LUC LEMAIRE

Existence des applications harmoniques et courbure des variétés

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. n° 553, p. 174-195
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1979-1980__22__174_0>

Séminaire BOURBAKI
32e année, 1979/80, n° 553

EXISTENCE DES APPLICATIONS HARMONIQUES ET COURBURE DES VARIÉTÉS

par Luc LEMAIRE

Dans ce rapport, nous présentons un bref panorama de la théorie des applications harmoniques entre variétés riemanniennes, en insistant sur deux aspects : l'existence des applications harmoniques et les conséquences pour l'étude des variétés.

La première partie est consacrée à la définition des applications harmoniques, à la description de leurs propriétés fondamentales et à divers exemples.

La deuxième partie décrit les principaux résultats obtenus à ce jour en ce qui concerne l'existence des applications harmoniques . Pour abréger l'exposé, nous traitons le cas des variétés compactes sans bord en indiquant sans commentaire les généralisations possibles . Nous présentons le principe des démonstrations, mais sans expliciter les estimations souvent difficiles permettant de conclure à l'existence ou la régularité des solutions des équations aux dérivées partielles considérées.

Finalement, nous présentons quelques résultats récents sur la structure des variétés (réelles ou complexes) obtenus au moyen des applications harmoniques.

D'autres développements sont possibles, en particulier dans l'étude des surfaces minimales et des applications holomorphes, mais nous n'avons traité ces sujets que dans la mesure où ils mènent à une étude des variétés elles-mêmes.

Nous renvoyons à [2] pour un exposé plus complet des résultats antérieurs à 1978 et pour une bibliographie plus étendue.

Je tiens à remercier Monsieur J. Eells qui m'a, au cours des années, expliqué de nombreux aspects de cette théorie.

I. Définition et propriétés des applications harmoniques

1. Applications harmoniques

(1.1) Soient M,g et N,h des variétés riemanniennes connexes et C^∞, que nous supposons, sauf mention du contraire, compactes et sans bord. Nous notons TM et TN les fibrés tangents qui sont munis des connexions de Levi-Civita associées aux métriques.

La densité d'énergie $e(\phi)$ d'une application $\phi \in C^\infty(M,N)$ est définie en un point par $e(\phi) = \frac{1}{2}|d\phi|^2$, où $|\ |$ désigne la norme de Hilbert-Schmidt de l'application $d\phi_x : T_xM, g_x \longrightarrow T_{\phi(x)}N, h_{\phi(x)}$ $(x \in M)$.

L'énergie de ϕ est le nombre $E(\phi) = \int_M e(\phi)\, v_g$ où v_g est l'élément de volume associé à g.

En coordonnées locales $\{x^i\}$ sur M et $\{u^\alpha\}$ sur N,

$$e(\phi) = \frac{1}{2}\, g^{ij}\, h_{\alpha\beta}(\phi)\, \phi_i^\alpha\, \phi_j^\beta \quad \text{où } \phi_i^\alpha = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i}.$$

(1.2) Par définition, une application $\phi \in C^\infty(M,N)$ est harmonique ssi elle est extrémale de la fonctionnelle E.

Une application harmonique satisfait à l'équation d'Euler-Lagrange $\tau(\phi) = 0$, où la tension $\tau(\phi)$ est exprimée en coordonnées locales par $\tau(\phi)^\alpha = g^{ij}\,(\phi_{ij}^\alpha - {}^M\Gamma_{ij}^k\, \phi_k^\alpha + {}^N\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(\phi)\, \phi_i^\beta\, \phi_j^\gamma)$, les Γ représentant les symboles de Christoffel des connexions sur TM et TN. En effet, on vérifie [4] que pour une déformation ϕ_t de l'application ϕ définie au premier ordre par $\phi_o = \phi$, $\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{t=0} = X$, on a

$$D_X E(\phi) = \left.\frac{d}{dt} E(\phi_t)\right|_{t=0} = - \int_M h(\tau(\phi), X)\, v_g.$$

X et $\tau(\phi)$ apparaissent comme des champs de vecteurs le long de ϕ, c'est-à-dire des sections du fibré $\phi^{-1}TN$, dont la fibre en $x \in M$ est $T_{\phi(x)}N$.

(1.3) Globalement, la tension τ peut s'interpréter comme suit (voir par exemple [2]) : $d\phi$ est une section du fibré $T^*M \otimes \phi^{-1}TN$, où T^*M est le fibré cotangent à M . Notant ∇ la dérivée covariante de la connexion induite sur $T^*M \otimes \phi^{-1}TN$ par les connexions de TM et TN, on a $\tau(\phi) = \text{trace } \nabla d\phi$.

(1.4) Une application harmonique est donc solution d'un système d'équations aux dérivées partielles elliptique quasi-linéaire du second ordre, dont la partie linéaire est le laplacien de ϕ^α : $\Delta\phi^\alpha = g^{ij}(\phi^\alpha_{ij} - \Gamma^k_{ij}\,\phi^\alpha_k)$. La forme de ce système implique les conséquences suivantes.

(1.5) Prolongement unique [25] : Si deux applications harmoniques coïncident en un point ainsi que toutes leurs dérivées, alors elles sont égales.

(1.6) Régularité : Pour abréger les définitions, considérons un plongement riemannien de N dans un espace euclidien R^q (ce qui est toujours possible si q est assez grand).

On dit qu'une application mesurable $\phi : M \longrightarrow N$ est de classe de Sobolev L^2_1 ssi sa composée Φ avec le plongement est de la même classe, c'est-à-dire satisfait $\int (|\Phi|^2 + |d\Phi|^2)\, v_g < \infty$. L'espace de Sobolev associé est donc défini par

$L^2_1(M,N) = \{\Phi \in L^2_1(M,R^q) \mid \Phi(x) \in N \text{ presque partout}\}$ et apparaît comme un sous-ensemble fermé de l'espace de Hilbert $L^2_1(M,R^q)$.

Notons qu'il peut également être défini intrinsèquement [19, p 378-383].

L'énergie est une fonction différentiable sur $L^2_1(M,N) \cap C^0(M,N)$, et on montre que toute application (faiblement) harmonique (c'est-à-dire extrémale de E) de cet espace est de classe C^∞.

Par contre, nous verrons qu'une application faiblement harmonique dans $L^2_1(M,N)$ n'est pas nécessairement continue.

2. Exemples

(2.1) Si M est le cercle S^1, une application harmonique de M dans N est une géodésique, paramétrisée proportionnellement à l'élément de longueur . En effet, les équations se réduisent à

$\ddot{u}^\alpha + {}^N\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\,\dot{u}^\beta\,\dot{u}^\gamma = 0.$

(2.2) Si $N = R^n$, elles se réduisent aux équations linéaires $\Delta\phi^\alpha = 0$, et les solutions sont les fonctions harmoniques . Si M est compacte, ces fonctions sont constantes par le principe du maximum . Par contre [7] , toute variété non compacte M de dimension m admet un plongement propre $M \to R^{2m+1}$ par une application harmonique.

