

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-MICHEL BONY

## Hyperfonctions et équations aux dérivées partielles

*Séminaire N. Bourbaki*, 1978, exp. n° 495, p. 73-87

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1976-1977\\_\\_19\\_\\_73\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1976-1977__19__73_0)>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

HYPERFONCTIONS ET ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

[d'après M. SATO, T. KAWAI et M. KASHIWARA]

par Jean-Michel BONY

Pour étudier les singularités analytiques d'une fonction (ou d'une distribution, d'une hyperfonction)  $u$ , il est raisonnable d'introduire le support singulier analytique : complémentaire du plus grand ouvert où  $u$  est analytique, et le faisceau  $\mathcal{B}/\mathcal{A}$  quotient du faisceau des hyperfonctions par celui des fonctions analytiques.

Toutefois, ces concepts se prêtent mal à l'énoncé de "bons" théorèmes. Ainsi, un résultat classique affirme que si une solution  $u$  d'une équation aux dérivées partielles a une discontinuité de première espèce le long d'une surface passant par le point  $x_0$  et de normale  $\eta_0$  en ce point, la singularité se "propage" le long de la bicaractéristique (courbe dans le fibré cotangent) issue de  $(x_0, \eta_0)$ . Si on sait seulement que la surface passe par  $x_0$ , on ne sait qu'exhiber une famille de courbes (relatives aux divers  $\eta_0$  possibles), et affirmer que la singularité se propage le long de l'une d'entre elles.

C'est en 1969 que M. Sato a associé, à une hyperfonction  $u$  quelconque, un ensemble fermé du fibré cotangent : le spectre singulier (dont la projection sur l'espace de base est le support singulier) et une section d'un faisceau sur l'espace cotangent : le faisceau des microfonctions (l'image directe de ce faisceau sur l'espace de base étant  $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ ). Cela permet de localiser dans l'espace cotangent (de microlocaliser comme on dit) l'étude des singularités de  $u$ . Dans le cadre des distributions et de la régularité  $\mathcal{C}^\infty$ , l'analogue du spectre singulier a été introduit peu après par Hörmander (wave front).

Nous décrivons ici les constructions du long mémoire de Sato, Kawai et Kashiwara, et en extrayons quelques applications typiques aux équations aux dérivées partielles.

### 1. Hyperfonctions

Nous donnons ici trois groupes de propriétés du faisceau  $\mathcal{B}$  des hyperfonctions sur  $\mathbb{R}^n$ , chacun de ces groupes de propriétés caractérisant  $\mathcal{B}$ . La définition en termes de cohomologie à support est la définition originale de Sato [10]. La définition à

l'aide des fonctionnelles analytiques est due à Martineau [7] (voir aussi [12]). Dans [8] et [9], Martineau démontre des formes globales du théorème du "Edge of the wedge", et esquisse la démonstration de la forme locale que nous donnons ci-dessous. Celle-ci peut également se déduire facilement de la construction et des propriétés du faisceau des microfonctions (voir remarque 4.3).

Nous désignerons par  $X$  l'espace  $\mathbb{R}^n$ , muni de son orientation et de sa mesure de Lebesgue, par  $Z$  l'espace  $\mathbb{C}^n$ , par  $\mathcal{O}$  le faisceau des fonctions holomorphes, et par  $\mathcal{O}_X$  sa restriction à  $X$ .

### 1.1. Cohomologie à support

On pose  $\mathcal{B} = \mathcal{H}_X^n(Z, \mathcal{O})$ .

Plus précisément, si  $\omega$  est un ouvert de  $X$ , et si  $\tilde{\omega}$  est un ouvert de  $Z$  tel que  $\tilde{\omega} \cap X = \omega$ , on a

$$H_{\omega}^p(\tilde{\omega}, \mathcal{O}) = 0 \quad \text{pour } p \neq n$$

et

$$H_{\omega}^n(\tilde{\omega}, \mathcal{O}) = \mathcal{B}(\omega).$$

Enfin, le faisceau  $\mathcal{B}$  est flasque.

### 1.2. Fonctionnelles analytiques

Rappelons que si une fonctionnelle analytique est portable par  $X$ , il existe un plus petit compact (son support) qui la porte. On sait alors définir ce qu'est une somme localement finie de fonctionnelles analytiques qui est localement nulle. L'espace  $\mathcal{B}(\omega)$  est égal à l'espace des sommes (formelles) localement finies de fonctionnelles analytiques à support dans  $\omega$ , modulo celles qui sont localement nulles.

L'espace  $\Gamma_K(\mathcal{B})$  des hyperfonctions à support dans un compact  $K$  de  $X$  s'identifie ainsi à  $\mathcal{O}'(K)$ , et compte tenu du caractère flasque de  $\mathcal{B}$ , on a

$$\mathcal{B}(\omega) = \frac{\mathcal{O}'(\bar{\omega})}{\mathcal{O}'(\partial\omega)}$$

pour  $\omega$  ouvert borné de  $X$ .

