Pierre Gabriel

Algèbres auto-injectives de représentation finie

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. nº 545, p. 20-39
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1979-1980__22__20_0>

Séminaire Bourbaki 545-01

32e année, 1979/80, n° 545 Novembre 1979

Algèbres auto-injectives de représentation finie

(d'après Christine Riedtmann)

par Pierre Gabriel

Dans tout l'exposé qui suit k désigne un corps algébriquement clos. Sauf mention du contraire, les algèbres considérées sont supposées définies sur k, associatives, unifères et de k-dimension finie. Nous désignons par $\mathrm{mod}\,A$ la catégorie des modules à droite de k-dimension finie sur l'algèbre A. L'algèbre A est dite <u>sobre</u> si $A/\mathrm{rad}\,A$ est un produit d'exemplaires de k. Elle est <u>connexe</u> si 0 et 1 sont les seuls idempotents centraux.

Nous remercions Christine Riedtmann de l'aide apportée pendant la préparation de cet exposé. Dans le but d'informer rapidement le lecteur non spécialisé en évitant l'inflation de notions abstraites nous avons dû opter pour une présentation quelque peu "étriquée", limitée aux algèbres de représentation finie.

1. Algèbres de représentation finie

Rappelons qu'un module $M \in \mathrm{mod}\,A$ est dit <u>indécomposable</u> si $M \neq 0$ et si, dans toute décomposition $M = M_1 \oplus M_2$ on a $M_1 = 0$ ou $M_2 = 0$. D'après Krull-Remak-Schmidt [9] deux décompositions d'un module $M \in \mathrm{mod}\,A$ en somme directe d'indécomposables se déduisent l'une de l'autre par un automorphisme de M. La classification des modules à isomorphisme près se ramène donc à celle des indécomposables.

L'algèbre A est dite de <u>représentation finie</u> si le nombre de <u>types</u> (=classes d'isomorphisme) d'indécomposables $M \in \mathrm{mod}\,A$ est fini. Ainsi, l'algèbre de polynomes tronquée $k[T]/T^n$ est de représentation finie: tout indécomposable est isomorphe à l'un des modules $k[T]/T^r$ pour $r=1,2,\dots,n$. En fait, toute algèbre commutative de représentation finie est isomorphe à un produit fini d'algèbres de polynomes tronquées. Cela résulte de ce que l'algèbre $k[X,Y]/(X^2,XY,Y^2)$ est de représentation infinie: on obtient une infinité de types d'indécomposables en faisant opérer X et Y sur k^{2m} au moyen des matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{1}_m & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ J(m,\lambda) & 0 \end{bmatrix}$$

où $J(m,\lambda)$ désigne la matrice de Jordan de valeur propre λ et de taille $m \times m$:

$$J(m,\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \\ 1 & \lambda & 0 & \\ 0 & 1 & \lambda & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \in k^{m\times m}$$

On connaît de nombreuses algèbres de représentation finie (non commutatives!): voir par exemple [13],[7],[11],[24] ou [33]. Mais les ingrédients intervenant dans ces algèbres sont tous de nature combinatoire. On conjecture donc que, pour une dimension donnée d, il n'y a qu'un nombre fini de types d'algèbres de représentation finie. Pour certaines classes particulières d'algèbres la conjecture a été prouvée par Bongartz [8], Kupisch [22,23] et Riedtmann [27].

Soit G un groupe fini. On sait depuis longtemps que, si la caractéristique p de k est positive, l'algèbre $k[G]$ du groupe G est de représentation finie ssi les p-sous-groupes de Sylow de G sont cycliques ([17], [19]). Mais on ne connaît pas exactement la structure de ces algèbres de groupes; on sait seulement depuis une dizaine d'années qu'elles sont associées à des arbres planaires ([10],[18],[20,21],[16],[26],[25],[14]). Les démonstrations utilisent en particulier le fait que la représentation régulière de G est injective: en effet, pour tout $M \in \text{mod}\, k[G]$, l'application $\text{Hom}_k(M,k) \to \text{Hom}_{k[G]}(M,k[G])$, $\phi \mapsto \sum_{g\in G} \phi(?g^{-1})g$ est bijective.

On dit que l'algèbre A est <u>auto-injective</u> (ou quasi-frobeniusienne) lorsque la représentation régulière $A_A \in \text{mod}\, A$ est injective. L'introduction de cette notion est justifiée un peu par l'exemple des algèbres de groupes. Il y a aussi des raisons théoriques que nous découvrirons plus tard. Mais, pour nous dans cet exposé, la notion est justifiée avant tout par les résultats de Riedtmann qui obtient la classification que nous allons exhiber des algèbres auto-injectives de représentation finie.

2. <u>L'algèbre d'Auslander d'une algèbre de représentation finie</u>

2.1 Soit $E = \text{End}\, M_A$ l'algèbre des endomorphismes d'un module $M \in \text{mod}\, A$. On sait bien que le foncteur $X \mapsto \text{Hom}_A(M,X)$ induit une équivalence entre la sous-catégorie pleine $\text{add}\, M$ de $\text{mod}\, A$ formée des facteurs directs de M^n, $n \in \mathbb{N}$, et la sous-catégorie pleine $\text{proj}\, E$ de $\text{mod}\, E$ formée des modules projectifs. Lorsque A est de représentation finie et que tout indécomposable de $\text{mod}\, A$ est isomorphe à un facteur direct de M, on obtient donc une équivalence entre $\text{mod}\, A$ et $\text{proj}\, E$, de sorte que la connaissance de E permet de récupérer $\text{mod}\, A$ à équivalence près et l'algèbre A à équivalence près au sens de Morita.

Supposons A de représentation finie, choisissons une suite $M_1,\ldots,M_r$ de représentants des indécomposables de $\mathrm{mod}\,A$ et posons $M=M_1\oplus\ldots\oplus M_r$. On appelle <u>algèbre d'Auslander</u> de A toute algèbre isomorphe à $E=\mathrm{End}\,M_A$. Comme nous supposons $M_i \not\simeq M_j$ pour $i\neq j$, l'algèbre E est sobre.

<u>Proposition</u> [1]: <u>Soit</u> E <u>une algèbre sobre</u>. <u>Les assertions suivantes sont équivalentes:</u>

(i) E <u>est l'algèbre d'Auslander d'une algèbre de représentation finie.</u>

(ii) <u>Un module</u> $P\in\mathrm{mod}\,E$ <u>est projectif ssi</u> $\mathrm{Hom}_E(S,P)=\mathrm{Ext}^1_E(S,P)=0$ <u>pour tout</u> E-<u>module simple de torsion</u> S.

(iii) <u>La dimension homologique globale de</u> E <u>est</u> ≤ 2 <u>et</u>, <u>dans la résolution injective minimale</u> $0\to E_E\to I_0\to I_1\ldots$ de E_E, I_0 <u>et</u> I_1 <u>sont projectifs</u>.

(iv) <u>La catégorie</u> $\mathrm{proj}\,E$ <u>est abélienne</u>.

(v) E^{op} <u>est l'algèbre d'Auslander d'une algèbre de représentation finie</u>.

Rappelons qu'un E-module Y est dit <u>de torsion</u> si $\mathrm{Hom}_E(S,E)=0$ pour tout facteur de Jordan-Hölder S de Y. Il est dit <u>sans torsion</u> si $\mathrm{Hom}_E(T,Y)=0$ pour tout module de torsion T.

