCKI, H. BREZIS - *On a free boundary problem arising in plasma physics*, Nonlinear Analysis, T.M.A. 4(1980), 415-436.

[21] H. BERESTYCKI, J.M. LASRY - *A topological method for the existence of periodic orbits to conservative systems*, Preprint.

[22] H. BERESTYCKI, J.M. LASRY, G. MANCINI, B. RUF - *Existence of multiple periodic orbits on star-shaped hamiltonian surfaces*, Preprint.

[23] M.S. BERGER - Nonlinearity and functional analysis, Academic Press, New York (1987).

[24] M.S. BERGER - *On a family of periodic solutions for hamiltonian systems*, J. Diff. Equ. 10(1971), 324-335.

[25] H. BREZIS - *Periodic solutions of nonlinear vibrating strings and duality principle*, Bull. A.M.S., à paraître.

[26] H. BREZIS, J.M. CORON - *Periodic solutions of nonlinear wave equations and hamiltonian systems*, Amer. J. of Math. 103(1980), 559-570.

[27] H. BREZIS, J.M. CORON, L. NIRENBERG - *Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz*, Comm. Pure Appl. Math. 33(1980), 667-684.

[28] H. BREZIS, I. EKELAND - *Un principe variationnel associé à certaines équations paraboliques*, C.R.A.S. 282(1976), 971-974 et 1197-1198.

[29] K.C. CHANG - *Solutions of asymptotically linear operator equations via Morse theory*, Comm. Pure Appl. Math. 34(1981), 639-712.

[30] F. CLARKE - *A classical variational principle for periodic hamiltonian trajectories*, Proc. Amer. Math. Soc. 76(1979), 186-188.

[31] F. CLARKE - *Periodic solutions to hamiltonian inclusions*, J. Diff. Equ. 40(1981), 1-6.

[32] F. CLARKE, I. EKELAND - *Hamiltonian trajectories having prescribed minimal period*, Comm. Pure Appl. Math. 33(1980), 103-116.

[33] C. CONLEY - *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Reg. Conf. ser. in Math. n° 38, Amer. Math. Soc. Providence R.I. (1978).

[34] C. CONLEY, E. ZEHNDER - *Morse type index theory for flows and periodic solutions for hamiltonian equations*, à paraître.

[35] C. CONLEY, E. ZEHNDER - *The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V.I. Arnold*, Version préliminaire.

[36] N. DESOLNEUX-MOULIS - *Orbites périodiques des systèmes hamiltoniens autonomes*, Sém. Bourbaki février 1980, exposé n° 552, Lect. Notes in Math. n° 842, Springer-Verlag (1981).

[37] I. EKELAND - *Periodic solutions of hamiltonian equations and a theorem of P. Rabinowitz*, J. Diff. Equ. 34(1979), 523-534.

[38] I. EKELAND - *Oscillations de systèmes hamiltoniens non linéaires III*, Bull. Soc. Math. France 109(1981), 297-330.

[38B] I. EKELAND - *Forced oscillations of nonlinear hamiltonian systems II*, Advances Math. 7A(1981), 345-360.

[39] I. EKELAND - *A perturbation theory near convex hamiltonian systems*, Cahiers CEREMADE n° 8226, Univ. Paris-Dauphine, à paraître.

[40] I. EKELAND - *La théorie des perturbations au voisinage des systèmes hamiltoniens convexes*, Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz décembre 1981, Exposé n° 7, Ec. Polytechnique, Palaiseau.

[41] I. EKELAND, J.M. LASRY - *On the number of periodic trajectories for a hamiltonian flow on a convex energy surface*, Ann. Math. 112(1980), 283-319.

[42] I. EKELAND, J.M. LASRY - *Problèmes variationnels non convexes en dualité*, C.R.A.S. Paris, Série A 291(1980), 493-496.

[43] I. EKELAND, R. TEMAM - Convex analysis and variational problems, North Holland, New York (1976).

[44] R.E. FADELL, P.H. RABINOWITZ - *Generalized cohomological index theories for Lie group actions with an application to bifurcation questions for hamiltonian systems*, Invent. Math. 45(1978), 139-174.

[45] E.R. FADELL, S. HUSSEINI, P.H. RABINOWITZ - *Borsuk-Ulam theorem for arbitrary* S^1*-actions and applications*, MRC Report 2301, Madison Wis. USA.

[45B] M. GIRARDI, M. MATZEU - *Some results on solutions of minimal period to superquadratic hamiltonian systems*, Preprint.

[46] W.B. GORDON - *A theorem on the existence of periodic solutions to hamiltonian systems with convex potentials*, J. Diff. Equ. 10(1971), 324-335.

