ALAIN GUICHARDET

Représentations de G^X (G compact) selon Verchik-Gelfand-Graiev et Ismagilov

Séminaire N. Bourbaki, 1980, exp. nº 541, p. 303-311

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1978-1979__21__303_0>

Séminaire BOURBAKI
31e année, 1978/79, n° 541

REPRÉSENTATIONS DE G^X (G COMPACT) SELON VERCHIK - GELFAND - GRAIEV ET ISMAGILOV

par Alain GUICHARDET

§ 1. Introduction

J'ai parlé dans un précédent exposé ([4]) du problème de l' "intégrale multiplicative " posé - et partiellement résolu - par Verchik - Gelfand et Graiev dans [6] : on se donne une variété X, une mesure positive m sur X et un groupe de Lie G ; on note $\mathcal{D}(X,G)$ le groupe des fonctions C^{∞} à support compact de X dans G, et on cherche une représentation unitaire irréductible de $\mathcal{D}(X,G)$ qui soit invariante (à équivalence unitaire près) par tous les automorphismes de $\mathcal{D}(X,G)$ provenant des difféomorphismes de X qui conservent m. La construction repose sur l'existence d'une représentation unitaire irréductible de G ayant une 1-cohomologie non nulle, et ne s'applique donc pas lorsque G est compact. Je vais parler ici d'un nouveau travail de Verchik - Gelfand et Graiev ([7], [8], [9]) dans lequel les auteurs construisent une représentation unitaire de $\mathcal{D}(X,G)$ en supposant G compact ; ils se donnent une structure riemannienne sur X et notent m la mesure positive correspondante ; la représentation obtenue de $\mathcal{D}(X,G)$ est irréductible lorsque $\dim X \geqslant 4$; d'autre part elle est invariante non pas par tous les difféomorphismes de X qui conservent m, mais seulement par ceux qui conservent la structure riemannienne, de sorte que le problème de l' " intégrale multiplicative " reste posé. Je dois ajouter que R.S. Ismagilov a construit dans [5] des représentations unitaires irréductibles de $\mathcal{D}(X,G)$ pour $G = SU(2)$, $\dim X \geq 5$, et que la méthode de [9] est une amélioration de celle de [5].

§ 2. Construction de représentations unitaires de $\mathcal{D}(X,G)$

On va utiliser la construction (exposée dans [4]) qui, à un groupe G, à une représentation orthogonale A de G dans un espace préhilbertien réel H et à un 1-cocycle $b \in Z^1(G,H)$ fait correspondre une représentation unitaire $U_{A,b}$ de G dans $S\,H_c$, espace hilbertien complexifié de la somme hilbertienne des puissances symétriques complétées de H .

Les données sont

- une variété riemannienne X dont on note m la mesure canonique, $P = (p_{ij}(x))$ le tenseur métrique, L l'opérateur de Laplace-Beltrami, $T(X)$ le fibré tangent ;
- un groupe de Lie semi-simple compact G dont on note $\underline{g}$ l'algèbre de Lie, B la forme de Killing, exp l'application exponentielle, $T(G)$ le fibré tangent.

On pose

$\mathcal{D} = \mathcal{D}(X,G)$ = groupe des applications C^{∞} de X dans G égales à 1 en dehors d'un compact

$\Delta = \mathcal{D}(X,\underline{g})$

$\mathcal{K} = \Omega^1_c(X,\underline{g})$ = espace des 1-formes différentielles sur X a valeurs dans $\underline{g}$ et à support compact

d = différentiation extérieure $\Delta \longrightarrow \mathcal{K}$.

