

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ARNAUD BEAUVILLE

Géométrie des tissus

Séminaire N. Bourbaki, 1980, exp. n° 531, p. 103-119

http://www.numdam.org/item?id=SB_1978-1979__21__103_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE DES TISSUS

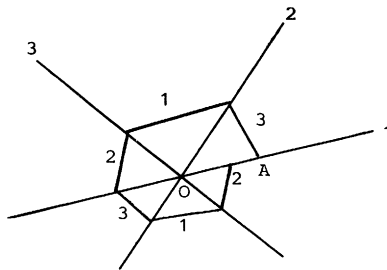
[d'après S. S. CHERN et P. A. GRIFFITHS]

par Arnaud BEAUVILLE

1. Historique

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . Un d -tissu sur U est défini par d feuilletages de codimension 1 sur U , tel qu'en tout point x de U , les d feuilles passant par x soient en position générale. Nous regarderons les tissus exclusivement d'un point de vue local, et nous nous permettrons de rétrécir l'ouvert U autant que nécessaire. Deux tissus sont dit équivalents s'ils sont transformés l'un dans l'autre par un difféomorphisme. On dit qu'un tissu est linéaire si ses feuilles sont des (morceaux d') hyperplans, linéarisable s'il est équivalent à un tissu linéaire.

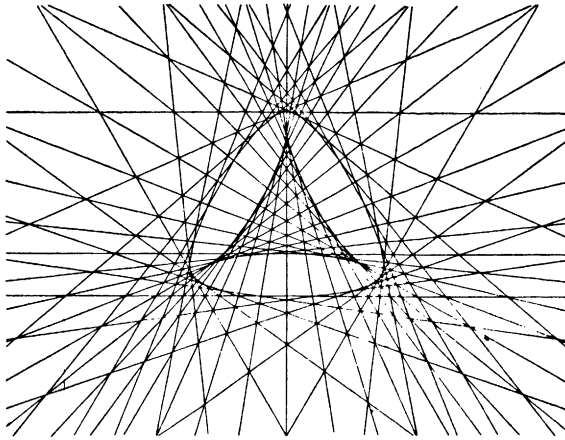
A titre d'exemple, considérons les tissus dans \mathbb{R}^2 . Il est clair qu'un 1-tissu (resp. un 2-tissu) est équivalent au tissu des droites $x = c^{te}$ (resp. $x = c^{te}$ et $y = c^{te}$). Le cas des 3-tissus est plus intéressant : sous quelle condition peut-on affirmer qu'un tel tissu est équivalent au tissu des droites $x = c^{te}$, $y = c^{te}$, $x + y = c^{te}$? La réponse, remarquablement élégante, a été donnée par Thomsen en 1927 ; elle se résume pratiquement dans le dessin suivant :



Explicitons : on trace les trois feuilles passant par un point O de U , et on fixe un point A sur la feuille 1, proche de O . Puis on se promène le long des feuilles du tissu, comme indiqué sur le dessin. Après un tour on se retrouve sur la feuille 1, du côté de A . On dit que le tissu est hexagonal si tout hexagone assez petit se referme : il est clair que cette condition est invariante par difféomorphisme, et qu'elle est vérifiée lorsque le tissu est formé de trois familles de droites parallèles. La réciproque constitue le théorème de Thomsen : tout 3-tissu hexagonal est linéarisable, et plus précisément équivalent

au tissu des droites $x = c^{te}$, $y = c^{te}$, $x + y = c^{te}$.

D'autre part, un théorème antérieur de Graf et Sauer (1924) décrit complètement les 3-tissus linéaires hexagonaux : un tel tissu est formé des tangentes à une courbe de classe 3 dans le plan projectif. Voici le dessin dans le cas de la courbe duale d'une courbe lisse de degré 3 :



Ces résultats très frappants donnent une motivation à l'étude approfondie des tissus. Ce travail fut entrepris par Blaschke et ses élèves, à Hambourg, de 1927 à 1938 ; il n'en est résulté pas moins de 66 articles, sous le titre global "Topologische Fragen der Differentialgeometrie". Parmi les auteurs, outre Blaschke et Bol, on note les noms de Kähler, Zariski, ... et Chern, dont la thèse constitue le numéro T60. Le livre [1] donne un aperçu de ces travaux, qui culminent avec l'analogue en dimension 3 des deux théorèmes précédents. C'est la notion de tissu de rang maximal (cf. § 4, pour une définition précise) qui généralise celle de tissu hexagonal ; voici les deux énoncés principaux :

THÉORÈME DE LINÉARISATION. - Soit d un entier $\neq 5$. En dimension 3, tout d -tissu de rang maximal est linéarisable.

THÉORÈME D'ALGÈBRISATION. - Considérons un d -tissu linéaire de rang maximal dans un ouvert de \mathbb{R}^3 . Alors les plans du tissu, considérés comme des points de l'espace projectif dual, appartiennent à une courbe algébrique de degré d .

L'étude des tissus a été reprise récemment par Chern et Griffiths, qui ont généralisé en toute dimension (≥ 3) les théorèmes précédents ([2]). Leurs résul-

tats, que nous allons exposer maintenant, sont valables aussi bien pour les tissus réels (feuilletages \mathbb{C}^∞) que complexes (feuilletages holomorphes). Les deux cas étant intéressants, nous les traiterons ensemble sans les distinguer ; nous désignerons par U un ouvert de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n . Dans le cas réel (resp. complexe), toutes les fonctions qui interviennent seront supposées analytiques réelles (resp. complexes).

La référence constante pour cet exposé est l'article [2].

2. Le tissu associé à une courbe algébrique

Considérons un d -tissu dans un ouvert U de \mathbb{R}^n (ou \mathbb{C}^n) ; ses feuilles sont les hypersurfaces de niveau de d fonctions u_1, \dots, u_d . Une équation abélienne est une équation de la forme $\sum_i f_i(u_i) du_i = 0$. Le nombre maximum d'équations abéliennes linéairement indépendantes (sur les constantes) est appelé le rang du tissu ; il ne dépend pas du choix des fonctions u_i .