(2.3) Soit $\phi : M \to N$ une immersion riemannienne, c'est-à-dire une immersion satisfaisant $\phi^* h = g$. Sa deuxième forme fondamentale $H = \nabla d\phi$ est donnée par $H^\alpha_{ij} = \phi^\alpha_{ij} - {}^M\Gamma^k_{ij}\, \phi^\alpha_k + {}^N\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(\phi)\, \phi^\beta_i\, \phi^\gamma_j$ et sa courbure moyenne est la trace de H divisée par dim M, c'est-à-dire $\tau(\phi) / m$.

Une immersion riemannienne est minimale (c'est-à-dire extrémale de la fonctionnelle volume $V(\phi) = \int \left(\frac{\text{dét } \phi^* h}{\text{dét } g}\right)^{\frac{1}{2}} v_g$) ssi sa courbure moyenne est nulle . Cette condition est donc équivalente à $\tau(\phi) = 0$.

(2.4) L'exemple suivant joue un rôle important par des résultats récents de la théorie.

Soit M,J une variété complexe (J : multiplication par i dans les espaces tangents) . Rappelons qu'une métrique g sur M est hermitienne si $\forall\, x \in M$ et $X, Y \in T_x M$, $g_x(JX,JY) = g_x(X,Y)$, et est kählerienne si de plus $\nabla J = 0$. Si ω désigne la deux-forme associée $\omega(X,Y) = g(X,JY)$, $\nabla J = 0$ ssi $d\omega = 0$.

Le complexifié $T^{\mathbb{C}}_x M$ de l'espace tangent en x se décompose en les espaces propres de l'extension de J pour les valeurs propres $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$: $T^{\mathbb{C}}_x M = T^{1,0}_x M + T^{0,1}_x M$. (En coordonnées locales $\{z^i = x^i + \sqrt{-1}\, y^i\}$, c'est la décomposition en $\frac{\partial}{\partial z^i}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar z^i}$) . Cette séparation en types complexes s'étend au dual et aux différents espaces de tenseurs et de p-formes.

Si $\phi \in C^\infty(M,N)$, $d\phi$ s'étend en $d\phi^{\mathbb{C}} : T^{\mathbb{C}} M \to T^{\mathbb{C}} N$ et par composition avec l'inclusion et la projection on définit $\partial\phi : T^{1,0} M \to T^{\mathbb{C}} M \to T^{\mathbb{C}} N \to T^{1,0} N$. $\partial\phi$ (représentée en coordonnées locales par $\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial z^i}$) peut être vue comme une section de $T^*_{1,0} M \otimes \phi^{-1} T^{1,0} N$ ou comme une (1,0)-forme sur M à valeurs dans $\phi^{-1} T^{1,0}(N)$.

De même, on définit $\bar\partial\phi = \left(\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \bar z^i}\right) : T^{0,1} M \to T^{1,0} N$,

$\partial\bar\phi = \left(\frac{\partial \overline{\phi^\alpha}}{\partial z^i}\right) : T^{1,0} M \to T^{0,1} N$ et $\bar\partial\bar\phi = \left(\frac{\partial \overline{\phi^\alpha}}{\partial \bar z^i}\right) : T^{0,1} M \to T^{0,1} N$. On observe que $\partial\bar\phi = \overline{\bar\partial\phi}$ (conjuguée complexe) et $\bar\partial\bar\phi = \overline{\partial\phi}$. ϕ est holomorphe (resp. antiholomorphe) si $\bar\partial\phi = 0$ (resp. $\partial\phi = 0$) . Une application satisfaisant une de ces deux conditions sera dite $\pm$ holomorphe.

Toute application $\pm$ holomorphe entre variétés kähleriennes est harmonique [4] . Ce résultat reste valable lorsqu'on affaiblit partiellement les hypothèses sur les variétés [14], mais on observe toutefois qu'une application $\pm$ holomorphe entre variétés hermitiennes n'est pas nécessairement harmonique.

Bien entendu, une application harmonique entre variétés kähleriennes n'est pas $\pm$ holomorphe en général . Toutefois, les résultats des §8, 10 et 11 sont obtenus en prouvant la $\pm$ holomorphie d'applications harmoniques satisfaisant diverses conditions.

On définit $e'(\phi) = |\partial\phi|^2$, $e''(\phi) = |\bar\partial\phi|^2$, $E'(\phi) = \int_M e'(\phi)\, v_g$ et $E''(\phi) = \int_M e''(\phi)\, v_g$. On a alors $e(\phi) = e'(\phi) + e''(\phi)$ et on montre [14] que $e'(\phi) - e''(\phi) = \langle\omega^M, \phi^*\omega^N\rangle$ et que $E'(\phi) - E''(\phi)$ est constant sur toute classe d'homotopie, par la condition $d\omega^N = 0$. Dès lors les minima (ou les extrémales) de E, E' ou E'' sont minima (ou extrémales) des deux autres intégrales.

(2.5) Soit $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel réel des 1-formes harmoniques sur M, avec la structure euclidienne définie par le produit scalaire global, et $\mathcal{H}^*$ son dual . Soit $p : \tilde M \to M$ le revêtement universel et $\tilde a$ un point fixé de $\tilde M$. On définit l'application $\tilde\alpha : \tilde M \to \mathcal{H}^*$ par $\tilde\alpha(\tilde x)(\omega) = \int_{\tilde a}^{\tilde x} p^*\omega$. Pour $\gamma \in \Pi_1(M, p\tilde a)$ (le premier groupe d'homotopie), on pose $\psi(\gamma) = \tilde\alpha(\gamma\tilde a)$. ψ est un homomorphisme de $\Pi_1(M, p\tilde a)$ dans $\mathcal{H}^*$, dont l'image est un réseau Γ . On forme alors le tore $\mathcal{H}^*/\Gamma = A$ et $\tilde\alpha$ se projette en l'application d'Albanese $\alpha : M \to A$.

α est une application harmonique et de plus ([15], [20]), toute application harmonique de M dans un tore plat est la composée de α et d'une application affine.

(2.6) Soit $\Phi : R^m \to R^n$ une application dont les composantes sont des polynômes harmoniques homogènes de degré k, telle que $\Phi(S^{m-1}) \subset S^{n-1}$, la sphère unité . La restriction $\bar\phi : S^{m-1} \to R^n$ satisfait alors $\Delta\bar\phi = \lambda\bar\phi$ où $\lambda = k(k+m-2)$, ce qui signifie que ses composantes sont des fonctions propres du laplacien sur la sphère . La tension de l'application induite $\phi : S^{m-1} \to S^{n-1}$ est la projection orthogonale de $\tau(\bar\phi) = \Delta\bar\phi$ sur S^{n-1} et est donc nulle, ce qui montre que ϕ est harmonique.

On connaît divers exemples de ces applications harmoniques particulières, notamment les fibrations de Hopf $S^3 \to S^2$, $S^7 \to S^4$ et

$S^{15} \to S^8$ [33].

