

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MICHEL RAYNAUD

## **Faisceaux amples et très amples**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1978, exp. n° 493, p. 46-58

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1976-1977\\_\\_19\\_\\_46\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1976-1977__19__46_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FAISCEAUX AMPLES ET TRÈS AMPLES

[d'après T. MATSUSAKA]

par Michel RAYNAUD

1. Enoncé du théorème de Matsusaka

Soient  $\kappa$  un corps algébriquement clos,  $V$  une variété algébrique lisse et propre sur  $\kappa$ ,  $L$  un faisceau inversible sur  $V$ . Rappelons que  $L$  est très ample sur  $V$ , s'il existe une immersion fermée  $i$  de  $V$  dans un espace projectif  $\mathbb{P}$ , tel que  $L \simeq i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ , où  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$  est le faisceau fondamental sur  $\mathbb{P}$ . Intrinsèquement,  $L$  est très ample s'il possède assez de sections globales pour séparer les points et les points proches de  $V$ . On dit que  $L$  est ample sur  $V$ , s'il existe  $m > 0$ , tel que  $L^{\otimes m}$  soit très ample. Lorsque  $\kappa = \mathbb{C}$ , les faisceaux amples correspondent aux fibrés en droites positifs de la géométrie kählérienne.

A un faisceau ample  $L$  est associé son polynôme de Hilbert

$$P(m) = \chi(V, L^{\otimes m}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i h^i(V, L^{\otimes m}) \quad (m \in \mathbb{Z})$$

où  $h^i(V, L^{\otimes m}) = \dim_{\kappa} H^i(V, L^{\otimes m})$ . Pour  $m \gg 0$ ,  $P(m) = h^0(V, L^{\otimes m})$ .

Soient  $n = \dim V$  et  $\omega$  le faisceau des formes différentielles de degré  $n$  sur  $V$ . Dans la notation au moyen des diviseurs, on pose  $\omega = \mathcal{O}_V(K_V)$ ,  $L = \mathcal{O}_V(C)$ . D'après le théorème de Riemann-Roch, le polynôme de Hilbert est de la forme

$$(1) \quad P(m) = (C^n) \frac{m^n}{n!} - (K_V \cdot C^{n-1}) \frac{m^{n-1}}{2(n-1)!} + \text{termes de degré } < m-1.$$

Par exemple, si  $V$  est une surface,

$$P(m) = (C^2) \frac{m^2}{2} - (K \cdot C) \frac{m}{2} + \chi(V).$$

Le coefficient  $(C^n)$  est le degré du faisceau ample  $L$ .

**THÉORÈME 1** (Matsusaka [4] et [5]).- Soit  $P : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  une fonction polynomiale. Il existe un entier  $k_0$  tel que pour toute variété complexe, propre et lisse  $V$ , et tout faisceau ample  $L$  sur  $V$ , de polynôme de Hilbert  $P$ ,  $L^{\otimes k}$  soit très ample sur  $V$  pour  $k \geq k_0$ .

Seuls des cas très particuliers de ce théorème étaient connus auparavant.

Pour les courbes  $P(k) = k \deg(L) + 1 - g$  et  $L^{\otimes k}$  est très ample dès que  $k \deg(L) \geq 2g + 1$ . Si  $V$  est une variété abélienne, où une surface  $K3$ ,  $L^{\otimes 3}$  est très ample (Weil [10], Mayer [7], Saint-Donat [9]). Si  $V$  est une surface de type général, sans courbes de deuxième espèce,  $O_V(5K_V)$  est très ample (Kodaira [2], Bombieri [1]). Enfin, Matsusaka et Mumford ont prouvé le théorème 1, pour les surfaces, en toutes caractéristiques [6].

COROLLAIRE.- Les couples  $(V, L)$  formés d'une variété propre et lisse  $V$  et d'un faisceau ample  $L$ , de polynôme de Hilbert donné  $P$ , forment une famille limitée.

En fait ce corollaire est prouvé au cours de la démonstration du th. 1.

Les notes qui suivent sont directement extraites de l'exposé de Lieberman et Mumford donné à Arcata [3].

## 2. Utilisation du théorème de Kodaira

On n'est pas en mesure de montrer directement que  $L^{\otimes k}$  a suffisamment de sections pour  $k \geq k_0$ , ne dépendant que de  $P$ . Aussi, à la place de  $L^{\otimes k}$ , on étudie  $L^{\otimes k} \otimes \omega$ . En effet, d'après le vanishing theorem de Kodaira, on a  $H^i(L^{\otimes k} \otimes \omega) = 0$  pour  $i > 0$  et donc  $\chi(V, L^{\otimes k} \otimes \omega) = h^0(V, L^{\otimes k} \otimes \omega)$ . Par ailleurs,  $H^i(V, L^{\otimes -k})$  et  $H^{n-i}(V, L^{\otimes k} \otimes \omega)$  sont en dualité de sorte que l'on obtient :

$$(2) \quad h^0(V, L^{\otimes k} \otimes \omega) = \chi(V, L^{\otimes k} \otimes \omega) = P'(k) \quad \text{où } P'(m) = (-1)^n P(-m).$$

Fixons  $m_1$ , avec  $P'(m_1) > 0$ , de sorte que  $L^{\otimes m_1} \otimes \omega = O_V(D_1)$ ,  $D_1 > 0$ .