En un point x de U , la forme $\omega^i = du_i$ est déterminée à une constante près ; elle définit donc un point $\omega^i(x) \in \mathbb{P}(T_x^*)$. Les points $\omega^1(x), \dots, \omega^d(x)$ sont appelés les normales du tissu en x .

Soit C une courbe algébrique de degré d dans \mathbb{P}^n , non contenue dans un hyperplan. On lui associe un d -tissu linéaire, défini dans un ouvert U de l'espace projectif dual $(\mathbb{P}^n)^*$, de la façon suivante. Un point ξ de U est un hyperplan de \mathbb{P}^n , qui coupe C en d points $p_1(\xi), \dots, p_d(\xi)$, supposés distincts ; par dualité, ces points correspondent à d hyperplans dans $(\mathbb{P}^n)^*$ passant par ξ , qui sont par définition les feuilles de notre tissu. L'espace $\mathbb{P}(T_\xi)$ s'identifie naturellement à l'ensemble des droites de $(\mathbb{P}^n)^*$ passant par ξ , c'est-à-dire à l'espace projectif dual ξ^* . Dans cette identification, les normales $\omega^i(\xi) \in \mathbb{P}(T_\xi^*)$ correspondent aux points $p_i(\xi) \in \xi$.

Le théorème d'Abel affirme que, pour toute 1-forme holomorphe ω sur C , la somme

$$\int_{p_0}^{p_1(\xi)} \omega + \dots + \int_{p_0}^{p_d(\xi)} \omega$$

est indépendante de ξ . Sous forme différentielle, cela se traduit par l'égalité :

$$(1) \quad \sum_i \omega(p_i(\xi)) = 0$$

ou plus correctement $\sum_i p_i^* \omega = 0$, $p_i : U \rightarrow C$ désignant la fonction $\xi \mapsto p_i(\xi)$.

Si l'on choisit un paramètre z_i sur C au voisinage de $p_i(\xi)$, la forme ω s'écrit localement $f_i(z_i)dz_i$; la fonction $u_i = p_i^*z_i$ définit le i -ième feuilletage du tissu, et le théorème d'Abel fournit donc l'équation abélienne

$\sum_i f_i(u_i)du_i = 0$. Il est facile de voir qu'on obtient ainsi toutes les équations abéliennes : le rang du tissu associé à C est donc égal au genre de C .

Remarque.- Soit $C^{(d)}$ la d -ième puissance symétrique de C , et soit P le plongement de U dans $C^{(d)}$ défini par $P(\xi) = p_1(\xi) + \dots + p_d(\xi)$. Une forme holomorphe ω sur C définit une 1-forme holomorphe $\bar{\omega}$ sur $C^{(d)}$ (par

$\bar{\omega}(\sum_i p_i) = \sum_i \omega(p_i)$), et toute 1-forme sur $C^{(d)}$ s'obtient ainsi. Ceci posé,

l'équation (1) exprime que $P(U)$ est une sous-variété intégrale du système différentiel sur $C^{(d)}$ défini par les 1-formes holomorphes. Notons que le tissu sur U associé à C est l'image réciproque par P du tissu sur $C^{(d)}$ défini par

$p_1 = c^{te}, \dots, p_d = c^{te}$. C'est ainsi que l'étude des diviseurs et de l'équivalence linéaire sur C apparaît étroitement liée à la géométrie différentielle de la variété $C^{(d)}$, en particulier aux systèmes différentiels et aux tissus définis sur cette variété.

La même construction s'applique à une variété V de dimension $k > 1$; elle fournit une relation non triviale entre les 0-cycles sur V d'une part, les tissus (de codimension k , cf. § 11) et les systèmes différentiels sur $V^{(d)}$ d'autre part. Cette méthode d'attaque des 0-cycles semble très prometteuse et donne une motivation puissante pour l'étude des tissus.

3. Le théorème d'algébrisation

THÉORÈME 1.- Soit \mathcal{C} un d -tissu linéaire de dimension n , admettant une équation abélienne $\sum_{i=1}^d f_i(u_i) du_i = 0$ avec $f_i(u_i) \neq 0$ pour tout i . Alors \mathcal{C} est le tissu associé à une courbe algébrique de degré d dans \mathbb{P}^n .

Par dualité, cet énoncé équivaut au théorème plus ou moins classique suivant.

THÉORÈME 2 (réciproque du théorème d'Abel).- Soient C_1, \dots, C_d des arcs analytiques dans \mathbb{P}^n , et soit ω_i une forme holomorphe sur C_i ($1 \leq i \leq d$). On suppose qu'il existe un hyperplan L_0 dans \mathbb{P}^n , rencontrant chaque C_i en un seul point, tel que l'équation

$$(2) \quad \sum_i \omega_i(L \cdot C_i) = 0$$

soit satisfaite pour tout hyperplan $L \subset \mathbb{P}^n$ assez voisin de L_0 . Il existe alors une courbe algébrique $C \subset \mathbb{P}^n$, de degré d , et une forme holomorphe ω sur C telle que $C_i \subset C$ et $\omega|_{C_i} = \omega_i$ pour $1 \leq i \leq d$ ¹.

Ce résultat remonte à Sophus Lie (pour le cas particulier des quartiques planes); l'énoncé donné ici semble dû à Wirtinger. Il a été généralisé par Griffiths au cas où les C_i sont des morceaux de variétés de dimension r , les ω_i des r -formes et L_0 un sous-espace projectif de codimension r ([4]).