(2.7) Soit $G_{n,m}$ la grassmannienne des m-plans passant par l'origine de R^n . Pour une immersion riemannienne $M \to R^n$ (ou $M \to T^n$, un tore plat), l'application de Gauss $\gamma : M \to G_{n,m}$ associe à tout point de M le m-plan tangent à M en ce point, translaté à l'origine de R^n.
E. Ruh et J. Vilms ont établi [21] que la dérivée covariante dans le fibré normal de la courbure moyenne de l'immersion est nulle ssi γ est harmonique . Si, par exemple, M est orientable et $n = m+1$, γ applique M dans S^{n-1} et est harmonique ssi M est à courbure moyenne constante.

3. Etude au deuxième ordre de l'énergie

(3.1) Sur la variété M,g, nous notons $R^M(X,Y) = -\nabla_X \nabla_Y + \nabla_Y \nabla_X + \nabla_{[X,Y]}$ le tenseur de courbure, Ric^M le tenseur de Ricci défini par $Ric^M(X,Y) = \text{trace } (Z \to R(X,Z)Y)$ et ρ^M la courbure scalaire, trace du tenseur de Ricci.

Nous écrivons que $R^M \leqslant 0$ si la courbure sectionnelle $g(R(X,Y)X,Y)$ est négative ou nulle pour tout point x de M et tout bivecteur $X \wedge Y$ normé en x .

(3.2) La formule suivante est calculée dans [4] : <u>si $\phi : M \to N$ est harmonique, alors</u>

$$\Delta e(\phi) = |\nabla d\phi|^2 + < Ric^M d_v\phi, d_v\phi > - < R^N(\phi)(d_v\phi, d_w\phi)d_v\phi, d_w\phi >.$$

Ici, < > représente le produit scalaire induit par g ou h et la répétition des indices v et w indique la contraction - par exemple, $< Ric^M d_v\phi, d_v\phi >$ représente $R^{ij} \ \phi_i^\alpha \ \phi_j^\beta \ h_{\alpha\beta}(\phi)$.

(3.3) Observons immédiatement quelques conséquences de cette formule, qui serviront de modèle à des applications ultérieures . Comme M est compacte, nous pouvons intégrer :

$$0 = \int_M \Delta e(\phi) \ v_g = \int_M (|\nabla d\phi|^2 + <Ric^M d_v\phi, d_v\phi> - <R^N(\phi)(d_v\phi, d_w\phi)d_v\phi, d_w\phi>) v_g.$$

Supposons $Ric^M \geqslant 0$ et $R^N \leqslant 0$. Tous les termes sont alors non négatifs et donc nuls et on en déduit [4] que

- toute application harmonique est totalement géodésique (c.-à-d. $\nabla d\phi = 0$),
- si Ric^M est strictement positive en un point, toute application harmonique est constante,
- si R^N est négative, toute application harmonique est constante ou a une géodésique comme image.

(3.4) Comme premier exemple d'application, ces résultats et le théorème d'existence (5.1) ci-dessous impliquent qu'une variété riemannienne compacte M telle que $R^M \leq 0$ n'admet pas de métrique à courbure de Ricci positive et non identiquement nulle [4].

(3.5) Ces résultats admettent une version dans le cas où M est non compacte [26] . Par ailleurs, ils ont été appliqués au cas kählerien par des calculs analogues effectués sur e' et e" [14].

(3.6) Pour étudier le comportement de l'énergie au voisinage d'une application harmonique, on considère sa variation seconde ([16], [34]). <u>Si</u> v <u>et</u> w <u>sont des champs de vecteurs le long de</u> ϕ <u>et</u> $\Phi_{s,t}$ <u>une variation de</u> ϕ <u>à deux paramètres telle que</u> $\tau(\phi) = 0$,

$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right|_{(s,t) = 0} = v$, $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{(s,t) = 0} = w$, <u>on a</u>

$$\begin{aligned} H_\phi(v,w) &= \left.\frac{\partial^2 E(\Phi_{s,t})}{\partial s\, \partial t}\right|_{(s,t) = 0} \\ &= -\int_M \langle \operatorname{Trace} \nabla_\phi^2\, v + \operatorname{Trace} R^N(d\phi,v)d\phi, w\rangle\, v_g \\ &\equiv \int_M \langle J_\phi v, w\rangle\, v_g \end{aligned}$$

<u>où</u> ∇_ϕ <u>est la dérivée covariante dans le fibré</u> $\phi^{-1}TN$.

Les solutions de $J_\phi v = 0$ sont appelées champs de Jacobi et la nullité de ϕ est la dimension de l'espace qu'ils forment . L'index de ϕ est la dimension du sous-espace maximal sur lequel H_ϕ est défini négatif . Comme J_ϕ est elliptique et symétrique, ces deux nombres sont finis.

(3.7) Si $R^N \leq 0$ et ϕ harmonique, alors $H_\phi(v,v) \geq 0\ \forall\, v$ et ϕ est un minimum local de E (voir aussi (5.3)) . En général il n'en est pas de même, et des applications simples ne sont pas des minima . Par exemple, pour $m \geq 3$, l'index de l'identité sur S^m est m+1 . Dans certaines situations décrites dans [34], un changement de métrique peut rendre l'index d'une application donnée arbitrairement grand.

II. Existence des applications harmoniques

Le problème d'existence s'énonce comme suit : existe-t-il des applications harmoniques dans les différentes classes d'homotopie d'applications de M vers N, c'est-à-dire dans les composantes connexes de $C^\infty(M,N)$?

Nous allons passer en revue les principaux résultats obtenus à ce jour. Sauf mention explicite, nous supposons toujours M et N compactes et sans bord.

4. Géodésiques

(4.1) Des méthodes de Hilbert (1900) permettent de démontrer que toute classe d'homotopie de courbes fermées contient une application harmonique (voir aussi (7.3))

5. Courbure sectionnelle négative ou nulle

(5.1) J. Eells et J. Sampson ont démontré dans [4] que si $R^N \leq 0$, alors toute classe d'homotopie d'applications de M vers N contient un représentant harmonique.

Leur démonstration est basée sur un processus de déformation : partant d'une application ϕ_o donnée, ils considèrent pour un paramètre réel positif t la solution $\phi(x,t)$ de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial t} = \tau(\phi) \\ \phi(x,0) = \phi_o(x). \end{cases}$$

Le long de la solution, l'énergie décroît car

$$\frac{dE}{dt} = -\int_M \langle\tau(\phi),\frac{\partial\phi}{\partial t}\rangle\, v_g = -\int_M |\tau(\phi)|^2\, v_g.$$

L'idée est de démontrer que la solution existe pour tout t et converge (pour une suite de $t \to \infty$) vers un minimum de l'énergie.

Sans hypothèse sur la courbure, il n'en serait pas ainsi : on ne sait pas encore si la solution existerait pour tout t, mais de toute façon il n'y aurait pas en général convergence vers une application harmonique, puisqu'une telle application n'existe pas toujours (8.3).

Pour $R^N \leqslant 0$ par contre, une formule analogue à (3.2) obtenue en remplaçant Δ par $\Delta - \frac{\partial}{\partial t}$ permet d'obtenir des majorations uniformes en t sur toutes les dérivées de la solution, ce qui mène à la conclusion.

(5.2) Ce résultat reste valable si N est non compacte mais satisfait une condition de croissance ([4], [2,§5.2.a]).