Fixons  $m_0 \geq m_1$ . On a  $L^{\otimes m_0} \otimes \omega = O_V(D)$ , avec  $D = (m_0 - m_1)C + D_1 \simeq m_0 C + K$ .

Commençons par évaluer  $h^0(V, kD)$  en terme de  $(C^n)$  et du nombre rationnel  $t$  (degré relatif de  $D$  par rapport à  $C$ ) défini par :

$$(*) \quad t = \frac{(D \cdot C^{n-1})}{(C^n)} = m_0 + \frac{(K \cdot C^{n-1})}{(C^n)}.$$

On a :

$$kD = k(m_0 C + K) = (k-1)(m_1 C + K) + ((m_1 + k(m_0 - m_1))C + K),$$

d'où, comme  $m_1 C + K \simeq D_1 > 0$ ,

$$\begin{aligned}
 h^0(V, \mathcal{O}_V(kD)) &\geq P'(k(m_0 - m_1) + m_1) = (C^n) \frac{[k(m_0 - m_1) + m_1]^n}{n!} + \text{termes degré} < n \\
 &= (kC)^n \frac{(m_0 - m_1)^n}{n!} + \text{termes degré} < n \\
 &= \left( \frac{(kC)^n}{n!} \right) \left[ t - \frac{(K \cdot C^{n-1})}{(C^n)} - m_1 \right]^n + \text{termes degré} < n .
 \end{aligned}$$

D'après (1),  $\frac{(K \cdot C^{n-1})}{(C^n)}$  est déterminé par  $P$ . Donc, pour  $m_0 \gg 0$ ,  $t$  sera assez grand pour que l'on ait  $\left[ t - \frac{(K \cdot C^{n-1})}{(C^n)} - m_1 \right]^n \geq \frac{3}{4} t^n$ . Il existe alors  $k_0$ , tel que, pour  $k \geq k_0$ , on ait :

$$(3) \quad h^0(V, \mathcal{O}_V(kD)) \geq \frac{((kC)^n)}{n!} \frac{5}{8} t^n .$$

On applique alors le théorème suivant, dont la démonstration donnée plus loin, représente l'essentiel du travail :

**THÉORÈME 2.-** Soient donnés un réel  $\epsilon > 0$ , des entiers  $\gamma, k_0, n$  et un nombre rationnel  $t$ . Alors il existe un entier  $k_1 = k_1(\epsilon, \gamma, k_0, n, t)$  tel que :

Pour tout schéma  $V$  propre et normal, de dimension  $n$ , défini sur un corps algébriquement clos, tout diviseur ample  $C$  sur  $V$  et tout cycle  $D$  sur  $V$ , de codimension 1, vérifiant la condition

$$(4) \quad h^0(V, \mathcal{O}_V(kD)) \geq \frac{(\frac{1}{2} + \epsilon)}{n!} t^n k^n \gamma, \quad \text{pour } k \geq k_0,$$

(où l'on a posé  $\gamma = (C^n)$  et  $t = \frac{(D \cdot C^{n-1})}{(C^n)}$ ), alors, pour tout  $k \geq k_1$ , on

peut trouver un sous-espace vectoriel  $\Lambda$  de  $H^0(V, \mathcal{O}_V(kD))$ , tel que, si

$\varphi_\Lambda : V \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda)$  est l'application rationnelle associée à  $\Lambda$  et  $U$  l'image fermée de  $\varphi_\Lambda$  dans  $\mathbb{P}(\Lambda)$ , on ait :

- a)  $\varphi_\Lambda : V \rightarrow U$  est birationnelle.
- b) Pour toute sous-variété  $\Sigma$  de  $V$ , de codimension 1,  $\dim \varphi_\Lambda(\Sigma) = n - 1$ .
- c)  $\text{degré}(U) \leq \gamma k^n t^n$ .

### 3. Les cycles $\Lambda^{[j]}$

Soient  $V$  une variété propre et normale,  $E$  un cycle effectif sur  $V$ , de codimension 1, et  $\Lambda$  un sous-espace vectoriel de  $H^0(V, \mathcal{O}_V(E))$ . Si  $B$  est le fermé

des points fixes du système linéaire  $\Lambda$ , on a donc un morphisme.

$$\varphi_\Lambda : V - B \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda).$$

Matsusaka introduit, dans ce contexte, les cycles  $\Lambda^{[j]}$  ( $j$ -ème self-intersection de la partie mobile du système linéaire  $\Lambda$ ) comme suit :

Soit  $L$  un sous-espace linéaire général de  $\mathbb{P}(\Lambda)$ , de codimension  $j$ ; alors  $\Lambda^{[j]}$  est le cycle de  $V$ , adhérence dans  $V$ , de  $\varphi_\Lambda^{-1}(L)$ . Si  $s_1, \dots, s_j$  sont des éléments généraux de  $\Lambda$ ,  $\Lambda^{[j]}$  est aussi le cycle, adhérence dans  $V$ , du cycle des zéros communs des sections  $s_1, \dots, s_j$  de  $O_{V-B}(E)$ .