2.2 Avant de démontrer brièvement la proposition précédente, nous rappelons quelques éléments de <u>localisation</u> dans le cadre des algèbres de dimension finie ([12],[31]). Soient E une algèbre et $\mathcal{S}$ un ensemble de types de modules simples $S\in\mathrm{mod}\,E$. Un module $N\in\mathrm{mod}\,E$ est dit de $\mathcal{S}$-<u>torsion</u> si le type de tout facteur de Jordan-Hölder de N appartient à $\mathcal{S}$. Il est dit <u>sans</u> $\mathcal{S}$-<u>torsion</u> si $\mathrm{Hom}_E(S,N)=0$ pour tout module simple de $\mathcal{S}$-torsion S. Enfin on dit que N est $\mathcal{S}$-<u>fermé</u> si $\mathrm{Hom}_E(S,N)=\mathrm{Ext}^1_E(S,N)=0$ pour tout module simple de $\mathcal{S}$-torsion S ; il revient au même de dire que tout morphisme $u:U\to V$, tel que $\mathrm{Ker}\,u$ et $\mathrm{Coker}\,u$ soient de $\mathcal{S}$-torsion, induit une bijection $\mathrm{Hom}_E(u,N):\mathrm{Hom}_E(V,N)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_E(U,N)$. La sous-catégorie pleine de $\mathrm{mod}\,E$ formée des modules $\mathcal{S}$-fermés est abélienne; on l'appelle <u>catégorie-quotient</u> de $\mathrm{mod}\,E$ par $\mathcal{S}$ et on la note $\mathrm{mod}\,E/\mathcal{S}$. Le foncteur-inclusion $\mathrm{mod}\,E/\mathcal{S}\to\mathrm{mod}\,E$ est exact à gauche et possède un adjoint à gauche exact L. Enfin, si $Y\in\mathrm{mod}\,E$, on a $LY=0$ ssi Y est de $\mathcal{S}$-torsion.

Dans le cadre auquel nous nous restreignons ici, la catégorie-quotient est équivalente à une catégorie de modules et l'adjoint à gauche L peut être construit comme suit: Soit $P\in\mathrm{mod}\,E$ un projectif tel que $P/\mathrm{rad}\,P$ soit sans $\mathcal{S}$-torsion et contienne une copie de chaque module simple sans $\mathcal{S}$-torsion. Pour construire P on peut par exemple choisir un idempotent convenable $e\in E$ et poser $P=eE$. Soit $P^* = \mathrm{Hom}_E(P,E)\ (\xrightarrow{\sim} Ee)$ et $A = \mathrm{End}\,P \xrightarrow{\sim} P\otimes_E P^*\ (\xrightarrow{\sim} eEe)$. Les catégories $\mathrm{mod}\,A$ et $\mathrm{mod}\,E$ sont reliées par un couple de foncteurs adjoints $D : \mathrm{mod}\,A \to \mathrm{mod}\,E$, $X \mapsto \mathrm{Hom}_A(P^*, X)$ et $G : \mathrm{mod}\,E \to \mathrm{mod}\,A$, $Y \mapsto Y \underset{E}{\otimes} P^* \tilde{\to} \mathrm{Hom}_E(P,Y)$ $(\tilde{\to} Ye)$. On a $GY = 0$ ssi Y est de S-torsion, les applications canoniques $GDX \to X$ sont bijectives, D est pleinement fidèle, DX est S-fermé pour tout $X \in \mathrm{mod}\,A$ et D induit une équivalence $\mathrm{mod}\,A \tilde{\to} \mathrm{mod}\,E/S$. L'adjoint à gauche cherché $L : \mathrm{mod}\,E \to \mathrm{mod}\,E/S$ est le composé de cette équivalence avec G .

2.3 On rencontre la situation décrite en 2.2 en procédant comme suit: Partons d'une algèbre A et d'un <u>générateur</u> de $\mathrm{mod}\,A$, c'est-à-dire d'un module $M \in \mathrm{mod}\,A$ tel que A_A soit facteur direct de M^n pour un $n \in \mathbb{N}$ convenable. Posons $E = \mathrm{End}\,M_A$. Le foncteur $X \mapsto \mathrm{Hom}_A(X,M)$ induit une anti-équivalence de $\mathrm{add}\,M$ sur $\mathrm{proj}(E^{op})$. Puisque $A_A \in \mathrm{add}\,M$, il s'ensuit que ${}_EM = \mathrm{Hom}_A(A_A, M)$ est un E-module à gauche projectif et que $\mathrm{End}_E M \tilde{\to} (\mathrm{End}\,A_A)^{op} \tilde{\to} A^{op}$ s'identifie à l'anneau des homothéties de M_A .

Comme M_A est un générateur de $\mathrm{mod}\,A$, le foncteur $D : \mathrm{mod}\,A \to \mathrm{mod}\,E$, $X \mapsto \mathrm{Hom}_A(M,X)$ est pleinement fidèle. Comme ${}_EM$ est projectif, l'adjoint à gauche $G : \mathrm{mod}\,E \to \mathrm{mod}\,A, Y \mapsto Y \underset{E}{\otimes} M$ est exact. Il s'ensuit que D induit une équivalence de $\mathrm{mod}\,A$ sur $\mathrm{mod}\,E/S$, où S est l'ensemble des types de modules simples $S \in \mathrm{mod}\,E$ tels que $GS = 0$. On peut décrire S explicitement: Si $L \in \mathrm{add}\,M$ est indécomposable, DL est un E-module projectif indécomposable, et $DL/\mathrm{rad}\,DL$ est un E-module simple. L'application $L \mapsto DL/\mathrm{rad}\,DL$ ainsi définie induit une bijection entre les types d'indécomposables de $\mathrm{add}\,M$ et les types de E-modules simples. On voit facilement que $DL/\mathrm{rad}\,DL$ est de S-torsion ssi le A-module indécomposable L est non projectif.

Dans le cas particulier considéré en 2.1, où A est supposée de représentation finie, on a $\mathrm{add}\,M = \mathrm{mod}\,A$, et les E-modules projectifs coïncident avec les modules de la forme DX , c'est-à-dire avec les E-modules S-fermés. Il s'ensuit que les E-modules de S-torsion coïncident alors avec les modules de torsion au sens de 2.1.

2.4 <u>Démonstration de la proposition 2.1:</u> L'équivalence (i)<=>(ii) résulte directement de 2.2 et 2.3.

(ii) =>(iii): Soit S l'ensemble des types de E-modules simples de torsion. L'assertion (ii) signifie que les E-modules projectifs coincident avec les modules S-fermés. Le noyau d'un morphisme entre modules projectifs est donc S-fermé, donc projectif. Ceci montre que la dimension globale est ≤ 2 . De même, comme E_E est sans torsion, I_0 l'est aussi; donc I_0 est S-fermé et projectif.

Comme $\mathrm{Hom}_E(S,I_1)=\mathrm{Ext}^1_E(S,E)=0$ pour tout module simple de torsion S, I_1 est sans torsion, donc S-fermé, donc projectif.

(iii) =>(ii): Comme I_0 et I_1 sont projectifs, ils sont sans torsion, et l'on a $\mathrm{Hom}_E(S,E)=\mathrm{Hom}_E(S,I_0)=0$ et $\mathrm{Ext}^1_S(S,E)=\mathrm{Hom}_E(S,I_1)=0$ pour tout module simple de torsion S. Il s'ensuit que tout module projectif est S-fermé. Réciproquement, si P est S-fermé, soit $0\to P\to J_0\to J_1 \ldots$ sa résolution injective minimale. Comme J_0 et J_1 sont sans torsion, leurs facteurs directs indécomposables sont des enveloppes injectives de modules simples sans torsion. Ils sont donc isomorphes à des facteurs directs de I_0 et sont projectifs. Comme J_0 et J_1 sont projectifs et que la dimension globale de E est ≤ 2, il s'ensuit que P est projectif.

(i) =>(iv) : clair.