### 1.3. Valeurs au bord

Soient  $\omega$  un ouvert de  $X$  et  $\Gamma$  un cône ouvert convexe saillant non vide de  $X$ . Nous noterons  $f \in \mathcal{O}(\omega + i0\Gamma)$  la propriété suivante :

$f$  est un (germe de) fonction holomorphe définie dans un ouvert  $\Omega$  tel que, pour chaque  $\omega' \subset\subset \omega$ , pour chaque  $\Gamma'$  tel que  $\bar{\Gamma}' \setminus \{0\} \subset \Gamma$ , il existe

$\varepsilon > 0$  tel que  $\Omega \supset (\omega' + i\Gamma') \cap \{z \mid |\operatorname{Im} z| \leq \varepsilon\}$ .

a) Il existe des applications "de valeur au bord", notées  $b_{\omega, \Gamma}$  ou plus simplement  $b$ , de  $\mathcal{O}(\omega + i0\Gamma)$  dans  $\mathcal{B}(\omega)$  qui sont linéaires et compatibles avec les restrictions (de  $\omega$  et de  $\Gamma$ ).

b) Soit  $(\Gamma_\alpha)$  une famille finie de cônes ouverts convexes saillants de  $X$  telle que  $\cup \Gamma_\alpha^0 = S^{n-1}$  (\*). Pour tout  $u \in \mathcal{B}(\omega)$ , il existe alors des  $f_\alpha \in \mathcal{O}(\omega + i0\Gamma_\alpha)$  telles que

$$u = \sum_{\alpha} b(f_\alpha).$$

c) (Théorème du "Edge of the wedge") Soit  $(\Gamma_\alpha)$  une famille finie de cônes ouverts convexes saillants de  $X$ , et soient  $f_\alpha \in \mathcal{O}(\omega + i0\Gamma_\alpha)$ . Pour que l'on ait  $\sum_{\alpha} b(f_\alpha) = 0$ , il faut et il suffit qu'il existe des  $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(\omega + i0(\Gamma_\alpha + \Gamma_\beta))$ , vérifiant  $g_{\alpha\beta} = -g_{\beta\alpha}$  et

$$f_\alpha = \sum_{\beta} g_{\alpha\beta}.$$

#### 1.4. Relations avec les distributions

Toute distribution est somme localement finie de distributions à support compact, et chacune de celles-ci s'identifie à une fonctionnelle analytique dont le support en tant que fonctionnelle analytique coïncide avec le support en tant que distribution. Cela permet donc d'identifier le faisceau des distributions à un sous-faisceau de  $\mathcal{B}$ .

D'autre part, si  $f \in \mathcal{O}(\omega + i0\Gamma)$  est à croissance lente près du réel (i.e.  $|f(x + iy)| \leq C|y|^{-N}$ ), les fonctions de  $x : f(x + iy)$  convergent au sens des distributions, lorsque  $y$  tend vers 0, vers une distribution qui s'identifie à  $b(f)$ .

#### 1.5. Remarque

Si  $X$  est une variété analytique réelle de dimension  $n$ , et si  $Z$  est une complexifiée de  $X$ , il faut tensoriser  $\mathcal{H}_X^n(Z, \mathcal{O})$  par le faisceau d'orientation de  $X$ , et remplacer les fonctionnelles analytiques par le dual des densités analy-

---

(\*) Dans tout ce qui suit, si  $G$  est un cône de  $X$ , ou un sous-ensemble de  $S^{n-1}$ , on note  $G^0$  l'ensemble des  $\eta \in S^{n-1}$  vérifiant

$$\langle \xi, \eta \rangle \geq 0 \quad \text{pour } \xi \in G.$$

tiques. Avec ces conventions les (valeurs au bord de) vraies fonctions sont des hyperfonctions.

2. Spectre singulier

2.1. Opérations

Il n'est pas difficile de définir, à partir de chacun des groupes de propriétés précédents, le produit tensoriel  $u(x)v(y)$  de deux hyperfonctions, l'intégration le long des fibres :  $v(x) = \int u(x,y) dy$  dans le cas où la projection  $\text{Supp}(u) \rightarrow X$  est propre, et l'action sur une hyperfonction d'un opérateur différentiel  $P(x, D_x)$  à coefficients analytiques.

Par exemple, dans ce dernier cas,  $P(x, D_x)$  ayant un prolongement holomorphe  $P(z, D_z)$ , on peut déduire l'action de  $P : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$  de celle de  $P : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ , ou bien définir  $Pu$  par dualité lorsque  $u$  est à support compact, ou bien décomposer  $u$  en  $\sum b(f_\alpha)$  et poser  $Pu = \sum b(Pf_\alpha)$ , le théorème du Edge of the wedge garantissant que  $\sum b(f_\alpha) = 0$  entraîne  $\sum b(Pf_\alpha) = 0$ .

Par contre, à ce stade, on ne peut définir la trace d'une hyperfonction qu'en faisant appel aux valeurs au bord. Soient par exemple  $\omega$  un voisinage de  $0$ ,  $H$  l'hyperplan  $x_n = 0$ , et  $\omega' = \omega \cap H$ . Soit  $u \in \mathfrak{B}(\omega)$  et supposons que  $u$  possède une décomposition  $u = \sum b(f_\alpha)$ ;  $f_\alpha \in \mathcal{O}(\omega + i0\Gamma_\alpha)$  telle que les deux vecteurs  $(0, \dots, 0, \pm 1)$  n'appartiennent pas aux polaires  $\Gamma_\alpha^0$ . Les cônes  $\Gamma'_\alpha = \Gamma_\alpha \cap H$  sont alors non vides, et on peut poser

$$f'_\alpha(z') = f_\alpha(z', 0) \in \mathcal{O}(\omega' + i0\Gamma'_\alpha) \quad \text{et} \quad u|_H = \sum b(f'_\alpha),$$

le théorème du Edge of the wedge garantissant que  $\sum b(f_\alpha) = 0$  implique  $\sum b(f'_\alpha) = 0$ .

