FRANCIS HIRSCH

Opérateurs carré du champ

Séminaire N. Bourbaki, 1978, exp. nº 501, p. 167-182
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1976-1977__19__167_0>

OPÉRATEURS CARRÉ DU CHAMP

[d'après J. P. ROTH]

par Francis HIRSCH

§ 1. Introduction

Dans la théorie du potentiel électrostatique dans R^3 , interviennent les applications suivantes :

- le laplacien Δ (opposé de l'inverse du noyau newtonien N)
- l'opérateur carré du champ électrostatique

$$f \longmapsto \|\text{grad } f\|^2 \qquad (\| \ \| \text{ norme euclidienne})$$

qui associe, à tout potentiel $f = Ng$, la fonction qui vaut en x le carré scalaire du champ engendré par la charge g en x

- l'intégrale de Dirichlet

$$f \longmapsto \int \|\text{grad } f\|^2 \, dx$$

qui associe, à tout potentiel $f = Ng$, l'énergie de la charge g .

Si l'on note, pour f dans $\mathcal{D}(R^3)$,

$$Af = \Delta f \quad , \quad B(f) = \|\text{grad } f\|^2 \quad , \quad Q(f) = \int \|\text{grad } f\|^2 dx \ ,$$

on peut passer de l'un de ces opérateurs à l'autre par les formules :

$$B(f) = \tfrac{1}{2} A(f^2) - f\,Af \quad , \quad Q(f) = \int B(f)(x)dx \quad , \quad Q(f) = -\int f(x)\,(Af)(x)\,dx \, .$$

En fait, les propriétés fondamentales de ces opérateurs peuvent être obtenues à partir de "principes" très simples gardant un sens dans un contexte général. Un problème important en théorie du potentiel est alors la détermination de tous les opérateurs vérifiant ces principes.

Pour l'opérateur A , le principe correspondant est le "principe du maximum positif". La détermination, dans le cadre des opérateurs invariants par translations sur R^n , des opérateurs vérifiant ce principe, équivaut à la formule de Levy-Khintchine (cf. [12]). Cette formule a été ensuite étendue aux groupes de Lie par G. A. HUNT ([8]), puis au cas non invariant par translations, sur un ouvert de R^n ou sur une variété, par Ph. COURREGE ([4] et [5]). Nous donnons dans le paragraphe 2 un théorème de représentation du type formule de Levy-Khintchine, tout à fait général, et qui permet de retrouver aisément les cas connus (il s'agit d'un résultat de J. P. ROTH ([15])).

En ce qui concerne l'opérateur Q , le principe correspondant est le "principe des contractions", mis en évidence par A. BEURLING et J. DENY qui ont introduit, en relation avec ce principe, la notion de forme de Dirichlet ([3], [6], [7]). Dans le paragraphe 4, nous considérons des formes de Dirichlet en un sens généralisé (sans référence à une mesure de base, seul le principe des contractions étant conservé) et énonçons des théorèmes de représentation permettant de les déterminer. Ces théorèmes sont dus, pour l'essentiel, à G. ALLAIN ([1]) et L. E. ANDERSSON ([2]), certaines améliorations ayant été apportées par J. P. ROTH ([16], [17]).

Enfin, l'axiomatisation convenable des propriétés de l'opérateur B a donné la notion d'opérateur carré du champ, introduite par J. P. ROTH ([15]). Il s'agit d'une notion intermédiaire entre celle d'opérateur vérifiant le principe du maximum positif et celle de forme de Dirichlet, les opérateurs carré du champ étant caractérisés à la fois par un principe du maximum et par un principe de contractions. Le paragraphe 3 sera consacré essentiellement à la détermination de ces opérateurs qui semblent devoir jouer un rôle important en théorie du potentiel et en théorie des probabilités.

Un certain nombre de résultats complémentaires, concernant notamment les relations entre les trois types d'opérateurs étudiés, des notions voisines, des problèmes, des généralisations, sont mentionnés au paragraphe 5.

§ 2. Formule de Levy-Khintchine généralisée

Soit X un espace localement compact, $\mathcal{C}(X)$ (resp. $\mathcal{C}_0(X)$) l'ensemble des fonctions réelles continues sur R (tendant vers 0 à l'infini). Soit A un opérateur linéaire de $\mathcal{C}(X)$, de domaine D(A) .

