

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

NICOLAAS H. KUIPER

Sphères polyédriques flexibles dans E^3

Séminaire N. Bourbaki, 1979, exp. n° 514, p. 147-168

http://www.numdam.org/item?id=SB_1977-1978__20__147_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sphères Polyédriques Flexibles dans E^3 , d'après Robert CONNELLY

Nicolaas H. KUIPER

Les figures solides égales sont celles qui sont comprises par des plans semblables, égaux en grandeur et en nombre. (Euclide, le onzième livre des éléments, Définition 10.)

1 - Introduction

Soit M une surface, munie d'un morphisme f de M dans l'espace euclidien E^3 . Les surfaces, ou plus précisément les morphismes, (M, f_0) et (M, f_1) sont isométriques, si la longueur des courbes tracées sur M est la même pour f_0 et f_1 . Une flexion à un paramètre de (M, f_0) est une famille f_t ($0 \leq t < 1$) de morphismes isométriques. C'est une vraie flexion si elle ne provient pas d'un mouvement euclidien global g_t de E^3 , $f_t = g_t \circ f_0$, c'est-à-dire s'il y a dans M deux points tels que la distance de leurs images varie. On dit que la surface (M, f_0) est flexible si elle admet une vraie flexion. Ce schéma de définition est utilisé dans divers contextes, en particulier les suivants :

- M est un polyèdre, et f_t est un plongement linéaire sur chaque face,
- M est différentiable et f_t est différentiable à dérivée injective.

(Nous supprimerons souvent f de la notation (M, f) et écrirons seulement M .)

En 1813 Cauchy a obtenu une démonstration très astucieuse du

Théorème de Cauchy. Si toute face naturelle d'une surface polyédrique convexe

M est maintenue rigide, la surface est inflexible. De plus chaque isométrie de M sur une autre surface convexe M' provient d'un mouvement de E^3 . Si toutes les faces de M sont des triangles, la surface triangulée M est inflexible, si et seulement si son 1-squelette est inflexible. Quelques fautes dans la démonstration de Cauchy ont été signalées par Hadamard et Steinitz, et corrigées. Voir [2, 8, 17].

En ne se limitant pas à des plongements d'une surface M dans E^3 , mais en admettant toutes les applications $M \rightarrow E^3$ linéaires injectives sur chaque simplexe d'une triangulation de M, on a plus de chance de trouver une flexibilité dans cette classe plus étendue. C'est ce que BRICARD (1897) a fait pour l'octaèdre, une triangulation à six sommets de la sphère S^2 . Il a trouvé tous les octaèdres flexibles. Ses trois types "d'octaèdres articulés" ne sont pas des sphères plongées ni même immergées [3].

R. CONNELLY de l'Université Cornell à Ithaca, s'est attaqué au problème de la flexibilité en 1973. Il a retrouvé les octaèdres flexibles de Bricard et en a déduit en 1975 [5] des immersions polyédriques de S^2 flexibles, puis finalement en 1977 [7] le plongement flexible, que nous présentons au chapitre 2. Les surfaces polyédriques fermées dans E^3 , dont on sait qu'elles sont inflexibles, sont rares en dehors des surfaces convexes.

H. GLUCK [10] a démontré que presque tout plongement ou immersion polyédrique de S^2 dans E^3 est inflexible. Nous présentons sa théorie en chapitre 3 et nous en déduisons la flexibilité globale à k paramètres de presque tout disque polyédrique triangulé à bord k + 3 - gonal. Connelly a encore obtenu quelques surfaces fermées non convexes inflexibles, qui sont des suspensions géométriques [6]. Nous y ajoutons un exemple presque convexe au § 3.2. [Voir aussi [18]]

A. D. ALEXANDROV [2] a démontré l'existence et l'unicité à congruence près d'une surface convexe polyédrique isométrique à une surface polyédrique métrique donnée abstraite si les angles à chaque sommet ont une somme $\leq 2\pi$ (c'est-à-dire

si la courbure intrinsèque n'est pas négative. Il en a ensuite déduit par approximation les mêmes conclusions pour les surfaces convexes différentiables. Par conséquent, les surfaces de différentiabilité de classe C^2 strictement convexes (à courbure $K > 0$) sont inflexibles même dans la classe de toutes les surfaces C^2 . Nous ne pouvons pas rappeler ici la vaste activité dans le domaine de l'isométrie des surfaces plongées dans E^3 , qui a depuis suivi ces recherches en U.R.S.S. Voir [2, 9, 16].

Nos connaissances sur la flexibilité des surfaces fermées non convexes différentiables de E^3 sont toujours maigres. On verra ci-dessous que la flexibilité est grande pour les plongements de classe de différentiabilité C^1 . Un plongement f d'une surface fermée M à métrique ds^2 dans l'espace euclidien à métrique ds_E^2 est court si la métrique induite est $f^*(ds_E^2) \leq ds^2$. Avec les méthodes de Kuiper [13,14], qui utilisait les idées de Nash, on peut construire une C^0 -approximation d'une C^∞ isotopie arbitraire f_t de C^∞ plongements courts par une C^1 flexion, c'est-à-dire une C^1 isotopie g_t de C^1 plongements isométriques. Une telle approximation existe par exemple pour f_t égale à la multiplication géométrique à facteur t , $0 < \epsilon \leq t \leq 1$ d'une sphère de rayon un par rapport à son centre en E^3 .