Démonstration du théorème 2 (d'après [4]). On se ramène facilement, par un argument de projection, au cas $n = 2$. L'idée est de chercher une 2-forme rationnelle

$$\Omega = \frac{p(x,y)dx \wedge dy}{f(x,y)} \quad \text{sur } \mathbb{P}^2, \text{ dont la variété polaire soit } C, \text{ et dont le résidu de Poincaré } \text{Res}_C \Omega = \frac{p(x,y)dx}{f'_y}$$

soit égal à ω . Supposons qu'une telle forme existe et considérons la correspondance d'incidence

$$I \subset \mathbb{P}^2 \times (\mathbb{P}^2)^* \quad I = \{(x,L), x \in L\};$$

soit π la projection de I sur \mathbb{P}^2 . Prenons des coordonnées (x,y) dans \mathbb{P}^2 , (a,b) dans $(\mathbb{P}^2)^*$, de façon que le point (a,b) corresponde à la droite $L(a,b) : x = ay + b$ dans \mathbb{P}^2 . On notera $P_i(a,b) = (x_i(a,b), y_i(a,b))$ le point $L(a,b) \cdot C_i$.

Localement sur I , la forme $\pi^*\Omega$ s'écrit :

$$\pi^*\Omega = \frac{h(y,a,b)(yda + db) \wedge dy}{\prod_i (y - y_i(a,b))}.$$

On détermine la fonction h par la formule d'interpolation de Lagrange et un peu de calcul des résidus :

$$\frac{h(y,a,b)}{\prod_i (y - y_i(a,b))} = \sum_i \frac{\rho_i(a,b)}{y - y_i(a,b)} \quad \text{avec } \rho_i(a,b) = \text{Res}_{P_i} \left(\frac{\omega_i}{x - ay - b} \right).$$

Il y a donc un seul candidat possible pour $\pi^*\Omega$, à savoir la forme

$$\Phi = \sum_i \rho_i(a,b) \frac{(yda + db) \wedge dy}{y - y_i(a,b)}. \quad \text{On va maintenant repartir dans l'autre sens et montrer que la forme } \Phi, \text{ définie par la formule précédente, provient de } \mathbb{P}^2. \text{ Il}$$

¹ La courbe C n'étant pas nécessairement lisse, "holomorphe" est à prendre avec un grain de sel (cf. [4]). D'autre part, il s'agit là d'un énoncé complexe; le résultat réel correspondant s'en déduit immédiatement par prolongement analytique.

est clair que cela a lieu si et seulement si $d\Phi = 0$ (prendre x, y et a comme coordonnées sur I). Or un calcul un peu long mais sans difficultés montre que cette condition est équivalente à l'équation (2).

On a donc $\Phi = \pi^*\Omega$, la forme Ω étant une 2-forme méromorphe définie dans un ouvert de \mathbb{P}^2 contenant la droite L_0 . Un argument du type Levi-Hartogs permet de montrer qu'une telle forme s'étend en une 2-forme rationnelle $\tilde{\Omega}$ sur \mathbb{P}^2 ; il est alors immédiat que la courbe polaire C de $\tilde{\Omega}$ contient les C_i , et que la 1-forme $\text{Res}_C \tilde{\Omega}$ induit ω_i sur chaque C_i .

4. Énoncé du théorème de linéarisation

Dans sa thèse, Chern démontre que le rang d'un d -tissu en dimension n est majoré par l'entier

$$\pi(d, n) = m(d - 1 - \frac{1}{2}(m+1)(n-1)) \text{ avec } m = \text{partie entière de } \frac{d-1}{n-1}$$

$$= (d-n) + (d-2n+1) + (d-3n+2) + \dots$$

(la somme ne faisant intervenir que les termes positifs).

Le nombre $\pi(d, n)$ n'est pas un inconnu des géomètres algébristes : il est égal à la borne supérieure du genre des courbes de degré d dans \mathbb{P}^n , non contenues dans un hyperplan. Cette majoration remarquable du genre d'une courbe a été obtenue en 1889 par Castelnuovo, en même temps que des résultats très précis sur les courbes de genre maximal : ces courbes, appelées courbes extrémales ou courbes de Castelnuovo, jouent un grand rôle dans la démonstration de Chern-Griffiths. Précisons d'ailleurs que la démonstration de Chern, bien qu'elle soit à base de géométrie différentielle, présente une grande analogie avec celle de Castelnuovo ; cette analogie va nous poursuivre dans la suite de cet exposé.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de Chern-Griffiths.

THÉORÈME 3. - Soient d, n deux entiers, avec $n \geq 3$, tels que $d \leq n+1$ ou $d \geq 2n$. En dimension n , tout d -tissu de rang égal à $\pi(d, n)$ est linéarisable.

Nous allons voir que les restrictions sur d sont nécessaires.

5. Le cas $d \leq 2n$

Pour $d \leq n$, tout d -tissu est équivalent au tissu des hyperplans $x_1 = c^{te}, \dots, x_d = c^{te}$: il est linéarisable et de rang zéro.

Pour $d = n+1$, on a $\pi(d, n) = 1$; l'équation abélienne $\sum_1 f_i(u_i) du_i = 0$

s'écrit aussi $\sum_i dv_i = 0$, avec $v_i = \int f(u_i) du_i$. Par conséquent, un $(n+1)$ -tissu de rang un est équivalent au tissu $v_1 = c^{te}, \dots, v_n = c^{te}$, $\sum_{i=1}^n v_i = c^{te}$.

Pour $n+1 < d < 2n$, on a $\pi(d,n) = d-n$; il est très facile de construire des tissus de rang maximal. Considérons en effet le système d'équations :

$$(3) \quad \begin{aligned} u_i &= x_i & (1 \leq i \leq n) \\ u_{n+1} &= x_1 + \dots + x_n \\ u_{n+2} &= U_{2,1}(x_1) + \dots + U_{2,n}(x_n) \\ &\vdots & \vdots & \vdots \\ u_d &= U_{d-n,1}(x_1) + \dots + U_{d-n,n}(x_n) \end{aligned}$$

où les fonctions $U_{i,j}$ sont arbitraires - avec cette réserve que certains déterminants jacobiens des $U_{i,j}$ soient non nuls, de façon qu'on ait bien les équations d'un tissu. Ces équations sont ici normalisées, dans ce sens qu'il n'existe pas d'autre système de coordonnées sur U dans lequel le tissu ait des équations de la forme (3).