Le cycle  $\Lambda^{[j]}$  est défini à équivalence rationnelle près. Lorsque  $\Lambda = H^0(V, O_V(E))$ , on écrit aussi  $E^{[j]}$  pour  $\Lambda^{[j]}$ . Si  $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ , on a, à équivalence rationnelle près,  $\Lambda_2^{[j]} \simeq \Lambda_1^{[j]} + (\text{cycle} \geq 0)$ .

PROPOSITION 1.- Soient  $V$  une variété propre, normale, de dimension  $n$ ,  $C$  un diviseur ample,  $E$  un cycle de codimension 1 sur  $V$ , et soit  $i \leq \dim \varphi_{kE}(V)$  pour  $k \gg 0$ . Alors

$$(5) \quad (E^{[i]} \cdot C^{n-i}) \leq (C^n) \left( \frac{(C^{n-1} \cdot E)}{(C^n)} \right)^i.$$

Par homogénéité, on peut remplacer  $C$  par un multiple et donc supposer  $C$  très ample. Soit  $V'$  l'intersection dans  $V$  de  $(n-i)$  sections hyperplanes générales. Remplaçant  $C$  par  $C \cdot V'$  et  $E$  par  $E \cdot V'$ , on se ramène au cas où  $i = n$ .

On a  $(kE)^{[n]} \geq k^n (E)^{[n]}$ , de sorte que l'on peut remplacer  $E$  par  $kE$ ,  $k \gg 0$ , ce qui nous ramène au cas où  $\varphi_E$  est une application birationnelle entre  $V$  et son image  $W$ . On a alors  $E^{[n]} = \text{deg } W$ , d'où :

$$\begin{aligned} h^0(V, O_V(kE)) &\geq h^0(W, O_W(k)) = (\text{deg } W) \frac{k^n}{n!} + o(k^n) \\ &= E^{[n]} \cdot \frac{k^n}{n!} + o(k^n). \end{aligned}$$

En comparant cette inégalité avec la minoration de  $h^0(V, O_V(kE))$ ,  $k \gg 0$ , déduite de la proposition suivante, on obtient la proposition 1.

PROPOSITION 2.- Soient  $V$  un schéma propre intègre, de dimension  $n$ ,  $C$  un diviseur très ample sur  $V$ ,  $M$  un faisceau cohérent sur  $V$ , de rang 1, sans torsion, tel que  $H^0(V, M) \neq 0$ . Posons  $\gamma = (C^n)$ ,  $t = \text{degré de } M \text{ relatif à } C$  [i.e. si  $\bar{V}$  est le normalisé de  $V$ ,  $\bar{C}$  l'image réciproque de  $C$  sur  $V$ ,  $\bar{M} \simeq O_{\bar{V}}(\bar{E})$  le faisceau réflexif sur  $\bar{V}$  déduit de l'image réciproque de  $M$ , on a

$t = \frac{(\bar{C}^{n-1} \cdot \bar{E})}{(\bar{C}^n)}$  ]. Posons  $[t]$  = partie entière de  $t$ . Alors, on a :

$$(6) \quad h^0(V, M) \leq \binom{[t]+n}{n} \gamma + \binom{[t]+n-1}{n-1} .$$

Pour  $n = 1$ , on a évidemment :

$$h^0(V, O_V(E)) \leq \deg(E) + 1 = t\gamma + 1 \leq ([t] + 1)\gamma + 1 .$$

Supposons  $n > 1$ . Si  $C$  est une section hyperplane assez générale,  $C$  est encore intègre et  $O_C \otimes M$  est un  $O_C$ -Module sans torsion de rang 1, ayant une section non nulle. Des suites exactes :

$$0 \rightarrow M(-k-1) \rightarrow M(-k) \rightarrow M \otimes O_C(-k) \rightarrow 0 ,$$

on déduit  $h^0(M(-k)) \leq h^0(M(-k-1)) + h^0(M \otimes O_C(-k))$ . Mais  $h^0(M(-k)) \neq 0$ , entraîne que  $M$  contient un sous-faisceau isomorphe à  $O_V(kC)$ , donc que  $[t] \geq k$ . Par suite

$$h^0(M) \leq \sum_{k=0}^{[t]} h^0(M \otimes O_C(-k)) .$$

D'où par récurrence sur  $n$

$$\begin{aligned} h^0(M) &\leq \sum_{k=0}^{[t]} \left( \binom{[t]-k+n-1}{n-1} + \binom{[t]-k+n-2}{n-2} \right) \\ &= \binom{[t]+n}{n} + \binom{[t]+n-1}{n-1} . \end{aligned}$$

#### 4. Démonstration du théorème 2

1ère étape. Il existe  $k_2 = k_2(\epsilon, \gamma, k_0, t)$  tel que pour  $k \geq k_2$ , on ait

$$\dim \varphi_{kD}(V) = n .$$

Plus précisément :

Lemme 1.- Soit  $\Lambda \subset H^0(V, O_V(kD))$ , tel que  $\dim \Lambda > \max_{1 \leq i \leq n-1} (i + \gamma t^i k^i)$ .

Alors  $\dim \varphi_{\Lambda}(V) = n$ .

L'existence de  $k_2$  en résulte, compte tenu de (4).