L'existence de traces sur  $H$  impliquant en quelque sorte que  $u$  est régulière dans les directions normales à  $H$ , il est raisonnable de poser la définition suivante :

2.2. Définition

On dit qu'une hyperfonction  $u$  est micro-analytique en  $(x_0, \eta_0) \in S^*X \simeq X \times S^{n-1}$ , s'il existe un voisinage  $\omega$  de  $x_0$  tel que l'on ait :

$$u = \sum b(f_\alpha) \text{ dans } \omega \quad ; \quad f_\alpha \in \mathcal{O}(\omega + i0\Gamma_\alpha) \quad ; \quad \eta_0 \notin \Gamma_\alpha^0.$$

On appelle spectre singulier de  $u$ , et on note  $SS(u)$  l'ensemble (fermé) des

points  $(x, \eta)$  où  $u$  n'est pas micro-analytique.

### 2.3. Théorème du prolongement micro-analytique

Soit  $u \in \mathcal{D}'(w)$ , où  $w$  est un voisinage de  $0$ , et supposons que  $u$  soit micro-analytique en l'un des points  $(0; 0, \dots, 0, \pm 1)$ . Alors, si  $u$  est nulle pour  $x_n < 0$ , on a  $u = 0$  au voisinage de  $0$ .

Un difféomorphisme permet de se ramener au cas où la projection de  $\text{Supp}(u)$  sur l'axe des  $x_n$  est propre. Les propriétés de conservation du spectre singulier par intégration font que  $\text{SS}(v)$  ne contient pas l'un des points  $(0, \pm 1)$ , en posant  $v(x_n) = \int u(x', x_n) dx'$ . Il en résulte qu'il existe une fonction holomorphe  $f(z_n)$  définie au voisinage de  $0$  dans le demi-plan supérieur (ou inférieur) telle que  $v = b(f)$ . On a  $v = 0$  pour  $x_n < 0$ , donc  $f = 0$ , et donc  $v = 0$  près de  $0$ .

On démontre de même que toutes les intégrales  $\int \varphi(x', x_n) u(x', x_n) dx'$  sont nulles, avec  $\varphi$  analytique, ce qui entraîne la nullité de  $u$ .

### 2.4. Support essentiel et front d'onde analytique

Dans le cas où  $u$  est une distribution, deux autres notions microlocales de singularités analytiques ont été introduites : le support essentiel ( $\text{SE}(u)$ ) par Bros et Iagolnitzer [5], et le front d'onde analytique ( $\text{WFA}(u)$ ) (et même des fronts d'onde quasi-analytiques) par Hörmander [6]. En fait, pour toute distribution  $u$ , on a  $\text{SS}(u) = \text{SE}(u) = \text{WFA}(u)$ , et plus généralement, toute notion microlocale raisonnable (i.e. ayant un bon comportement par rapport aux traces, produit tensoriel et intégration) de singularité analytique coïncide avec le spectre singulier [1].

La définition du support essentiel utilise une transformation de Fourier généralisée :

$$\mathcal{F}_u(\eta, \lambda; x) = \int \exp[-iy \cdot \eta - \lambda|y - x|^2] u(y) dy.$$

On a  $(x_0, \eta_0) \notin \text{SE}(u)$  s'il existe  $\chi(x)$  de classe  $C^\infty$  à support compact, analytique au voisinage de  $x_0$ , et un voisinage conique  $I$  de  $\eta_0$  tels que l'on ait des majorations

$$\mathcal{F}_{\chi u}(\eta, \lambda; x_0) \leq \frac{C_N}{1 + |\eta|^N} e^{-\lambda\alpha} \quad \text{pour } \eta \in I \text{ et } 0 < \lambda < \gamma|\eta|,$$

pour des constantes  $\alpha, \gamma, (C_N)$  convenables.

La définition du front d'onde analytique utilise l'existence d'une suite  $\chi_n$  de fonctions  $C^\infty$  à support dans un même voisinage aussi petit que l'on veut de  $x_0$ , égales à 1 dans un même voisinage de  $x_0$ , et vérifiant

$$|D^\alpha x_n| \leq C^{n+1} n! \quad \text{pour } |\alpha| \leq n .$$

On a alors  $(x_0, \eta_0) \notin \text{WFA}(u)$  s'il existe une telle suite  $x_n$  et un voisinage conique  $I$  de  $\eta_0$  tels que l'on ait

$$|\widehat{x_n u}(\eta)| \leq C^{n+1} n! |\eta|^{-n} \quad \text{pour } \eta \in I .$$

### 3. Singularités des solutions d'équations aux dérivées partielles

Le spectre singulier de Sato et le front d'onde de Hörmander jouent des rôles homologues pour étudier, dans le cadre analytique ou différentiable, les singularités des solutions. Sur deux points néanmoins, des différences sensibles apparaissent.