Un tel tissu est de rang $(d-n)$. S'il est linéarisable, il est équivalent d'après le théorème d'algébrisation au tissu associé à une courbe de degré d dans \mathbb{P}^n . Une telle courbe ne dépend que d'un nombre fini de paramètres (variété de Chow); il en résulte que pour un choix générique des fonctions $U_{i,j}$, les équations (3) définissent un tissu non linéarisable de rang maximal.

Le cas $d = 2n$ est beaucoup plus intéressant. Il fait intervenir une construction qui sera fondamentale pour la suite, l'application de Poincaré associée à un tissu.

Considérons un tissu de rang r et ses équations abéliennes :

$$(4) \quad \sum_i f_i^\lambda(u_i) du_i = 0 \quad \lambda = 1, \dots, r.$$

Posons $Z_i(x) = [f_i^1(u_i(x)), \dots, f_i^r(u_i(x))] \in \mathbb{P}^{r-1}$ (nous supposons ici que les fonctions f_i^1, \dots, f_i^r ne sont pas toutes identiquement nulles, ce qui est certainement le cas si $r = \pi(d,n)$).

Le point $Z_i(x)$ est bien défini par le tissu. Les équations abéliennes (4) se réécrivent

$$(5) \quad \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} Z_i(x) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, n$$

de sorte que les points $Z_i(x)$, pour $1 \leq i \leq d$, engendrent un espace projectif de dimension $\leq d-n-1$. Une conséquence importante de la démonstration de

l'inégalité $r \leq \pi(d, n)$ est le résultat suivant pour les tissus de rang maximal :

(6) Les points $Z_1(x)$ engendrent un espace $\mathbb{P}^{d-n-1}(x)$ de dimension $(d-n-1)$.

L'application de Poincaré du tissu est l'application F de U dans la grassmannienne des $(d-n-1)$ -plans de \mathbb{P}^n définie par $F(x) = \mathbb{P}^{d-n-1}(x)$.

Revenons au cas $d = 2n$.

PROPOSITION 1.- En dimension n , tout $(2n)$ -tissu de rang maximal est linéarisable.

Démonstration. L'application de Poincaré F est dans ce cas une application de U dans $(\mathbb{P}^n)^*$. Elle transforme la feuille $u_i = c^{te}$ en l'hyperplan de $(\mathbb{P}^n)^*$ correspondant au point $Z_i \in \mathbb{P}^n$. De plus les hypothèses de position générale entraînent que F est étale ; ainsi F est localement un difféomorphisme qui transforme les feuilles du tissu en hyperplans.

6. Le cas général : idée de la démonstration

Nous attaquons maintenant le cas $d > 2n$, c'est-à-dire la démonstration proprement dite. Celle-ci est d'une difficulté technique considérable, et il n'est pas question d'en exposer ici les détails ; je voudrais essayer de donner au moins un aperçu de la géométrie très riche qui sous-tend cette démonstration.

Bien que les courbes extrémales n'apparaissent pas dans l'énoncé, elles reviennent en force dans la démonstration. Le modèle qu'on a en tête est en effet le tissu associé à une telle courbe. L'idée est de

1°) Mettre en évidence le maximum de propriétés (du type géométrie différentielle projective) de ces courbes extrémales ;

2°) Enoncer ces propriétés en termes du tissu associé, de sorte qu'elles gardent un sens pour tout tissu de rang maximal ;

3°) Les démontrer dans ce cadre plus général.

4°) Quelles sont les propriétés que nous avons en vue ? Il s'agit de munir U d'une "géométrie des chemins" (ou, de manière équivalente, d'une connexion projective) pour laquelle les hypersurfaces du tissu soient totalement géodésiques.

5°) Il ne restera plus qu'à démontrer que la géométrie des chemins construite sur U est plate. Cela entraînera, pratiquement par définition, que dans un système de coordonnées convenable les hypersurfaces totalement géodésiques sont des hyperplans, ouf !

7. Les courbes extrémales

Ce sont les courbes lisses de degré d dans \mathbb{P}^n , non contenues dans un hyperplan, dont le genre est égal à $\pi(d, n)$. Dans ce qui suit, nous supposons de plus $d > 2n$ (pour $d < 2n$, les courbes extrémales n'ont pas de propriétés particulières ; pour $d = 2n$, ce sont les courbes canoniques).

Le résultat suivant, essentiel, est dû à Castelnuovo :

PROPOSITION A.- Soit C une courbe extrémale dans \mathbb{P}^n , avec $\text{deg}(C) > 2n$. Alors C est contenue dans une surface S de degré $(n-1)$. En particulier, les points d'intersection de C avec un hyperplan \mathbb{P}^{n-1} sont contenus dans une courbe rationnelle normale de degré $(n-1)$ dans \mathbb{P}^{n-1} .

[Rappelons qu'une courbe rationnelle normale de degré k est l'image de \mathbb{P}^1 par le plongement dans \mathbb{P}^k associé au système linéaire $|\sigma_{\mathbb{P}^1}(k)|$.]

Outre le plongement donné, nous considérerons le plongement canonique $\kappa : C \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$, défini par les formes holomorphes.

PROPOSITION B.- L'application canonique $\kappa : C \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ se prolonge en un plongement de S dans \mathbb{P}^{g-1} , encore noté κ . Si ξ est un hyperplan dans \mathbb{P}^n , la courbe intersection $\xi.S$ est transformée par κ en une courbe E_ξ , qui est une courbe rationnelle normale de degré $(d-n-1)$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}^{d-n-1}(\xi)$ qu'elle engendre.

