JEAN MARTINET

Normalisation des champs de vecteurs holomorphes

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. nº 564, p. 55-70

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1980-1981__23__55_0>

Séminaire BOURBAKI
33e année, 1980/81, n° 564

NORMALISATION DES CHAMPS DE VECTEURS HOLOMORPHES

(d'après A.-D. Brjuno [2])

par Jean MARTINET

1. Définitions et énoncé des problèmes

Soit $\mathcal{O}_n$ (resp. $\hat{\mathcal{O}}_n$) l'anneau local des germes en $0 \in \mathbb{C}^n$ de fonctions holomorphes de n variables complexes $x_1,\ldots,x_n$ (resp. des séries formelles en n variables) ; on désigne par $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{O}_n$ (resp. $\hat{\mathcal{M}}_n \subset \hat{\mathcal{O}}_n$) l'idéal maximal, et enfin par $\mathfrak{X}_n$ (resp. $\hat{\mathfrak{X}}_n$) le module des germes de champs de vecteurs holomorphes en n variables (resp. de champs de vecteurs formels), nuls en 0 .

1.1. Décomposition de Jordan d'un champ formel

Soit $X \in \hat{\mathfrak{X}}_n$; ce champ induit une dérivation de $\hat{\mathcal{O}}_n$; comme il est nul à l'origine, cette dérivation laisse stable chaque puissance de l'idéal maximal $\hat{\mathcal{M}}_n$. Elle induit donc, pour tout entier $k \geq 1$, une dérivation X^k de l'algèbre J^k_n des k-jets d'éléments de $\hat{\mathcal{O}}_n$; cette dérivation admet une décomposition de Jordan :

$$X^k = X^k_S + X^k_N$$

où X^k_S et X^k_N sont respectivement les parties semi-simple et nilpotente de X^k ; ce sont des dérivations de J^k_n commutant, c'est-à-dire des k-jets de champs de vecteurs dont le crochet de Lie est nul.

Les décompositions aux divers ordres sont compatibles par troncage, de sorte qu'on obtient, quand $k \longrightarrow \infty$, une décomposition canonique :

$$X = X_S + X_N \quad \text{où} \quad X_S\,,\ X_N \in \hat{\mathfrak{X}}_n \quad \text{et} \quad [X_S, X_N] = 0\ .$$

Cette décomposition est appelée décomposition de Jordan du champ X ; le champ X_S est la partie semi-simple de X , et X_N la partie nilpotente.

Cette décomposition est naturelle : si $X \in \hat{\mathfrak{X}}_n$, et si φ est un difféomorphisme local (formel) de $\mathbb{C}^n$ en 0 , alors $\varphi_*(X_S) + \varphi_*(X_N)$ est la décomposition de Jordan de $\varphi_*(X)$.

Remarque 1.- L'espace $\hat{\mathfrak{X}}_n$ est une algèbre de Lie de dimension infinie, limite projective des algèbres de Lie de dimension finie $\mathfrak{X}^k_n$ (k-jets de champs nuls en 0). La décomposition de Jordan de $X \in \hat{\mathfrak{X}}_n$ est la limite des décompositions de Jordan des k-jets de X dans les $\mathcal{X}_n^k$.

Remarque 2.- Le caractère naturel de la décomposition de Jordan entraîne que tout objet invariant par un champ X est invariant par X_S et X_N .

Un champ X sera dit semi-simple (resp. nilpotent) si $X_N = 0$ (resp. $X_S = 0$).

1.2. Normalisation d'un champ formel

PROPOSITION 1.- Tout champ semi-simple $X \in \hat{\mathcal{X}}_n$ est isomorphe, via un difféomorphisme formel, à un champ linéaire "diagonal" :

$$S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Les nombres $\lambda_i \in \mathbb{C}$ sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de X en 0 .

Il suffit, pour le voir, de construire un système de coordonnées formelles $\{y_1,\ldots,y_n\}$ tel que $X.y_i = \lambda_i y_i$, c'est-à-dire que les fonctions y_i soient des fonctions propres de la dérivation X . Elles se construisent facilement par récurrence sur l'ordre.

DÉFINITION.- On appelle forme normale tout champ $X \in \hat{\mathcal{X}}_n$ dont la partie semi-simple est, dans les coordonnées canoniques de $\mathbb{C}^n$, linéaire diagonale ; soit : $X = X_S + X_N$ avec $X_S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et X_N nilpotent, avec $[X_S, X_N] = 0$.

Remarque.- Un champ est nilpotent si et seulement si sa matrice jacobienne en 0 est une matrice nilpotente.

Compte tenu de la proposition 1, tout champ $X \in \hat{\mathcal{X}}_n$ est isomorphe à une forme normale : il suffit de mettre sa partie semi-simple sous forme linéaire diagonale. Cependant, un champ X n'a pas, en général, une forme normale bien déterminée ; seul X_S est unique ; X_N est déterminé modulo l'action du groupe des difféomorphismes formels laissant X_S invariant.

1.3. Problèmes

Soit $X \in \mathcal{X}_n$ un germe de champ de vecteur holomorphe. Sa décomposition de Jordan (formelle bien sûr) $X = X_S + X_N$ est-elle convergente ?

Si oui, le champ est-il normalisable par une transformation holomorphe ? Cette question se réduit évidemment à la linéarisation des champs holomorphes et formellement semi-simples.

Voici une question plus précise, à laquelle, comme nous le verrons dans la suite, Brjuno apporte une réponse presque complète :

Soit $X_o \in \mathcal{X}_n$ une forme normale holomorphe. A quelles conditions sur X_o a-t-on la propriété suivante : "tout germe $X \in \mathcal{X}_n$, formellement isomorphe à X_o , lui est holomorphiquement conjugué" ?