Rappelons le lemme suivant, conséquence facile de Bertini ([6], th. 3) :

Lemme 2.- Soit  $M$  un faisceau ample, de degré  $d$ , sur un schéma propre et intègre  $W$ , de dimension  $m$ . On a :

$$h^0(W, M) \leq d + m .$$

Soit alors  $W$ , l'image fermée dans  $\mathbb{P}(\Lambda)$ , de  $V$  par  $\varphi_\Lambda$  et  $i$  sa dimension. Pour établir le lemme 1, il suffit de montrer que l'on a

$$\dim(\Lambda) \leq \gamma t^i k^i + i$$

ce qui, d'après le lemme 2, sera conséquence de  $\deg(W) \leq \gamma t^i k^i$ . Or on a :

$$\begin{aligned} \deg(W) &\leq (\text{nombre de composantes de } \Lambda^{[i]}) \\ &\leq (C^{n-i} \cdot \Lambda^{[i]}) \leq (C^{n-i} \cdot (kD)^{[i]}) \\ &\leq \gamma t^i k^i \quad (\text{prop. 1}). \end{aligned}$$

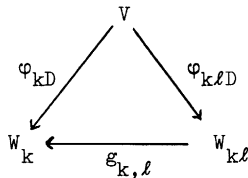
Remarque.- Toujours d'après la proposition 1, on a pour  $k \geq k_2$  :

$$(7) \quad \deg(W) \deg \varphi_\Lambda = \Lambda^{[n]} \leq (kD)^{[n]} \leq \gamma t^n k^n.$$

2ème étape. Il existe  $k_3 = k_3(\epsilon, \gamma, k_0, t)$ , tel que pour  $k \geq k_3$ ,  $\varphi_{kD}$  est birationnel.

On va établir l'existence de  $\ell_0$ , tel que  $\varphi_{\ell_0 k_2 D}$  est birationnelle et on pourra prendre  $k_3 = \ell_0 k_2 + k_0$ .

Soient  $k \geq k_2$  et  $\ell > 1$ . On a un triangle commutatif d'applications rationnelles



et donc  $\deg(\varphi_{kD}) = \deg(\varphi_{k\ell D}) \deg(g_{k,\ell})$ .

Lemme 3.- Il existe un entier  $\ell = \ell(\epsilon, n, t)$  tel que si  $\deg(\varphi_{kD}) > 1$  et  $\deg(g_{k,\ell}) = 1$ , on a :

$$\frac{(k\ell D)^{[n]}}{k^n \ell^n} \geq (1 + \epsilon)^{1/n} \frac{(kD)^{[n]}}{k^n}.$$

En fait, on va voir qu'il suffit de prendre  $\ell$  tel que

$$\binom{\ell(1+\epsilon)^{1/n} + n}{n} + \frac{2}{t^n} \binom{\ell(1+\epsilon)^{1/n} + n - 1}{n-1} < \frac{1+2\epsilon}{n!} \ell^n.$$

(Ce choix est possible car, pour  $\ell \gg 0$ , le premier membre est équivalent à  $\ell^n(1+\epsilon)/n!$ .)

Par hypothèse,  $g_{k,\ell}$  est birationnelle ; soit  $U$  le domaine de définition

de  $\mathcal{G}_{k,\ell}^{-1} = h$  et soit  $M$  le faisceau sur  $W_k$ , sans torsion, de rang 1, égal à  $h^*(O_{W_{k\ell}}(1))$  sur  $U$ , et engendré par

$$h^* H^0(V, O_V(k\ell D)) \subset h^*(H^0(W_{k\ell}, O_{W_{k\ell}}(1))) \subset H^0(U, h^*(O_{W_{k\ell}}(1))).$$

On a donc  $h^0(W_k, M) \geq h^0(V, O_V(k\ell D))$ .

Considérons  $\deg(M)$ , degré de  $M$  relatif à  $O_{W_k}(1)$  (cf. prop. 2). On a :  $\deg(\varphi_{kD}) \deg(M) = (\text{nombre de points d'intersection, dans le complémentaire des points fixes de } (kD), \text{ d'une section de } O_V(k\ell D) \text{ avec } (n-1) \text{ sections assez générales de } O_V(kD))$ . Par suite :

$$(8) \quad \ell^{n-1} \deg(\varphi_{kD}) \deg(M) \leq (k\ell D)^{[n]},$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon}{n!} t^n (k\ell)^n \gamma &\leq h^0(V, O_V(k\ell D)) && \text{(d'après (4))} \\ &\leq h^0(W_k, M) \\ &\leq \binom{\left[ \frac{\deg M}{\deg W_k} \right] + n}{n} \deg(W_k) + \binom{\left[ \frac{\deg M}{\deg W_k} \right] + n - 1}{n-1} \end{aligned} \quad \text{(d'après (6)).}$$

De plus, d'après (7) et l'hypothèse  $\deg \varphi_{kD} \geq 2$ , on a :

$$\deg(W_k) = \frac{(kD)^{[n]}}{\deg \varphi_{kD}} \leq \gamma \frac{t^n n}{2},$$

et d'après (8) :

$$\left[ \frac{\deg(M)}{\deg W_k} \right] \leq \frac{(k\ell D)^{[n]}}{\ell^{n-1} (kD)^{[n]}} = \ell R \quad \text{avec} \quad R = \frac{(k\ell D)^{[n]}}{\ell^n (kD)^{[n]}}.$$

Finalement

$$\frac{\frac{1}{2} + \varepsilon}{n!} t^n n \ell^n \gamma \leq \binom{\ell R + n}{n} \frac{t^n n \gamma}{2} + \binom{\ell R + n - 1}{n-1},$$

d'où

$$\frac{1 + 2\varepsilon}{n!} \ell^n \leq \binom{\ell R + n}{n} + \frac{2}{t^n} \binom{\ell R + n - 1}{n-1}.$$

Vu le choix de  $\ell$ , ceci n'est possible que si  $R > (1 + \varepsilon)^{1/n}$ , d'où le lemme.