On a en effet une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(K) \rightarrow \mathcal{O}_S(K+C) \rightarrow \omega_C \rightarrow 0$$

où K désigne la classe canonique de la surface S . La surface S étant rationnelle, on en déduit que la restriction à C induit un isomorphisme de $H^0(S, \mathcal{O}_S(K+C))$ sur $H^0(C, \omega_C)$; cela signifie que l'application rationnelle κ de S dans \mathbb{P}^{g-1} définie par le système linéaire $|K+C|$ induit sur C le plongement canonique. Comme C varie dans un système linéaire suffisamment grand, on en conclut que κ est un plongement.

Notons H la courbe $\xi.S$; on a :

$$\begin{aligned} \text{deg}(E_\xi) &= H.(K+C) \\ &= -2 - H^2 + H.C = d - n - 1. \end{aligned}$$

D'autre part, si on note $\xi.C = p_1(\xi) + \dots + p_d(\xi)$, il résulte de Riemann-Roch que les points $\kappa(p_i(\xi))$ engendrent un espace projectif $\mathbb{P}^{d-n-1}(\xi)$ de dimension $(d-n-1)$. Ceci entraîne que E_ξ est une courbe rationnelle normale dans $\mathbb{P}^{d-n-1}(\xi)$.

PROPOSITION C.- Soient ξ, ξ' deux hyperplans de \mathbb{P}^n , σ leur intersection. Les courbes E_ξ et $E_{\xi'}$, se coupent en $(n-1)$ points ; les images de ces points par κ engendrent un espace projectif de dimension $(n-2)$, noté $\mathbb{P}^{n-2}(\sigma)$, et on a $\mathbb{P}^{d-n-1}(\xi) \cap \mathbb{P}^{d-n-1}(\xi') = \mathbb{P}^{n-2}(\sigma)$.

[Il faut interpréter un peu cet énoncé lorsque les $(n-1)$ points ne sont pas tous distincts.]

Démonstration. On a $E_\xi \cdot E_{\xi'} = \kappa(\sigma \cdot S)$, de sorte que cette intersection est composée de $(n-1)$ points. Ces points étant situés sur une courbe rationnelle normale de degré $\geq n$ sont en position générale, et le \mathbb{P}^{n-2} qu'ils engendrent est contenu dans $\mathbb{P}^{d-n-1}(\xi) \cap \mathbb{P}^{d-n-1}(\xi')$. Pour prouver l'égalité, il suffit de savoir que l'espace engendré par $\mathbb{P}^{d-n-1}(\xi)$ et $\mathbb{P}^{d-n-1}(\xi')$ est de dimension $\geq 2d-3n$. Or cet espace contient les points $\kappa(p_i(\xi))$ et $\kappa(p_j(\xi'))$; sa dimension est donc au moins égale à $g-1-h^0(K-2\xi \cdot C) = 2d-h^0(2\xi \cdot C)$ par Riemann-Roch. Mais il résulte de la démonstration de la majoration $g \leq \pi(d,n)$ qu'on a $h^0(2\xi \cdot C) = 3n$, d'où la proposition.

PROPOSITION D.- Soient ξ un hyperplan dans \mathbb{P}^n , p un point de $(\xi \cdot S)$. Alors l'hyperplan dans $(\mathbb{P}^n)^*$ correspondant à p est l'ensemble des $\xi' \in (\mathbb{P}^n)^*$ tels que $\kappa(p) \in \mathbb{P}^{d-n-1}(\xi')$.

Démonstration. Soient ξ' un autre hyperplan dans \mathbb{P}^n , et soit $\sigma = \xi \cap \xi'$.

Puisque E_ξ est une courbe rationnelle normale, l'ensemble

$E_\xi \cap \mathbb{P}^{d-n-1}(\xi') = E_\xi \cap \mathbb{P}^{n-2}(\sigma)$ contient au plus $(n-1)$ points ; il se réduit donc aux $(n-1)$ points de $E_\xi \cdot E_{\xi'}$. On a les équivalences :

$$p \in \xi' \iff \kappa(p) \in E_{\xi'} \iff \kappa(p) \in \mathbb{P}^{d-n-1}(\xi')$$

d'où le résultat.

8. Enoncé en termes de tissus des propriétés A à D

Pour traduire ces propriétés en termes de tissus, reprenons la construction de l'application de Poincaré (§ 5). Si les équations abéliennes s'écrivent

$$\sum_i f_i^\lambda(u_i) du_i = 0 \quad (\lambda = 1, \dots, r), \text{ nous avons vu que les points}$$

$Z_i(x) = [f_i^1(u_i(x)), \dots, f_i^r(u_i(x))] \in \mathbb{P}^{r-1}$ sont bien déterminés par le tissu.

Lorsque celui-ci est associé à une courbe algébrique, notre \mathbb{P}^{r-1} s'identifie à l'espace canonique \mathbb{P}^{g-1} et il résulte aussitôt du § 2 qu'on a $Z_i(\xi) = \kappa(p_i(\xi))$.

On a ainsi, entre la géométrie des courbes extrémales et celle d'un tissu quelconque, le dictionnaire suivant :

<u>Tissu quelconque :</u>	<u>Tissu associé à une courbe extrémale</u>
$x \in U$	$C \subset \mathbb{P}^n :$
Normales $\omega^i(x) \in \mathbb{P}(T_x^*)$	$\xi \in U \subset (\mathbb{P}^n)^*$
$Z_i(x) \in \mathbb{P}^{r-1}$	$p_i(\xi) \in \xi \subset \mathbb{P}^n$
	$\kappa(p_i(\xi)) \in \mathbb{P}^{g-1}$

Un moment de réflexion permet de se convaincre que le tissu associé à une courbe extrémale satisfait aux propriétés suivantes, qui traduisent les propositions A à D du § 7 :

A. Il existe un champ de courbes rationnelles gauches $D_x \subset \mathbb{P}(T_x^*)$ ($x \in U$) tel que les normales $\omega^i(x)$ appartiennent à D_x pour tout $x \in U$.