Il a par ailleurs été étendu au cas des variétés à bord (homotopie relative à un problème de Dirichlet, de Neumann, mixte) par R.Hamilton [8] . Utilisant ce résultat, R. Schoen et S.-T.Yau ont établi des analogues de (5.1) pour des variétés M non compactes ([26], [29]).

Signalons également une autre démonstration de (5.1) par K. Uhlenbeck [35], dans l'esprit de (7.9).

(5.3) L'hypothèse $R^N \leqslant 0$ garantit aussi une forme d'unicité . En étudiant la distance entre deux solutions de l'équation de la chaleur, P. Hartman a montré dans [9] que deux applications harmoniques homotopes le sont via des applications harmoniques . Si $R^N < 0$, il n'y a qu'une application harmonique par classe d'homotopie, sauf si l'application est constante ou d'image réduite à une géodésique, auquel cas les rotations du cercle fournissent les seules autres applications harmoniques . Dans tous ces cas, toute application harmonique minimise E dans la classe.

Dans le cas analytique réel, ce résultat a été raffiné par R. Schoen et S-T. Yau, qui montrent [29] que pour $R^N \leq 0$, l'espace des applications harmoniques homotopes à une application donnée s'identifie à une sous-variété totalement géodésique immergée dans N.

(5.4) Ces résultats sont appliqués dans [29] à l'étude des actions de groupes compacts sur des variétés s'appliquant de façon donnée dans une variété à courbure négative ou nulle et dans [36] à une étude directe du groupe fondamental des variétés à courbure négative.

6. Applications entre sphères

(6.1) Nous avons vu en (2.6) que les polynômes harmoniques homogènes fournissent des exemples d'applications harmoniques entre sphères. Une réponse plus systématique à la question d'existence est donnée par un résultat de R. T. Smith [33] . Soient $M = N = S^m$, muni de la métrique canonique . Les classes d'homotopie sont paramétrisées dans ce cas par le degré des applications (c'est-à-dire l'image du générateur par le morphisme induit sur le m^e groupe de cohomologie) qui prend toute valeur entière . Si $m \leq 7$, toute classe d'homotopie d'applications de M dans N contient un représentant harmonique.

(6.2) Le principe de la démonstration est de réduire la dimension du problème par un analogue d'une suspension pour se ramener à une équation différentielle ordinaire.

(6.3) Plus précisément, soient $\phi : S^{p-1} \to S^{q-1}$ et $\psi : S^{r-1} \to S^{s-1}$ deux polynômes harmoniques homogènes de degrés l et k . L'application $\phi * \psi : S^{p+r-1} \to S^{q+s-1}$ définie par

$\phi * \psi(x,y) = \left(\sin\alpha(t).\phi\left(\frac{x}{|x|}\right), \cos\alpha(t).\psi\left(\frac{y}{|y|}\right)\right)$ où $x \in R^p$, $y \in R^q$,
$t = \log\left(\frac{|x|}{|y|}\right)$ a une tension nulle ssi $\alpha(t)$ satisfait l'équation

$$\ddot\alpha(t) + (e^t + e^{-t})^{-1}\left[(p-2)e^{-t} - (r-2)e^{t}\right]\dot\alpha(t)$$
$$+\left[k(k+r-2)e^{t} - l(l+p-2)e^{-t}\right]\sin\alpha(t)\cos\alpha(t) = 0$$

avec $\alpha(-\infty) = 0$, $\alpha(+\infty) = \frac{\Pi}{2}$.

Si $l > \theta(p-2)$ et $k > \theta(r-2)$, où $\theta = (\sqrt{2} - 1)/2$, un théorème de comparaison montre que cette équation a une solution et une étude en $t = \pm\infty$ montre que $\phi*\psi$ est C^∞ partout, et donc harmonique . Pour r ou p = 1, une variante de l'équation mène au même résultat.

(6.4) Par exemple, si $\phi = id|_{S^{p-1}}$ et $\psi : S^1 \to S^1$ est induite par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: $z \to z^k$, les conditions sont satisfaites si $p < 7$ et $\phi*\psi$ est de degré k, ce qui établit (6.1). On ne possède pas d'information sur les dimensions supérieures.

(6.5) La même construction, utilisant d'autres applications polynomiales, fournit des applications harmoniques dans divers autres cas.

(6.6) Une variante de la construction mène à l'exemple suivant . Soit $E^n(b) = \{(x,y) \in R^n \times R \mid b^2 |x|^2 + y^2 = b^2\}$ un ellipsoïde de révolution . Pour $n \geqslant 3$ et b suffisamment grand, il n'existe pas de suspension harmonique $S^n \to E^n(b)$ de l'identité sur S^{n-1} . On ne sait pas s'il existe néanmoins une application harmonique de degré un de S^n dans $E^n(b)$.

7. Applications de surfaces

(7.1) Pour $\phi \in C^0(M,N)$, nous notons $[\phi_*] = \{\alpha\phi_*\alpha^{-1} \mid \alpha \in \Pi_1(N)\}$: $\Pi_1(M) \to \Pi_1(N)$ la classe de conjugaison d'homomorphismes de $\Pi_1(M)$ dans $\Pi_1(N)$ induite par le transport des lacets par ϕ (la conjugaison provenant des changements possibles de point base).

Soient M une surface et N une variété . Pour toute classe $[\theta] : \Pi_1(M) \to \Pi_1(N)$, il existe une application harmonique $\phi : M \to N$ telle que $[\phi_*] = [\theta]$, minimisant E parmi les applications possèdant cette propriété.

Si de plus $\Pi_2(N) = 0$, les classes $[\theta]$ paramétrisent les classes d'homotopie et on obtient une application harmonique dans chacune de ces dernières.

Ce résultat a été établi dans [12], [22-23] et [27] par des méthodes différentes, que nous décrivons brièvement.

(7.2) Méthode directe. Considérons une classe H d'applications, à préciser ultérieurement, et une suite minimisante (ϕ_s) dans H, c'est-à-dire une suite telle que $\lim_{s\to\infty} E(\phi_s) = \inf_H E$. $\{\phi_s\}$ est borné dans $L_1^2(M,N)$ et contient donc une sous-suite (ϕ_r) convergeant presque partout et faiblement vers une application $\phi \in L_1^2(M,N)$. On montre que $E(\phi) \leqslant \lim E(\phi_r)$.

Si on peut établir que ϕ est continue et que l'homotopie ou l'action sur les groupes fondamentaux peut être contrôlée, on obtiendra un théorème d'existence.

(7.3) Si dim M = 1, $L_1^2(M,N) \subset C^o(M,N)$ et la convergence faible implique la convergence uniforme . On peut prendre pour H une classe d'homotopie de courbes de $L_1^2(S^1,N)$ et déduire l'existence d'une géodésique dans H.

(7.4) Si dim M = 2, il n'en est plus de même . Néanmoins, on dispose d'un théorème de régularité de C.B.Morrey [18] : si $\phi \in L_1^2(M,N)$ minimise l'énergie sur tout disque suffisamment petit de M parmi les applications coïncidant avec ϕ sur le bord du disque, alors ϕ est continue et donc C^∞.