Pour les plongements de classe C^2 les courbures extrinsèques sont définies et elles devraient garantir l'inflexibilité. Mais les preuves sont rares. Les remarques suivantes contiennent des problèmes non résolus.

Remarque 1 : On ne connaît aucune surface différentiable fermée ou immergée de classe C^2 dans E^3 , qui soit flexible.

De plus :

Remarque 2 : On ne connaît aucune surface Riemannienne de classe C^∞ qui admette un plongement ou immersion isométrique flexible, différentiable - C^∞ par morceaux triangulaires flexible.

En dehors des surfaces convexes, Alexandrov [1] a démontré que les surfaces fermées analytiques à courbure absolue totale minimale (tight surfaces)

dans E^3 ,

$$\frac{1}{2\pi} \int |K d\sigma| = 4 - \chi$$

χ étant la caractéristique d'Euler Poincaré, sont inflexibles dans la classe des surfaces analytiques. Nirenberg a généralisé ce théorème et obtenu une inflexibilité pour certaines surfaces C^∞ et "tight", malheureusement sous des conditions "forcées". [Voir [15]]

Remarque 3 : On ne peut pas confirmer l'inflexibilité d'aucune autre C^2 -surface fermée non convexe de E^3 .

2. - Surface flexible de Robert Connelly.

2.1 La construction en géométrie élémentaire que nous reproduisons ici donne des sphères polyédriques flexibles plongées dans l'espace euclidien E^3 .

Lemme - Tout 4-gone $aba'b'$ dans E^3 , à côtés opposés égaux, $\overline{ab} = \overline{a'b'}$ et $\overline{ba'} = \overline{b'a}$, est symétrique par rapport à un axe α , perpendiculaire aux segments aa' et bb' et les coupant dans leurs milieux respectifs, p et q . Ceci est clair pour le parallélogramme de la figure 1b). Si $p \neq q$ (fig 1a) et c), on prend pour α la droite pq . La congruence des triangles $aa'b$ et $a'ab'$ entraîne l'égalité de \overline{pb} et $\overline{pb'}$. Par conséquent dans le triangle $bb'p$ les droites $\alpha = pq$ et bb' sont orthogonales. Le même argument vaut pour α et aa' . La symétrie est exprimée par une rotation d'angle π autour de α .

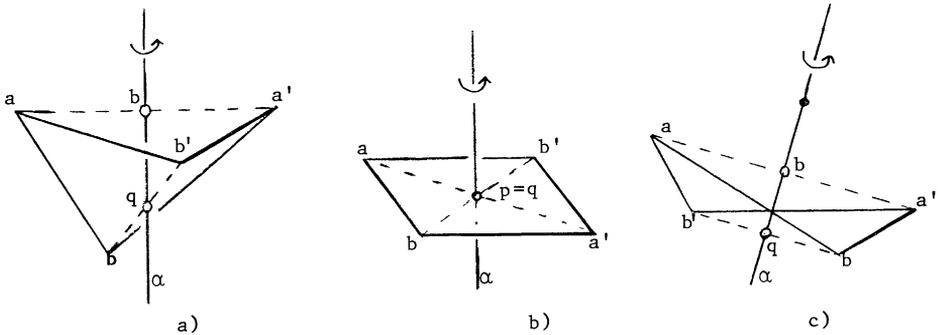


Fig. 1

2.2 Soit $p_1 \dots p_n$ un n -gone de E^3 , étant entendu que $p_i \neq p_{i+1}$ (i modulo n). Soit p un point en dehors des droites $p_i p_{i+1}$, $i = 1, \dots, n$. La configuration des triangles $pp_i p_{i+1}$ est appelée une n -pyramide et notée $p(p_1, \dots, p_n)$. C'est l'image d'un 2-disque triangulé, par un morphisme f , linéaire et injectif sur chaque triangle. La n -pyramide est dite plongée si f est globalement injectif. Les 3-pyramides ne sont pas flexibles, mais la plupart des n -pyramides, $n \geq 4$, le sont évidemment. Il nous faut l'exemple suivant

Lemme - Une 4-pyramide $C = p(p_1, p_2, p_3, p_4)$ plongée, plate et convexe, pour laquelle p_1, p_2 et p_3 ne sont pas colinéaires, est flexible dans E^3 .

Démonstration : Soit C dans un plan horizontal π , et soit p et p_4 (ou p et p_2) sur des côtés différents de la droite p_1p_3 (fig. 2).

Coupons la pyramide suivant p_4p , et relevons les triangles pp_1p_4 et pp_3p_4 autour de pp_1 et pp_3 dans des positions pp_1p_4' et pp_3p_4'' , telles que

$$\overline{p_2p_4'} = \overline{p_2p_4''} = \overline{p_2p_4} - t^2 \quad , \quad t \geq 0 \quad .$$

Les triangles p_2pp_4' et p_2pp_4'' ont leurs trois côtés respectifs égaux et ils sont congruents.