De nombreux résultats sont valables, dans le cadre analytique, en supposant les caractéristiques de multiplicité constante, alors que leurs homologues  $C^\infty$  ne sont valables que si les caractéristiques sont simples, ou si des hypothèses portant sur les termes d'ordre inférieur sont satisfaites. Cela s'explique en grande partie par la possibilité de faire agir des opérateurs d'ordre infini (voir 5.3).

D'autre part, des renseignements sur le spectre singulier des solutions permettent d'obtenir, via le théorème de prolongement micro-analytique, des résultats sur le support des solutions, ces résultats n'ayant bien sûr pas d'analogues dans le cadre  $C^\infty$ .

#### 3.1. Théorème (régularité micro-elliptique)

Soit  $P(x, D_x)$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$  à coefficients analytiques, de symbole principal  $P_m$ . Si  $Pu$  est micro-analytique en  $(x_0, \eta_0)$ , et si  $P$  est micro-elliptique en  $(x_0, \eta_0)$  (i.e.  $P_m(x_0, \eta_0) \neq 0$ ), il en résulte que  $u$  est micro-analytique en  $(x_0, \eta_0)$ . En d'autres termes

$$\text{SS}(u) \subset \text{SS}(Pu) \cup \text{Car}(P)$$

avec  $\text{Car}(P) = \{(x, \eta) \mid P_m(x, \eta) = 0\}$ .

Ce théorème entraîne bien sûr que, pour un opérateur elliptique,  $Pu$  analytique implique  $u$  analytique, mais il permet en outre de retrouver très simplement le théorème de Holmgren.

Soit  $S$  une hypersurface passant par  $x_0$ , de normale  $\eta_0$  en ce point, avec  $P_m(x_0, \eta_0) \neq 0$ . Si  $u$  est une hyperfonction solution de  $Pu = 0$  nulle d'un côté de l'hypersurface, on a  $(x_0, \eta_0) \notin \text{SS}(u)$  d'après ce qui précède, et  $u$  est donc nulle au voisinage de  $x_0$  par prolongement micro-analytique.

En fait, tout théorème (de propagation des singularités par exemple) permettant d'affirmer que  $(x_0, \eta_0) \notin SS(u)$  entraîne la même conclusion, ce qui fournit de nombreuses extensions du théorème de Holmgren.

3.2. Faisons maintenant l'hypothèse que les zéros complexes de  $P_m$  forment une variété lisse, c'est-à-dire que

$$P_m(z, \zeta) = e(z, \zeta) q(z, \zeta)^k$$

au voisinage de  $(x_0, \eta_0)$ , avec  $e(z, \zeta) \neq 0$  et  $dq \neq 0$ .

#### Théorème

a) Supposons que  $q(x, \eta)$  soit réel, et que  $dq$  et  $\omega = \sum \eta_i dx_i$  soient linéairement indépendants. Alors, si  $Pu = 0$ , le spectre singulier de  $u$  est réunion de courbes intégrales du champ hamiltonien

$$H_q = \sum \frac{\partial q}{\partial \eta_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \eta_i} .$$

b) Supposons  $d(\operatorname{Re} q)$ ,  $d(\operatorname{Im} q)$  et  $\omega$  linéairement indépendants.

b1) Si le crochet de Poisson  $\{q, \bar{q}\}$  est nul sur  $\operatorname{Car}(P)$  et si  $Pu = 0$ , le spectre singulier de  $u$  est réunion de feuilles du feuilletage de  $\operatorname{Car}(P)$  défini par  $H_{\operatorname{Re} q}$  et  $H_{\operatorname{Im} q}$ .

b2) Si  $\frac{1}{i} \{q, \bar{q}\} > 0$  [resp.  $< 0$ ],  $P$  est [resp. n'est pas] microlocalement résoluble (i.e.  $\forall v, \exists u, (x_0, \eta_0) \notin SS(Pu - v)$ ) et n'est pas [resp. est] micro-hypo-elliptique (i.e.  $(x_0, \eta_0) \notin SS(Pu) \Rightarrow (x_0, \eta_0) \notin SS(u)$ ).

Le résultat b1 s'étend de la façon suivante [2]. Si  $\operatorname{Car}(P)$  est une variété régulière involutive de codimension  $r$ , elle est munie canoniquement d'un feuilletage dont les feuilles sont de dimension  $r$ . Si  $P_m$  s'annule sur  $\operatorname{Car}(P)$  au même ordre dans toutes les directions transversales, le spectre singulier d'une solution est une réunion de feuilles.

On trouvera dans [S.K.K.] une étude microlocale complète, dans les cas "génériques", des systèmes (micro-) différentiels.