On sait ([1], ch. III, § 2) que $T(G)$, muni de la loi de composition tangente à celle de G, est un groupe de Lie, produit semi-direct du groupe additif $\underline{g}$ par le groupe G opérant dans $\underline{g}$ par Ad. Notons $\mathcal{H}^1(X,G)$ l'ensemble des morphismes de fibrés vectoriels à support compact $F : T(X) \longrightarrow T(G)$; écrivant $T(G) = \underline{g} \times G$, un tel morphisme peut s'écrire

$$F(x,\xi) = (\omega_x(\xi)\,,\, f(x)) \qquad \forall\ x \in X\ ,\ \xi \in T_x(X)$$

où $f \in \mathcal{D}$ et $\omega \in \mathcal{K}$; $\Theta^1(X,G)$, muni de la multiplication point par point, s'identifie au produit semi-direct du groupe additif $\mathcal{K}$ par le groupe $\mathcal{D}$ opérant dans $\mathcal{K}$ de la façon suivante :

$$(f.\omega)_x = \mathrm{Ad}\, f(x) \circ \omega_x\ .$$

Comme dans tout produit semi-direct, on a une action A_0 de $\Theta^1(X,G)$ dans $\mathcal{K}$ (par automorphismes intérieurs) et un 1-cocycle b_0 pour cette action : la projection $\Theta^1(X,G) \longrightarrow \mathcal{K}$. D'autre part on a un morphisme Λ de $\mathcal{D}$ dans $\Theta^1(X,G)$ associant à toute application C^∞ sa différentielle ; dans les notations ci-dessus, on a $\Lambda(f) = (\omega, f)$ avec

$$\omega_x = \tau^{-1}_{f(x)} \circ (Df)_x$$

où $\tau_g : T_e(G) \longrightarrow T_g(G)$ est la différentielle en e de $h \longmapsto g\,h$, et $(Df)_x$ est la différentielle de f en x.

En composant A_0 et b_0 avec Λ on obtient une action A de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{K}$ et un 1-cocycle b pour cette action :

(1) $$(A(f).\omega)_x = \mathrm{Ad}\ f(x) \circ \omega_x$$

(2) $$b(f)_x = \tau^{-1}_{f(x)} \circ (Df)_x\ .$$

On définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel $\mathcal{K}$ de la façon suivante : pour tout $x \in X$ on munit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_x(X)\ ,\ \underline{g})$ du produit scalaire naturel, à savoir

$$(u\mid v)_x = \sum_{i,j} p^{ij}(x).\ B\Big(u\big(\frac{\partial}{\partial x_i}\big)\ ,\ v\big(\frac{\partial}{\partial x_j}\big)\Big)$$

où $(x_1,\dots,x_n)$ sont des coordonnées locales et les $p^{ij}(x)$ - les coefficients de l'inverse de la matrice $(p_{ij}(x))$. Le produit scalaire sur $\mathcal{K}$ est alors défini par

$$(\omega \mid \omega')_{\mathcal{K}} = \int_X (\omega_x \mid \omega'_x)_x . \, dm(x) \ ;$$

la norme correspondante est notée $\| \quad \|$. La représentation A est orthogonale pour ce produit scalaire ; on notera U la représentation unitaire de $\mathcal{D}$ associée au couple (A,b) comme rappelé au début du paragraphe :

(3) $$U(f).\mathrm{EXP}\,\omega = \exp\left(-\|b(f)\|^2/2 - (A(f).\omega \mid b(f))\right). \mathrm{EXP}\,(A(f).\omega + b(f)).$$

Le but de ce qui suit est d'indiquer les grandes lignes de la démonstration du théorème suivant :

Théorème 1. Si $\dim X \geqslant 4$, U est irréductible.

§ 3. Autre réalisation de U

En vertu du théorème de Minlos (cf. [2]), la fonction sur $\mathcal{K}$:

$$\omega \longmapsto \exp\left(-\|\omega\|^2/2\right)$$

est la transformée de Fourier d'une mesure gaussienne bien déterminée μ sur $\mathcal{K}'$; d'autre part (voir par exemple [3]) il existe un unique isomorphisme isométrique de $S\mathcal{K}_c$ sur $L^2(\mathcal{K}',\mu)$ transformant, pour tout $\omega \in \mathcal{K}$, EXP ω en la fonction

$$\mathcal{K}' \ni \chi \longmapsto \exp\left(i < \chi, \omega > + \|\omega\|^2/2 \right) ;$$

la représentation U, transportée par cet isomorphisme, devient

(4) $$(U(f).\varphi)(\chi) = \exp\left(i < \chi , b(f) > \right). \varphi\left({}^tA(f).\chi\right) .$$