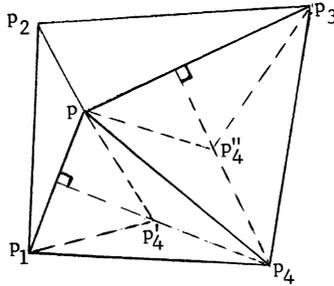


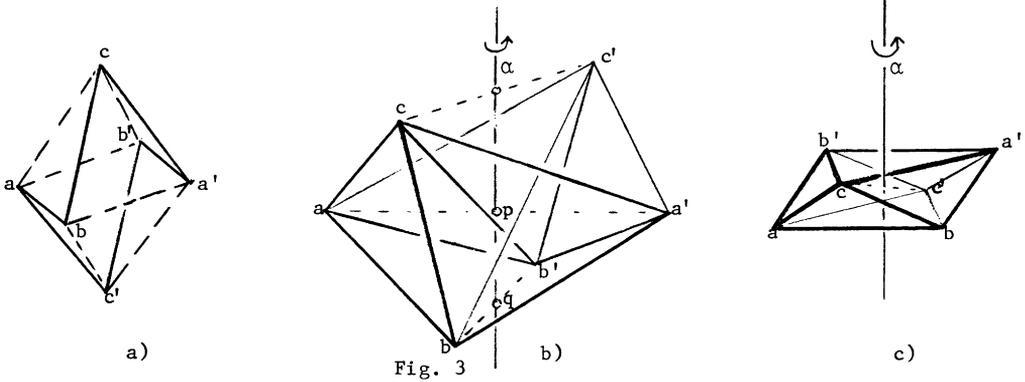
Fig. 2

Relevons ensuite la partie maintenue rigide $p_3p_2pp_4''$ autour de pp_2 , jusqu'à la coïncidence de pp_4'' avec pp_4' . Nous avons ainsi une flexion de la 4-pyramide, à paramètre $t \geq 0$.

2.3 - Octaèdres flexibles.

Prenons un point $c \in E^3$ en dehors de l'axe de symétrie d'un 4-gone $aba'b'$ à côtés opposés égaux (lemme 1.1, fig. 3b)). En général, la pyramide $C = c(a, b, a', b')$ est flexible selon des positions C_t qui dépendent d'un paramètre t . Le bord (a, b, a', b') a pour axe de symétrie α_t . Sans restriction on peut

fixer cet axe dans une position verticale. Soit C'_t la pyramide symétrique de C_t par rapport à α_t . Les pyramides isométriques C_t et C'_t ont en commun le bord $(aba'b')_t$. Flexant ensemble ils déterminent la flexion d'un octaèdre (du type I de Bricard). [Dans la figure 3b) on peut voir également l'hexagone flexible $abca'b'c'$ à côtés et angles constants].



Dans la figure 3b) la pyramide $c(aba'b')$ est plongée, mais la pyramide $a(bcb'c')$ ne l'est pas. Aucun voisinage du point a dans la surface de l'octaèdre n'est plongé homéomorphiquement sur un 2-disque ouvert, de sorte que l'octaèdre n'est pas une sphère plongée ni même immergée.

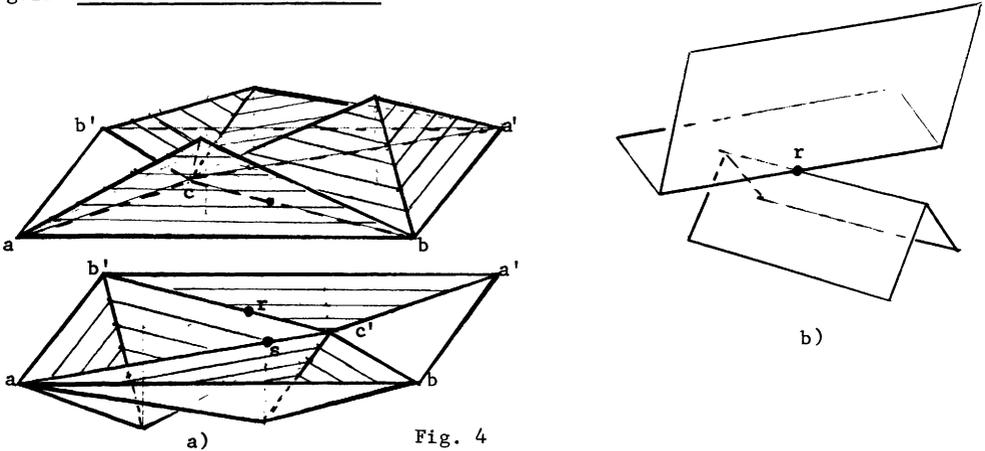
Comme Connelly [5] l'a observé, la théorie générale des immersions linéaires par morceaux de Haefliger-Poenaru [12] permet de conclure à l'existence d'une modification linéaire par morceaux de l'octaèdre, à l'intérieur de chaque triangle d'ou résulte une immersion flexible. Nous n'utilisons pas cette méthode.

Il est impossible d'obtenir de cette façon un plongement flexible, car on constate que les bords de certains triangles dans le 1-squelette de l'octaèdre sont enlacés, si disjoints. On ne peut pas les remplir sans créer des points d'intersection.

2.4 - Un octaèdre flexible bien choisi.