Notons que d'après (7), on a pour tout entier  $f > 0$

$$\frac{(k_2 \ell^f D)^{[n]}}{\ell^n (k_2 \ell^{f-1} D)^{[n]}} \leq \gamma \frac{k_2^n t^n \ell^{fn}}{\ell^{fn} (k_2 D)^{[n]}} \leq \gamma k_2^n t^n.$$

Il en résulte que, pour tout entier  $f > 0$ , si  $\deg \varphi_{k_2(\ell^f D)} > 1$ , on a



$\deg \varphi_{k_2}^{f+e} \leq \deg \varphi_{k_2}^f$ , dès que  $e \geq n \frac{\log(\gamma t^{\frac{n}{k_2}})}{\log(1+\varepsilon)}$ . Comme

$\deg \varphi_{k_2} \leq \gamma t^{\frac{n}{k_2}}$ , toujours d'après (7), on voit que  $\varphi_{k_2}^f$  est birationnelle,

dès que  $f \geq n \gamma t^{\frac{n}{k_2}} \frac{\log(\gamma t^{\frac{n}{k_2}})}{\log(1+\varepsilon)}$ .

3ème étape. Montrons qu'il existe  $k_4 = k_4(\varepsilon, \gamma, n, t)$  tel que pour  $k \geq k_4$ , on peut trouver  $\Lambda \subset H^0(V, kD)$  tel que  $\varphi_\Lambda$  vérifie la condition b) du théorème 2.

Si alors on prend  $k \geq k_3 + k_4 = k_1$  et pour  $\Lambda \subset H^0(V, O_V(kD))$ , le plus petit sous-espace engendré par les produits des éléments de  $H^0(V, O_V(k_3D))$  et des éléments de  $\Lambda' \subset H^0(V, O_V(k-k_4)D)$ , tel que  $\varphi_{\Lambda'}$  vérifie b), alors  $\varphi_\Lambda$  vérifie a) et b); d'autre part, c) résulte de (7), d'où le théorème 2.

Lemme 4.- Soit  $k \geq k_0$  avec

$$tk \geq 2n.n!(1 + \frac{1}{\gamma}) .$$

Alors, il existe  $\Lambda \subset H^0(V, O_V(kD))$  tel que  $\dim \varphi_\Lambda(V) = n$  et tel que  $\varphi_\Lambda$  vérifie la condition b) du théorème 2.

De l'hypothèse sur  $k$  et de (4), résulte :

$$n\gamma(tk)^{n-1} + n \leq \gamma(tk)^{n-1}(n + \frac{n}{\gamma}) \leq \gamma \frac{(tk)^n}{2n!} \leq h^0(V, O_V(kD)) .$$

On a aussi  $tk \geq 1$ , de sorte que pour  $\dim(\Lambda) > n + \gamma(tk)^{n-1}$ , on a  $\dim \varphi_\Lambda(V) = n$  (lemme 1). On voit que cette condition est réalisée pour tout sous-espace  $\Lambda$  de  $H^0(V, O_V(kD))$  de codimension  $< (n-1)\gamma(tk)^{n-1}$ .

Partant de  $\Lambda_0 \subset H^0(V, O_V(kD))$ , on va construire une suite décroissante de sous-espaces

$$\Lambda_0 \supset \Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots$$

avec  $\dim \Lambda_i / \Lambda_{i+1} = 1$ , jusqu'à satisfaire la condition b).

Supposons avoir construit  $\Lambda_r$  et qu'il existe encore  $E$  sous-schéma fermé intègre de  $V$ , de codimension 1, tel que

$$\dim \varphi_{\Lambda_r}(E) = i-1 \quad \text{avec } n-1 \geq i \geq 1 .$$

Soit  $M \subset O_V(kD)$ , le plus petit sous-faisceau réflexif, tel que  $\Lambda_r \subset H^0(V, M)$ . Alors, sur le domaine de définition de l'application rationnelle  $\varphi_{\Lambda_r}$ , donc en particulier au point générique de  $E$ ,  $M$  est un faisceau inversible, engendré par  $\Lambda_r$ .

Soit  $\Lambda_{r+1}$  l'hyperplan de  $\Lambda_r$  formé des sections de  $M$  qui s'annulent sur

E et soit Z une fibre générale de la restriction à E de  $\varphi_{\Lambda_r}$ . On a donc  $\dim(Z) = n - i$ .

Alors Z est dans les points fixes de  $\Lambda_{r+1}$ , alors qu'il n'est pas dans les points fixes de  $\Lambda_r$ . Il en résulte que, pour l'équivalence rationnelle, on a

$$(\Lambda_r)^{[i]} \simeq (\Lambda_{r+1})^{[i]} + Z + (\text{cycle effectif}).$$

Donc  $(\Lambda_r)^{[i]} \cdot c^{n-i} > (\Lambda_{r+1})^{[i]} \cdot c^{n-i}$ .