(iv) =>(iii) : Le foncteur-inclusion $\mathrm{proj}\, E\to \mathrm{mod}\, E$ s'identifie au foncteur $P\mapsto \mathrm{Hom}(E,P)$. Il commute donc avec la construction des noyaux, ce qui prouve la première partie de (iii). D'autre part, dans la catégorie $\mathrm{Mod}\, E$ de tous les E-modules à droite, les limites inductives filtrantes de modules projectifs sont plates, donc projectives. Il s'ensuit facilement que la catégorie $\mathrm{Proj}\, E$ de tous les E-modules à droite projectifs est abélienne, que les limites inductives filtrantes y sont exactes (elles commutent avec le foncteur-inclusion $\mathrm{Proj}\, E\to \mathrm{Mod}\, E$) et que E_E est un générateur de $\mathrm{Proj}\, E$. Le foncteur-inclusion $\mathrm{Hom}(E,?) : \mathrm{Proj}\, E\to \mathrm{Mod}\, E$ possède donc un adjoint à gauche exact ([32]), de sorte qu'il transforme injectifs en injectifs. Si $0\to E\to J_0\to J_1 \ldots$ est une résolution injective de E dans $\mathrm{Proj}\, E$, J_0 et J_1 sont à la fois projectifs et injectifs dans $\mathrm{Mod}\, E$, et la suite $0\to E\to J_0\to J_1$ est exacte dans $\mathrm{Mod}\, E$, ce qui entraîne la deuxième partie de (iii).

(i)<=>(v) : résulte de (i)<=>(iv) si l'on tient compte de l'antiéquivalence $\mathrm{proj}\, E \xrightarrow{\sim} \mathrm{proj}\, E^{op}$, $P\mapsto \mathrm{Hom}_E(P,E)$.

2.5 L'intérêt de la proposition d'Auslander réside dans le fait qu'on sait comment vérifier si une algèbre donnée E satisfait à la condition (iii), alors qu'il est difficile de vérifier si une algèbre A est de représentation finie ou non. L'inconvénient est que les algèbres d'Auslander se prêtent moins à "l'expérimentation" que les algèbres de représentation finie, dont on connaît beaucoup d'exemples de petite dimension, alors que par leur définition même les algèbres d'Auslander sont beaucoup plus grosses.

Un des résultats de Riedtmann est que les avantages des algèbres d'Auslander prévalent sur leurs inconvénients. En fait, sa classification fournit à la fois les algèbres auto-injectives de représentation finie et leurs algèbres d'Auslander. Mais la description des algèbres d'Auslander est à la fois plus simple et plus frappante, et notre chemin passe par elles. Qu'on nous pardonne donc d'avoir insisté sur les sorites précédents, plus ou moins triviaux.

Résumons le problème posé: Soit A une algèbre de représentation finie, et désignons par $D : \mathrm{mod}\, A \to \mathrm{mod}\, E$ le foncteur $X \mapsto \mathrm{Hom}_A(M,X)$, les notations étant celles de 2.1. Si $P \in \mathrm{mod}\, A$ est projectif, $DP \in \mathrm{mod}\, E$ est projectif et sa "coiffe" $DP/\mathrm{rad}\, DP$ est sans torsion. De même, si $I \in \mathrm{mod}\, A$ est injectif, $DI \in \mathrm{mod}\, E$ est injectif et son socle est sans torsion. La classification des algèbres auto-injectives de représentation finie se ramène donc à celle des algèbres d'Auslander pour lesquelles les modules projectifs de coiffe sans torsion coïncident avec les modules injectifs de socle sans torsion.

3. Détermination d'une algèbre par carquois et relations

3.1 Un carquois est formé de points et de flèches. Le carquois K_E d'une algèbre E a pour points les types de modules simples. Si $S, T \in \mathrm{mod}\, E$ sont deux modules simples de types i et j, le nombre de flèches de K_E allant de j vers i est égal à $[\mathrm{Ext}^1_E(S,T) : k]$. Ainsi $k[T]/T^n$ a pour carquois $\cdot\!\circlearrowleft^T$, $k[X,Y]/(X^2,XY,Y^2)$ a pour carquois ${}^X\!\circlearrowleft\!\cdot\!\circlearrowright^Y$. L'algèbre des matrices triangulaires $T_4 = \{(a_{ij}) \in k^{4\times 4} : a_{ij} = 0 \text{ pour } i > j\}$ a pour carquois $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4$.

Si K est un carquois, une flèche composée de K allant de i vers j est une suite de points et de flèches $(j|\alpha_n,\dots,\alpha_1|i)$ telle que $n \geq 0$, $i = \mathrm{source}(\alpha_1)$, $\mathrm{but}(\alpha_m) = \mathrm{source}(\alpha_{m+1})$ pour $1 \leq m < n$ et $\mathrm{but}(\alpha_n) = j$; lorsque $n = 0$, nous supposons $i = j$. L'algèbre $k[K]$ du carquois K a pour k-base les flèches composées, la multiplication étant définie par la formule

$$(m|\beta_p,\dots,\beta_1|\ell)(j|\alpha_n,\dots,\alpha_1|i) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq \ell \\ (m|\beta_p,\dots,\beta_1,\alpha_n,\dots,\alpha_1|i) & \text{si } j = \ell\,. \end{cases}$$

3.2 Toute algèbre sobre E est un quotient de l'algèbre de son carquois: En effet, soit $1_E = e_1 + \dots + e_r$ une partition de l'unité en idempotents primitifs orthogonaux deux à deux. A une telle partition est associée la décomposition $E = e_1E \oplus \dots \oplus e_rE$ de E_E en somme directe de projectifs indécomposables, dont les "coiffes" $e_iE/e_i\,\mathrm{rad}\, E$ représentent les différents types de modules simples. Nous pouvons donc identifier ces types aux nombres naturels $1,2,\dots,r$. Posant $R = \mathrm{rad}\, E$, on voit facilement que

$$[e_iRe_j : e_iR^2e_j] = [\mathrm{Ext}^1_E(e_iE/e_iR, e_jE/e_jR) : k]$$

$= [\mathrm{Ext}^1_E(Ee_j/Re_j, Ee_i/Re_i) : k] =$ nombre n_{ij} de flèches de j vers i,

et l'on peut choisir, pour tout couple (i,j), des éléments $f^1_{ij},\ldots,f^{n_{ij}}_{ij} \in e_iRe_j$ dont les classes modulo $e_iR^2e_j$ forment une base de $e_iRe_j/e_iR^2e_j$. Ceci nous fournit un homomorphisme surjectif d'algèbres

$$\phi : k[K_E] \to E$$

qui envoie $(i||i)$ sur e_i et les n_{ij} flèches de j vers i sur $f^1_{ij},\ldots,f^{n_{ij}}_{ij}$. On peut donc décrire E au moyen de K_E et d'un système de générateurs r_α de l'idéal bilatère $\mathrm{Ker}\,\phi$ (les "relations $r_\alpha=0$"). Dans le cas de $k[T]/T^n$, $k[K_E]$ s'identifie à l'algèbre de polynomes $k[T]$ et $\mathrm{Ker}\,\phi$ est déterminé par la seule relation $T^n=0$. Dans le cas de $k[X,Y]/(X^2,XY,Y^2)$, $k[K_E]$ est l'algèbre associative libre engendrée par X et Y, et $\mathrm{Ker}\,\phi$ est déterminé par les relations $X^2=XY=YX=Y^2=0$. Dans le cas de T_4 enfin, on a $\mathrm{Ker}\,\phi=0$ et $k[K_{T_4}] \xrightarrow{\sim} T_4$.

3.3 Notre propos est de décrire par carquois et relations les algèbres d'Auslander des algèbres auto-injectives de représentation finie. Reprenons donc les notations de 2.1: Soient A une algèbre de représentation finie, $M_1,\ldots,M_r$ une suite de représentants des indécomposables de $\mathrm{mod}\,A$, M leur somme directe et $E=\mathrm{End}_A M$. A la décomposition donnée de M est associée la partition de l'unité $1_E = e_1+\ldots+e_r$, où $e_i \in E$ designe la projection de M sur M_i qui annule les autres facteurs. Dans notre numérotation des indécomposables de A nous plaçons en queue de liste les projectifs (et injectifs) indécomposables, soit $M_{s+1},\ldots,M_r$ ($n=r-s$ est le nombre de modules simples). Nous appelons algèbre stable associée à A le quotient $\bar{E} = E/\sum_{i>s} Ee_iE$. La notion d'algèbre stable remonte à [5],[34] : si l'on appelle homotopes deux morphismes $f,g \in \mathrm{Hom}_A(X,Y)$ dont la différence $g-f$ se factorise par un projectif, $\bar{E}$ est l'algèbre des classes d'homotopie des endomorphismes de M. Le carquois de $\bar{E}$ s'obtient à partir de celui de E en biffant les n derniers points et les flèches attenantes. D'après 2.5 les points biffés sont les types de E-modules simples sans torsion.