1.4. Remarques générales

1) Le problème général (formel) de la classification des formes normales est non trivial, et a été assez peu étudié jusqu'ici. On trouvera une liste détaillée de formes normales en petites dimensions ($n = 2$ ou 3) dans un travail récent de Turco [15].

2) Soit X un champ de vecteurs (formel ou holomorphe) laissant invariante une structure donnée sur $\mathbb{C}^n$ (cas d'importance : structures symplectique, de contact, ou unimodulaire) ; les champs X_S et X_N laissent donc invariante cette même structure. Il est alors intéressant (et crucial en mécanique classique) d'étudier la normalisation de X via une transformation appartenant au groupe d'invariance de la structure considérée. C'est possible, formellement, dans les cas classiques mentionnés ci-dessus ; pour un traitement unifié et agréable, voir un travail récent de Françoise [6].

Dans le cas hamiltonien (structure symplectique), le problème de la normalisation holomorphe a donné lieu, depuis Poincaré et Birkhoff, à une abondante littérature, qu'on trouvera citée dans la bibliographie de Brjuno ; nous n'en parlerons pas ici.

Dans le cas unimodulaire (conservation d'une forme volume) le problème a été étudié récemment par Françoise [7], et donne lieu à une intéressante théorie.

3) Le problème de la normalisation dans le cas des champs de vecteurs réels et de classe C^∞ a été aussi abondamment étudié (récemment, par Takens, Roussarie et Dumortier entre autres) ; nous ne l'aborderons pas ici.

2. Préliminaires relatifs aux formes normales

2.1. Décomposition spectrale

Soit $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, un champ linéaire diagonal. Étudions l'action adjointe de S sur $\hat{\mathfrak{X}}_n$, c'est-à-dire l'opérateur $X \longmapsto [S,X]$. Si l'on pose, comme le fait Brjuno :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{où} \quad X_i = x_i^{-1} \bar{X}_i \qquad (\bar{X}_i \in \hat{\mathcal{H}}_n) ,$$

il vient aisément :

$$[S,X] = \sum_{i=1}^{n} (S.X_i) x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Donc X est vecteur propre de S pour la valeur propre α si

$$S.X_i = \alpha.X_i \quad \text{pour} \quad i = 1,\dots,n .$$

D'autre part, en posant $x^Q = x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n}$ si $Q = (q_1,\dots,q_n) \in \mathbb{Z}^n$, on a

$$S.x^Q = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i) x^Q = (\Lambda,Q).x^Q \quad \text{avec} \quad \Lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

Il en résulte que :

Les valeurs propres de l'opérateur $[S,\ ]$ sur $\hat{\mathfrak{X}}_n$ sont les nombres complexes $\alpha_Q = (\Lambda, Q)$ où les q_i sont des entiers tous ≥ -1 , l'un d'entre eux au plus étant égal à -1 , et $|Q| = \Sigma\, q_i \geq 0$. L'ensemble de ces nombres, spectre de l'opérateur crochet par S , sera noté $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$.

A chaque $\alpha \in \mathcal{S}$ correspond un sous-espace propre $E_\alpha \subset \hat{\mathfrak{X}}_n$; cet espace a pour base naturelle l'ensemble des champs <u>monomiaux</u> de la forme $x^Q x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ où $(\Lambda, Q) = \alpha$, avec $q_i \geq -1$, $q_j \geq 0$ pour $j \neq i$, et $\Sigma\, q_i \geq 0$.

On a évidemment, par l'identité de Jacobi :

$$[E_\alpha, E_\beta] \subset E_{\alpha+\beta} \quad \text{si} \quad \alpha\ ,\ \beta \ \text{et}\ \alpha+\beta \in \mathcal{S}$$

et

$$[E_\alpha, E_\beta] = 0 \quad \text{si} \quad \alpha\ ,\beta \in \mathcal{S} \ \text{et}\ \alpha+\beta \notin \mathcal{S} .$$

L'espace E_o , ensemble des commutateurs de S , est particulièrement important puisque les formes normales de partie semi-simple S auront une partie nilpotente N à choisir dans E_o . Les générateurs de E_o sont de deux sortes :

a) Les champs de la forme $x^Q . x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, où $(\Lambda, Q) = 0$, et les q_j sont <u>tous positifs</u> ; ils proviennent de l'existence d'<u>intégrales premières de</u> S ($S.x^Q = 0$).

b) Les champs $x^Q . x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, où $(\Lambda, Q) = 0$ et $q_i = -1$ (les autres composantes de Q étant positives) ; ils proviennent de l'existence de familles de variétés intégrales de S , régulières à l'origine.

Les relations $(\Lambda, Q) = 0$, où les q_i vérifient les conditions précédentes, sont appelées les <u>résonances</u> de S ; je nommerai <u>résonances de Siegel</u> celles du cas a), et <u>résonances de Dulac</u> celles du cas b).

2.2. PROPOSITION 2.- <u>Soit</u> $X = S + N$ <u>une forme normale</u> ; <u>soit</u> $\mathcal{S}$ <u>le spectre de l'opérateur</u> $[S,\ ]$ <u>sur</u> $\hat{\mathfrak{X}}_n$, <u>et</u> E_α , $\alpha \in \mathcal{S}$, <u>les espaces propres correspondants. Pour tout</u> $Y \in \hat{\mathfrak{X}}_n$, <u>il existe deux champs uniques</u> $Y_o \in E_o$ <u>et</u> $Z \in \sum_{\alpha\neq 0} E_\alpha$ <u>tels que</u> :

$$Y = Y_o + [S + N , Z]$$

<u>De plus, si</u> Y <u>est</u> k-<u>plat</u> $(Y \in \hat{\mathcal{M}}_n^k . \hat{\mathfrak{X}}_n)$, <u>il en est de même de</u> Y_o <u>et</u> Z .

La démonstration est évidente.