Par ailleurs, pour tout j,

$$(\Lambda_r)^{[j]} \cdot c^{n-j} \geq (\Lambda_{r+1})^{[j]} \cdot c^{n-j}.$$

On voit que si l'on pose

$$\delta(\Lambda) = \sum_{j=1}^{n-1} (\Lambda)^{[j]} \cdot c^{n-j}.$$

On a  $\delta(\Lambda_{r+1}) < \delta(\Lambda_r)$ . Mais, de par la prop. 1, on a

$$\delta(\Lambda) \leq \delta(kD) \leq \sum_{j=1}^{n-1} \gamma(kt)^j \leq (n-1)\gamma(kt)^{n-1}.$$

Vu les remarques suivant l'énoncé du lemme 4, on peut donc construire une chaîne de  $\Lambda_i$ , assez longue, jusqu'à satisfaire la condition b).

Remarque.— Cette jolie démonstration est inspirée de la méthode d'Albanese pour construire, partant d'une variété projective X de dimension n, un sous-espace  $\Lambda$  de  $H^0(O_X(k))$ , tel que  $\varphi_\Lambda$  soit birationnelle et  $\varphi_\Lambda(X)$  n'ait pas de points de multiplicité  $> n!$ .

### 5. Fin de la démonstration du théorème 1

Soient donc  $V$ ,  $L = O_V(C)$  et  $P(k)$  comme dans le n° 1 et soit  $k_0$  tel que si  $D = k_0 C + K$ , on ait (3) pour  $k \geq k_0$ . D'après le théorème 2, il existe  $k_1$ , fonction du polynôme P, et pour  $k \geq k_1$  un sous-espace  $P(\Lambda)$  de  $H^0(V, kD)$ , tel que  $\varphi_\Lambda$  satisfait aux conditions a), b), c). Donc si U est l'image fermée de V, on a  $\dim U = n$  et  $\deg(U) \leq \gamma t^n k^n$ . Posons  $\deg(U) + n - 1 = N$ , de sorte que  $N \leq \gamma t^n k^n + n - 1$ . D'après le lemme 2, on a  $\dim P(\Lambda) \leq N$ . Alors, les variétés intègres U se plongent dans un espace projectif de dimension bornée, avec un degré borné, donc forment une famille limitée (cf. coordonnées de Chow). La famille des normalisées  $\bar{U}$  est, elle aussi, limitée et il existe  $k_2$ , tel que l'image réciproque de  $O_U(k_2)$  sur  $\bar{U}$  soit très ample sur  $\bar{U}$ . Remplaçant  $k_1$  par  $k_1 k_2$  et  $\Lambda$  par  $H^0(\bar{U}, O_{\bar{U}}(k_2)) \subset H^0(V, O_V(k_1 k_2 D))$ , on peut supposer U normal.

En passant par le graphe de  $\varphi_\Lambda$ , on définit un morphisme (noté encore  $\varphi_\Lambda$ ),

du groupe  $\text{Div}(V)$  des diviseurs (de Cartier) sur  $V$ , dans le groupe  $Z^1(U)$  des cycles de codimension 1 sur  $U$ . L'application  $\varphi_\Lambda$  est injective, compte tenu de la condition b) du théorème 2. De plus,  $\varphi_\Lambda((f)_V) = (f)_U$  et pour tout

$E \in \text{Div}(V)$ , on a :

(i)  $\varphi_\Lambda(E) > 0 \Leftrightarrow E > 0$ .

(ii)  $H^0(V, \mathcal{O}_V(E)) \xrightarrow{\sim} H^0(U, \mathcal{O}_U(\varphi_\Lambda(E)))$ .

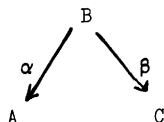
(iii) Concernant les diviseurs canoniques,  $\varphi_\Lambda(K_V) \leq K_U$ .

Si, alors,  $E \in |\ell C + K_V|$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \deg \varphi_\Lambda(E) &= \ell \deg \varphi_\Lambda(C) + \deg \varphi_\Lambda(K_V) \\ &\leq \ell(C \cdot \Lambda^{[n-1]}) + \deg(K_U) \\ &\leq \ell \gamma t^{n-1} k_1^{n-1} + \deg(K_U) \quad \text{d'après la prop. 1.} \end{aligned}$$

Par ailleurs, la famille des  $U$  étant limitée,  $\deg(K_U)$  reste borné ; soit  $b$  un majorant.

Considérons les ensembles  $A, B, C$  et les flèches



définis comme suit :

.  $A$  est l'ensemble des classes de couples  $(V, L)$ ,  $V$  lisse,  $L$  ample sur  $V$ , de polynôme de Hilbert  $P$  ;

.  $B$  est l'ensemble des  $(V, L, s_0, \dots, s_N, E_0, E_1)$  avec  $(V, L)$  comme dans  $A$ ,  $E_0 \in |m_1 C + K_V|$ ,  $E_1 \in |(m_1 + 1)C + K_V|$ ,  $s_0, \dots, s_N \in H^0(V, \mathcal{O}_V(k_1 D))$  (où  $D = k_0 C + K_V$ ) engendrent un sous-espace  $\Lambda$ , tel que  $\varphi_\Lambda$  vérifie les conditions a), b), c) du théorème 2 avec  $\varphi_\Lambda(V)$  normal.