L'octaèdre construit ci-dessus devient plat dans un plan horizontal π , si $aba'b'$ est un parallélogramme horizontal et si c est choisi à l'intérieur en dehors des diagonales comme dans la fig 3c). La pyramide $c(aba'b')$ est flexible d'après 1.2, mais elle ne reste évidemment pas plate. Par conséquent, l'octaèdre $abca'b'c'$ est également flexible. Pour obtenir une immersion flexible nous remplaçons chaque triangle de la pyramide $c(a,b,a'b')$ par une 3-pyramide au-dessus du plan π et chaque triangle de la pyramide symétrique $c'(a',b',a,b)$ par une 3-pyramide au-dessous du plan π . L'immersion ainsi obtenue a seulement deux points de self-intersection, $r = (ca') \cap (c'b')$ et $s = (cb) \cap (c'a)$! Près de r et de s , on voit deux dièdres flexibles qui se touchent au départ, et qui peuvent se pénétrer dans la flexion, avec la création de petites courbes fermées d'intersection.

Pour obtenir une telle immersion convenable il n'est pas nécessaire de modifier tous les triangles. Dans la fig 4 nous n'avons pas modifié les triangles $a'bc'$ et $ab'c$. Nous obtenons ainsi, une immersion flexible d'une sphère triangulée à douze sommets seulement.



Pour obtenir un plongement, Connelly a réussi à faire une petite fossette dans un des dièdres flexibles proche de r et de s , évitant ainsi l'intersection.

2.5 - La construction d'une fossette dans un dièdre flexible.

Avec le 4-gone plat de la fig.1c) nous prenons en fig.5b), un point c sur la droite cm qui coupe orthogonalement le plan μ du cercle circonscrit de $(aba'b')$ dans son centre m . Le point m est sur l'axe de symétrie $\alpha = pq$. Le point c' est choisi symétrique à c par rapport à α . Ainsi nous obtenons encore un autre octaèdre flexible du type I de Bricard. Le 4-gone $(abab')_t$ reste plat, étant dans le plan médian de c_t et c'_t :

$$\overline{a_t c_t} = \overline{b_t c_t} = \dots = \overline{a'_t c'_t} = \overline{b'_t c'_t} \quad .$$

Il est permis de choisir au départ $c = c' = m$ comme dans la fig. 5a), car les points c et c' se séparent dans la flexion et atteignent des positions comme dans la fig 5b). Nous allons coller à l'octaèdre un dièdre sur la droite $a'_t b'_t$, où ses deux demi-plans, par c_t et par c'_t , ont leur bord commun. Enlevons ensuite les triangles $c_t a'_t b'_t$ et $c'_t a'_t b'_t$ à l'exception des côtés $c_t a'_t$, $c_t b'_t$, $c'_t a'_t$ et $c'_t b'_t$, et nous avons la fossette désirée. [L'angle du dièdre "avec fossette" peut varier entre 0 et 2π dans la flexion].

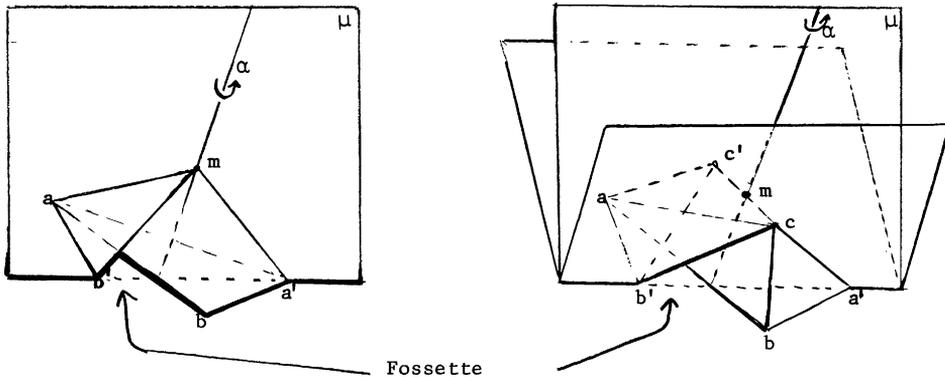


Fig. 5

2.6 - Fin de la construction.

Une surface avec fossette construite en 2.5 est obturée près de r et une autre près de s sur les dièdres en-dessus du plan horizontal π de la sphère immergée de 1.4, et la sphère polyédrique plongée flexible est construite. Les fossettes évitent la self-intersection.

Dans la flexion de l'immersion 1.4 les dièdres s'éloignent l'un de l'autre pour $t > 0$, à un des deux points r et s . Il suffit donc de faire une seule obturation pour obtenir une flexion de plongement, $0 < t$.

Remarque 4.- Nous avons obtenu une sphère plongée et flexible triangulée à 18 sommets. Un exemple à 11 sommets est donné dans [19]. Klaus Steffen a obtenu une sphère flexible à 9 sommets. Ce nombre 9 est peut-être le minimum possible.

Remarque 5 : En collant à notre modèle une surface fermée quelconque suivant un triangle et en enlevant l'intérieur du triangle, on obtient une surface flexible orientable de topologie quelconque.

Remarque 6 : On peut vérifier que la flexion de Connelly laisse invariant le volume compris dans la surface. Ceci est-il vrai pour toute flexion d'une surface polyédrique fermée?

2.7 - Géométrie non-euclidienne.

Comme toute la construction est en géométrie élémentaire et ne dépend que des positions de certain 1-squelettes flexibles, il est évident que les surfaces polyédriques flexibles (de Bricard et de Connelly) existent également dans les espaces non-euclidiens de dimension trois. Pour l'espace elliptique à courbure constante positive il faut éviter dans la construction les figures très grandes par rapport au diamètre de cet espace.