2.3. <u>Normalisation</u> (<u>formelle</u>) <u>par la méthode de Newton</u>

Soit $X \in \hat{\mathfrak{X}}_n$. Supposons que X soit déjà normalisé à un ordre $k \geq 1$, c'est-à-dire que $X = S + N + R$ où $S + N$ est une forme normale représentant le développement de Taylor de X à l'ordre k (N est donc un champ polynomial de degré k , et R un champ k-plat).

Considérons alors l'équation :

$$(1) \qquad R = R_o + [S + N , U]$$

D'après la proposition 2, elle détermine $R_o \in E_o$ et $U \in \sum_{\alpha \neq 0} E_\alpha$ (E_α = espaces propres de S) ; les champs R_o et U sont k-plats.

PROPOSITION 3.- Soit $\varphi = \exp U$; on a :

$$\varphi_* X = S + N + R_o + R'$$

où R' est 2k-plat.

Démonstration.- On utilise la formule classique :

$$(\exp tU)_* X = X + t[U,X] + \frac{1}{2} t^2 [U,[U,X]] + \dots$$

dans laquelle, clairement, le coefficient de t est k-plat, celui de t^2 est 2k-plat, ..., celui de t^p est pk-plat.

Donc $\varphi_* X = X + [U,X]$ modulo les champs 2k-plats ; le résultat est alors conséquence immédiate de l'égalité (1).

Conclusion.- Le dévoloppement de Taylor de $\varphi_* X$ à l'ordre $2k$ est, avec les notations précédentes, $S + N + R_o^{2k}$ et ce champ polynomial de degré $2k$ représente une forme normale de X à l'ordre $2k$, par construction. On a de plus une construction explicite d'un difféomorphisme normalisant ($\exp U$) k-plat par rapport à l'identité.

On obtient évidemment le même résultat en résolvant (1) modulo les champs 2k-plats, c'est-à-dire en n'utilisant que les dévoloppements de Taylor à l'ordre $2k$ de R_o et U (champs polynomiaux).

Si l'on itère cette procédure, on obtient une méthode de normalisation formelle telle que l'ordre d'approximation (de la forme normale et du difféomorphisme normalisant) double à chaque étape ; c'est pourquoi on l'appelle méthode de Newton.

2.4. Principes de construction de contre exemples

Une partie essentielle du travail de Brjuno consiste en la construction systématique d'exemples de champs holomorphes non holomorphiquement normalisables. Assez remarquablement, toutes ces constructions reposent sur quelques propriétés relativement simples de la normalisation.

Dans toute la suite de ce paragraphe, on désigne par $X_o = S + N$ une forme normale fixée, où $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$; on désigne toujours par $\mathcal{S}$ le spectre de S et par E_α , ($\alpha \in \mathcal{S}$), les espaces propres de S .

Si $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$, on pose $E_{\mathcal{P}} = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} E_\alpha$. Le sous-ensemble $\mathcal{P}$ du spectre de S sera dit avoir la propriété

(π) si $0 \notin \bar{\mathcal{P}} = \{\Sigma n_i \alpha_i \text{ , } \alpha_i \in \mathcal{P}, n_i \text{ entier} \geq 0 \text{ , } \Sigma n_i \geq 1\}$

(π') si aucune combinaison $\Sigma n_i \alpha_i$ $\{\alpha_i \in \mathcal{P}, n_i \text{ entier} \geq 0 \text{ , } \Sigma n_i \geq 2\}$ n'est dans $\mathcal{P}$.

La propriété (π') est clairement plus forte que (π).

THÉORÈME 1.- Soit $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ un sous-ensemble ayant la propriété (π). Soit $Y \in E_{\mathcal{P}}$ un champ 1-plat.

1) Le champ $X_o + Y$ est formellement isomorphe à X_o.

2) La partie semi-simple de la décomposition de Jordan de $X_o + Y$ est $S + U$, où $U = \sum_{k=0}^{\infty} U_k$ est défini par l'équation :

$$[X_o + tY, \sum_{k=0}^{\infty} t^k U_k] = [S,Y]$$

Démonstration.- L'idée consiste à appliquer la méthode "des chemins".

On considère les équations :

(1) $\quad [X_o + tY, Z] = Y \quad (= \frac{\partial}{\partial t}(X_o + tY)) \quad$ où $Z = Z_o + tZ_1 + \dots + t^k Z_k + \dots$

(2) $\quad [X_o + tY, U] = [S,Y] \quad$ où $U = U_o + tU_1 + \dots + t^k U_k + \dots$

Elles se résolvent trivialement par identification en t et application répétée de la proposition 2 ; les champs Z_k et U_k sont $(k+1)$-plats et appartiennent à $E_{\bar{\mathcal{P}}}$.

L'ingégration du système d'équations différentielles (formel)

$$\dot{x} = Z(t,x) \quad \text{avec condition initiale} \quad x(0,x_o) = x_o$$

définit une famille à un paramètre (t) de difféomorphismes formels φ_t de $\mathbb{C}^n$ en 0 tels que :

$$(\varphi_t)_* X_o = X_o + tY \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{C} .$$

Ceci établit 1) en prenant $t = 1$.

D'autre part, le champ $S + tU$ est, pour tout t, semi-simple car formellement isomorphe à S d'après 1) (en effet, $U \in E_{\bar{\mathcal{P}}}$). Il commute avec $X_o + tY$ d'après (2) comme on le vérifie par un calcul facile ; enfin $X_o + tY - (S + tU) = N + t(Y - U)$ est de façon évidente nilpotent. Il en résulte que $S + tU$ est, pour tout t, la partie semi-simple de la décomposition de Jordan de $X_o + tY$.

COROLLAIRE.- Soit $X_o = S + N$ une forme normale holomorphe. Soit $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ (spectre de S) un sous-ensemble vérifiant la propriété (π'). Soit $Y \in E_{\mathcal{P}}$ un champ holomorphe, 1-plat. Alors, si l'équation en U_o

$$[X_o, U_o] = [S,Y]$$

n'a pas de solution holomorphe, la décomposition de Jordan de $X_o + Y$ est divergente.