La flèche  $\alpha$  consiste à oublier les  $s_j$  et les  $E_i$ . On a vu qu'il est possible de choisir les constantes  $k_0, k_1, m_1$  et des valeurs bornées de  $N$ , telles que  $\alpha$  soit surjectif.

.  $C$  est l'ensemble des  $(U, F_0, F_1)$  avec  $U \subset \mathbb{P}^N$ ,  $U$  normal de dimension  $n$ ,  $F_i, (i = 1, 2), \in Z^1(U)$  ; ces données étant soumises aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \deg(U) &\leq \gamma k_1^n t^n, \quad \deg(F_i) \leq \gamma k_1^{n-1} t^n (m_1 + i) + b \quad \text{pour } i = 0, 1, \\ h^0(F_0 + \ell(F_1 - F_0)) &\geq P'(\ell + m_1), \quad \forall \ell \geq 0. \end{aligned}$$

Enfin, l'application  $\beta$  est définie par  $U = \varphi_{\Lambda}(V)$ ,  $F_i = \varphi_{\Lambda}(E_i)$ . Notons que la dernière condition numérique, imposée dans la définition de  $C$ , provient du fait que

$$\begin{aligned} H^0(U, O_U(F_0 + \ell(F_1 - F_0))) &= H^0(V, O_V(E_0 + \ell(E_1 - E_0))) = H^0(V, O_V(m_1 + \ell)D) = \\ &= P'(m_1 + \ell). \end{aligned}$$

Notons que  $C$  est une famille limitée, paramétrée par un sous-schéma réduit  $S$ , d'un produit de trois variétés de Chow : c'est clair pour les triplets  $(U, F_1, F_0)$  vérifiant les conditions de degré ci-dessus ; de plus chacune des conditions  $h^0(F_0 + \ell(F_1 - F_0)) \geq P'(m_1 + \ell)$  est fermée.

Le lemme suivant entraîne que  $B$ , (donc  $A$ ) est une famille limitée, d'où le théorème 1.

Lemme 5.- "  $\beta$  est représentable par un morphisme de type fini ".

Soit donc  $(\mathcal{U}, \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$  une famille relative plate sur  $S$  qui paramètre (C) et soit  $s \in S$ , tel que la fibre au-dessus de  $s$  :  $(U, F_1, F_0)$  soit de la forme  $\beta(V, L, \dots, \bar{s}_i, \dots, E_i)$ . Notons  $R$  l'anneau local de  $S$  en  $s$  et  $\mathcal{W}$  l'ouvert de  $\mathcal{U}$  formé des points lisses sur  $S$ .

Soit  $\ell \gg 0$ , tel que  $N = L^{\otimes(\ell+m_1)} \otimes \omega_V$  soit très ample sur  $V$  et que, pour  $m > 0$ ,  $H^0(V, N^{\otimes m})$  soit engendré par  $H^0(V, N)$ .

Sur  $\mathcal{W}$ , on a le faisceau inversible  $O_{\mathcal{W}}(\mathcal{F}_0 + \ell(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_0)) = \mathcal{M}$  ; soit  $M$  sa restriction à  $W = \mathcal{W} \otimes_S k(s)$ . Pour tout  $m \geq 0$ ,  $H^0(V, N^{\otimes m}) \simeq H^0(W, M^{\otimes m})$ . Lorsque  $m = 1$ ,  $h^0(V, N) = P'(\ell + m_1)$ . Il résulte alors de la dernière condition imposée dans la définition de (C) et des propriétés de semi-continuité de  $h^0$ , ([8], chap. II), que  $H^0(\mathcal{W} \otimes_S R, \mathcal{M})$  est un  $R$ -module libre, dont la formation commute au passage aux fibres. Pour  $m > 0$ ,  $H^0(V, N^{\otimes m})$  est engendré par  $H^0(V, N)$  ; donc l'application canonique  $H^0(\mathcal{W} \otimes_S R, \mathcal{M}^{\otimes m}) \rightarrow H^0(W, M^{\otimes m})$  est surjective. Il en résulte encore que  $H^0(\mathcal{W} \otimes_S R, \mathcal{M}^{\otimes m})$  est un  $R$ -module libre dont la formation commute au passage aux fibres. Finalement,  $\bigoplus_{m \geq 0} H^0(\mathcal{W} \otimes_S R, \mathcal{M}^{\otimes m})$  est une  $R$ -algèbre graduée, plate, engendrée par ses éléments de degré 1, donc de type fini. Son spectre homogène  $\mathcal{V}$  est alors un  $R$ -schéma projectif et plat, muni d'un faisceau très ample  $O_{\mathcal{V}}(1)$  ;  $\mathcal{V}$  relève  $V$ , donc est lisse sur  $R$ , et  $O_{\mathcal{V}}(1)$  relève  $N = L^{\otimes(\ell+m_1)} \otimes \omega_V$ . De plus, on a une application rationnelle relative

$\Psi : \mathcal{U} \otimes_S R \rightarrow \mathcal{V}$  qui relève  $\varphi_\Lambda^{-1}$ . Par construction  $\Psi$  a une factorisation de Stein triviale et par suite  $\Psi$  est birationnelle ; soit  $\Phi$  l'application rationnelle inverse de  $\Psi$  ; donc  $\Phi$  relève  $\varphi$ .