Pour tout $\omega \in \mathcal{K}$ on notera T_ω l'opérateur suivant

(5) $$(T_\omega . \varphi)(\chi) = \exp\left(i < \chi , \omega > \right). \varphi(\chi)$$

et on a facilement

(6) $$U(f).\, T_\omega .\, U(f)^{-1} = T_{A(f).\omega} \qquad \forall\, f \in \mathcal{D} \ , \omega \in \mathcal{K} .$$

On utilisera aussi l'espace Δ de la façon suivante : l'application d de Δ dans $\mathcal{K}$ et le produit scalaire sur $\mathcal{K}$ définissent un produit scalaire sur Δ :

(7)
$$\begin{aligned}(\varphi \mid \psi)_\Delta &= (d\varphi \mid d\psi)_{\mathcal{K}} \\ &= \int_X \sum_{ij} p^{ij}(x).\ B\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial\psi}{\partial x_j}\Big).\ dm(x) \\ &= -\int_X B(L\varphi, \psi).\ dm \quad ;\end{aligned}$$

on note ν la mesure gaussienne correspondante sur Δ' , image de μ par l'application ${}^t d \ : \mathcal{K}' \longrightarrow \Delta'$; d'où une injection isométrique

(8)
$$L^2(\Delta', \nu) \longrightarrow L^2(\mathcal{K}', \mu) \quad .$$

§ 4. Décomposition de U liée à un tore maximal de G

Soient G_0 un tore maximal de G , $\mathfrak{g}_0$ son algèbre de Lie , $\mathfrak{g}_1$ l'orthogonal de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$ pour B , stable par Ad G_0. On pose

$$\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}(X, G_0) \qquad \text{(groupe abélien)}$$
$$\Delta_i = \mathcal{D}(X, \mathfrak{g}_i) \qquad \text{pour } i = 0,1$$
$$\mathcal{K}_i = \Omega^1_c(X, \mathfrak{g}_i) \qquad \text{"} \qquad \text{"}$$

et on peut écrire

$$\Delta = \Delta_0 \oplus \Delta_1 \quad , \quad \Delta' = \Delta'_0 \oplus \Delta'_1$$
$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1 \quad , \quad \mathcal{K}' = \mathcal{K}'_0 \oplus \mathcal{K}'_1$$
$$\nu = \nu_0 \otimes \lambda \quad , \quad \mu = \mu_0 \otimes \mu_1$$

où $\nu_0 , \lambda , \mu_0 , \mu_1$ sont des mesures gaussiennes ;

$$L^2(\mathcal{K}', \mu) = L^2(\mathcal{K}'_0, \mu_0) \otimes L^2(\mathcal{K}'_1, \mu_1) \quad .$$

Prenons $f \in \mathcal{D}_0$; alors l'opérateur $A(f)$ est trivial dans $\mathcal{K}_0$ et $b(f) \in \mathcal{K}_0$; donc (4) devient

(9) $$(U(f).\varphi)(\chi_0, \chi_1) = \exp(i < \chi_0 , b(f) >).\varphi(\chi_0 , {}^tA(f).\chi_1)$$

c'est-à-dire

$$U|_{\mathcal{D}_0} = U_0 \otimes U_1$$

où U_i est la représentation de $\mathcal{D}_0$ dans $L^2(\mathcal{K}'_i , \mu_i)$ définie par

(10) $$(U_0(f).\varphi)(\chi_0) = \exp(i < \chi_0 , b(f) >).\varphi(\chi_0)$$

(11) $$(U_1(f).\varphi)(\chi_1) = \varphi({}^tA(f).\chi_1) .$$

On va étudier les représentations V , V_0 , V_1 de Δ_0 définies par

$$V(f) = U(\exp \circ f) \quad , \quad V_i(f) = U_i(\exp \circ f) ;$$

on a évidemment

$$V = V_0 \otimes V_1 .$$

La structure de V_0 est donnée par le lemme suivant :

<u>Lemme</u> 1. La mesure spectrale de V_0 est la mesure gaussienne ν_0 .