En effet, le théorème 1 s'applique au champ $X = X_o + Y$, dont la partie semi-simple $S + U$ est fournie par le procédé précédent. Comme $\mathcal{P}$ vérifie (π'), on remarque aisément que, de plus, U_o est la composante du champ U sur le sous-espace $E_{\mathcal{P}}$. Cette composante est une série extraite de U, qui est donc nécessairement divergent.

Avec un peu plus de travail taylorien (mais toujours aussi élémentaire), Brjuno démontre le résultat plus précis suivant :

THÉORÈME 2.- Avec les mêmes données que dans le corollaire précédent, si l'équation

$[X_o, Z] = Y$ n'a pas de solution Z convergente, il n'existe pas de difféomorphisme holomorphe transformant $X = X_o + Y$ en X_o.

Remarque.- La deuxième partie du théorème 1 et le corollaire ne figurent pas chez Brjuno, qui ne distingue pas clairement décomposition de Jordan et forme normale.

3. Normalisation des champs holomorphes semi-simples

3.1. THÉORÈME 3.- Soit $X \in \mathcal{X}_n$ un germe de champ holomorphe, tel que les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de sa partie linéaire en 0 satisfassent la condition (Ω) ci-dessous. Si X est formellement semi-simple, il est holomorphiquement isomorphe au champ $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

3.2. La condition arithmétique (Ω) de Brjuno

Comme nous l'avons vu en 2.1, les valeurs propres de l'opérateur crochet $[X, \ ]$ sur $\hat{\mathcal{X}}_n$ sont les nombres complexes $\alpha_Q = (\Lambda, Q) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i$ où $|Q| = \Sigma q_i \geq 0$, $q_i \geq -1$, et l'un au plus des q_i égal à -1. Pour $|Q| \leq k$, les α_Q sont les valeurs propres de l'opérateur induit sur l'espace $\mathcal{X}_n^k$ des k-jets de champs.

On pose, pour $k \geq 0$:

$$\omega_k = \mathrm{Min}\{|\alpha_Q| \ , |Q| \leq 2^{k+1} \ , \alpha_Q \neq 0\}$$

La condition (Ω) s'énonce :

$$\text{La série} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log \frac{1}{\omega_k}}{2^k} \quad \text{est convergente.}$$

3.3. Remarques historiques

La condition (Ω) signifie que les valeurs propres du champ X ne diminuent pas trop vite lorsque l'ordre augmente.

Poincaré [11] a, le premier, démontré le théorème ci-dessus, en l'absence de résonances, et si $\omega_k > C > 0$.

Siegel [14] l'a étendu au cas où les λ_i vérifient une condition diophantienne $|(\Lambda, Q)| \geq \frac{C}{|Q|^{\mu}}$ avec $C, \mu > 0$ $(\omega_k \geq C.2^{-\mu k})$.

Pliss [10] a montré qu'il subsistait en admettant des résonances, mais en supposant que le champ est semi-simple, et que les valeurs propres non nulles satisfont la condition de Siegel.

Brjuno donne le meilleur résultat à ce jour, en améliorant substantiellement la condition de Siegel.

Une histoire analogue s'est développée quant à la linéarisation des germes de difféomorphismes locaux holomorphes de $\mathbb{C}^n$; le résultat le plus récent dans cette direction est, à ma connaissance, celui de Rüssmann [13].

3.4. Démonstration (à peine) abrégée du théorème 3 .

L'idée est maintenant classique : on utilise le procédé de normalisation de Newton, joint à une méthode de contours successifs.

Notations.- Pour $\rho > 0$, on pose $D_\rho = \{x \in \mathbb{C}^n , |x_i| \leq \rho\}$. Si $X = \sum_Q X_Q . x^Q$ est une fonction holomorphe sur un voisinage de D_ρ , on pose $\|X\|_\rho = \Sigma |X_Q| . \rho^{|Q|}$. Si X est un champ de vecteurs, $\|X\|_\rho$ désignera la plus grande des normes de ses composantes, au sens précédent.

Soit $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, où les λ_i vérifient (Ω). On suppose de plus que les ω_k sont ≤ 1 , ce qui ne restreint pas la généralité. On pose :

$$\sigma_k = (\omega_k)^{1/m} . m^{-2/m} \quad \text{et} \quad \tau_k = (\omega_k)^{1/m} . m^{-1/m} \quad \text{où} \quad m = 2^k .$$

On a $\sigma_k < \tau_k < 1$ et, d'après (Ω), $\sigma_k \longrightarrow 1$ quand $k \longrightarrow \infty$.

Lemme.- Soit $1/2 \leq \rho \leq 1$, et soit Y un champ de vecteurs holomorphe sur le polydisque D_ρ , 2^k-plat en 0 (k donné assez grand), avec $\|Y\|_\rho < 1$. Soit U le champ polynomial de degré 2^{k+1} défini par l'équation :

$$Y = Y_0 + [S,U] \quad \text{modulo les champs} \quad 2^{k+1}\text{-plats} \quad (Y_0 \in E_0) .$$

a) $\|U\|_r < 1/2^k$ où $r = \tau_k . \rho$.

b) $\varphi(D_r) \supset D_{\rho_1}$ où $\rho_1 = \sigma_k . \rho$ et $\varphi = \exp U$.

c) $\|Y_1\|_{\rho_1} < 1$ où $Y_1 = \varphi_*(S+Y) - S$.

Indications.- On a d'abord, par définition de ω_k : $\|U\|_\rho \leq \frac{1}{\omega_k} \|Y\|_\rho < \frac{1}{\omega_k}$. La platitude de U à l'ordre 2^k (proposition 2) donne :

$$\|U\|_r \leq (\tfrac{r}{\rho})^m . \|U\|_\rho < 1/2^k$$

On vérifie ensuite que $\rho_1 + 1/2^k < r$ pour k assez grand (indépendant de $\rho \geq 1/2$), ce qui assure b) ; la dernière inégalité est aisée.