Il existe un unique faisceau inversible  $\mathcal{L}$  sur  $\mathcal{V}$ , qui relève  $L$  et tel que  $0_{\mathcal{V}}(1) = \mathcal{L}^{\otimes(\ell+m_1)} \otimes \omega_{\mathcal{V}/R}$  (l'obstruction à relever infinitésimalement  $L$  est annulée par  $\ell + m_1$ , donc est nulle). Le graphe de l'application rationnelle  $\Psi$  permet alors de définir des homomorphismes

$$\Psi : \text{Pic}(\mathcal{W} \times_S R) \rightarrow \text{Pic}(\mathcal{V})$$

$$\Phi : \text{Pic}(\mathcal{V}) \rightarrow \text{Pic}(\mathcal{W} \times_S R)$$

qui relèvent les applications analogues déduites de  $\varphi^{-1}$  et  $\varphi$  (bien que la formation du graphe ne commute pas nécessairement au passage aux fibres). De plus,  $\Psi$  et  $\Phi$  induisent des bijections réciproques sur les classes de faisceaux inversibles algébriquement équivalent à zéro, et  $\Phi$  est injectif puisqu'il en est ainsi de  $\varphi$ . On en déduit qu'il existe des faisceaux  $\mathcal{R}_i$  sur  $\mathcal{V}$  ( $i = 0, 1$ ), algébriquement équivalent à zéro, tels que :

$$\begin{aligned} \Phi(\mathcal{L}^{\otimes m_1} \otimes \omega_{\mathcal{V}/S} \otimes \mathcal{R}_0) &= 0_{\mathcal{W}}(\mathcal{F}_0) \otimes_S R \\ \Phi(\mathcal{L}^{\otimes(m_1+1)} \otimes \omega_{\mathcal{V}/S} \otimes \mathcal{R}_1) &= 0_{\mathcal{W}}(\mathcal{F}_1) \otimes_S R. \end{aligned}$$

Etendant  $\mathcal{V}, \Psi, \mathcal{L}, \mathcal{R}_i$  au-dessus d'un voisinage de  $s$ , on en déduit d'abord que, quitte à restreindre  $S = \text{Spec}(A)$ , on peut supposer que la  $A$ -algèbre

$\bigoplus_{m \geq 0} H^0(\mathcal{W}, \mathcal{N}^{\otimes m})$  est plate sur  $A$ , de type fini, a une formation qui commute aux changements de base et un spectre homogène lisse sur  $A$ , noté encore  $\mathcal{V}$ . De plus,

sachant que pour  $l' \geq l$ ,  $\mathcal{L}^{\otimes(m_1+l')} \otimes \omega_{\mathcal{V}/S} \otimes \mathcal{R}_0^{\otimes(1-l')} \otimes \mathcal{R}_1^{\otimes l'}$  est  $S$ -ample sur  $\mathcal{V}$ , on voit que si on remplace  $l$  par  $l' \geq l$  dans la construction précédente, on obtient le même couple  $(\mathcal{V}, \Psi)$ .

Finalement, pour représenter  $\beta$ , il suffit de rendre  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_1$  triviaux ce qui définit un sous-schéma fermé de  $S$ , puis d'identifier  $(s_0, \dots, s_N)$  à des sections de  $0_{\mathcal{V}}(k_1, D) = \mathcal{L}^{\otimes k_1 m_0} \otimes \omega_{\mathcal{V}/S}^{k_1}$ , via  $\Phi$ , ce qui revient à paramétrer les sections de  $0_{\mathcal{V}}(k_1, D) \otimes \Phi^*(0_{\mathcal{W}}(-1))$  et conduit à un fibré projectif, d'où le lemme.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. BOMBIERI - Canonical models of surface of general type, Publ. I.H.E.S., 42(1973), p. 171-220.
- [2] K. KODAIRA - Pluricanonical systems on algebraic surfaces of general type, J. Math. Soc. Japan, 20(1968), p. 170-192.
- [3] D. LIEBERMAN and D. MUMFORD - Matsusaka's big theorem, Proc. of the AMS Summer Institute 1974, Arcata,
- [4] T. MATSUSAKA - On canonically polarized varieties II, Amer. Journ. Math., 92(1970), p. 283-292.
- [5] T. MATSUSAKA - Polarized varieties with a given Hilbert polynomial, Amer. Journ. Math., 94(1972), p. 1027-1077.
- [6] T. MATSUSAKA and D. MUMFORD - Two fundamental theorems on deformations of polarized varieties, Amer. Journ. Math., 86(1964), p. 668-683.
- [7] A. MAYER - Families of  $K3$  surfaces, Nagoya Math. Journ., 48(1972), p. 1-17
- [8] M. RAYNAUD - Faisceaux amples sur les schémas en groupes, Lecture Notes in Math., n° 119, Springer, 1970.
- [9] B. SAINT-DONAT - Projective models of  $K-3$  surfaces, Thèse
- [10] A. WEIL - Variétés kählériennes, Paris, Hermann, 1958.