Théorème (Riedtmann [27],[28],[29]) : L'algèbre stable $\bar{E}$ associée à une algèbre auto-injective de représentation finie connexe a pour carquois le quotient de $\mathbb{Z}A_n$, $\mathbb{Z}D_n$, $\mathbb{Z}E_6$, $\mathbb{Z}E_7$ ou $\mathbb{Z}E_8$ par un groupe d'automorphismes

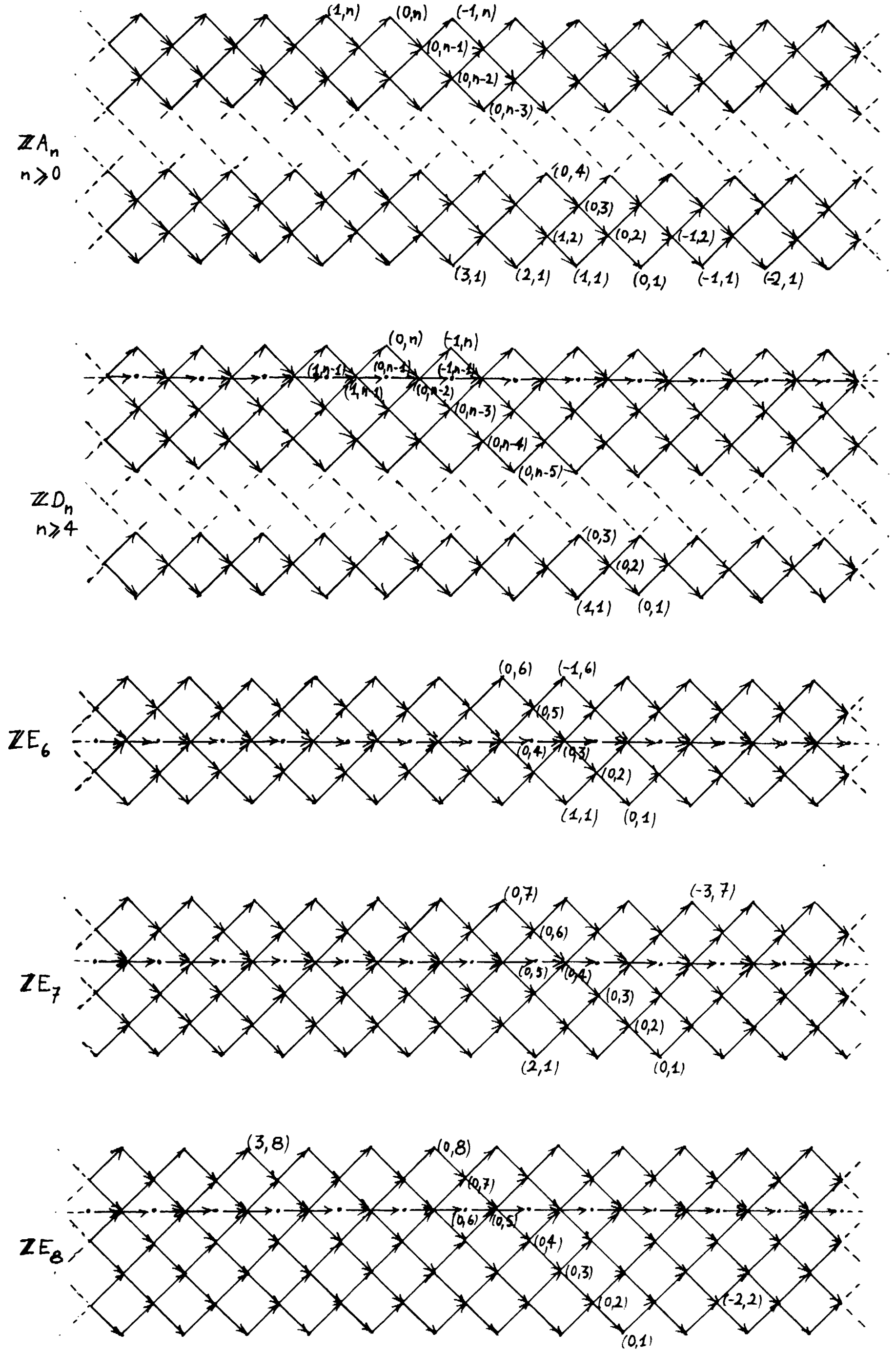
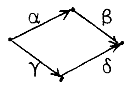
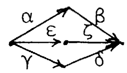

ℤA_n
n ≥ 0
(1,n)
(0,n)
(-1,n)
(0,n-1)
(0,n-2)
(0,n-3)
(0,4)
(0,3)
(1,2)
(0,2)
(-1,2)
(3,1)
(2,1)
(1,1)
(0,1)
(-1,1)
(-2,1)
ℤD_n
n ≥ 4
(0,n)
(-1,n)
(1,n-1)
(0,n-1)
(-1,n-1)
(0,n-2)
(0,n-3)
(0,n-4)
(0,n-5)
(0,3)
(0,2)
(1,1)
(0,1)
ℤE_6
(0,6)
(-1,6)
(0,5)
(0,4)
(0,3)
(0,2)
(1,1)
(0,1)
ℤE_7
(0,7)
(-3,7)
(0,6)
(0,5)
(0,4)
(0,3)
(0,2)
(2,1)
(0,1)
ℤE_8
(3,8)
(0,8)
(0,7)
(0,6)
(0,5)
(0,4)
(0,3)
(0,2)
(-2,2)
(0,1)

fig. 1

admissible. Les relations peuvent être choisies de la manière suivante:

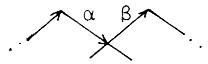
A chaque maille simple 

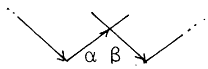
est associée la relation $\beta\alpha+\delta\gamma=0$.

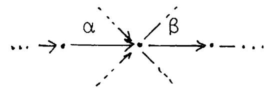
A chaque maille double 

est associée la relation $\beta\alpha+\delta\gamma+\zeta\varepsilon=0$

A chaque maille bordante de la forme





ou


est associée la relation $\beta\alpha=0$.

Un groupe d'automorphismes est dit admissible si le carquois-quotient (qui a pour points les classes de points, pour flèches les classes de flèches) n'a ni lacet $\circlearrowleft$ ni double-flèche $\cdot\rightrightarrows\cdot$. En fait, lorsque G parcourt les groupes admissibles, les quotients $\mathbb{Z}A_n/G$, $\mathbb{Z}D_n/G$ ... ne sont pas tous des carquois d'algèbres stables. Il y a d'autres restrictions que nous découvrirons plus loin.

3.4 Nous nous contentons de quelques indications sur la démonstration du théorème 3.3. Avec les notations de 3.2 il est clair que les applications $f_{ij}^{\ell}?: e_jE \to e_iE$ fournissent une présentation projective minimale

$$\bigoplus_j (e_jE)^{n_{ij}} \xrightarrow{(f_{ij}^{\ell})} e_iE \longrightarrow e_iE/e_iR \longrightarrow 0$$

du module simple e_iE/e_iR de type i . Deux cas sont possibles:

a) $i>s$, i.e. e_iE/e_iR est sans torsion. Dans ce cas, e_iE/e_iR est contenu dans un module projectif, donc est de dimension projective ≤ 1 , et (f_{ij}^{ℓ}) est injectif.