DÉFINITION.- A vérifie le principe du maximum positif (PMP) si

$$\forall f \in D(A) , \forall x \in X , \qquad f(x) = \sup f \geq 0 \Longrightarrow Af(x) \leq 0 .$$

Notons $\mathcal{J}$ l'ensemble $\{f \in \mathcal{C}^\infty(R) ; f(0) = 0\}$.

On suppose, dans ce qui suit, que A vérifie le PMP, que D(A) est inclus dans $\mathcal{K}(X)$ (ensemble des fonctions continues à support compact), dense dans $\mathcal{C}_0(X)$, et que

$$\forall \varphi \in \mathcal{J} , \forall f \in D(A) , \qquad \varphi \circ f \in D(A) .$$

On note, pour $x \in X$ et $m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{I}_m(x)$ l'idéal de $D(A)$ engendré par les fonctions g^m où $g \in D(A)$ et $g(x) = 0$.

On peut alors énoncer le théorème suivant ([15]) :

THÉORÈME 1.- Il existe, pour $x \in X$,

(i) une mesure de Radon positive μ_x sur $X \setminus \{x\}$, telle que

$$\forall f \in \mathfrak{I}_2(x), \qquad \int |f| \, d\mu_x < +\infty$$

et, quel que soit V voisinage de x,

$$\mu_x(X \setminus V) < +\infty$$

(ii) une forme linéaire T_x sur $\mathfrak{I}_2(x)$

- locale, portée par $\{x\}$ (i.e. $\forall f \in \mathfrak{I}_2(x)$, $x \notin \operatorname{Supp} f \Longrightarrow T_x(f) = 0$)
- vérifiant le PMP (i.e. $\forall f \in \mathfrak{I}_2(x)$, $f \geq 0 \Longrightarrow T_x(f) \geq 0$)
- d'ordre 2 (i.e. $\forall f \in \mathfrak{I}_3(x)$, $T_x(f) = 0$)

telles que

$$\forall f \in \mathfrak{I}_2(x), \qquad Af(x) = T_x(f) + \int f \, d\mu_x .$$

Dans [15], J. P. ROTH déduit ce théorème du théorème de représentation des opérateurs carré du champ. La démonstration que nous donnons ci-après ([17]), mérite d'être connue par suite de son extrême simplicité.

1) L'hypothèse sur le domaine de A assure que $D(A) \cap \mathcal{K}(X \setminus \{x\})$ est riche dans $\mathcal{K}(X \setminus \{x\})$. D'autre part, d'après le PMP, l'application

$$f \longrightarrow Af(x)$$

est une forme linéaire sur $D(A) \cap \mathcal{K}(X \setminus \{x\})$, positive sur $D(A) \cap \mathcal{K}^+(X \setminus \{x\})$. Elle se représente donc par une mesure de Radon positive, μ_x, sur $X \setminus \{x\}$ et on a

$$\forall f \in D(A), \qquad \operatorname{Supp} f \not\ni x \Longrightarrow Af(x) = \int f \, d\mu_x .$$

2) Soit $f \in D(A)$ tel que $f(x) = 0$ et $f \geq 0$. Il existe une suite croissante $(T_m)_{m \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{S}$ positifs, convergeant simplement vers $y \to y^+$ et vérifiant :

$$y \leq \frac{1}{m} \Longrightarrow T_m(y) = 0 .$$

Alors

$$\forall m, \qquad \begin{array}{l} T_m \circ f \in D(A) \\ A(T_m \circ f)(x) = \int (T_m \circ f) d\mu_x \end{array}$$

$$\text{et} \quad A(f - T_m \circ f)(x) \geq 0 \qquad \text{d'après le PMP.}$$

On en déduit

$$\int f \, d\mu_x \leq Af(x) < +\infty$$

et par conséquent

$$\forall f \in \mathcal{J}_2(x) \,, \qquad \int |f| d\mu_x < +\infty \,.$$

3) Soient $\theta \in D(A)$, $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta = 1$ sur un voisinage de X , et $\varphi \in D(A)$,

$$0 \leq \varphi \leq 1 \,, \qquad \operatorname{Supp} \varphi \subset \operatorname{Supp}(1 - \theta) \,.$$

D'après le PMP et la définition de μ_x ,

$$\int \varphi \, d\mu_x \leq -A\theta(x)$$

et donc

$$\mu_x(\{\theta < 1\}) \leq -A\theta(x) \,.$$

(i) est ainsi vérifié.