Fin de la démonstration du théorème

Soit X un champ holomorphe, formellement semi-simple, satisfaisant la condition (Ω).

i) D'après (Ω) , le produit infini $\prod_k \sigma_k$ est convergent. On choisit un entier p tel que $1/2 < \prod_{k \geq p} \sigma_k < 1$.

ii) On peut supposer le champ X normalisé à l'ordre 2^p , c'est-à-dire être de la forme $X = S + Y_p$, où $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et Y_p est 2^p-plat ; de plus, quitte à faire une homothétie sur $\mathbb{C}^n$, on peut supposer Y_0 holomorphe sur D_1 et $\|Y_p\|_1 < 1$.

On applique le lemme précédent avec $Y = Y_p$ et $\rho = 1$. On obtient (prop. 3) une normalisation de X à l'ordre 2^{p+1} : $(\varphi_p)_* X = S + Y_{p+1}$, où Y_{p+1} est 2^{p+1}-plat d'après l'hypothèse de semi-simplicité de X ; de plus le lemme montre que

Y_{p+1} a une norme < 1 sur D_{σ_p} , et que le difféomorphisme normalisant φ_p est $1/2^p$-voisin de l'identité sur D_{τ_p} .

On peut donc appliquer le lemme à répétition. La composition des difféomorphismes normalisants successifs converge trivialement sur le polydisque D_σ ($\sigma = \prod_{k\geq p} \sigma_k$), ce qui achève la démonstration.

3.5. Nécessité d'une condition arithmétique

THÉORÈME 4.- Si le champ linéaire $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ vérifie la condition (Ω') ci-dessous, il existe un champ holomorphe Y , 1-plat en 0 , tel que :

a) $S + Y$ est semi-simple (formellement isomorphe à S)

b) $S + Y$ n'est pas holomorphiquement linéarisable.

Condition (Ω')
$$\varlimsup_k \frac{\log \frac{1}{\omega_k}}{2^k} = +\infty .$$

Démonstration (cas $n = 2$).- Soit $S = x \frac{\partial}{\partial x} - \lambda y \frac{\partial}{\partial y}$, où λ est un nombre irrationnel positif tel qu'il existe un ensemble infini $I \subset \mathbb{N}$ et des entiers p_k , q_k ($k \in I$) avec :

(1) $$\omega_k = p_k - \lambda q_k = \exp(-C_k 2^k) \quad \text{où} \quad C_k \longrightarrow +\infty \quad \text{(condition } (\Omega')\text{)}.$$

L'ensemble $\mathcal{P}$ des valeurs propres ω_k vérifie alors la propriété (π') de 2.4.

Le champ $Y = (\sum_{k\in I} x^{p_k} y^{q_k}).x \frac{\partial}{\partial x} \in E_{\mathcal{P}}$ est holomorphe en 0 . L'équation $[S,Z] = Y$ a pour unique solution $Z = (\sum_{k\in I} \frac{x^{p_k} y^{q_k}}{\omega_k}).x \frac{\partial}{\partial x}$; on en vérifie la divergence, grâce à (1) et au critère de Cauchy, puis on applique le théorème 2.

Commentaires

Il semble que rien ne soit connu sur la linéarisation holomorphe dans le cas où le spectre de S a un comportement intermédiaire entre les conditions (Ω) et (Ω').

Il est très intéressant de se demander si la divergence éventuelle de la transformation linéarisante s'explique par des raisons topologiques, ou s'il s'agit vraiment d'un phénomène d'analyse.

Pyartli [12] a montré, sous une hypothèse de décroissance des valeurs propres plus rapide que la condition (Ω'), et dans le cas où $n = 2$, que le champ $S + Y$ est (génériquement en Y) non topologiquement isomorphe à S : il admet en effet des orbites "cylindriques" (i.e. admettant une période) non triviales dans tout voisinage de l'origine ; ce n'est pas le cas pour le champ linéaire S . Sur ce sujet, voir aussi Arnol'd [1].

En contraste avec le résultat de Pyartli, Camacho-Kuiper-Palis [3] ont montré que, si $n = 3$, le champ $S + Y$ est en général topologiquement isomorphe à S , indépendamment des conditions de "petits dénominateurs" (i.e. les ω_k).

4. Normalisation en présence de parties nilpotentes

Dans toute la suite, on n'intéresse à des champs holomorphes dont les valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ vérifient la condition (Ω) ; dans ce cas, d'après le théorème de Pliss-Brjuno, la normalisation holomorphe de $X \in \mathfrak{X}_n$ équivaut à la convergence des champs X_S et X_N.

Soit $X \in \mathfrak{X}_n$; on désignera par $K(\Lambda) \subset \mathbb{C}$ l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$ des valeurs propres de la jacobienne de X en 0.

Si l'origine 0 de $\mathbb{C}$ n'appartient pas à $K(\Lambda)$, il est connu depuis Dulac [4] que X est toujours holomorphiquement normalisable ; cela est dû à deux raisons :

i) les ω_k sont minorés par une constante $C > 0$.

ii) les formes normales de X sont nécessairement polynomiales, compte tenu de 2.1 (seules des résonances de Dulac sont permises).

On adapte alors aisément la démonstration du § 3, par exemple.

Nous allons donc considérer le cas où $0 \in K(\Lambda) \subset \mathbb{C}$; ceci implique la présence de résonances de Siegel ou (non disjonctif) de "petits dénominateurs" (ω_k arbitrairement petits). On dit alors parfois que le vecteur $\Lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ appartient au "domaine de Siegel", le cas précédent correspondant au "domaine de Poincaré".