B. Les points $Z_i(x)$ appartiennent à une courbe rationnelle normale $E_x \subset \mathbb{P}^{d-n-1}(x) \subset \mathbb{P}^{r-1}$. Il existe une homographie $h_x : D_x \xrightarrow{\sim} E_x$ telle que $h_x(\omega^i(x)) = Z_i(x)$ pour $1 \leq i \leq d$.

C. Soit $\sigma \in \mathbb{P}(T_x)$. L'hyperplan correspondant $\mathbb{P}^{n-2}(\sigma) \subset \mathbb{P}(T_x^*)$ rencontre D_x en $(n-1)$ points ; les points correspondants sur E_x engendrent un espace $\mathbb{P}^{n-2}(x, \sigma) \subset \mathbb{P}^{d-n-1}(x)$. Un point Z de $\mathbb{P}^{d-n-1}(x)$ appartient à $\mathbb{P}^{n-2}(x, \sigma)$ si et seulement s'il appartient au plan infiniment voisin de $\mathbb{P}^{d-n-1}(x)$ dans la direction σ ¹. La condition " $\mathbb{P}^{d-n-1}(x(t))$ contient $\mathbb{P}^{n-2}(x, \sigma)$ " définit un chemin $x(t)$ dans U passant par x et tangent à σ en x .

[Dans le cas où nous sommes, le chemin $x(t)$ n'est autre que la droite dans U correspondant au pinceau d'hyperplans contenant σ .]

D. Les feuilles du tissu font partie d'une famille de ω^2 hypersurfaces dont les normales en x appartiennent à D_x . Si $\omega \in D_x$, l'hypersurface passant par x de normale ω est l'ensemble des $x' \in U$ tels que $h_{x'}(\omega) \in \mathbb{P}^{d-n-1}(x')$.

¹ Cette condition, que nous noterons $Z \in \mathbb{P}^{d-n-1}(x + \varepsilon \sigma)$, doit s'interpréter comme suit : si l'on choisit une courbe $t \mapsto x(t)$ dans U telle que $x(0) = x$, $x'(0) = \sigma$ et une courbe $t \mapsto Z(t)$ dans \mathbb{P}^{r-1} telle que $Z(0) = Z$, $Z(t) \in \mathbb{P}^{d-n-1}(x(t))$, la condition $Z \in \mathbb{P}^{d-n-1}(x + \varepsilon \sigma)$ signifie que la courbe $Z(t)$ est tangente à $\mathbb{P}^{d-n-1}(x)$ en Z (on vérifie immédiatement que cette dernière condition est indépendante du choix des courbes $x(t)$ et $Z(t)$).

9. Démonstration des propriétés A à D

Nous n'utiliserons que deux propriétés des tissus de rang maximal, qui résultent de la démonstration de l'inégalité $r \leq \pi(d, n)$:

(6) Les points $Z_i(x)$ engendrent l'espace $\mathbb{P}^{d-n-1}(x)$;

(7) Les points $Z_i(x)$ et $Z'_i(x)$ engendrent un espace de dimension $(2d - 3n)$.

Démonstration de A. Les équations abéliennes peuvent s'écrire

$$(5) \quad \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} Z_i(x) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

D'après (6), ces relations sont les seules relations linéaires indépendantes entre les Z_i . En les dérivant, on obtient :

$$(8) \quad \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\beta} Z'_i(x) + \sum_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} Z_i(x) = 0.$$

Les relations (5) et (8) fournissent $\frac{1}{2}n(n+3)$ relations linéaires entre les Z_i et les Z'_j . Compte tenu de (7), il doit y avoir $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ relations entre ces relations. Autrement dit, il existe des coefficients $k_\lambda^{\alpha\beta}$ et m_λ^γ tels que l'on ait :

$$(9) \quad \sum_{\alpha, \beta} k_\lambda^{\alpha\beta} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\beta} = 0, \quad \lambda = 1, \dots, \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

$$(10) \quad \sum_{\alpha, \beta} k_\lambda^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \sum_\gamma m_\lambda^\gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_\gamma}, \quad \text{idem.}$$

Les équations (9) expriment que le point $\omega^i(x)$ se trouve sur la quadrique $\sum k_\lambda^{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0$. On termine avec un lemme de géométrie algébrique classique :

Lemme 1.- Soient p_1, \dots, p_N des points en position générale dans \mathbb{P}^{n-1} , avec $N > 2n$; on suppose que p_1, \dots, p_N sont contenus dans un système linéaire de quadriques V de codimension $< 2n$. Alors p_1, \dots, p_N appartiennent à une courbe rationnelle normale unique, qui est l'intersection des quadriques de V .

Remarquons que nous n'avons pas utilisé ici les équations (10) ; elles joueront cependant un rôle important dans la démonstration (cf. § 10).

Démonstration de B. Prenons comme coordonnées $x_i = u_i$ ($1 \leq i \leq n$). La courbe

$D_x \subset \mathbb{P}(T_x^*)$ passe alors par les points $[1, 0, \dots, 0], \dots, [0, \dots, 0, 1]$, de sorte qu'elle admet une équation paramétrique de la forme

$$x_\alpha = a_\alpha / (t - b_\alpha) \quad (\alpha = 1, \dots, n) \quad \text{où } a_\alpha, b_\alpha \text{ sont des fonctions de } x.$$

Puisque $\omega^i(x) \in D_x$, il existe des scalaires ρ_i et t_i tels que

$$(11) \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} = \rho_i a_\alpha / (t_i - b_\alpha) \quad \text{pour } 1 \leq \alpha \leq n, \quad 1 \leq i \leq d$$

avec $t_i = b_i$ pour $i \leq n$.