## 4. Microfonctions

### 4.1. Propriétés fondamentales du faisceau $\mathcal{C}$

Le faisceau  $\mathcal{C}$  des microfonctions est un faisceau défini sur  $S^*X \simeq X \times S^{n-1}$  et possédant les propriétés suivantes :

a) On a la suite exacte suivante (en notant  $\pi$  la projection  $S^*X \rightarrow X$ ) :

$$0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{\text{Sp}} \pi_* \mathcal{C} \rightarrow 0$$

et donc, le faisceau  $\mathcal{A}$  étant cohomologiquement trivial :

$$0 \rightarrow \mathcal{A}(\omega) \rightarrow \mathcal{B}(\omega) \xrightarrow{\text{Sp}} \mathcal{C}(\omega \times \mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow 0,$$

pour tout ouvert  $\omega$  de  $X$ . On peut donc associer, à toute hyperfonction  $u$  sur  $\omega$  son spectre  $\text{Sp}(u)$ , section du faisceau  $\mathcal{C}$  sur  $\omega \times \mathbb{S}^{n-1}$ .

b) Si  $u \in \mathcal{B}(\omega)$ , on a  $\text{SS}(u) = \text{Support}(\text{Sp}(u)) \subset S^*X$ .

c) Le faisceau  $\mathcal{C}$  est flasque.

Il en résulte que, si  $U$  est un ouvert contenu dans  $\omega \times \mathbb{S}^{n-1}$ , on a

$$\mathcal{C}(U) \cong \frac{\mathcal{B}(\omega)}{\{u \in \mathcal{B}(\omega) \mid \text{SS}(u) \subset \complement U\}}.$$

On pourrait bien entendu définir un préfaisceau  $\mathcal{C}$  par cette formule, mais il semble fort difficile de démontrer directement qu'il s'agit des sections d'un faisceau. En fait, dans [S.K.K.], le faisceau  $\mathcal{C}$  est défini par voie cohomologique comme ci-dessous, et la théorie est développée jusqu'à pouvoir donner un sens à des intégrales du type  $\int K(x,y) u(y) dy$ , avec  $K$  et  $u$  microfonctions. On peut alors donner une sorte de représentation intégrale des sections de  $\mathcal{C}$  à partir d'hyperfonctions sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$ , et déduire le caractère flasque de  $\mathcal{C}$  de celui de  $\mathcal{B}$ .

#### 4.2. Construction des faisceaux $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{C}$

Via les isomorphismes  $SX \simeq iSX \simeq S_X Z$ , on peut munir l'ensemble  $SX \cup (Z \setminus X) \simeq S_X Z \cup (Z \setminus X)$  de sa topologie habituelle d'éclaté de  $Z$  le long de  $X$  (et même d'une structure de variété à bord). On désigne par la même lettre  $\tau$  les projections  $SX \rightarrow X$  et  $SX \cup (Z \setminus X) \rightarrow Z$ .

On peut alors définir le faisceau  $\mathcal{Q}$  sur  $SX$  par

$$\mathcal{Q} = \mathcal{H}_{SX}^1(SX \cup (Z \setminus X), \tau^{-1}\sigma).$$

Si on note par la même lettre  $\Gamma$  un cône ouvert convexe saillant de  $\mathbb{R}^n$  et l'ouvert correspondant de  $\mathbb{S}^{n-1}$ , on a

$$\mathcal{Q}(\omega \times \Gamma) \simeq \mathcal{O}(\omega + i0\Gamma) / \mathcal{O}(\omega).$$

On peut munir le co-éclaté  $S^*X \cup (Z \setminus X)$  d'une topologie raisonnable, bien que non séparée, de la manière suivante. L'ensemble  $(Z \setminus X)$  est ouvert et la topologie induite  $y$  est la topologie usuelle. Un point  $(x_0, \eta_0)$  de  $S^*X$  possède un système fondamental de voisinages constitués de la réunion d'un voisinage "ordinaire"

de  $(x_0, \eta_0)$  dans  $S^*X$  et de

$$\{(x+iy) \in Z \setminus X \mid |x-x_0| < \epsilon ; |y| < \epsilon ; \langle y, \eta_0 \rangle < \epsilon |y|\} .$$

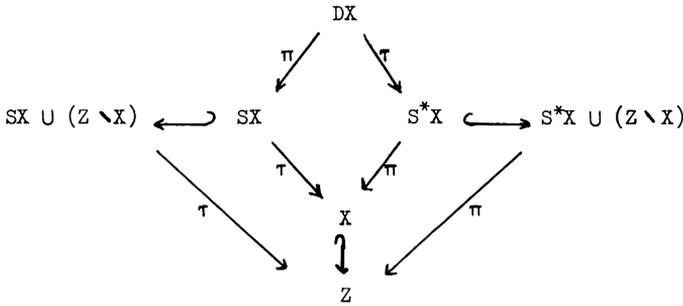
On désigne par la même lettre  $\pi$  les projections  $S^*X \rightarrow X$  et  $S^*X \cup (Z \setminus X) \rightarrow Z$ .

On peut alors définir le faisceau  $\mathcal{C}$  sur  $S^*X$  par

$$\mathcal{C} = \mathcal{H}_{S^*X}^n (S^*X \cup (Z \setminus X), \pi^{-1}\mathcal{O})^a ,$$

en notant  $\mathcal{F}^a$  l'image (directe ou inverse !) d'un faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $S^*X$  par l'application "antipodale" :  $(x, \eta) \mapsto (x, -\eta)$ .