(7.5) Lorsque dim M $\geqslant$ 3, S. Hildebrandt, H. Kaul et K. O. Widman ont établi un résultat similaire, mais à condition que l'image de ϕ soit contenue dans une boule de N de rayon borné par une fonction de la courbure.

Par contre, ils observent que l'application de la boule unité de R^m $(m \geqslant 3)$ dans la sphère unité $S^m \subset R^{m+1}$ définie presque partout en coordonnées euclidiennes par $\phi(x^1,\dots,x^m) = (x^1/|x|,\dots,x^m/|x|,0)$ est une extrémale de classe L_1^2 de E (pour un problème de Dirichlet) mais n'est évidemment pas continue [10] . Ceci semble limiter les possibilités d'application de la méthode directe pour dim M $\geqslant$ 3 lorsque R^N est positive par endroits.

(7.6) En ce qui concerne le contrôle de l'homotopie, on observe pour dim M $\geqslant$ 2 qu'une suite minimisante d'applications contenues dans une classe d'homotopie peut converger faiblement vers une application d'une autre classe (ce sera le cas dans (8.3)) . Cette difficulté motive les constructions de (7.7) et (8.5) ci-dessous.

(7.7) Deux approches sont possibles pour établir (7.2).

Suivant [12] on peut, pour un ϕ_* donné, utiliser une méthode directe pour prouver l'existence d'une application harmonique $\bar{\phi}$ entre les revêtements universels de M et N, satisfaisant $\bar{\phi}\circ\gamma = \phi_*(\gamma)\circ\bar{\phi} \quad \forall\, \gamma \in \Pi_1(M)$. En effet, de telles relations fonctionnelles sont préservées par une limite faible . La projection de $\bar{\phi}$ en $\phi : M \to N$ induit alors la classe donnée $[\phi_*]$.

On peut par ailleurs [27] établir qu'une application $\phi \in L_1^2(M,N)$ induit une classe d'homomorphismes $[\phi_*]$, définie sur un lacet l comme l'action (que l'on démontre commune) de ϕ sur presque tous les lacets parallèles à l contenus dans un voisinage tubulaire et sur lesquels ϕ est continue . Cette action est également préservée par une limite faible.

(7.8) Signalons que le théorème d'existence (7.2) peut s'appliquer au cas de certaines variétés produits [11].

(7.9) Perturbation de l'énergie . Comme nous l'avons vu, ce n'est qu'en dimension un que l'existence des applications harmoniques découle trivialement d'une méthode directe, ceci parce que $L_1^2(M,N)$ n'est inclus dans $C^0(M,N)$ qu'en cette dimension . Afin d'utiliser néanmoins les méthodes générales du calcul global des variations, J. Sacks et K. Uhlenbeck [22-23] introduisent pour dim M = 2 une énergie perturbée

$$E_\alpha(\phi) = \int_M (1 + |d\phi|^2)^\alpha v_g , \qquad \alpha > 1.$$

E_α est une fonction de classe C^2 sur $L_1^{2\alpha}(M,N) \subset C^0(M,N)$ satisfaisant la condition (C) de Palais et Smale, ce qui fait qu'elle atteint son infimum dans toute classe d'homotopie . L'idée est alors de faire tendre α vers 1, en espérant obtenir comme limite des minima ϕ_α de E_α une application harmonique.

La convergence ainsi obtenue est mieux contrôlée (par des estimations difficiles) . En effet, sur M moins peut-être un nombre fini de points, une sous-suite des ϕ_α converge au sens C^1 vers une application harmonique $\phi : M \to N$ qui induit la même action sur les groupes fondamentaux que les ϕ_α, ce qui démontre (7.2) . En les points exclus, les dérivées de ϕ_α tendent vers l'infini et il apparaît à la limite une application harmonique de R^2 dans N.

Comme les applications harmoniques sont invariantes par transformation conforme du domaine (voir (7.11) ci-dessous), on peut remplacer R^2 par S^2 moins un point . Un lemme de prolongement montre que l'application harmonique s'étend à S^2.

(7.10) Si au départ $M = S^2$, la limite de ce processus fournit un certain nombre d'applications harmoniques de S^2 dans N . Intuitivement, on peut voir ces applications comme limites d'applications de

S^2 dans N dont l'image ressemble à plusieurs sphères jointes par des tubes de plus en plus minces entourant des arcs géodésiques.

Toutes les classes d'homotopie ne sont sans doute pas représentées par des applications harmoniques de S^2 dans N, mais [22-23] modulo l'action de $\Pi_1(N)$ sur $\Pi_2(N)$, les éléments d'une famille de générateurs de $\Pi_2(N)$ admettent une telle représentation.

(7.11) Comme dans le cas linéaire classique, les applications harmoniques servent à l'étude des surfaces minimales.

Nous dirons qu'une application $\psi : M,g \to N,h$ est conforme ssi $\psi^*h = \mu g$, $\mu \in C^\infty(M)$ et $\mu \geq 0$. On vérifie que si M et N sont des surfaces et P une variété, si $\psi : M \to N$ est conforme et $\phi : N \to P$ harmonique, alors ψ et $\phi \circ \psi$ sont harmoniques.

En particulier, le fait que $\phi : N \to P$ soit harmonique ne dépend que de la structure conforme de la surface N.

(7.12) Si ϕ est une application harmonique conforme non-constante d'une surface dans une variété, alors c'est une immersion ramifiée minimale (c'est-à-dire une immersion minimale sauf en des points de ramification isolés où $d\phi = 0$).

(7.13) L'obtention de surfaces minimales est basée sur la version suivante [23] d'un lemme classique : si M est une surface de genre donné et si $\phi : M \to N$ est une extrémale de E pour les variations de ϕ et de la structure conforme de M, alors ϕ est une immersion ramifiée conforme et donc minimale.

(7.14) Si $M = S^2$, il n'y a qu'une structure conforme et toute application harmonique est minimale (en particulier celles de (7.10)) . Voir [6] pour une interprétation de ce résultat en physique des champs.

(7.15) Pour une surface orientable M de genre positif donné et une variété N,h, on peut essayer de minimiser E successivement dans la classe des applications induisant un $[\theta]$ donné pour une structure conforme choisie (ce qui est possible par (7.2)), puis sur l'espace des structures conformes . Dans cette deuxième suite minimisante, une dégénérescence de la surface peut se produire, correspondant à l'apparition d'un tube de plus en plus mince entre deux parties de la surface (comme dans (7.10)) . Dans ce cas, un lacet de $\Pi_1(M)$ tend vers un point dans N . On évite cela par une hypothèse supplémentaire et ([24], [27]) pour toute surface orientable de genre positif et pour tout $[\theta] : \Pi_1(M) \to \Pi_1(N)$ formé de morphismes injectifs, il existe une structure conforme sur M par rapport à laquelle $[\theta]$ est représentée par une immersion minimale ramifiée.

8. Applications entre surfaces

(8.1) Nous considérons ici le problème de l'existence des applications harmoniques entre surfaces orientables (le cas non orientable est traité dans [3] de manière analogue).

Soient M,g et N,h deux surfaces orientables de genres p et q. Elles admettent une structure complexe par rapport à laquelle leur métrique est hermitienne (il suffit de définir J comme rotation d'un quart de tour dans les plans tangents) . Les applications conformes entre surfaces sont alors les applications ± holomorphes.