Réciproquement, supposons e_iE/e_iR de dimension projective ≤ 1: si e_iE/e_iR est projectif, il est sans torsion. Si la dimension projective est 1 , (f_{ij}^{ℓ}) est injectif et non nul. Comme on a $\mathrm{Hom}_E(e_iE,E)\xrightarrow{\sim} Ee_i$, on voit que $\mathrm{Ext}_E^1(e_iE/e_iR,E)$ s'identifie au conoyau de l'application $Ee_i \to \bigoplus_j (Ee_j)^{n_{ij}}$, $x \mapsto (x\,f_{ij}^{\ell})$. Comme $f_{ij}^{\ell} \in R = \mathrm{rad}\,E$, ce conoyau n'est pas nul. Il s'ensuit que e_iE/e_iR est de dimension projective ≤ 1 ssi e_iE/e_iR est sans torsion.

b) $i \leq s$, i.e. e_iE/e_iR est de torsion. Dans ce cas nous affirmons que la résolution projective minimale de e_iE/e_iR est de la forme

$$0 \longrightarrow e_hE \xrightarrow{(g_{jh}^{m})} \bigoplus_j (e_jE)^{n_{ij}} \xrightarrow{(f_{ij}^{\ell})} e_iE \longrightarrow e_iE/e_iR \longrightarrow 0 ,$$

où $g_{jh}^m \in e_j R e_h$, où les classes $\bar{g}_{jh}^m$ des g_{jh}^m modulo $e_j R^2 e_h$ forment une base de $e_j R e_h / e_j R^2 e_h$, et où $h \leq s$.

En effet, partons plus généralement d'un module de torsion $T \in \mathrm{mod}\, E$ et de sa résolution projective minimale

$$(1) \qquad 0 \to P_2 \xrightarrow{g} P_1 \xrightarrow{f} P_0 \to T \to 0$$

Pour tout $N \in \mathrm{mod} E$ posons $E^* = \mathrm{Hom}_E(N,E) \in \mathrm{mod}\, E^{op}$. Comme on a $\mathrm{Hom}_E(T,E) = \mathrm{Ext}_E^1(T,E) = 0$, la suite précédente donne par transposition une suite exacte

$$(2) \qquad 0 \to P_0^* \xrightarrow{f^*} P_1^* \xrightarrow{g^*} P_2^* \to T' \to 0$$

avec $T' = \mathrm{Ext}_E^2(T,E) \in \mathrm{mod}\, E^{op}$. Nous affirmons que T' est de torsion: sinon on aurait un morphisme non nul $h: P_2^* \to E$ tel que $hg^* = 0$, et par conséquent $gh^* = 0$; ceci contredirait l'injectivité de g.

Comme la construction $T \mapsto T'$ est réversible, il s'ensuit que (2) est une résolution projective minimale de $T' \in \mathrm{mod}\, E^{op}$, et que le foncteur $T \mapsto T' = \mathrm{Ext}_E^2(T,E)$ est une antiéquivalence de la catégorie des E-modules à droite de torsion sur celle des E-modules à gauche de torsion. En particulier, si T est simple, T' l'est et g^* s'identifie à la présentation projective minimale

$$\bigoplus_j (Ee_j)^{n_{ij}} \xrightarrow{(g_{jh}^m)} Ee_h \to T' \to 0$$

d'un E-module à gauche simple de torsion. Comme T' est de torsion, h parcourt les nombres de 1 à r à l'exception de $n=r-s$ d'entre eux. Comme d'autre part $e_h E$ ne peut être injectif, les valeurs $s+1,\dots,r$ sont exclues. Il s'ensuit que l'application $i \mapsto h$ est une permutation de l'ensemble $\{1,2,\dots,s\}$: c'est la <u>permutation d'Auslander-Reiten</u>.

3.5 Dans ce qui précède les réminiscences d'algèbre commutative sont évidentes. En fait, on a une interprétation plus directe des phénomènes de dualité observés en interprétant les résolutions projectives précédentes au niveau des A-modules. Soit $D: \mathrm{mod}\, A \to \mathrm{mod}\, E$ le foncteur tel que $DX = \mathrm{Hom}_A(M,X)$. On a alors $e_i E \xrightarrow{\sim} DM_i$ et les suites exactes

$$0 \to e_h E \xrightarrow{(g_{jh}^m)} \bigoplus_j (e_j E)^{n_{ij}} \xrightarrow{(f_{ij}^\ell)} e_i E$$

s'obtiennent au moyen de D à partir de suites exactes

$$0 \to M_h \xrightarrow{\gamma} \bigoplus_j M_j^{n_{ij}} \xrightarrow{\phi} M_i \to 0$$

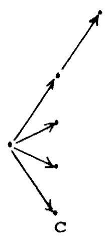
de $\mathrm{mod}\,A$, les suites "presque scindées" d'Auslander-Reiten [4] .

Le fait que $\oplus(e_jE)^{n_{ij}} \to e_iE \to e_iE/e_iR \to 0$ soit une présentation projective implique au niveau de la suite d'Auslander-Reiten que tout morphisme non bijectif $M_t \to M_i$ se factorise à travers ϕ . Tenant compte de ce que $\mathrm{Hom}_E(M_h,M) \tilde{\to} Ee_h$ on voit de même que la présentation projective $\oplus(Ee_j)^{n_{ij}} \to Ee_h \to Ee_h/Re_h \to 0$ assure à la suite d'Auslander-Reiten une propriété duale: tout morphisme non bijectif $M_h \to M_t$ se factorise à travers γ .

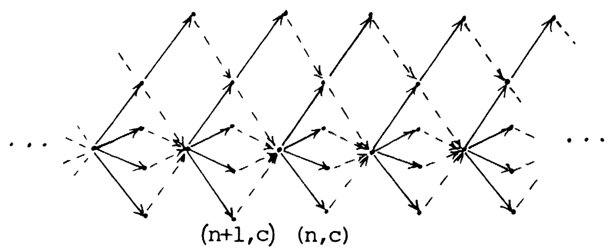
Nous n'en dirons pas beaucoup plus, devant nous contenter ici de lancer quelques slogans et de renvoyer les lecteurs intéressés aux études détaillées. Ajoutons simplement qu'on déduit des relations entre E et suites d'Auslander-Reiten que le carquois de E n'a ni lacet ni double-flèche ([6],[2,3],[27]) . La même propriété vaut pour le carquois de $\bar{E}$. De plus, d'après les observations faites, les points de $\bar{E}$ sont soumis à la permutation d'Auslander-Reiten π , qui a la propriété suivante: pour tout sommet x de $K_{\bar{E}}$, les sources des flèches de but x coïncident avec les buts des flèches de source πx . Riedtmann exprime les propriétés ainsi décrites de $K_{\bar{E}}$ en disant que $K_{\bar{E}}$ est un carquois de représentation stable.

Théorème (Riedtmann) [27]: Tout carquois de représentation stable est de la forme $\mathbb{Z}B/G$, où B est un arbre orienté et G un groupe d'automorphismes admissible du carquois de représentation stable $\mathbb{Z}B$ décrit ci-dessous.

Si B est un arbre orienté, $\mathbb{Z}B$ a pour points les couples $(n,b) \in \mathbb{Z} \times B$. La permutation d'Auslander-Reiten de $\mathbb{Z} \times B$ applique (n,b) sur $(n+1,b)$. Enfin, à toute flèche $\phi : b \to c$ de B sont associées deux suites de flèches $(n,\phi) : (n,b) \to (n,c)$ et $(n,\bar{\phi}) : (n+1,c) \to (n,b)$ de $\mathbb{Z}B$.



B



$\mathbb{Z}B$

Lorsque B est obtenu à partir des diagrammes de Dynkin A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 par orientation des arêtes, $\mathbb{Z}B$ est l'un des carquois décrits en 3.3. Pour terminer la démonstration du théorème 3.3 il reste d'une part à exclure les arbres qui ne sont pas de Dynkin. Cette partie de la démonstration est analogue à celle d'un théorème similaire obtenu indépendamment par Gel'fand et Ponomarjow ([15], [27]). Il reste d'autre part à trouver un système adéquat de relations. Pour cela Riedtmann allie des arguments combinatoires à l'interprétation donnée du carquois de $\bar{E}$ au moyen des suites d'Auslander-Reiten.