4.1. La condition géométrique (A) de Brjuno

Soit $X_0 = S + N$ une forme normale holomorphe ($S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$). Le fait que $0 \in K(\Lambda)$ équivaut à l'existence de relations non triviales de la forme

$$(\Lambda,R) = \sum_{i=1}^{n} r_i \lambda_i = 0$$

où les r_i sont des nombres réels positifs.

A une telle relation correspond géométriquement un feuilletage singulier de codimension un (défini par x^R = constante) auquel le champ S est tangent ; ce type de feuilletage a des propriétés topologiques très particulières :

a) Il y a un nombre fini de feuilles aboutissant à l'origine $0 \in \mathbb{C}^n$, et elles y sont des variétés régulières (plans de coordonnées).

b) Les autres feuilles sont toutes "périodiques" ou toutes "presque périodiques" (considérer leur intersection avec une droite parallèle à l'un des axes de coordonnées) selon que R est une relation rationnelle ou irrationnelle.

Ce sont là des feuilletages très "instables" sous l'effet de petites perturbations.

DÉFINITION.- La forme normale $X_0 = S + N$ vérifie la condition (A) si le champ N est tangent à tous les feuilletages " x^R = cste " correspondant aux relations

$$(\Lambda,R) = 0 \text{ avec } r_i \geq 0 .$$

On vérifie que cette propriété est invariante par difféomorphisme entre formes normales. Elle garde aussi un sens pour les formes normales formelles. On dira donc, plus généralement, qu'un champ X (holomorphe ou formel) vérifie la condition (A) si ses formes normales la satisfont.

La condition (A) n'apparaît pas explicitement sous cette forme dans le mémoire de Brjuno ; elle regroupe plusieurs conditions présentées de façon moins géométrique.

4.2. THÉORÈME 5.- Soit $X \in \mathcal{X}_n$ un germe de champ de vecteurs holomorphe. On suppose que X vérifie les conditions (Ω) et (A). Alors X est holomorphiquement normalisable si l'une des conditions supplémentaires suivantes est réalisée :

a) $n \leq 4$,

b) dans $\mathbb{C}$, 0 est intérieur à $K(\Lambda)$.

(Dans le cas où $K(\Lambda)$ est réduit à un segment du plan, intérieur veut dire intérieur au segment).

THÉORÈME 6.- Soit $X_o \in \mathcal{X}_n$ une forme normale holomorphe ne satisfaisant pas la condition (A). Il existe alors un champ holomorphe $X \in \mathcal{X}_n$, formellement, mais non holomorphiquement, isomorphe à X_o .

On peut donc dire, sous réserve de (Ω), que la condition (A) est, en dimension ≤ 4 , nécessaire et suffisante pour qu'une forme normale X_o ait la propriété énoncée en 1.3 : pour tout champ holomorphe X , les conjugaisons formelle et holomorphe à X_o sont équivalentes.

En dimension supérieure (et si 0 n'est pas intérieur à $K(\Lambda)$) il n'en est plus de même. Il apparaît une nouvelle condition "nécessaire et suffisante" au sens précédent ; je n'en parlerai pas, car elle est d'un caractère très technique et je n'en ai pas compris la signification géométrique.

Les démonstrations des théorèmes précédents ne sont pas simples ; il faut distinguer de nombreux cas selon la nature du spectre du champ considéré. Celle du premier utilise toujours la méthode de normalisation de Newton, et celle du second le théorème 1 et son corollaire. Je vais, pour terminer, analyser ces résultats en dimensions 2 et 3 , en présentant des exemples.

5. Normalisation en dimension 2

La théorie de Brjuno n'a de sens que si les valeurs propres λ_1 , λ_2 ne sont pas toutes deux nulles ; nous ne restreindrons pas la généralité du propos en supposant $\lambda_1 = 1$; nous poserons $\lambda_2 = \lambda$.

5.1. $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ $(0 \notin K(\Lambda))$

C'est la situation de Poincaré-Dulac. Le champ considéré est toujours holomorphiquement normalisable. Le cas le plus compliqué est celui où $\lambda = p \in \mathbb{N}$; les formes normales correspondantes sont

$$x \frac{\partial}{\partial x} + (py + ax^p)\frac{\partial}{\partial y} \qquad a \in \mathbb{C} .$$

5.2. λ réel négatif irrationnel

C'est la situation de Siegel. Le champ est sans résonnance, donc semi-simple, et holomorphiquement normalisable sous la condition (Ω).

5.3. $\lambda = -\frac{p}{q}$, rationnel ≤ 0

On est en présence de résonances de Siegel. Les formes normales possibles sont

$$X_o = (1+\alpha(x^p y^q)).x\frac{\partial}{\partial x} + (-\frac{p}{q}+\beta(x^p y^q)).y\frac{\partial}{\partial y}$$

où α et β sont des séries formelles en une variable.

1) Commentaires sur le théorème 5

Soit X un champ holomorphe vérifiant la condition (A) ; cela signifie que ses formes normales admettent la fonction $x^p y^q$ comme intégrale première, soit $p\alpha + q\beta = 0$. A priori, elles sont donc du type :

$$X_o = (1+\alpha(x^p y^q)).S \quad \text{où} \quad S = x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{p}{q}\,y\frac{\partial}{\partial y} \quad .$$

Dans ce cas, il n'est pas difficile d'adapter la démonstration du théorème 3 pour aboutir à la normalisation holomorphe du champ X . Noter qu'il n'y a pas de petits dénominateurs, mais il faut contrôler la série α dans le procédé d'approximations successives.

Remarques.- Ce résultat admet comme corollaire facile : si un germe de champ de vecteurs holomorphe dans le plan, à valeurs propres non toutes nulles, a une intégrale première formelle, il a aussi une intégrale première convergente. Il semble que ce résultat était déjà connu de Dulac [5]. Il a récemment été généralisé par Mattei et Moussu [9] au cas des formes différentielles holomorphes complètement intégrables, avec une méthode tout à fait différente.