(8.2) Pour $q \geqslant 1$, $\Pi_2(N) = 0$ et l'existence est garantie par (7.2) . Il reste donc à considérer le cas $N = S^2$.

(8.3) Dans [5], J. Eells and J. Wood ont montré que si M et N sont des surfaces de caractéristiques $\chi(M) = 2 - 2p$ et $\chi(N) = 2 - 2q$, si $\phi : M \to N$ est harmonique de degré d et si $\chi(M) + |d.\chi(N)| > 0$, alors ϕ est ± holomorphe.

Si en particulier $N = S^2$, le degré paramétrise les classes d'homotopie et toute application harmonique telle que $|d| \geqslant p$ est ± holomorphe.

De telles applications n'existent pas si $|d| = p$ est impair et M est hyperelliptique . Par exemple, il n'y a pas d'application harmonique de degré un du tore dans la sphère, quelles que soient les métriques considérées.

(8.4) La démonstration est basée sur l'étude de la composante de type complexe (2,0) du pull back de ϕ par h : $(\phi^*h)^{2,0} = h(\partial\phi,\partial\bar{\phi})$. On vérifie que la différentielle quadratique $(\phi^*h)^{2,0}$ est nulle ssi ϕ est conforme et est holomorphe si ϕ est harmonique . Si ϕ est harmonique non ± holomorphe, $(\phi^*h)^{2,0}$ ne peut donc avoir que des zéros isolés et d'ordre fini et il en est de même de $\partial\phi$ et de $\partial\bar{\phi}$. La condition $\tau(\phi) = 0$ implique que l'ordre des zéros de ces derniers est positif . Or $\partial\phi$ et $\partial\bar{\phi}$ sont des sections des fibrés $T^*_{1,0} M \otimes \phi^{-1}T^{1,0} N$ et $T^*_{1,0} M \otimes \phi^{-1}T^{0,1}N$, dont les classes d'Euler sont donc positives ou nulles . Comme ce sont respectivement $-\chi(M) + d\chi(N)$ et $-\chi(M) - d\chi(N)$, le résultat est établi.

(8.5) Si $N = S^2$ et $|d| \leqslant p - 1$, la situation est différente ([12]-[13]).

D'une part, un minimum de E dans une classe doit être ± holomorphe, et de telles applications n'existent que dans certains cas.

D'autre part, pour tous d et p tels que $|d| \leqslant p-1$, il existe des métriques sur une surface M de genre p et sur la sphère telles qu'une application harmonique de degré d existe entre ces surfaces.

Pour $|d| = 1$, la démonstration de l'existence se fait en définissant sur M et S^2 des métriques possédant un groupe de symétries suffisamment grand pour qu'une application équivariante par rapport à ces groupes (satisfaisant une autre condition géométrique) soit nécessairement de degré 1 . Ces conditions étant respectées par une limite faible, une méthode directe utilisant une variante de (7.4) permet d'établir l'existence d'un minimum de E dans la classe des applications équivariantes de degré 1 . La symétrie de la construction implique que c'est une extrémale de E dans l'espace entier.

Pour $|d| \geqslant 2$, on obtient une application harmonique comme composée de l'une de celles obtenues pour $|d| = 1$ et d'un revêtement ramifié holomorphe approprié.

(8.6) Dans le cas des surfaces à bord, un exemple de non-existence a également été obtenu pour une classe d'homotopie relative à un problème de Dirichlet [12].

(8.7) Ce n'est que pour dim M = 2 que la non-existence d'applications harmoniques a pu être établie, sous des conditions faisant notamment intervenir une restriction topologique . Or, les exemples (7.5) et (6.6) semblent indiquer que la non-existence devrait être un phénomène plus fréquent en dimension supérieure (ce qui n'a pu être prouvé), qui pourrait d'ailleurs être provoqué par un excès de courbure positive, sans obstruction topologique . Nous posons donc la question : soient M et N des variétés de dimensions trois ou plus et H une classe d'homotopie d'applications de rang maximum au moins trois de M vers N ; existe-t-il des métriques sur M et N telles que H ne contienne pas d'application harmonique ?

III. Applications à l'étude des variétés

Nous terminons en décrivant trois applications assez récentes des résultats mentionnés ci-dessus à l'étude des liens entre la courbure et la structure (réelle ou complexe) des variétés . On peut remarquer que ces résultats utilisent des variantes du schéma de (3.4) : on combine l'existence d'une application harmonique et une formule du second ordre introduisant une restriction liée à la courbure. On verra toutefois que ces résultats sont loin de découler d'une répétition mécanique de ce schéma !

9. Variétés de courbure scalaire positive

(9.1) Le résultat suivant est dû à R. Schoen et S.-T. Yau [27] : si N est une variété compacte orientable de dimension trois et si $\Pi_1(N)$ contient un sous-groupe isomorphe au groupe fondamental d'une surface orientable de genre positif, alors N n'admet pas de métrique à courbure scalaire positive . De plus, toute métrique à courbure scalaire positive ou nulle est plate.

(9.2) La première affirmation se démontre comme suit . Par (7.15), il existe une immersion ramifiée minimale d'une surface de genre positif dans N induisant sur les groupes fondamentaux l'inclusion donnée par l'hypothèse . Comme dim N = 3, un résultat de Osserman et Gulliver implique qu'il s'agit en fait d'une immersion non ramifiée.

Soit un champ de bases orthonormées (e_1, e_2, e_3) le long de l'image de M, où e_1 et e_2 sont tangents à M et e_3 normal.

L'aire de M étant minimale dans N, sa variation seconde est positive ou nulle . En particulier $D^2_{e_3} A \geqslant 0$, ce qui donne (par un analogue de (3.6)) :

$$\int_M (R^N_{1313} + R^N_{2323} + \sum_{i,j=1}^{2} H^2_{ij})\, v_g \leqslant 0.$$

En utilisant la formule de Gauss $K = R^N_{1212} + H_{11} H_{22} - H^2_{12}$ (K = courbure de M), la condition de minimalité $H_{11} + H_{22} = 0$ et la formule de Gauss-Bonnet $\int_M K\, v_g \leqslant 0$, il vient $\int_M (\rho + \frac{1}{2} \sum H^2_{ij}) v_g \leqslant 0$, ce qui montre que ρ ne peut être positive.

(9.3) Une extension de cette technique au cas non-compact (utilisant des surfaces minimales obtenues par d'autres méthodes) a permis à R. Schoen et S.-T. Yau de traiter la conjecture de la masse positive en relativité générale [28] .

10. Rigidité des variétés kähleriennes

(10.1) Rappelons qu'une variété kählerienne N est de courbure section-

nelle négative ssi en tout point
$\sum R_{\alpha\bar{\beta}\bar{\delta}\gamma}\ (\xi^\alpha\ \overline{\eta^\beta} - \eta^\alpha\ \overline{\xi^\beta})\overline{(\xi^\delta\ \overline{\eta^\gamma} - \eta^\delta\ \overline{\xi^\gamma})} < 0$ pour tous nombres complexes ξ^α, η^α tels que $\xi^\alpha\ \overline{\eta^\beta} - \eta^\alpha\ \overline{\xi^\beta} \neq 0$ pour au moins une paire d'indices α, β.