On peut également définir  $DX = \{(x, \xi, \eta) \in SX \times_X S^*X \mid \langle \xi, \eta \rangle \leq 0\}$



et on a alors :

$$\mathcal{C} = R^{n-1} \tau_* \pi^{-1} \mathcal{O}^a ,$$

et la suite exacte suivante de faisceaux sur  $SX$

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\beta} \tau^{-1} \pi_* \mathcal{C} \rightarrow \pi_* \tau^{-1} \mathcal{C} \rightarrow 0 .$$

En prenant les sections dans un ouvert  $\omega \times \Gamma$  avec  $\Gamma$  ouvert convexe saillant, on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(\omega + i0\Gamma) / \mathcal{O}(\omega) \xrightarrow{\beta} \mathcal{C}(\omega \times S^{n-1}) \rightarrow \mathcal{C}(\omega \times (S^{n-1} \setminus \Gamma^0)) .$$

L'application  $\beta$  n'est autre que  $Sp \circ b$ , et on a donc, si  $f \in \mathcal{O}(\omega + i0\Gamma)$ ,  $SSb(f) \subset \omega \times \Gamma^0$ , ce qui entraîne 4.1.b.

4.3. Remarque

Les constructions ci-dessus n'utilisent ni la notion de valeur au bord ni le théorème du Edge of the wedge, et en donnent au contraire des définitions et démonstrations simples.

Ainsi, mis à part le " modulo  $\mathcal{O}(\omega)$  " dont on peut se débarrasser sans trop

de peine, la flèche  $\beta$  ci-dessus définit la valeur au bord d'une fonction holomorphe.

De même, si  $\sum b(f_\alpha) = 0$ , on a  $\sum u_\alpha = 0$  et  $\text{Supp}(u_\alpha) \subset \omega \times \Gamma_\alpha^0$  en posant  $u_\alpha = \text{Sp} \circ b(f_\alpha)$ . Le faisceau  $\mathcal{C}$  étant flasque, il existe des  $v_{\alpha\beta}$  tels que  $v_{\alpha\beta} = -v_{\beta\alpha}$ ;  $\text{Supp}(v_{\alpha\beta}) \subset \omega \times (\Gamma_\alpha^0 \cap \Gamma_\beta^0)$  et  $u_\alpha = \sum v_{\alpha\beta}$ . Soient maintenant  $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(\omega + i0(\Gamma_\alpha + \Gamma_\beta))$  telles que  $\text{Sp} \circ b(g_{\alpha\beta}) = v_{\alpha\beta}$ , on a  $f_\alpha = \sum g_{\alpha\beta} + h_\alpha$  avec  $h_\alpha \in \mathcal{O}(\omega)$  et  $\sum h_\alpha = 0$ . Les fonctions  $g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \frac{1}{N}(h_\beta - h_\alpha)$  conviennent alors ( $N = \text{nombre d'indices } \alpha$ ).

4.4. Indications sur les démonstrations

Dans une première partie, de caractère très général, on montre que les analogues des constructions et résultats précédents sont valides en remplaçant  $\mathcal{O}$  par un faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $Z$  quelconque, à condition de remplacer faisceaux et homomorphismes de faisceaux par les objets et flèches des catégories dérivées correspondantes.

Plus précisément, on définit les objets suivants de la catégorie dérivée des faisceaux sur  $X$  (resp.  $SX$ ,  $S^*X$ ):

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^\cdot &= R\Gamma_X(\mathcal{F})[n] \\ \mathcal{Q}^\cdot &= R\Gamma_{SX} \tau^{-1}(\mathcal{F})[1] \\ \mathcal{C}^\cdot &= R\Gamma_{S^*X} \pi^{-1}(\mathcal{F})^a[n], \end{aligned}$$

en notant  $\Gamma_M$  le foncteur : faisceau des germes de sections à support dans  $M$ . On a alors

$$\mathcal{C}^{\cdot a} = R\tau_* \pi^{-1} \mathcal{Q}[n-1],$$

et les triangles exacts suivants sur  $X$  et  $SX$  :



Dans une seconde partie, il s'agit de démontrer que, lorsque  $\mathcal{F} = \mathcal{O}$ , les  $\mathcal{Q}^\cdot$ ,  $\mathcal{C}^\cdot$  obtenus sont, en fait, des faisceaux, et que les suites spectrales cachées derrière les foncteurs dérivés sont dégénérées. Il faut donc montrer que

$$\mathcal{H}_{SX}^p(SX \cup (Z \setminus X), \mathcal{O}) = 0 \quad \text{pour } p \neq 1,$$

ce qui n'est pas difficile, et que

$$\mathcal{H}_{S^*X}^p(S^*X \cup (Z \setminus X), \mathcal{O}) = 0 \quad \text{pour } p \neq n,$$

ce qui l'est nettement plus. C'est une conséquence du résultat suivant :

$$(\mathcal{H}_{\mathbb{R}^n + iG}^p(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}))_0 = 0 \quad \text{pour } p \neq n,$$

lorsque  $G$  est un cône convexe fermé saillant de  $\mathbb{R}^n$ , résultat qui est précisément l'un des points-clefs de la démonstration de Martineau du théorème du Edge of the wedge. Kashiwara a démontré plus généralement que l'on a

$$(\mathcal{H}_F^p(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}))_0 = 0 \quad \text{pour } p \leq n-d$$

si  $F$  est un convexe fermé de  $\mathbb{C}^n$  contenant  $0$ , et si pour toute variété  $\mathbb{C}$ -linéaire  $L$  de dimension  $d$  passant par  $0$ ,  $L \cap F$  n'est pas un voisinage de  $0$  dans  $L$ .