Les équations abéliennes (5), qui s'écrivent maintenant

$$Z_\alpha(x) + \sum_{s=n+1}^d \frac{\partial u_s}{\partial x_\alpha} Z_s(x) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n$$

montrent que les points $Z_{n+1}(x), \dots, Z_d(x)$ forment un repère projectif de $\mathbb{P}^{d-n-1}(x)$; le point $Z_\alpha(x)$ ($1 \leq \alpha \leq n$) a pour coordonnées homogènes dans ce

repère $[\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_\alpha}, \dots, \frac{\partial u_d}{\partial x_\alpha}]$, soit en utilisant (11):

$$Z_\alpha(x) = [\rho_{n+1} / (t_{n+1} - b_\alpha), \dots, \rho_d / (t_d - b_\alpha)] .$$

Ceci prouve que les points $Z_i(x)$ ($1 \leq i \leq d$) appartiennent à la courbe rationnelle normale $E_x \subset \mathbb{P}^{d-n-1}(x)$ d'équation paramétrique:

$$b \mapsto [\rho_{n+1} / (b - t_{n+1}), \dots, \rho_d / (b - t_d)] .$$

En associant au point de paramètre t sur D_x le point de paramètre b sur E_x , on obtient une homographie qui fait correspondre $\omega^i(x)$ et $Z_i(x)$, d'où le résultat.

Démonstration de C. On peut supposer que $Z_{n+1}(x), \dots, Z_d(x)$ engendrent $\mathbb{P}^{d-n-1}(x)$. Compte tenu de (7), il y a alors exactement $(n-1)$ relations linéaires indépendantes entre les points $Z_s(x)$ et $Z'_s(x)$ ($n+1 \leq s \leq d$), qui peuvent s'écrire:

$$\sum_{s=n+1}^d A_{\mu s} Z'_s(x) \equiv 0 \quad \text{modulo } \mathbb{P}^{d-n-1}(x), \quad \mu = 1, \dots, n-1 .$$

Soit Z un point de $\mathbb{P}^{d-n-1}(x)$, de coordonnées $(p_s)_{n+1 \leq s \leq d}$ dans le repère $Z_s(x)$. La condition $Z \in \mathbb{P}^{d-n-1}(x + \varepsilon \sigma)$ se traduit par l'équation:

$$\sum p_s Z'_s(x) \langle du_s, \sigma \rangle = 0 .$$

D'après ce qui précède, cela entraîne l'existence de coefficients c_μ ($1 \leq \mu \leq n-1$) tels que

$$(12) \quad p_s \langle du_s, \sigma \rangle = \sum_{\mu=1}^{n-1} c_\mu A_{\mu s} \quad \text{pour } n+1 \leq s \leq d .$$

Il en résulte que le point Z décrit un sous-espace de dimension $(n-2)$. Le fait que cet espace est engendré par $h_x(\sigma, D_x)$ est une conséquence immédiate du lemme suivant:

Lemme 2.- Soit $\omega \in D_x$. On a $\{h_x(\omega)\} = \bigcap_{\langle \omega, \sigma \rangle = 0} \mathbb{P}^{n-2}(x, \sigma)$.

Démonstration du lemme. Disons qu'un point $Z \in \mathbb{P}^{d-n-1}(x)$ est un point nodal s'il existe $\omega \in \mathbb{P}(T_x^*)$ tel que $Z \in \mathbb{P}^{n-2}(x, \sigma)$ pour tout σ tel que $\langle \omega, \sigma \rangle = 0$. Le point $Z_i(x)$ est un point nodal pour $\omega^i(x) \in \mathbb{P}(T_x^*)$. En posant $\rho_s = -\frac{1}{p_s}$ et $\langle du_s, \sigma \rangle = \sum_{\alpha} u_{s\alpha} \sigma^\alpha$, les équations (12) se réécrivent

$$(13) \quad \sum_{\alpha} u_{s\alpha} \sigma^\alpha + \sum_{\mu} c_{\mu} A_{\mu s} \rho_s = 0, \quad s = n+1, \dots, d.$$

La condition pour que Z soit un point nodal est que ce système, considéré comme un système linéaire en les variables σ^α et c_{μ} , admette $(n-1)$ solutions linéairement indépendantes; ce qui se traduit par les équations:

$$(14) \quad \begin{vmatrix} u_{i_0,1} & \dots & u_{i_0,n} & A_{\mu i_0} \rho_{i_0} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{i_n,1} & \dots & u_{i_n,n} & A_{\mu i_n} \rho_{i_n} \end{vmatrix} = 0.$$

Ces équations sont linéaires en (ρ_s) , et les hypothèses de position générale entraînent que l'espace des solutions est de dimension ≤ 1 ; il est en fait de dimension 1 puisque les points $Z_i(x)$ sont nodaux. Les solutions s'expriment donc par

$$\rho_s = -\alpha_s t - \beta_s \quad \text{d'où} \quad p_s = \frac{1}{\alpha_s t + \beta_s}.$$

Ceci prouve que l'ensemble des points nodaux est une courbe rationnelle gauche $E'_x \subset \mathbb{P}^{d-n-1}(x)$. On déduit de plus des équations (14) que les coordonnées du point ω sont des formes homogènes de degré $(n-1)$ en (ρ_s) : lorsque Z décrit E'_x , le point ω décrit donc une courbe rationnelle normale $D'_x \subset \mathbb{P}(T_x^*)$. Mais alors le fait que le point nodal pour $\omega^i(x)$ soit $Z_i(x)$ entraîne qu'on a $E_x = E'_x$, $D_x = D'_x$, et que le point nodal pour $\omega \in D_x$ est $h_x(\omega)$, d'où le lemme.

Pour terminer de prouver C, il resterait à montrer que la condition " $\mathbb{P}^{d-n-1}(x(t))$ contient $\mathbb{P}^{n-2}(x, \sigma)$ " définit un chemin $x_\sigma(t)$ dans U , tangent à σ en x . Ce point (essentiel) sera discuté au paragraphe suivant; admettons-le provisoirement.