On dira que N est à courbure fortement négative si
$\sum R_{\alpha\bar{\beta}\bar{\delta}\gamma}\ (A^\alpha\ \overline{B^\beta} - C^\alpha\ \overline{D^\beta})\overline{(A^\delta\ \overline{B^\gamma} - C^\delta\ \overline{D^\gamma})} < 0$ pour tous nombres complexes A^α, B^α, C^α, D^α tels que $A^\alpha\ \overline{B^\beta} - C^\alpha\ \overline{D^\beta} \neq 0$ pour au moins une paire d'indices α, β.

Par exemple, la métrique invariante sur la boule possède cette propriété.

(10.2) Y.-T. Siu a établi les résultats suivants [30-31] . Soient M et N des variétés kähleriennes compactes, N de courbure fortement négative . Si ϕ : M $\to$ N est harmonique et si son rang est au moins quatre en un point, alors ϕ est $\pm$ holomorphe.

Or par (5.1), une application harmonique existe dans toute classe d'homotopie.

La combinaison de ces deux résultats fournit un théorème d'existence pour les applications $\pm$ holomorphes et on en déduit un théorème de rigidité : si M et N sont des variétés kähleriennes compactes de dimension complexe au moins deux ayant même type d'homotopie, et si N est à courbure fortement négative, alors M et N sont $\pm$ biholomorphiquement équivalentes.

Siu montre également que l'hypothèse de courbure peut être affaiblie (d'une manière plus longue à exposer) de façon à ce que les résultats s'appliquent au cas où N est un quotient compact des domaines symétriques bornés $I_{m,n}$ ($m\ n \geq 2$), II_n ($n \geq 3$), III_n ($n \geq 2$) et IV_n ($n \geq 3$).

(10.3) La démonstration de l'holomorphie part de l'idée suivante. La formule (3.2) ne peut s'appliquer ici à cause du terme Ric^M, provenant de la présence de g dans la densité d'énergie . Au lieu de Δe, Siu calcule alors $\partial\bar{\partial} < h\ ,\ \bar{\partial}\phi \wedge \partial\bar{\phi} >$ où ∂ et $\bar{\partial}$ sont les composantes de la dérivée extérieure appliquées successivement à la 2-forme obtenue par contraction de h et $\bar{\partial}\phi \wedge \partial\bar{\phi}$. Il obtient pour tout $\phi \in C^\infty(M,N)$:

$$\partial\bar{\partial} < h\ ,\ \bar{\partial}\phi \wedge \partial\bar{\phi} > \ = \ < R^N\ ,\ \bar{\partial}\phi \wedge \overline{\partial\bar{\phi}} \wedge \partial\phi \wedge \overline{\bar{\partial}\bar{\phi}} > - < h\ ,\ D\bar{\partial}\phi \wedge \overline{D\bar{\partial}\phi} >$$

où D est la composante (1,0) de la dérivée extérieure covariante de la forme $\bar{\partial}\phi$ à valeurs dans $\phi^{-1}T^{1,0}N$:

$D\bar{\partial}\phi^{\alpha} = \partial\bar{\partial}\,\phi^{\alpha} - {}^{N}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\ \partial\phi^{\beta}\wedge\bar{\partial}\phi^{\gamma}$ et où de même

$\bar{D}\partial\overline{\phi^{\alpha}} = \bar{\partial}\partial\,\overline{\phi^{\alpha}} - {}^{N}\Gamma^{\bar{\alpha}}_{\beta\gamma}\ \bar{\partial}\overline{\phi^{\beta}}\wedge\partial\overline{\phi^{\gamma}}$.

Il prend alors le produit extérieur de cette 4-forme par ${}^{M}\omega^{m-2}$ et intègre sur M . Tous les termes sont de même signe et la condition de courbure implique (après calculs) que $\partial\phi$ ou $\bar{\partial}\phi$ est nul dans un voisinage d'un point . Un théorème de prolongement unique montre qu'il en est de même sur tout M.

(10.4) Ce résultat implique également que certaines classes d'homologie de N peuvent être représentées par des sous-variétés analytiques complexes.

(10.5) Cette démonstration de l'existence d'applications holomorphes a été étendue au cas des variétés à bord [37].

11. Caractérisation de l'espace projectif

(11.1) La courbure bisectionnelle holomorphe d'un couple de vecteurs X,Y tangents en un point à une variété kählerienne N,J,h vaut $h(R(X,JX)\,Y\,,\,JY)$, où $|X| = |Y| = 1$.

En utilisant les applications harmoniques, Y.-T. Siu et S.-T. Yau ont donné dans [32] une démonstration de la conjecture de Frankel qui s'énonce comme suit : toute variété kählerienne compacte N de courbure bisectionnelle holomorphe partout positive est biholomorphiquement équivalente à l'espace projectif $P^n(\mathbb{C})$.

Cette conjecture est un cas particulier d'une conjecture de Hartshorne qui avait été établie peu auparavant par S. Mori par les méthodes de la géométrie algébrique [17] . Nous renvoyons à [1] pour une description de ce résultat.

(11.2) Nous ne pouvons que survoler la démonstration de Siu et Yau.

Par application d'un résultat de Bishop - Goldberg et d'une caractérisation de $P^n(\mathbb{C})$ due à Kobayashi - Ochiai, la conjecture se réduit à démontrer l'existence d'une courbe rationnelle représentant un générateur de $\Pi_2(N)$.

Par ailleurs, on observe qu'on peut supposer N simplement connexe et une reformulation de (7.10) montre que le générateur peut être représenté par une somme d'applications harmoniques de S^2 dans N, minimisant E parmi toutes ses représentations.

Il reste à montrer que ces applications sont ± holomorphes et qu'en fait, il n'y en a qu'une.

Soit $\phi : S^2 \to N$ un minimum de l'énergie . Par (2.4), c'est également un minimum de E" . Pour une déformation à un paramètre complexe t de ϕ, on a donc $\frac{\partial^2 E''}{\partial t \partial \bar{t}} \geqslant 0$. Cette expression est assez compliquée mais se simplifie pour une déformation particulière, définie au moyen d'un champ de vecteurs holomorphe le long de ϕ (moyennant une identification de $\phi^{-1}TN$ avec un fibré holomorphe sur S^2).

$\frac{\partial^2 E''}{\partial t \partial \bar{t}}$ ne contient plus alors qu'un seul terme, faisant intervenir la courbure bisectionnelle holomorphe supposée positive et $\partial\phi$ ou $\bar{\partial}\phi$, ce qui permet d'établir que ϕ est ± holomorphe.

Pour établir que le générateur est représenté par l'image d'une seule sphère, on suppose qu'il y en a plusieurs et on observe que certaines sont alors images holomorphes de S^2, et d'autres anti-holomorphes.

On peut déformer holomorphiquement ces images de telle sorte qu'elles soient tangentes en un point . En enlevant un disque de chacune et en les joignant par un anneau, on construit un représentant de leur somme d'énergie plus petite, ce qui contredit la minimalité de la représentation.