### 5. Opérateurs micro-différentiels

Les opérateurs pseudo-différentiels analytiques de [3] et [4], définis sur un ouvert  $\omega$  de  $X$  vont apparaître comme les sections sur  $\omega \times S^{n-1}$  d'un faisceau (opérateurs micro-différentiels) défini sur  $S^*X$  et opérant sur les microfonctions. Nous nous bornons à donner deux exemples illustrant l'utilité d'avoir une notion microlocale d'opérateurs, et l'utilité de disposer d'opérateurs d'ordre infini. Enfin, signalons que s'il n'existe pas de faisceau sur  $P^*Z$  analogue à  $\mathcal{E}$ , le fait que les opérateurs micro-différentiels puissent être définis comme faisceau sur  $P^*Z$  permet de microlocaliser l'étude des modules sur l'anneau des opérateurs différentiels sur  $Z$ .

#### 5.1. Définition

Désignons par  $\Delta$  la diagonale de  $Z \times Z$ , et par  $S^*\Delta$  et  $P^*\Delta$  (identifiés à  $S^*Z$  et  $P^*Z$ ) respectivement le fibré en sphère (réelle) cotangent et le fibré projectif (complexe) cotangent. On définit les faisceaux  $\mathcal{E}^R$  sur  $S^*Z$  et  $\mathcal{E}$  sur  $P^*Z$  par :

$$\mathcal{E}^R = \mathcal{H}_{S^*\Delta}^n(S^*\Delta \cup (Z \times Z \setminus \Delta), \pi^{-1}\mathcal{O})$$

$$\mathcal{E} = \gamma_* \mathcal{E}^R$$

où  $\pi$  est la projection de  $S^*\Delta \cup (Z \times Z \setminus \Delta)$  (muni d'une topologie convenable) sur  $Z \times Z$ , et où  $\gamma$  est la projection de  $S^*\Delta$  sur  $P^*\Delta$ .

Le faisceau  $\mathcal{E}$  est appelé faisceau des opérateurs micro-différentiels. Il est

isomorphe au faisceau des symboles défini comme suit. Si  $U$  est un ouvert de  $P^*Z$ , et si  $\tilde{U}$  est l'ouvert conique correspondant de  $Z \times (C^n \setminus \{0\})$ , un symbole  $P(z, \zeta)$  sur  $U$  est une somme formelle

$$P(z, \zeta) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} p_j(z, \zeta),$$

où les  $p_j$  sont holomorphes sur  $\tilde{U}$ , homogènes de degré  $j$ , et vérifient les estimations

$$\forall \varepsilon, \exists C_\varepsilon \quad |p_j(z, \zeta)| \leq C_\varepsilon \frac{\varepsilon^j}{j!} \quad \text{pour } j \geq 0,$$

$$\exists C \quad |p_{-j}(z, \zeta)| \leq C^{j+1} j! \quad \text{pour } j > 0$$

uniformément sur tout compact de  $\tilde{U}$ .

Le faisceau  $\mathcal{E}_X$  (sur  $S^*X$ ) des opérateurs micro-différentiels sur  $X$  est l'image inverse de  $\mathcal{E}$  par le plongement de  $S^*X$  dans le revêtement d'ordre 2 de  $P^*Z$ . Le symbole d'un opérateur défini sur  $U \subset S^*X$  est  $\sum p_j(x, \eta)$ , où les  $p_j$ , définis sur l'ouvert correspondant de  $X \times (R^n \setminus \{0\})$ , se prolongent à un même voisinage conique complexe, et y vérifient les estimations qui précèdent.

Tout le calcul symbolique (composé, adjoint, inverse ...) de [3] et [4] est encore valable microlocalement. Le faisceau  $\mathcal{E}$  est en particulier muni d'une structure de faisceau d'anneau.

Les opérateurs micro-différentiels opèrent sur les microfonctions de manière compatible avec l'action des opérateurs différentiels sur les hyperfonctions, ce qui donne à  $\mathcal{G}$  une structure de  $\mathcal{E}_X$ -module.

### 5.2. Démonstration du théorème 3.1

Sous les hypothèses de ce théorème, soit  $U$  un voisinage ouvert de  $(x_0, \eta_0)$  dans  $S^*X$  tel que l'on ait  $SS(Pu) \cap U = \emptyset$ , et  $P_m(x, \eta) \neq 0$  dans  $U$ . L'opérateur  $P$  est alors inversible dans  $\mathcal{E}(U)$ , et on a

$$Sp(u) = P^{-1}P(Sp(u)) = P^{-1}Sp(Pu) = 0 \quad \text{dans } U,$$

ce qui démontre 3.1.

### 5.3. Utilisation d'opérateurs d'ordre infini

Bornons-nous à montrer sur un exemple comment l'utilisation d'opérateurs d'ordre infini permet de ramener le cas d'opérateurs à caractéristiques multiples à celui des opérateurs à caractéristiques simples.