[47] H. HOFER - *A simple proof for a result of I. Ekeland and J.M. Lasry concerning the number of periodic hamiltonian trajectories on a prescribed energy surface*, Preprint.

[47B] S.Y. HUSSEINI - *The equivariant* J*-homomorphism for arbitrary* S^1*-action*, Preprint.

[48] L. LIUSTERNIK, L. SCHNIRELMAN - Méthodes topologiques dans les problèmes variationnals, Hermann, Paris (1934).

[49] A. LIAPUNOV - *Problème général de la stabilité des mouvements*, Ann. Fac. Sci. Toulouse 2(1907), 203-474.

[50] J.L. LIONS, E. MAGENES - Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod, Paris (1968).

[51] A. MARINO, G. PRODI - *Metodi perturbativi nella teoria di Morse*, Boll. U.M.I. 11(1975), 1-32.

[52] J. MAWIN - *Contractive mappings and periodically perturbed conservative systems*, Arch. Math. 12(1976), 67-74.

[53] J. MOSER - *Periodic orbits near an equilibrium and a theorem by A. Weinstein*, Comm. Pure Appl. Math. 29(1976), 727-747.

[54] W.M. NI - *Some minimax principles and their applications in nonlinear elliptic equations*, J. Analyses Math. 37(1980), 248-275.

[55] L. NIRENBERG - *Comments on nonlinear problems*, Proceed. Conf. Catania (Italie), septembre 1981.

[56] L. NIRENBERG - *Variational and topological methods in nonlinear problems*, Bull. Amer. Math. Soc. 4(1981), 267-302.

[57] H. POINCARE - Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Gauthier-Villars, Paris (1982).

[58] R. PALAIS - *Critical point theory and the minimax principle*, Proc. Symp. Pure Math. vol. 15, Amer. Math. Soc. Providence R.I. (1970), 185-212.

[59] P.H. RABINOWITZ - *Variational methods for nonlinear eigenvalue problems*, (CIME, Varenna 1974), Ediz. Cremonese, Rome (1974).

[60] P.H. RABINOWITZ - *Free vibrations for a semi-linear wave equation*, Comm. Pure Appl. Math. 31(1978), 31-68.

[61] P.H. RABINOWITZ - *Periodic solutions of hamiltonian systems*, Comm. Pure Appl. Math. 31(1978), 157-184.

[62] P.H. RABINOWITZ - *A variational method for finding periodic solutions of differential equations*, Nonlinear evolution equations (M.G. Crandall Ed.) Academic Press, New York (1978), 225-251.

[63] P.H. RABINOWITZ - *Periodic solutions of hamiltonian systems : A survey*, MRC Techn. Report n° 2154, Univ. Wisconsin-Madison (1980).

[64] P.H. RABINOWITZ - *Subharmonic solutions of hamiltonian systems*, Comm. Pure Math. 33(1980), 609-633.

[65] P.H. RABINOWITZ - *Periodic solutions of large norm of hamiltonian systems*, Preprint.

[66] P.H. RABINOWITZ - *Multiple critical points of perturbed symmetric functionals*, Trans. Amer. Math. Soc. 272(1982), 753-769.

[67] H. SEIFERT - *Periodischer bewegungen mechanischer systeme*, Math. Zeit. 51(1948), 197-216.

[68] C.L. SIEGEL, J. MOSER - Lectures on celestial mechanics, Springer-Verlag, New York (1971) ; Grundlehren Math. vol. 187.

[69] M. SCHATZMAN - *A class of nonlinear differential equations of second order in time*, Nonlinear Analysis, T.M.A. 2(1978), 355-373.

[70] A. WEINSTEIN - *Lagragian submanifolds and hamiltonian systems*, Ann. Math. 98 (1973), 377-410.

[71] A. WEINSTEIN - *Normal modes for nonlinear hamiltonian systems*, Invent. Math. 20 (1973), 47-57.

[72] A. WEINSTEIN - *Periodic orbits for convex hamiltonian systems*, Ann. Math. 108 (1987), 507-518.

[73] A. WEINSTEIN - *Bifurcations and Hamilton's principle*, Math. Zeit. 159(1978), 235-248.

[74] A. WEINSTEIN - *On the hypotheses of Rabinowitz' periodic orbit theorems*, J. Diff. Equ. 33(1979), 353-358.

[75] M. WILLEM - *Subharmonic oscillations of convex hamiltonian systems*, Preprint.

[76] M. WILLEM - *Subharmonic oscillations of nonlinear systems*, Proceed. Conf. "Equa. diff. 82", Würzburg, à paraître.

Henri BERESTYCKI

C.N.R.S./Université P. et M. Curie
Laboratoire d'Analyse Numérique
Tour 55-65 - 5e étage
4 place Jussieu
F-75230 PARIS CEDEX 05