(On le démontre en utilisant (8) et la relation

$$b(\exp \circ f) = d f \qquad \forall f \in \Delta_0 . \;)$$

Celle de V_1 est plus compliquée et fait intervenir les mesures de Poisson ; en effet V_1 est la somme des puissances symétriques de la représentation $A \circ \exp$ de Δ_0 dans $\mathcal{K}_1$; d'autre part, en décomposant $\mathfrak{g}_1$ suivant les vecteurs racines et en notant Σ le système de racines de la paire $(\mathfrak{g} , \mathfrak{g}_0)$ on peut écrire

$$\mathcal{K}_1 = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathcal{K}_1^{\alpha} \qquad \text{avec} \quad \mathcal{K}_1^{\alpha} \sim \Omega_c^1(X) \quad ;$$

on en déduit le

<u>Lemme</u> 2. La mesure spectrale ν_1 de V_1 est portée par l'ensemble des éléments de Δ'_0 de la forme $\delta_{x_1}^{\alpha_1} + \ldots + \delta_{x_p}^{\alpha_p}$ où $p \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$, $\alpha_i \in \Sigma$, $\delta_x^{\alpha}(f) = \alpha(f(x))$ $\forall f \in \Delta_0$.

Le lemme suivant est le point crucial de la démonstration, et celui qui a nécessité la version révisée [9] de l'article.

<u>Lemme</u> 3. Si $\dim X \geqslant 4$, l'algèbre de von Neumann engendrée par $V(\Delta_0)$ contient $V_0(\Delta_0) \otimes I$ et $I \otimes V_1(\Delta_0)$.

On se ramène à démontrer le

<u>Lemme</u> 4. Si A et B sont des parties boréliennes disjointes de Δ'_0, les mesures $\nu_0 * \nu_1|_A$ et $\nu_0 * \nu_1|_B$ sont disjointes.

Je vais donner une idée de la démonstration en supposant pour simplifier que $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{R}$, de sorte que $\Delta_0 = \mathcal{D}(X)$ et que δ_x^{α} devient δ_x ; d'autre part, utilisant des ouverts relativement compacts Y de X et les applications de restriction $\mathcal{D}'(X) \longrightarrow \mathcal{D}'(Y)$, on est amené à remplacer X par une variété riemannienne compacte à bord et Δ_0 par $\mathcal{D}(\overset{\circ}{X})$; on notera $\overline{\Delta}_0$ la complété de Δ_0 pour le produit scalaire analogue à (7) ; ce n'est autre que l'espace de Sobolev $H_0^1(X)$.

Rappelons le <u>théorème de Feldman</u> : deux translatées $\nu_0 * \delta_a$, $\nu_0 * \delta_b$ de la mesure gaussienne ν_0 sont disjointes si $a-b$ n'appartient pas à $\overline{\Delta}_0$. Le lemme 4 est une forme renforcée ("intégrée") de la conclusion de ce théorème, et nécessite une forme renforcée de son hypothèse, à savoir :

<u>Lemme</u> 5. Il existe un opérateur de Hilbert-Schmidt injectif Γ dans $\overline{\Delta}_0$ tel qu'aucun élément non nul de la forme $k_1 \delta_{x_1} + \ldots + k_p \delta_{x_p}$ ($p \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$, $k_i \in \mathbb{Z}$) n'appartienne à $\overline{\overline{\Delta}}_0$, complété de $\overline{\Delta}_0$ pour la norme $f \longmapsto \| \Gamma f \|$.

Idée de la démonstration du lemme 5

Notons $u_1, u_2, \ldots$ une base orthonormée de $\bar{\Delta}_0$ formée de fonctions propres du laplacien L , rangées de façon que les valeurs propres correspondantes λ_k (qui sont négatives) aillent en décroissant ; on définit Γ par $\Gamma(u_k) = c_k u_k$ où