Bibliographie.

[1] M. Demazure : Caractérisation de l'espace projectif (conjectures de Hartshorne et de Frankel), Séminaire Bourbaki n° 544 (1979/80).

[2] J. Eells and L. Lemaire, A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 10 (1978) 1-68.

[3] ———————— On the construction of harmonic and holomorphic maps between surfaces, à paraître.

[4] J. Eells and J. H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. J. Math. 86 (1964) 109-160.

[5] J. Eells and J. C. Wood, Restrictions on harmonic maps of surfaces, Topology 15 (1976) 263-266.

[6] W.-D. Garber, S. N. Ruijsenaars and E. Seiler, On finite action solutions of the nonlinear σ-model, à paraître.

[7] R. E. Greene and H. H. Wu, Embedding of open Riemannian manifolds by harmonic functions, Ann. Inst. Fourier 25 (1975) 215-235.

[8] R. S. Hamilton, Harmonic maps of manifolds with boundary, Springer Lecture Notes 471 (1975).

[9] P. Hartman, On homotopic harmonic maps, Can. J. Math. 19 (1967) 673-687.

[10] S. Hildebrandt, H. Kaul and K. O. Widman, An existence theorem for harmonic mappings of Riemannian manifolds, Acta Math. 138 (1977) 1-16.

[11] L. Lemaire, Applications harmoniques de variétés produits, Comm. Math. Helv. 52 (1977) 11-24.

[12] ——— , Applications harmoniques de surfaces riemanniennes J. Diff. Geom. 13 (1978) 51-78.

[13] ——— , Harmonic nonholomorphic maps from a surface to a sphere, Proc. Amer. Math. Soc. 71 (1978) 299-304.

[14] A. Lichnerowicz, Applications harmoniques et variétés kählériennes, Symp. Math. III Bologna (1970) 341-402.

[15] ——— , Variétés kählériennes à première classe de Chern non négative et variétés riemanniennes à courbure de Ricci généralisée non négative, J. Diff. Geom. 6 (1972) 47-94.

[16] E. Mazet, La formule de la variation seconde de l'énergie au voisinage d'une application harmonique, J. Diff. Geom. 8 (1973) 279-296.

[17] S. Mori, Projective manifolds with ample tangent bundles, à paraître.

[18] C. B. Morrey, The problem of Plateau on a Riemannian manifold, Ann. of Math. 49 (1948) 807-851.

[19] ——— , Multiple integrals in the calculus of variations, Grundlehren 130, Springer (1966).

[20] T. Nagano and B. Smyth, Minimal varieties and harmonic maps in tori, Comm. Math. Helv. 50 (1975) 249-265.

[21] E. A. Ruh and J. Vilms, The tension field of the Gauss map, Trans. Amer. Math. Soc. 149 (1970) 569-573.

[22] J. Sacks and K. Uhlenbeck, The existence of minimal immersions of two-spheres, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977) 1033-1036.

[23] ——— , même titre, à paraître.

[24] ——— , Minimal immersions of compact Riemann surfaces, à paraître.

[25] J. H. Sampson, Some properties and applications of harmonic mappings, Ann. Ec. Norm. Sup. 11 (1978) 211-228.

[26] R. Schoen and S.-T. Yau, Harmonic maps and the topology of stable hypersurfaces and manifolds of non-negative Ricci curvature, Comm. Math. Helv. 51 (1976) 333-341.

[27] ———————— , Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-manifolds with non-negative scalar curvature, Ann. of Math. 110 (1979) 127-142.

[28] ———————— , On the proof of the positive mass conjecture in general relativity, Commun. Math. Phys. 65 (1979) 45-76.

[29] ———————— , Compact group actions and the topology of manifolds with non-positive curvature, Topology 18 (1979) 361-380.

[30] Y.-T. Siu, Complex-analyticity of harmonic maps and strong rigidity of compact Kähler manifolds, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 76 (1979) 2107-2108.

[31] ——— , The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds, à paraître.

[32] Y.-T. Siu and S.-T. Yau, Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature, à paraître.

[33] R. T. Smith, Harmonic mappings of spheres, Amer. J. Math. 97 (1975) 364-385.

[34] ——— , The second variation formula for harmonic mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 47 (1975) 229-236.

[35] K. Uhlenbeck, Harmonic maps : a direct method in the calculus of variations, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970) 1082-1087.

[36] J. C. Wood, A note on the fundamental group of a manifold of negative curvature, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 83 (1978) 415-417.

[37] ——— , An extension theorem for holomorphic mappings, à paraître.

.../...

12. Plongements minimaux.

(12.1) Dans [38] et [39], W. H. Meeks et S.-T. Yau montrent que certaines applications minimales du disque et de la sphère sont des plongements . Dans le cas de la sphère, leur résultat s'énonce comme suit.

(12.2) *Soit* N,h *une variété compacte de dimension trois* (éventuellement à bord convexe) *telle que* $\Pi_2(N) \neq 0$. Il existe des applications harmoniques (et donc minimales) $\phi_1,\ldots,\phi_k : S^2 \to N$ telles que $\{\phi_1,\ldots,\phi_k\}$ engendre $\Pi_2(N)$ en tant que $\Pi_1(N)$-module, ϕ_1 minimise l'aire parmi les applications non homotopiquement triviales et pour $r = 2,\ldots,k$, ϕ_r minimise l'aire dans le complément du $\Pi_1(N)$-module engendré par $\{\phi_1,\ldots,\phi_{r-1}\}$.

Pour tout ensemble d'applications $\{\psi_1,\ldots,\psi_l\}$ *possédant ces propriétés et pour tout* s, ψ_s *est soit un plongement, soit un revêtement à deux feuillets d'un plan projectif plongé* . De plus, pour tout r, s, les ensembles $\psi_s(S^2)$ et $\phi_r(S^2)$ sont soit égaux, soit disjoints.

(12.3) Ceci fournit une nouvelle démonstration des théorèmes de topologie affirmant l'existence de tels plongements dans les variétés triangulables . De plus, les applications minimales obtenues sont plus ou moins canoniques, ce qui permet l'obtention de nouveaux résultats concernant l'action de groupes finis sur N [39].

(12.4) Le théorème d'existence contenu dans (12.2) précise celui de (7.10) et découle des mêmes méthodes .

Pour établir les propriétés de plongement, Meeks et Yau se ramènent par approximation au cas où N est analytique . Les applications minimales sont alors analytiques et donc simpliciales, ce qui permet l'usage de techniques topologiques, en particulier la construction d'une "tour" de relèvements de l'application.

La minimalité est alors utilisée pour démontrer que certains replis de l'image ne peuvent pas se produire, car ils permettraient la construction d'une nouvelle surface d'aire inférieure.

[38] W. H. Meeks III and S.-T. Yau : The classical Plateau problem and the topology of three-dimensional manifolds, à paraître.

[39] ——————————— : Topology of three-dimensional manifolds and the embedding problems in minimal surface theory, à paraître.

Luc LEMAIRE
Chargé de recherches au F.N.R.S.
C.P. 218 - Campus Plaine
Université Libre de Bruxelles
B-1050 BRUXELLES