Démonstration de D. Soient $\omega \in D_x$, $\mathbb{P}^{n-2}(\omega)$ l'hyperplan correspondant dans $\mathbb{P}(T_x)$. La réunion des chemins $x_\sigma(t)$ que nous venons de définir, pour $\sigma \in \mathbb{P}^{n-2}(\omega)$, définit au voisinage de x une hypersurface H_ω de normale ω en x . D'après le lemme 2, un point x' de H_ω satisfait à $h_x(\omega) \in \mathbb{P}^{d-n-1}(x')$. Inversement, cette

équation définit au plus une hypersurface, donc définit localement H_ω , d'où le résultat.

Notons que tout chemin $x_\sigma(t)$ qui est tangent à H_ω en un point x' est nécessairement contenu dans H_ω .

10. Fin de la démonstration

Une géométrie des chemins sur U est un système de courbes défini localement par les équations :

$$(15) \quad (\ddot{x}^\alpha + \sum_{\lambda, \mu} \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha \dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu) / \dot{x}^\alpha = (\ddot{x}^\beta + \sum_{\lambda, \mu} \Gamma_{\lambda\mu}^\beta \dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu) / \dot{x}^\beta = \dots$$

(le point désigne la dérivation par rapport au paramètre).

On dit que la géométrie est plate si on a $\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha = 0$ dans un système de coordonnées convenables ; les chemins sont alors les droites dans ce système de coordonnées.

Les équations (15) sont bien connues en géométrie riemannienne, où elles fournissent l'équation des géodésiques sans paramètre privilégié. Une connexion projective au sens d'E. Cartan définit également une géométrie des chemins ; inversement une telle géométrie provient toujours d'une connexion projective.

Revenons à notre situation. La condition $\mathbb{P}^{n-2}(x, \sigma) \subset \mathbb{P}^{d-n-1}(x(t))$ signifie que le plan $\mathbb{P}^{n-2}(x(t), x'(t))$ doit être fixe le long de la courbe $x(t)$, ce qui se traduit par l'équation

$$(16) \quad \frac{d}{dt} (\mathbb{P}^{n-2}(x(t), x'(t)) \subset \mathbb{P}^{n-2}(x(t), x'(t)) .$$

Cette équation correspond à un système surdéterminé d'équations différentielles du 2ème ordre, et le point crucial de la démonstration de Chern-Griffiths est l'énoncé suivant :

L'équation (16) définit une géométrie des chemins sur U .

La démonstration occupe 15 pages de calculs extrêmement denses, qu'il n'est pas question d'exposer ici. On va se contenter de quelques remarques sur la philosophie de cette démonstration.

Pour expliciter l'équation (16), il faut pouvoir dériver un repère mobile de $\mathbb{P}^{n-2}(x(t), x'(t))$, donc disposer d'une connexion sur U , aussi adaptée que possible à la situation. Or l'existence d'un champ de courbes rationnelles gauches dans $\mathbb{P}(T_x^*)$ est équivalente à la donnée d'une G-structure, c'est-à-dire d'une réduction du groupe structural du fibré tangent à G , où G est l'image de $GL(2)$ dans

$GL(n)$ par la représentation bien connue. Pour $n = 3$, il existe une connexion sans torsion à valeurs dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G : en effet la G -structure est dans ce cas une structure conforme (pseudo-riemannienne), et le résultat est bien connu. Ce fait simplifie considérablement la démonstration dans le cas $n = 3$, considéré par Blaschke-Bol.

Malheureusement, pour $n \geq 4$, une telle connexion n'existe pas a priori. Deux faits viennent en partie compenser cette absence : l'existence d'un grand nombre de sections du champ de courbes rationnelles gauches (les $\omega^i(x)$), et les "équations harmoniques" (10). Chern et Griffiths montrent qu'il existe des connexions sans torsion adaptées à ces équations ; cela leur permet, après un long calcul, de prouver que l'équation (16) définit une géométrie des chemins sur U .

Il résulte alors de la propriété D que les hypersurfaces H_ω sont totale-ment géodésiques pour la géométrie des chemins ; la démonstration se termine avec le résultat de géométrie différentielle suivant, que nous ne ferons qu'énoncer :

PROPOSITION 2.- Soit U une variété de dimension ≥ 3 , munie d'une géométrie des chemins et d'un champ de courbes rationnelles gauches $D_x \subset \mathbb{P}(T_x^*)$, tels que pour tout $\omega \in D_x$ il existe une hypersurface totalement géodésique de normale ω en x . Alors la géométrie des chemins sur U est plate.

11. Tissus de codimension > 1

Nous n'avons traité dans cet exposé que les tissus d'hypersurfaces ; on définit de manière évidente les tissus de codimension k . De même que l'étude des tissus de codimension un est liée à la géométrie des courbes algébriques, celle des tissus de codimension k fait intervenir des variétés algébriques de dimension k ; celles-ci sont bien sûr beaucoup moins connues que les courbes, ce qui rend la théorie de ces tissus difficile, mais aussi très intéressante pour la géométrie algébrique (cf. § 2, remarque).

Le rang d'un tel tissu se définit comme en codimension un. Chern et Griffiths ont obtenu une majoration pour ce rang, ainsi que l'analogue des propriétés A et B pour les tissus de rang maximal ([3]). Les variétés extrémales de dimension k , qui généralisent les courbes extrémales, ont des propriétés géométriques tout à fait semblables : en particulier, elles sont contenues dans une variété de dimension $k+1$ et de degré minimal ([5]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. BLASCHKE, G. BOL - Geometrie der Gewebe, Springer, Berlin 1938.
- [2] S. S. CHERN, P. GRIFFITHS - Abel's theorem and webs, Jahresberichte der deut. Math-Verein., 80 (1978), p. 13-110.
- [3] S. S. CHERN, P. GRIFFITHS - An inequality for the rank of a web and webs of maximal rank, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, s.IV, vol.5(1978), p. 539-557.
- [4] P. GRIFFITHS - Variations on a theorem of Abel, Inventiones Math., 35 (1976), p. 321-390.
- [5] P. GRIFFITHS, J. HARRIS - Residues and zero-cycles on algebraic varieties, Annals of Math., 108 (1978), p. 461-505.