2) Commentaires sur le théorème 6

Je vais l'illustrer par un exemple, dans le cas où $\lambda = 0$.

Soit $X_o = S + N = x\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$.

Cette forme normale ne vérifie pas la condition (A), car le champ $N = y^2\frac{\partial}{\partial y}$ n'est pas tangent au feuilletage $y = \text{cste}$ (intégrale première de S).

Considérons le champ $X = S + N + Y$ où $Y = g(y)x^{p+1}\frac{\partial}{\partial x}$ ($p \geq -1$ et $p \neq 0$) et g est une fonction holomorphe arbitraire.

Le champ Y est choisi ici dans l'espace propre E_p de S , avec les notations du § 2 (le spectre de S est l'ensemble des entiers ≥ -1).

On vérifie facilement que l'équation

$$[S+N\,,\,Z] = [S,Y] = pY$$

a pour unique solution $Z = h(y)x^{p+1}\frac{\partial}{\partial x}$ dans E_p , où h est solution de l'équation différentielle :

$$y^2 h'(y) + ph(y) = pg(y) \ .$$

Il s'agit de la célèbre équation d'Euler, dont l'origine est un point singulier irrégulier ; on sait qu'en général (et par exemple avec $g(y) = y^2$) elle n'admet aucune solution holomorphe en 0 . Dans ce cas, d'après le théorème 1 et son corollaire, X n'est pas holomorphiquement conjugué à X_o , bien qu'il le soit formellement. Une vérification directe est d'ailleurs aisée. Par exemple, si $Y = y^2 \frac{\partial}{\partial x}$ ($p = -1$) l'intégration du champ X se ramène à celle de l'équation d'Euler classique

(1) $\quad y^2 \frac{dx}{dy} - x = y^2$ (pardon pour l'interversion des rôles habituels !).

On voit donc que, dans ce cas, X n'est même pas topologiquement conjugué à X_o ; on sait en effet que les solutions de (1) ne sont pas uniformes autour de l'origine.

Remarque.- Il est évidemment tentant d'explorer la classification holomorphe des champs résonants ne vérifiant pas la condition (A). Ramis et moi [8] venons de résoudre complètement ce problème dans le cas $\lambda = 0$. Un des résultats frappants de l'étude est que la classification topologique est déjà fort riche !

Dans le cas où λ est négatif (rationnel), le problème est, à ma connaissance, largement ouvert.

6. Normalisation en dimension 3

Je me limiterai ici, pour éviter une nomenclature fastidieuse, à l'étude de quelques cas typiques. On se placera toujours dans le domaine de Siegel, et en présence de résonances.

6.1. $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = \exp(\frac{2i\pi}{3})$; $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$.

Cet exemple illustre le cas où $K(\Lambda)$ est d'intérieur non vide, $0 \in \mathbb{C}$ est intérieur à $K(\Lambda)$, et on a une résonance de Siegel (ici $\Sigma \lambda_i = 0$).

Le champ $S = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ admet pour ensemble d'intégrales premières l'anneau $\mathfrak{J}$ des séries en $(x_1 x_2 x_3)$. Son spectre est discret ($\omega_k \not\to 0$).

1) (Théorème 5). Soit X un champ ayant les valeurs propres ci-dessus, et vérifiant la condition (A). On s'assure facilement que ses formes normales sont du type :

$$X_o = f.S + g.\bar{S} \quad \text{où} \quad \bar{S} = \Sigma \bar{\lambda}_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad f , g \in \mathfrak{J} \ .$$

Cette condition donne un bon contrôle sur le comportement de l'opérateur $[S+N , \ ]$ (où $S+N$ sera la normalisation de X à un ordre fini), et permet d'utiliser avec succès la méthode de Newton.

Remarque.- En corollaire, on voit dans ce cas que si un champ a une intégrale première formelle, il a aussi une intégrale première holomorphe.

2) (<u>Théorème</u> 6). Soit $X_o = S+N$ une forme normale holomorphe ne satisfaisant pas (A) ; cela veut dire que N n'admet pas $x_1x_2x_3$ comme intégrale première. On vérifie alors que l'équation $[S+N, Z] = Y$, où Y est choisi dans un espace propre convenable de S , n'a pas toujours de solution holomorphe, et on conclut comme en 5.3.2).

6.2. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = -\lambda$ (λ <u>nombre irrationnel positif</u>)

Cette fois $K(\Lambda)$ est un segment auquel l'origine est intérieure. Le champ $S = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \lambda x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ a un spectre dense dans $\mathbb{R}$. On a seulement des résonances de Dulac, et les champs nilpotents commutant avec S sont de la forme $ax_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$ ou $ax_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$ ($a \in \mathbb{C}$).

1) (<u>Théorème</u> 5). Si un champ X vérifie (A), sa forme normale se réduit à S ; il est donc semi-simple, et on est ramené au théorème 3.

2) (<u>Théorème</u> 6). Considérons la forme normale

$$X_o = (x_1 + x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \lambda x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \qquad \text{soit} \quad N = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} .$$

Soit $\alpha = p - \lambda q$ une valeur propre de S , où p et q sont des entiers positifs. L'espace propre E_α contient l'espace vectoriel E'_α engendré sur $\mathbb{C}$ par les champs

$$x_1^{r_1} . x_2^{r_2} . x_3^{q+1} \frac{\partial}{\partial x_3} \qquad \text{avec} \quad r_1 , r_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad r_1 + r_2 = p .$$

L'espace E'_α est invariant par $[S+N, \ ]$, car :

$$[N , x_1^{r_1} . x_2^{r_2} . x_3^{q+1} \frac{\partial}{\partial x_3}] = r_1 x_1^{r_1 - 1} . x_2^{r_2 + 1} . x_3^{q+1} \frac{\partial}{\partial x_3} .$$

Remarquer que la puissance (p+1)-ème N^{p+1} du crochet par N est nulle sur E'_α ; on a donc $[S+N , \ ]^{-1} = \frac{I}{\alpha} - \frac{N}{\alpha^2} + \ldots + (-1)^{p+1} \frac{N^p}{\alpha^{p+1}}$.