4. Description des algèbres d'Auslander des algèbres auto-injectives de représentation finie

4.1 Soit E l'algèbre d'Auslander d'une algèbre auto-injective de représentation finie A . S'appuyant sur le théorème 3.3 on peut supposer connue l'algèbre stable $\bar{E} = E/\sum_{i>s} Ee_iE$ et essayer de reconstruire E à partir de $\bar{E}$. Avec les identifications de 3.2 et 3.3, le carquois $K_{\bar{E}}$ de $\bar{E}$ a pour points les nombres naturels $1,\dots,s$ (les points "de torsion"), auxquels nous devons ajouter les nombres $s+1,\dots,r$ (les points "sans torsion") pour obtenir les points de K_E . Quelles sont les flèches à rajouter à $K_{\bar{E}}$?

Soient P un A-module projectif indécomposable et J son radical. Le radical du E-module $DP = \mathrm{Hom}_A(M,P)$ est formé des applications A-linéaires $f : M \to P$ dont aucune composante $f_i = f|M_i$ n'est inversible. Comme P est projectif et M_i indécomposable, une telle composante f_i ne peut être surjective; elle se factorise donc par J , et le radical de DP s'identifie à $DJ = \mathrm{Hom}_A(M,J)$. En d'autre termes, si $P \tilde{\to} M_j$, $j > s$, et si $J \tilde{\to} M_i$, $i \leq s$, le carquois K_E de E contient une seule flèche aboutissant à j , et cette flèche part de i . De façon duale, si S désigne le socle de P et si $P/S \tilde{\to} M_\ell$, $\ell \leq s$, K_E contient une seule flèche partant de j , et cette flèche aboutit à ℓ . Il s'ensuit que la suite d'Auslander-Reiten d'extrémité M_ℓ est de la forme

$$0 \to M_i \to Q \to M_\ell \to 0 \quad ,$$

P étant un facteur de Q . En particulier, on a $\pi\ell = i$, si $\pi : \{1,\dots,s\} \to \{1,\dots,s\}$ est le permutation d'Auslander-Reiten. En résumé, si l'on connaît la position des points $i \in K_{\bar{E}}$ associés aux radicaux des A-modules projectifs indécomposables, on obtient K_E à partir de $K_{\bar{E}}$ en adjoignant à $K_{\bar{E}}$ un point p_i pour tout i , ainsi que des flèches $i \to p_i \to \pi^{-1}(i)$.

Il reste donc à savoir, où peuvent se trouver les points i associés aux radicaux des projectifs indécomposables. L'ensemble R de ces points i est soumis aux contraintes suivantes: a) pour tout point q de $K_{\bar{E}}$, il existe un $i \in R$ et un $\ell \in R$ tels que $\bar{e}_i \bar{E} \bar{e}_q \neq 0 \neq \bar{e}_q \bar{E} \bar{e}_\ell$. b) Si $i, \ell \in R$, on a $[\bar{e}_i \bar{E} \bar{e}_\ell : k] = \delta_{i\ell}$ ($\bar{e}_i$ désigne la classe de e_i modulo $\sum_{j>s} Ee_j E$). Ces contraintes s'introduisent de la manière suivante: la <u>catégorie stable</u> $\underline{\mathrm{mod}}\, A$, qui a les mêmes objets que $\mathrm{mod}\, A$, mais dont les morphismes sont les classes d'homotopie d'applications A-linéaires, est munie d'une auto-équivalence naturelle, le <u>foncteur-lacet</u> Ω <u>de Heller</u>, qui associe à tout $M \in \mathrm{mod}\, A$ le noyau de sa couverture projective. Dans cette équivalence, les radicaux des projectifs indécomposables correspondent aux A-modules simples. La condition a) provient de ce que tout module non nul contient un simple et se projette sur un simple. Quant à la condition b), c'est le lemme de Schur!

4.2 Il s'avère que les conditions a) et b) sont les seules contraintes imposées à R. Ceci nous amène à la description suivante des algèbres E, due à Riedtmann: Soit K l'un des carquois $\mathbb{Z}A_n$, $\mathbb{Z}D_n$, $\mathbb{Z}E_6$, $\mathbb{Z}E_7$ ou $\mathbb{Z}E_8$ de 3.3. Si x,y sont deux points de K, soit $k(x,y)$ l'espace vectoriel libre engendré par les flèches composées allant de x à y. Les espaces $k(x,y)$ fournissent une catégorie kK, qui a pour objets les points de K, pour espaces de morphismes les espaces $k(x,y)$. Nous désignons par $k[K]$ la <u>catégorie résiduelle</u> obtenue à partir de kK en imposant aux flèches composées les relations associées aux "mailles" de K et décrites dans le théorème 3.3.

Ceci fait, nous appelons <u>configuration</u> de K tout ensemble C de points de K tel que: a) pour tout point q de K, il existe des points $i \in C$ et $\ell \in C$ tels que $\mathrm{Hom}_{k[K]}(q,i) \neq 0 \neq \mathrm{Hom}_{k[K]}(\ell,q)$. b) si $i, \ell \in C$, on a $[\mathrm{Hom}_{k[K]}(\ell,i) : k] = \delta_{i\ell}$. Par exemple, les carquois $\mathbb{Z}E_6$, $\mathbb{Z}E_7$ et $\mathbb{Z}E_8$ donnent naissance respectivement à 22, 143 et 598 configurations non congrues deux à deux. Nous décrirons plus loin les configurations des carquois $\mathbb{Z}A_n$. Pour $\mathbb{Z}D_n$ nous renvoyons à [28].

A toute configuration C de K nous pouvons associer un carquois K_C en ajoutant à K des points p_i et des flèches $i \xrightarrow{\eta_i} p_i \xrightarrow{\theta_i} \pi^{-1}(i)$ pour tout $i = (n,x) \in C$ $(\pi^{-1}(i) = (n-1,x))$.

<u>Théorème</u> (Riedtmann): Soit $K = \mathbb{Z}A_n$, $\mathbb{Z}D_n$, $\mathbb{Z}E_6$, $\mathbb{Z}E_7$ ou $\mathbb{Z}E_8$. <u>Soient</u> C <u>une configuration de</u> K <u>et</u> $G \neq \{1\}$ <u>un groupe d'automorphismes admissible de</u> K <u>tel que</u> $GC = C$. <u>Munissons le carquois-quotient</u> K_C/G <u>des relations suivantes:</u>

A toute maille de K_C/G de source $\bar{i} \notin C/G$, nous associons la relation décrite dans le théorème 3.3.

A toute maille de K de source $i \in C$ et de la forme

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & j_1 \arrow[dr, "\beta_1"] & \\
i \arrow[ur, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_t"'] & \vdots & \ell = \pi^{-1}(i) \\
 & j_t \arrow[ur, "\beta_t"'] &
\end{tikzcd} \quad , \qquad 1 \leq t \leq 3$$

nous associons la relation $\bar\beta_1\bar\alpha_1+\ldots+\bar\beta_t\bar\alpha_t+\bar\theta_i\bar\eta_i = 0$ de K_C/G, où $\bar\phi$ désigne la classe modulo G d'une flèche ϕ de K_C.

Alors l'algèbre définie par le carquois K_C/G et les relations précédentes est l'algèbre d'Auslander d'une algèbre auto-injective et de représentation finie. Réciproquement, toute algèbre d'Auslander d'une algèbre auto-injective de représentation finie est de cette forme si k est de caractéristique $\neq 2$.

Pour la démonstration nous renvoyons à [28],[29].