3. Sur un théorème de Herman Gluck.

3.1. Théorème. Soit T une réunion connexe de simplexes de dimension ≤ 2 dans \mathbb{R}^{e_0} , chacun étant tendu par un, deux ou trois des vecteurs a_i de base. Le 0-squelette de T est $T_0 = \{a_0, \dots, a_{e_0}\}$. Soit e_1 le nombre des 1-simplexes (côtés) $a_i a_j$. Ils constituent le 1-squelette T_1 . Soit e_2 le nombre des 2-simplexes (faces). Nous étudions les morphismes $f : T \rightarrow E^3$ de T dans l'espace euclidien E^3 , qui sont linéaires et injectifs sur chaque simplexe de T . Etant donné T , f est déterminé par sa restriction à T_0 . L'image de T_0 est

$$f(T_0) = (p_1, \dots, p_{e_0}) = P \in (\mathbb{R}^3)^{e_0} \quad (1)$$

Avec les définitions du chapitre 1 nous constatons que deux morphismes f_0 et $f : T \rightarrow E^3$ sont isométriques si et seulement si

$$\Phi(P) = \Phi(P_0) \left[\in \mathbb{R}^{e_1} \right] \quad (2)$$

où $\Phi(P)$ est défini par ses composantes, une pour chaque côté $\alpha = (ij)$ de T ,

$$\Phi_{ij}(P) = \|p_i - p_j\|^2 \quad (2')$$

Une courbe différentiable P_t , dans la variété algébrique (2) représente une flexion f_t de f_0 , et chaque flexion différentiable de f_0 est obtenue ainsi. On peut restreindre la classe des isométries en ajoutant les équations linéaires qui expriment que le barycentre de T_0 , ou le barycentre d'une face $p_1 p_2 p_3$, ne varie pas

$$\omega(P) = \sum_i p_i \in \mathbb{R}^3 \quad (3)$$

respectivement

$$\varphi^\dagger(P) = \sum_{i=1}^3 p_i \in \mathbb{R}^3 \quad (3^\dagger)$$

On peut encore restreindre la classe des isométries en ajoutant trois équations qui expriment que le "moment d'inertie" de la position P par rapport à P_0 ,

sur T_0 respectivement sur $p_1 p_2 p_3$ s'annule :

$$\psi(P) = \sum_i p_{oi} \times (p_i - p_{oi}) = 0 \in \mathbb{R}^3 \quad (4)$$

resp. $\psi^\dagger(P) = \sum_{i=1}^3 p_{oi} \times (p_i - p_{oi}) = 0 \in \mathbb{R}^3 \quad (4^\dagger)$

Posons $\Psi(P) = (\Phi(P), \varpi(P), \psi(P)) \in \mathbb{R}^{1+6} \quad (5)$

Nous ne poursuivons pas le cas analogue $\psi^\dagger(P)$.

Une isométrie au sens restreint entre f et f_0 est donnée par

$$\psi(P) = \psi(P_0) .$$

Evidemment, toute courbe analytique P_t non constante dans la variété algébrique (d'isométrie restreinte)

$$\psi(P) = \psi(P_0) = \text{constant}, \quad (6)$$

représente une vraie flexion f_t de f_0 , les flexions qui proviennent d'un mouvement global de E^3 étant exclues par les six équations supplémentaires

$$\varpi(P) = \varpi(P_0), \quad \psi(P) = \psi(P_0) . \quad (7)$$

Donc f est flexible si et seulement si P n'est pas isolé dans (6).

Une condition nécessaire pour que P_t détermine une flexion est

$$\frac{d}{dt} \Phi(P_t) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|p_i - p_j\|^2 = (p_i - p_j) \cdot \left(\frac{dp_i}{dt} - \frac{dp_j}{dt} \right) = 0 \quad (8')$$

Une flexion infinitésimale de P est un vecteur $v = (v_1, \dots, v_{e_0}) \in (\mathbb{R}^3)^{e_0}$ qui satisfait aux e_1 équations linéaires correspondantes.

$$(p_i - p_j) \cdot (v_i - v_j) = 0 \quad (9)$$

Une vraie flexion infinitésimale de P est un vecteur $V \neq 0$ qui satisfait à (9) et à (voir (3), (4), (7))

$$\sum_i v_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_i p_i \times v_i = 0 \quad (10)$$

Son existence est nécessaire pour l'existence d'une vraie flexion de $f: V$ au point P_t est la première dérivée non nulle de P_t par rapport à t .

Les $e_1 + 6$ équations linéaires (9) et (10) sont résumées dans l'équation d'une vraie flexion infinitésimale V :

$$L(P) V = 0 \quad (11)$$

Notons que la $(e_1 + 6) \times (3e_0)$ -matrice $L(P)$ est une fonction linéaire de $P \in (\mathbb{R}^3)^{e_0}$.