Soit $Y_\alpha = x_1^p . x_3^{q+1} \frac{\partial}{\partial x_3} \in E'_\alpha$; ce qui précède montre que l'équation $[S+N, Z] = \alpha . Y$ a pour solution

$$Z = \pm \frac{p!}{\alpha^p} x_2^p . x_3^{q+1} \frac{\partial}{\partial x_3} + \text{termes d'exposants différents.}$$

Ce calcul montre que les normes des inverses de $[S+N, \ ]$ sur les espaces propres E_α peuvent prendre des valeurs <u>arbitrairement grandes</u> par rapport à $1/\alpha$.

On obtiendra un exemple démontrant le théorème 6 en posant $Y = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} Y_\alpha$ où $\mathcal{P}$ est un ensemble infini de valeurs propres de la forme précédente ($\alpha = p - \lambda q$) , avec $|\alpha| < C$ donné, et $\mathcal{P}$ vérifie la propriété (π') de 2.4. Le champ Y est bien holomorphe, et l'on constate que l'équation $[S+N, Z] = [S,Y]$ n'a pas de solution convergente.

6.3. $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = -\lambda$ (λ <u>irrationnel positif</u>)

Le champ $S = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \lambda x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ a pour ensemble d'intégrales premières l'anneau

$\mathfrak{J}$ des séries en x_1 . Le spectre de S est encore dense dans $\mathbb{R}$. Les commutateurs de S sont les combinaisons linéaires des $x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ à coefficients dans $\mathfrak{J}$.

1) (Théorème 5). La situation est analogue à celle de 6.1.1).

2) (Théorème 6). Soit $X_o = S + N = x_2(1+x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} - \lambda x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$.

Nous choisissons ici $N = x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ de façon qu'il admette les mêmes intégrales premières que S ; mais il ne vérifie pas cependant la condition (A), car $N.x_2^{\lambda} x_3 \neq 0$.

Le spectre de S est formé des nombres $\alpha = p - \lambda q$.

Pour $\alpha \neq 0$, l'espace propre E_α est le $\mathfrak{J}$-module engendré par les trois champs $u_\alpha . x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, où $u_\alpha = x_2^p . x_3^q$.

L'opérateur X_o induit un homomorphisme de $\mathfrak{J}$-module sur E_α . On en écrit facilement la matrice, et on observe en particulier que :

$$[X_o , u_\alpha . x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}] = (\alpha + px_1) u_\alpha x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} .$$

Soit alors $Y = (\sum_{\alpha \in \mathfrak{P}} u_\alpha) . x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ où $\mathfrak{P} \subset$ Spectre de S est un ensemble infini, borné dans $\mathbb{C}$, et choisi de façon à vérifier (π').

L'équation $[S+N , Z] = [S,Y]$ a alors pour solution

$$Z = (\sum_{\alpha \in \mathfrak{P}} \frac{\alpha u_\alpha}{\alpha + px_1}) . x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} .$$

Il est clair que cette série diverge, car les fonctions $\frac{1}{\alpha + px_1}$ ont des rayons de convergence arbitrairement petits.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V.-I. ARNOL'D - Bifurcations of invariant manifolds of differential equations and normal forms in neighborhoods of elliptic curves, Funkts. Anal. Prilozhen. 10, 4(1976), 249-258.

[2] A.-D. BRJUNO - Analytical form of differential equations, Trans. Moscow Math. Soc., 25(1971), 131-288.

[3] C. CAMACHO, N.-H. KUIPER and J. PALIS - The topology of holomorphic flows with singularity, Publ. Math. I.H.E.S., 48(1978), 5-38.

[4] H. DULAC - Solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage des valeurs singulières, Bull. Soc. Math. France, 40(1912), 324-383.

[5] H. DULAC - Recherches sur les points singuliers des équations différentielles, Journal Ec. Polytechnique, 2 9(1904), 1-125.

[6] J.-P. FRANÇOISE - Sur les formes normales de champs de vecteurs, Bull. Union Math. Ital., 5 17 A(1980), 60-66.

[7] J.-P. FRANÇOISE - Singularités de champs isochores, à paraître au Duke Math. Journal.

[8] J. MARTINET et J.-P. RAMIS - Classification de certaines singularités d'équations différentielles, à paraître.

[9] J.-F. MATTEI et R. MOUSSU - Intégrales premières et holonomie, à paraître aux Annales E.N.S..

[10] V.-A. PLISS - On the reduction of an analytic system of differential equations to a linear form, Diff. Eq., 1(1965), 111-118.

[11] H. POINCARE - Oeuvres, vol. 1, Gauthiers-Villars, Paris, 1968, XLIX-CXXLIX.

[12] A.-S. PYARTLI - Birth of complex invariant manifolds close to a singular point of a parametrically dependant vector field, Funk. Anal. Prilozhen, 6 4(1972), 339-340.

[13] H. RÜSSMANN - On the convergence of power series transformations of analytic mappings near a fixed point into a normal form, Preprint I.H.E.S., 1977.

[14] C.-L. SIEGEL - Über die Normalform analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtlösung, Nach. Akad. Wiss. Göttingen, Math. phys. Kl. II A(1952), 21-30.

[15] B. TURCO - Sur les formes normales de singularités isolées de champs de vecteurs avec résonnances, Thèse 3è Cycle, Reims, 1980.

Jean MARTINET
Institut de Mathématiques
7 rue René Descartes
67000 STRASBOURG