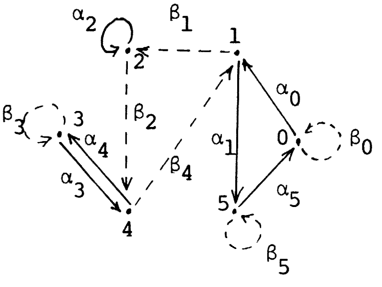
4.3 Configurations de $\mathbb{Z}A_n$. Posons $e_n(x) = \exp(2i\pi\frac{x}{n})$. Avec cette notation, $e_n(\mathbb{Z})$ n'est autre que le polygone régulier des racines n-ièmes de l'unité. Une relation de Brauer B dans $e_n(\mathbb{Z})$ est par définition une relation d'équivalence telle que les enveloppes convexes des classes d'équivalence soient disjointes. Si une telle relation B est donnée, nous désignons par α_B la permutation de $e_n(\mathbb{Z})$ associant à un point $s \in e_n(\mathbb{Z})$ le premier point de la classe d'équivalence de s qui vient après s dans l'orientation trigonométrique du cercle unité.

Proposition [14]: Soient B une relation de Brauer dans $e_n(\mathbb{Z})$ et C_B l'ensemble des points (i,j) de $\mathbb{Z}A_n$ tels que $e_n(i+j) = \alpha_B e_n(i)$. Alors C_B est une configuration de $\mathbb{Z}A_n$, et l'application $B \mapsto C_B$ est une bijection entre les relations de Brauer dans $e_n(\mathbb{Z})$ et les configurations de $\mathbb{Z}A_n$.

Voir figure 2.

Il résulte en particulier de la proposition précédente que toute configuration de $\mathbb{Z}A_n$ est stable sous la translation $\pi^n : (i,j) \mapsto (i+n,j)$. En règle générale, le groupe des automorphismes de $\mathbb{Z}A_n$ laissant stable C_B est engendré par π^n. Dans le cas particulier où $G = \pi^{n\mathbb{Z}}$, nous allons décrire ici l'algèbre A, auto-injective et de représentation finie, dont l'algèbre d'Auslander est définie par le carquois $(\mathbb{Z}A_n)_{C_B}/G$ et les relations du théorème 4.2. Pour cela nous adjoignons à α_B la permutation β_B de $e_n(\mathbb{Z})$ telle que

$\beta_B e_n(x) = \alpha_B^{-1} e_n(x+1)$, $x \in \mathbb{Z}$. Ceci dit, nous associons à tout point $s \in e_n(\mathbb{Z})$ deux flèches de source s : une "α-flèche" $\alpha_s : s \to \alpha_B(s)$ et une "β-flèche" $\beta_s : s \to \beta_B(s)$. Ceci nous fournit un carquois Q_B :



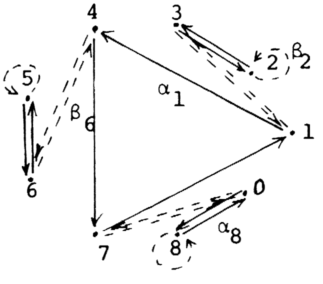
Pour tout s nous désignons par as et bs les cardinaux des orbites $\alpha_B^{\mathbb{Z}} s$ et $\beta_B^{\mathbb{Z}} s$, par α^{as} le composé des α-flèches de sources $s, \alpha_B s, \ldots, \alpha_B^{as-1} s$, par β^{bs} le composé des β-flèches de sources $s, \beta_B s, \ldots, \beta_B^{bs-1} s$. L'algèbre A^{op} est alors définie par le carquois Q_B et les relations suivantes:

a) $\quad \alpha_s \beta_{\beta_B^{-1} s} = 0 = \beta_s \alpha_{\alpha_B^{-1} s}$, $\forall\, s \in e_n(\mathbb{Z})$.

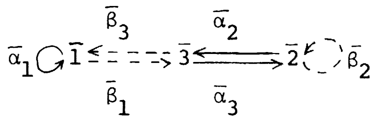
b) $\quad \alpha^{as} + \beta^{bs} = 0$, $\forall\, s \in e_n(\mathbb{Z})$.

4.4 Dans les deux cas suivants le groupe des automorphismes de $(\mathbb{Z}A_n, C_B)$ est plus grand que $\pi^{n\mathbb{Z}}$.

a) Il existe un nombre $e|n$ tel que B soit stable sous la permutation $\gamma^e : e_n(x) \mapsto e_n(x+e)$.



On peut alors choisir $G=\pi^{e\mathbb{Z}}$ (si $e=1$ on retrouve la situation décrite en 4.3: si e est minimal, G est le groupe de tous les automorphismes de $\mathbb{Z}A_n$ laissant stable C_B). Dans ce cas, l'algèbre A^{op} est définie par le carquois $Q^B/\gamma^{e\mathbb{Z}}$



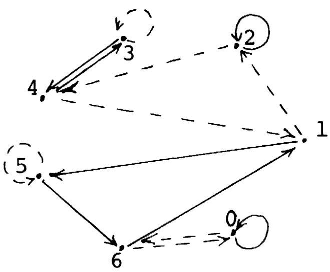
et par les relations

$$0 = \bar\alpha_s\, \bar\beta_{\beta_B^{-1}s} = \bar\beta_s\, \overline{\alpha_{\alpha_B^{-1}s}} = \overline{\alpha^{as}} + \overline{\beta^{bs}}$$

associées aux points $s\in e_n(\mathbb{Z})$ ($\bar\phi$ désigne la classe modulo $\gamma^{e\mathbb{Z}}$ d'une flèche composée ϕ de Q_B). Ainsi, dans le cas de l'exemple donné, les relations sont: $0 = \bar\alpha_1\bar\beta_3 = \bar\beta_1\bar\alpha_1 = \bar\alpha_3\bar\beta_1 = \bar\beta_3\bar\alpha_2 = \bar\alpha_2\bar\beta_2 = \bar\beta_2\bar\alpha_3 = \bar\alpha_1^3 + \bar\beta_3\bar\beta_1 = \bar\alpha_2\bar\alpha_3 + \bar\beta_1\bar\beta_3 = \bar\alpha_3\bar\alpha_2 + \bar\beta_2$.

Le cas traité ici est celui des algèbres de groupes (voir [14]) .

b) Il existe un automorphisme τ du carquois Q_B qui échange les α-flèches et les β-flèches (dans ce cas n est nécessairement impair et τ est une involution):



Dans ce cas, la configuration C_B est stable sous l'automorphisme $\sigma : (i,j)\mapsto (i+j-\frac{n+1}{2}, n+1-j)$ (symétrie par rapport à la "médiane" de $\mathbb{Z}A_n$; voir figure 3). Le groupe des automorphismes de $\mathbb{Z}A_n$ laissant stable C_B est alors $\pi^{n\mathbb{Z}}\times\sigma^{\mathbb{Z}}$. Un sous-groupe admissible est de la forme $\pi^{nq\mathbb{Z}}$ ou $(\pi^{nq}\sigma)^{\mathbb{Z}}$, $q\geq 1$. Dans le cas où $G=(\pi^{nq}\sigma)^{\mathbb{Z}}$, le carquois $(\mathbb{Z}A_n)_B/G$ est un "ruban de Möbius" .