On n'a pas trouvé de méthode générale pour étudier la question de la solubilité de (11). Gluck a trouvé la méthode spéciale pour les 2-sphères que nous présentons ci-dessous. Rappelons qu'une triangulation d'une surface M , fermée ou à bord, est un homéomorphisme $\tau: T \rightarrow M$ d'un complexe simplicial T . La caractéristique d'Euler est

$$\chi = \chi(T) = \chi(M) = e_0 - e_1 + e_2.$$

Si la surface triangulée M est fermée, on a

$$2e_1 = 3e_2 \quad \text{et} \quad e_1 = 3(e_0 - \chi).$$

Pour le cas de la sphère, on a

$$\chi = 2 \quad \text{et} \quad e_1 + 6 = 3e_0,$$

et la matrice $L(P)$ de (11) est carrée. Une vraie flexion infinitésimale $V \neq 0$ existe si et seulement si le déterminant s'annule

$$\det L(P) = 0 \quad (12)$$

Pour la triangulation $\tau : T \rightarrow S^2$, et dans la notation ci-dessus, soit U l'ouvert

$$U = \{P : \det L(P) \neq 0\} \subset \mathbb{R}^{3e_0} \quad (13)$$

Un théorème de Steinitz [17] confirme que, pour toute triangulation de la sphère, il existe une surface polyédrique strictement convexe dont les faces naturelles donnent cette triangulation.

Soit $U_C \subset \mathbb{R}^{3e_0}$ l'ouvert de toutes les surfaces strictement convexes pour un T donné.

Nous rappelons dans la section suivante 3.2, la variante du théorème de Cauchy, qui confirme qu'une telle surface polyédrique triangulée est infinitésimalement inflexible. Par conséquent

$$U_C \subset U \quad (14)$$

Comme U_C n'est pas vide, il s'ensuit que U n'est pas vide non plus, et

$$\{P : \det L(P) = 0\}$$

est une sous-variété algébrique propre de $(\mathbb{R}^3)^{e_0}$. Il s'ensuit le

Théorème de Gluck [10]. Presque toutes (voir (13)) les sphères polyédriques à faces triangulaires dans E^3 sont infinitésimalement inflexibles.

3.2. Une variante infinitésimale du théorème de Cauchy (Dehn [8], Alexandrov [2], Gluck [10]).

Définition. Une n -pyramide $C = p(p_1, \dots, p_n)$, plongée dans l'espace euclidien E^3 est pointue s'il existe un plan de support π , tel que $\pi \cap C = p$. La n -pyramide est strictement convexe s'il existe pour chaque côté pp_i , $i = 1, \dots, n_1$ un plan de support π_i , tel que $\pi_i \cap C = pp_i$. Un des côtés de la surface est dit intérieur. Soit C_t une flexion différentiable d'une pyramide plongée $C = p(p_1, \dots, p_n)$. La dérivée de l'angle dièdre sur le côté pp_i sera β_i . Supposons que dans l'ordre cyclique $\beta_1, \dots, \beta_n, \beta_1$, les nombres différents de zéro, donnent N_p changements de signes. Evidemment N_p est pair.

Lemme 1 de Cauchy. Le nombre N_p est $N_p \geq 2$ pour une pyramide pointue, et $N_p \geq 4$ pour une pyramide strictement convexe.

Esquisse de démonstration. Faisons la comparaison entre $C = C_0$ et $C' = C_t$ pour t petit. Plaçons les deux pyramides dans des positions telles que $p' = p$, $p'_1 = p_1$ et $p'_n = p_n$. Coupons la pyramide $p'(p'_1, \dots, p'_n)$ suivant $p'p'_1$ et plions (rotation g_1) successivement pour $i = 1, 2, \dots, n$, la pyramide $p(p'_1, \dots, p'_n, p'_1)$ autour de $p'p'_1 = pp_1$ jusqu'à la coïncidence de p'_{i+1} avec p_{i+1} .

Dans la fig. 6 nous voyons les opérations avec l'oeil en p . Une position intermédiaire est suggérée. La face $p'p'_n p'_1$ est donc assujettie respectivement à des rotations g_1, \dots et g_n autour de pp_1, \dots et pp_n , dont le produit est évidemment l'identité

$$\text{id} = g_n g_{n-1}, \dots, g_2 g_1$$

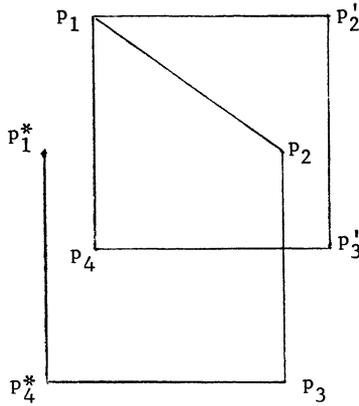


Fig. 6

Dans la limite $t \rightarrow 0$ nous obtenons des rotations infinitésimales qui sont des vecteurs $w_i(p_i - p)$ avec

$$\sum_i w_i(p_i - p) = 0 \tag{15}$$

On peut supposer que les nombres w_i et les nombres β_i du lemme sont resp. de même signe. Pour une pyramide pointue les vecteurs $w_i(p_i - p)$ sont tous du même côté du plan de support si les w_i sont de même signe ($N_p = 0$) : leur somme n'est pas nulle. Cette contradiction (15) donne $N_p \geq 2$. Si la pyramide est strictement convexe et $N_p = 2$, il existe un plan par p qui sépare les vecteurs où $w_i > 0$ de ceux où $w_i < 0$. Les vecteurs $w_i(p_i - p)$ sont tous du même côté de ce plan et de nouveau la somme n'est pas nulle : $N_p \geq 4$.