$$c_k = (k+1)^{-\frac{1}{2}} (\log(k+1))^{-1} .$$

Montrons par exemple qu'aucun élément δ_x n'appartient à $\bar{\bar{\Delta}}_0$. Ecrivons tout élément f de Δ_0 sous la forme $f = \sum f_k u_k$; un élément de Δ'_0 appartient à $\bar{\Delta}_0$ (resp. $\bar{\bar{\Delta}}_0$) si et seulement s'il est de la forme $f \longmapsto \sum a_k f_k$ où $\sum |a_k|^2 < +\infty$ (resp. $\sum c_k |a_k|^2 < +\infty$) ; supposons $\delta_x \in \bar{\bar{\Delta}}_0$; il existe des a_k tels que $\sum c_k |a_k|^2 < +\infty$ et que

$$\sum a_k f_k = f(x) = \sum f_k u_k(x) \quad \forall f \in \Delta_0 ;$$

ceci implique $u_k(x) = a_k$ et $\sum c_k |u_k(x)|^2 < +\infty$; or une formule asymptotique due à Carleman montre que

$$\sum_{\lambda_k < \lambda} c_k |u_k(x)|^2 \sim C(x) \int_a^{\lambda} t^{m/4 - 2} (\log t)^{-1} dt$$

où $m = \dim X$, $C(x) > 0$, $a > 1$; il en résulte que

$$\sum c_k |u_k(x)|^2 = +\infty \quad \forall x \quad \text{si} \quad m \geq 4 .$$

§ 5. Fin de la démonstration du théorème

On doit montrer que l'algèbre de von Neumann $\mathcal{A}$ engendrée par $U(\mathcal{D})$ est égale à $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{K}', \mu))$. D'après le lemme 3, $\mathcal{A}$ contient les opérateurs $U_0(\exp \circ f) \otimes I$ où $f \in \Delta_0$; d'après (10), $U_0(\exp \circ f)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction

$$\chi \longmapsto \exp(i < \chi , b(\exp \circ f) >) = \exp(i < \chi , df >) ;$$

donc (cf. § 3) , $U_0(\exp \omega f) = T_{df}$. Comme $\mathfrak{g}$ est réunion de ses sous-algèbres de Cartan $\mathfrak{g}_0$, on en déduit que $\mathcal{A}$ contient T_{df} pour toute $f \in \Delta$, puis, à cause de (6), T_ω pour toute ω de la forme $A(g).df$ où $g \in \mathcal{D}$, $f \in \Delta$. On montre ensuite que les ω de cette forme forment un ensemble total dans $\mathcal{K}$, d'où résulte que la fonction $1 \in L^2(\mathcal{K}',\mu)$ est cyclique pour $\mathcal{A}$. Pour terminer la démonstration du théorème, on exhibe une propriété qui caractérise les fonctions constantes parmi les éléments φ de $L^2(\mathcal{K}',\mu)$ et qui est conservée par tout opérateur M du commutant de $\mathcal{A}$, à savoir : pour toute sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{g}_0$, $\varphi(\chi_0,\chi_1)$ ne dépend que de χ_0 (avec les notations du § 4). Il en résulte que $M.1 = k.1$ et, comme 1 est cyclique, $M = k.I$.

Bibliographie.

[1] N.Bourbaki. Groupes et algèbres de Lie.

[2] P.Cartier. Processus aléatoires généralisés. Séminaire Bourbaki n° 272, 1963/64.

[3] A.Guichardet. Symmetric Hilbert Spaces and Related Topics. Lecture Notes in Math., n° 261.

[4] A.Guichardet. Représentations de G^X selon Gelfand et Delorme. Séminaire Bourbaki, n° 486, 1975/76.

[5] R.S.Ismagilov. Sur les représentations unitaires du groupe $C_0^\infty(X,G)$, $G = SU(2)$. Mat. Sbornik, t. 100, 1976, p. 117-131.

[6] A.M.Verchik-I.M.Gelfand-M.I.Graiev. Représentations irréductibles du groupe G^X et cohomologie. Funk. Anal. i ego priloj., t.8, 1974, p. 67-69.

[7] Mêmes auteurs. Représentations du groupe $C_0^\infty(X,G)$, G compact. Dokl. Akad. Nauk, t. 232, 1977, p. 745-748.

[8] Mêmes auteurs. Même titre. Preprint. Moscou 1976.

[9] Mêmes auteurs. Nouvelle version de [8]. Moscou 1979.