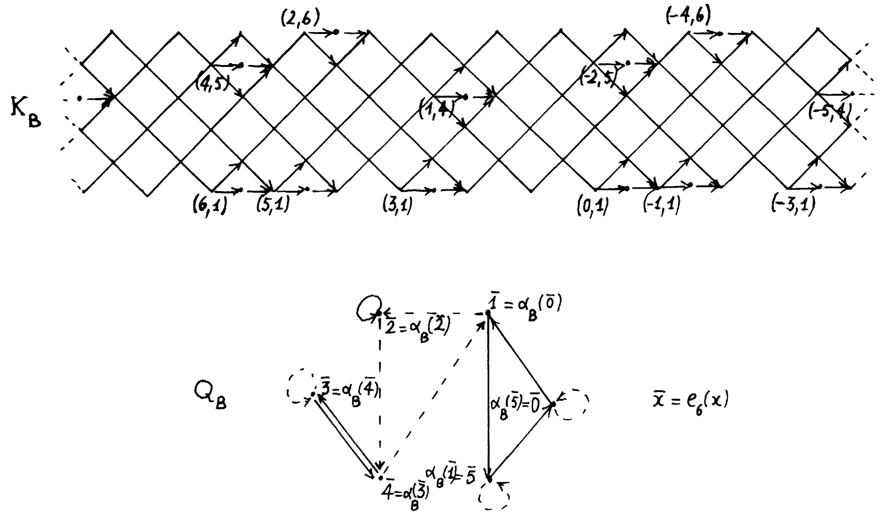

K_B
(2,6)
(-4,6)
(4,5)
(-2,5)
(1,4)
(-5,4)
(6,1)
(5,1)
(3,1)
(0,1)
(-1,1)
(-3,1)
Q_B
x̄ = e_6(x)

fig. 2

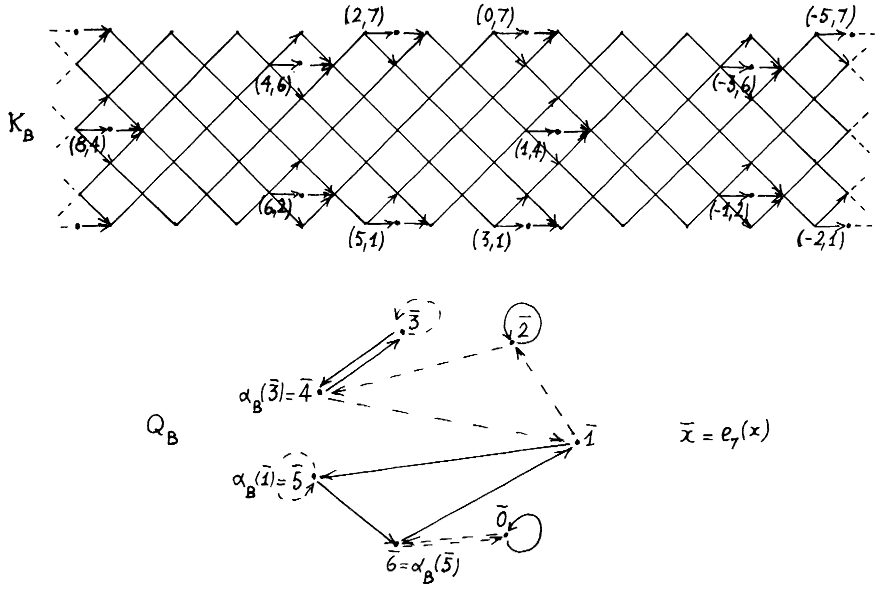

K_B
(2,7)
(0,7)
(-5,7)
(4,6)
(-3,6)
(8,4)
(1,4)
(6,2)
(-1,2)
(5,1)
(3,1)
(-2,1)
Q_B
x̄ = e_7(x)

fig. 3

Bibliographie

[1] AUSLANDER M. : Representation theory of Artin algebras II, Comm. Algebra (1974), 269-310

[2] AUSLANDER M. and REITEN I. : Representation theory of algebras III, Comm. Algebra (1975),239-294.

[3] AUSLANDER M. and REITEN I. : Representation theory of algebras IV, Comm. Algebra (1977), 443-518.

[4] AUSLANDER M. and REITEN I. : Representation theory of algebras VI, Comm. Algebra (1978)

[5] AUSLANDER M. and REITEN I. : Stable equivalence of Artin algebras, Proc. Conf. on Orders, group rings and related topics, Springer Lecture Notes No 353,8-71.

[6] BAUTISTA R. : Irreducible maps and the radical of a category, preprint

[7] BERNSTEIN I.N., GEL'FAND I.M. and PONOMARJOV V.A.: Coxeter functors and Gabriel's theorem, translated in Russian Math. Surveys 28 (1973), 17-32.

[8] BONGARTZ K. : Zykellose Algebren sind nicht zügellos, Proceedings of the 2nd Int. Conf. on Rep. of Alg., Ottawa 1979, to appear in Springer Lecture Notes.

[9] CURTIS C.W. and REINER I. : Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, Wiley, New York 1962.

[10] DADE E.C. : Blocks with cyclic defect groups, Ann. of Math. 84 (1966), 20-48

[11] DLAB V. and RINGEL C.M. : Indecomposable representations of graphs and algebras, Memoirs Amer. Math. Soc. No 173, Providence (1976).

[12] GABRIEL P. : Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. Fr. (1962), 323-448

[13] GABRIEL P. : Indecomposable representations II, Symp. Math. Ist. Naz. Alta Mat. (1973), 81-104

[14] GABRIEL P. and RIEDTMANN Chr. : Group representations without groups, Comm. Math. Helv. (1979), 240-287.

[15] GEL'FAND I.M. and PONOMARJOV V.A. : Model algebras and representations of graphs (russian), Funct. Anal. 13 (1979), 1-12.

[16] GREEN J.A. : Walking around the Brauer tree, J. Austral. Math. Soc. 17 (1974), 197-213.

[17] HIGMAN D.G. : Indecomposable representations at characteristic p , Duke Math. J. 21 (1954), 377-381.

[18] JANUSZ G.J. : Indecomposable Modules for finite groups, Ann. of Math. 89 (1969), 209-241.

[19] KASCH F., KNESER M. und KUPISCH H. : Unzerlegbare modulare Darstellungen endlicher Gruppen mit zyklischer p-Sylow-Gruppe, Arch. Math. 8(1957), 320-321.

[20] KUPISCH H. : Projektive Moduln endlicher Gruppen mit zyklischer p-Sylow-Gruppe, J. of Alg. 10 (1968), 1-7.

[21] KUPISCH H. : Unzerlegbare Moduln endlicher Gruppen mit zyklischer p-Sylow-Gruppe, Math. Z. 108 (1969) 77-104.

[22] KUPISCH H. : Basisalgebren symmetrischer Algebren und eine Vermutung von Gabriel, Math. Z. (to appear)

[23] KUPISCH H. : Quasi-Frobenius algebras of finite representation type, Proceedings of the 2^{nd} Int. Conf. on Rep. of Alg., Ottawa 1979, to appear in Springer Lecture Notes.

[24] LOUPIAS M. : Représentations indécomposables des ensembles ordonnés finis, Thèse 1975 (Tours).

[25] MICHLER G. : Green correspondence between blocks with cyclic defect groups I, J. of Alg. 39 (1976), 26-51.

[26] PEACOCK R.M. : Blocks with a cyclic defect group, J. of Alg. 34 (1975), 232-259.

[27] RIEDTMANN Chr. : Algebren, Darstellungsköcher, Ueberlagerungen und zurück, to appear in Comm. Math. Helv. (1979).

[28] RIEDTMANN Chr. : Representation-finite self-injective algebras of class A_n and D_n , Proceedings of the 2^{nd} Int. Conf. on Rep. of Alg., Ottawa 1979, to appear in Springer Lecture Notes.

[29] RIEDTMANN Chr. : Representation-finite self-injective algebras of class E_6, E_7 and E_8 , to appear.

[30] SCHERZLER E. and WASCHBUESCH J. : A class of self-injective algebras of finite representation type, Proc. of the 2^{nd} Int. Conf. on Rep. of Alg., Ottawa 1979, to appear in Springer Lecture Notes.

[31] STORRER H.H. : Rings of quotients of perfect rings, Math. Z. 122 (1971), 151-165.

[32] ULMER F. : A flatness criterion in Grothendieck Categories, Inventiones 19 (1973), 331-336

[33] ZAVADSKIJ A.G. and NAZAROVA L.A. : Partially ordered sets of tame type, in Matrix problems (russian), Kiev 1978.

[34] ECKMANN B. : Homotopie et dualité, Col. de Top. Alg., Louvain 1956, 41-53.

Pierre GABRIEL,
Mathematisches Institut
Universität Zürich
Freiestrasse 36
8032 Zürich