Lemme 2 de Cauchy. Soit L dans S^2 un graphe fini à e_0 sommets, e_1 côtés curvilinéaires non-circulaires, qui divise $S^2 - L$ en e_2 "faces". Soit $e_{2,k}$ le nombre de faces à k côtés. Supposons $e_{2,2} = 0$, Marquons les côtés avec $+$ ou $-$ arbitrairement. Soit N_p le nombre des changements de signe autour du sommet p . Nous supposons aussi, en ajoutant éventuellement des côtés, mais pas

de sommets, qu'un côté n'est jamais deux fois sur la même face. Dans ce cas

$$\sum_p N_p = N \leq 4e_o - 8$$

Esquisse de démonstration. On a, si C est le nombre de composantes de L ,

$$e_o - e_1 + e_2 = 1 + C \geq 2,$$

$$2e_1 = \sum_k k e_{2,k} \quad \text{et} \quad e_2 = \sum_k e_{2,k}.$$

Donc, si on compte les changements de signes par face :

$$\begin{aligned} \sum_p N_p = N &\leq 2e_{2,3} + 4e_{2,4} + 4e_{2,5} + 6e_{2,6} + 6e_{2,7} + \dots \\ &\leq \sum_k (2k-4)e_{2,k} = 4e_1 - 4e_2 \leq 4e_o - 8. \end{aligned}$$

Théorème de Cauchy-Dehn-Alexandrov. Une surface polyédrique strictement convexe à faces naturelles rigides est infinitésimalement inflexible.

Esquisse de preuve. Dans une vraie flexion infinitésimale on marque + resp. - les côtés dont l'angle dièdre intérieur a une dérivée positive resp. négative par rapport à t . Avec les lemmes 1 et 2 on trouve la contradiction :

$$N_p \geq 4, \quad N \geq 4e_o, \quad N \leq 4e_o - 8.$$

Remarque 7: La grande différence entre $4e_o$ et $4e_o - 8$ permet quelques (≤ 3) sommets à pyramide non strictement convexe, mais néanmoins pointue, sans modifier la conclusion. Par exemple, en remplaçant $p_1 p_2 p_3 \cup p_1 p_2 p_4$ par $p_3 p_4 p_1 \cup p_3 p_4 p_2$ dans la surface convexe à faces triangulaires de la fig. 7a, on obtient une surface non convexe infinitésimalement inflexible (fig 7b).

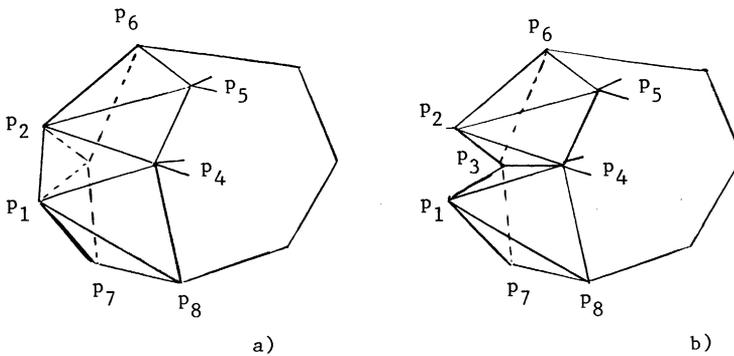


Fig. 7. Surfaces inflexibles

Nous pouvons aussi déduire par cette méthode le résultat d'Alexandrov, à savoir que l'inflexibilité infinitésimale d'un polyèdre convexe reste valable si on admet des sommets supplémentaires sur les côtés naturels de la surface polyédrique convexe.

Remarque 8. CONNELLY a démontré (à paraître) que chaque triangulation linéaire par morceaux d'un polyèdre convexe est inflexible (pas infinitésimalement inflexible). On peut donc admettre des sommets dans l'intérieur des faces naturelles et la surface reste inflexible, même en admettant les surfaces non convexes dans la flexion. Connelly démontre l'inflexibilité infinitésimale d'ordre deux, ce qui suffit.

3.3. Théorème de flexion globale. Soit $\tau : T \rightarrow S^2$ une triangulation d'une 2-sphère. Reprenons les notations de 3.1. Si $\det L(P) \neq 0$, les équations (11) sont linéairement indépendantes. Nous enlevons une arête $\alpha = (ij)$ de T_1 et les intérieurs des deux triangles adjacents. Il reste la triangulation

$$\tau : T^\alpha \rightarrow M$$

d'un disque triangulé à bord 4-gonal.

Théorème 3.3. Presque tout disque triangulé à bord 4-gonal admet une vraie flexion globale donnée par $P(t)$, une courbe algébrique dans $(\mathbb{R}^3)^{e_0}$.

Preuve. Comme nous avons enlevé une arête, une des $3e_0$ équations (11) est supprimée. Si $\det L(P) \neq 0$, le rang du système restant, $L^\alpha(P)V = 0$, est $3e_0 - 1$ et il existe, à un facteur -1 près, précisément un vecteur unitaire $V(P)$, solution de $L^\alpha(P)V = 0$. L'intégration sur l'ouvert $U = \{P : \det L(P) \neq 0\}$ du champ de vecteurs $V(P)$, donne des flexions P_t . De plus les vecteurs $V(P)$ sont dans U les uniques vecteurs tangents aux variétés algébriques $\mathfrak{F}^\alpha(P) = \text{constant}$. Par conséquent, toute partie connexe dans U d'une telle variété est une courbe algébrique. Ces courbes constituent un 1-feuilletage algébrique (d'isométrie restreint) de U . En particulier comme $U_C \subset U$:

Théorème 3.3 A. Si on supprime une arête du 1-squelette d'un polyèdre convexe (e.g. icosaèdre) à faces naturelles triangulaires, la charpente qui reste est flexible (algébrique). Voir Fig. 8 a).