Soit  $P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}$  l'opérateur de la chaleur et soit

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -1 \\ \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \text{le système du premier ordre associé.}$$

$$\text{On a alors } A^{-1}P_1A = Q_1 \quad \text{avec } Q_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$A = \begin{pmatrix} \text{ch}(x\sqrt{\partial/\partial t}) & \frac{1}{\sqrt{\partial/\partial t}} \text{sh}(x\sqrt{\partial/\partial t}) \\ \sqrt{\partial/\partial t} \text{sh}(x\sqrt{\partial/\partial t}) & \text{ch}(x\sqrt{\partial/\partial t}) \end{pmatrix} .$$

Pour tout ce qui concerne les singularités analytiques, l'équation de la chaleur et le système  $Q_1$  (ou l'opérateur  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ) auront les mêmes propriétés.

Dans ce cas particulier, il a suffi de faire appel à des opérateurs différentiels d'ordre infini, mais il est nécessaire d'utiliser des opérateurs micro-différentiels, par exemple pour traiter les cas du théorème 3.2.

## 6. Transformations de contact quantifiées

Nous nous bornons à quelques indications sur ces transformations, homologues micro-locaux des opérateurs intégraux de Fourier.

Un ouvert  $U$  de  $S^*X$  est canoniquement muni d'une structure de contact, mais il est maintenant muni d'une structure plus riche d'espace annelé et "modulé" définie par les restrictions à  $U$  des faisceaux  $\mathcal{E}_X$  et  $\mathcal{C}$ . Ces deux structures sont reliées par l'application symbole principal, définie pour les opérateurs micro-différentiels d'ordre fini, le symbole principal du commutateur de deux opérateurs étant égal à  $\frac{1}{i}$  fois le crochet de Poisson de leurs symboles principaux.

Une transformation de contact quantifiée de  $U$  sur  $V$  est par définition un isomorphisme de  $U$  sur  $V$  pour la structure définie par  $\mathcal{E}_X$  et  $\mathcal{C}$ . Le résultat microlocal le plus important est le suivant : si  $\phi$  est un isomorphisme de  $U$  sur  $V$  pour la structure de contact, il existe (de manière non unique) une transformation de contact quantifiée de  $U$  sur  $V$  compatible avec  $\phi$ .

Montrons à titre d'exemple comment démontrer le théorème 3.2.a. Sous les hypothèses de ce théorème, il est possible de trouver microlocalement une transformation de contact envoyant  $(x_0, \eta_0)$  au point  $x = 0$  ;  $\eta = (1, 0, \dots, 0)$  et transformant la fonction  $q(x, \eta)$  en la fonction  $\eta_n$ . A l'aide d'une transformation de contact quantifiée associée, on transforme  $P$  en le produit d'un opérateur micro-différentiel

inversible par un opérateur  $R(x, D_x)$  de symbole principal  $\eta_n^k$ . Un argument analogue à celui de 5.3 permet de se ramener à l'étude de l'opérateur  $(\partial/\partial x_n)^k$ , pour lequel la propagation des singularités est évidente.

On obtient, en fait, grâce à ces isomorphismes, un résultat plus précis : le faisceau des microfonctions solutions de  $Pu = 0$  est (microlocalement) constant le long des courbes intégrales du champ hamiltonien, et est flasque transversalement.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-M. BONY - Propagation des singularités différentiables pour une classe d'opérateurs différentiels à coefficients analytiques, S.M.F. Astérisque 34-35(1976), p. 43-91.
- [2] J.-M. BONY et P. SCHAPIRA - Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 26.1(1976).
- [3] L. BOUTET de MONVEL et P. KREE - Pseudo-differential operators and Gevrey classes, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 17(1967), 295-323.
- [4] L. BOUTET de MONVEL - Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et opérateurs d'ordre infini, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 22.3(1972), 229-268.
- [5] J. BROS et D. IAGOLNITZER - Support essentiel et structure analytique des distributions, Sémin. Goulaouic-Lions-Schwartz, 1975, n° 18.
- [6] L. HÖRMANDER - Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math., 23(1970), 329-358.
- [7] A. MARTINEAU - Les hyperfonctions de M. Sato, Sémin. Bourbaki, Exposé 214, 13e année, 1960/61, W. A. Benjamin/Addison-Wesley, 1966.
- [8] A. MARTINEAU - Théorèmes sur le prolongement analytique du type "Edge of the Wedge Theorem", Sémin. Bourbaki, Exposé 340, 20e année, 1967/68, W. A. Benjamin/Addison-Wesley, 1969.
- [9] A. MARTINEAU - Le "Edge of the wedge theorem" en théorie des hyperfonctions de Sato, Proc. Intern. Conf. Functional Analysis and Rel. Topics, Univ. Tokyo Press, (1969), 95-106.

- [10] M. SATO - Theory of hyperfunctions II, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, 8(1959/60), 387-437.
- [S.K.K.] M. SATO, T. KAWAI and M. KASHIWARA - Hyperfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Math., n° 287, 265-529, Springer, 1973.
- [12] P. SCHAPIRA - Théorie des hyperfonctions, Lecture Notes in Math., n° 126, Springer, 1970.