Remarque: Cette flexibilité continue est aussi déductible du théorème de réalisation unique d'Alexandrov mentionné au chapitre 1.

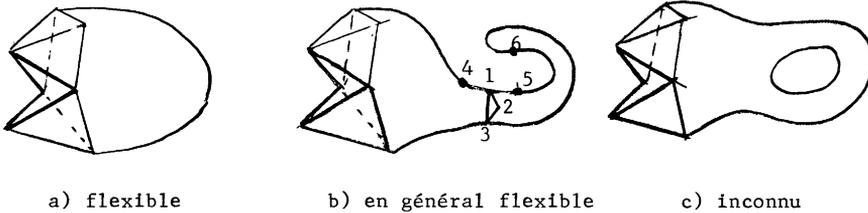
Une généralisation du théorème 3.3 est le

Théorème 3.3 B. L'ensemble de toutes les isométries restreintes de presque tous les disques polyédriques à faces triangulées et à bord $k+3$ -gonal dans E^3 est

une variété algébrique réelle de dimension k : Ce disque admet une flexion à k paramètres. L'ensemble de ces feuilles algébriques donne un feuilletage algébrique de $U \subset (\mathbb{R}^3)^e$.

Remarque 9. Soit $\tau : T \rightarrow D$ une triangulation d'un disque à bord 4-gonal. Supposons que tout triangle du 1-squelette de T a son intérieur dans T . Est-il vrai que la flexion du théorème 3.3 fait varier en général tous les angles diédriques de la surface ?

Fig. 8



Remarque 10. Le disque suggéré dans la fig. 8a) est globalement flexible, celui de la fig. 8b) est "en général" flexible mais la partie droite du triangle $p_1p_2p_3$ de la charpente équivaut à une sphère plongée et elle est en général inflexible. Par conséquent si on introduit une arête rigide p_5p_6 cela ne change rien, tandis qu'une arête rigide p_4p_6 peut rendre la configuration inflexible.

Remarque 11. Soit $\tau : T \rightarrow M$ une triangulation du tore, chaque triangle du 1-squelette ayant son intérieur dans T . Ce tore dans E^3 est-il en général inflexible? Le serait-il encore si on faisait un trou k -gonal, où $k \leq 9$? (Voir fig. 8c))

Remarque 12. Les théorèmes de ce chapitre sont-ils valables en géométrie non euclidienne ? [Voir [16].]

References:

- [1] A. D. Alexandrov, On a class of closed surfaces, *Recueil Math.(Moscow)* 4 (1938), 69-77.
- [2] A. D. Alexandrov, *Konvexe Polyeder*, Akad Verlag. Berlin (1958).
- [3] R. Bricard, Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé, *J. Math.Pures Appl.* (5), 3 (1897), 113-148.
- [4] A. L. Cauchy, Sur les polygones et polyèdres, Second Mémoire, *J. Ecole Polytechnique*, 19 (1813), 87-98.
- [5] R. Connelly, An immersed polyhedral surface which flexes, *Indiana University Math. J.*, 25 (1976), 965-972.
- [6] R. Connelly, The rigidity of suspensions, to appear in the *Journal of Differential Topology*.
- [7] R. Connelly, A counter example to the rigidity conjecture for polyhedra, *Publ. Math. I.H.E.S.* 47 (1978), 333-338.
- [8] M. Dehn, Uber die Starrheit Konvexer Polyeder *Math. Ann.* 77 (1916) 466-473.
- [9] N. W. Efimov, *Flächenverbiegung im Grossen*, Akad. Verlag, Berlin 1978.
- [10] H. Gluck, Almost all simply connected closed surfaces are rigid, *Lecture Notes in Math.* 438, *Geometric Topology*, Springer-Verlag (1975), 225-239.
- [11] B. Grünbaum, *Lectures on lost mathematics*, chapter II. Unpublished.
- [12] A. Haefliger et V. Poenaru, La classification des immersions combinatoires, *Publ. Math. I.H.E.S.* 23 (1964) 651-667.
- [13] N. H. Kuiper, On C^1 -isometric embeddings, *Indag. Math.* XVII, (1954) 545-556 and 683-689.
- [14] N. H. Kuiper, Isometric and short embeddings, *Indag. Math.* 1 XXI, (1959), 11-25.
- [15] L. Nirenberg, *Rigidity of a class of closed surfaces. Non linear problems.* University of Wisconsin Press (1963), 177-193.

- [16] A. U. Pogorelov, *Extrinsic geometry of convex surfaces*, Translation of Math. Monographs 35 A.M.S.(1973).
- [17] E. Steinitz und M. Rademacher, *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Springer Verlag (1934).
- [18] W. Whiteley, *Infinitesimally rigid polyhedra*, Preprint Univ. Quebec.
- [19] *Calendrier 1979*, Springer-Verlag.
- [20] *Pour la science*, may 1978, p. 10-12.

Institut des Hautes Etudes Scientifiques
91440 Bures-sur-Yvette - France