4) Pour f appartenant à $\mathcal{J}_2(x)$, on pose

$$T_x(f) = Af(x) - \int f \, d\mu_x \,.$$

Il est clair, d'après ce qui précède, que T_x est locale, portée par $\{x\}$ et vérifie le PMP.

Soit f de la forme φg^3 avec φ , $g \in D(A)$ et $g(x) = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, $f + \varepsilon g^2$ appartient à $\mathcal{J}_2(x)$ et est positive dans un voisinage de x . T_x étant locale et vérifiant le PMP

$$T_x(f + \varepsilon g^2) \geq 0 \,.$$

A la limite

$$T_x(f) \geq 0$$

et de même

$$T_x(f) \leq 0 \,.$$

(ii) est donc vérifié.

<u>Remarques</u>.- 1) Si X est un ouvert de R^n et $D(A) = \mathcal{K}(X) \cap \mathcal{C}^2(X)$, le théorème précédent permet de retrouver rapidement la formule de représentation donnée par Ph. COURREGE ([4]) .

2) Sous les hypothèses et avec les notations du théorème, si f est continue bornée et localement dans $D(A)$ (i.e. $\forall x \in X$, $\exists V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists g_x \in D(A)$, $g_x|V = f|V$), on peut définir Af par

$$Af(x) = Ag_x(x) + \int (f - g_x) d\mu_x \,,$$

ce qui est une définition cohérente. On peut, en particulier, définir $A1$ (qui est une fonction s.c.i., négative ou nulle).

Nous allons terminer ce paragraphe en donnant un résultat ([17]) qui s'apparente à la formule d'Ito connue en théorie des probabilités.

THÉORÈME 2.- Avec les hypothèses et les notations du théorème précédent,

$\forall f \in D(A)$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, $\forall x \in X$,

$$A(\varphi \circ f)(x) = \tfrac{1}{2}(\varphi'' \circ f)(x)\ G(f,f)(x) + (\varphi' \circ f)(x)\ Pf(x) + (\varphi \circ f)(x)C(x)$$
$$+ \int [(\varphi \circ f)(y) - (\varphi \circ f)(x) - (\varphi' \circ f)(x)(f(y) - f(x))]\ d\mu_x(y)$$

où

$$G(f,f)(x) = T_x[(f - f(x))^2]$$
$$Pf = Af - fA1$$
$$C = A1 .$$

La démonstration est immédiate : d'après la formule de Taylor, il existe ψ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tel que

$$(\varphi \circ f)(y) = (\varphi \circ f)(x) + (\varphi' \circ f)(x)(f(y) - f(x)) + \tfrac{1}{2}(\varphi'' \circ f)(x)(f(y) - f(x))^2$$
$$+ (\psi \circ f)(y)(f(y) - f(x))^3 .$$

On en déduit

$$T_x[(\varphi \circ f) - (\varphi \circ f)(x) - (\varphi' \circ f)(x)(f - f(x))] = \tfrac{1}{2}(\varphi'' \circ f)(x)\ G(f,f)(x)$$

ce qui conduit au résultat.

§ 3. Opérateur carré du champ

Les résultats de ce paragraphe sont dus à J. P. ROTH ([15], [17]). On considère un espace localement compact X . On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des applications T de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$T(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x , y \in \mathbb{R} , \quad |T(x) - T(y)| \leq |x - y| .$$

Si f et g sont des fonctions réelles sur X , f est dite contraction normale de g si

$$\forall x \in X , \quad |f(x)| \leq |g(x)| \quad \text{et} \quad \forall x , y \in X , \quad |f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)| .$$

Il est clair que, pour que f soit une contraction normale de g , il faut et il suffit qu'il existe T dans $\mathcal{C}$ tel que $f = T \circ g$.

Soit A un opérateur de $\mathcal{C}(X)$, de domaine $D(A)$ vérifiant

$\forall f , g \in D(A)$, $\qquad f.g \in D(A)$

et considérons l'application

$$B : (f,g) \in D(A) \times D(A) \longmapsto [A(fg) - fAg - gAf] \in \mathcal{C}(X) .$$

PROPOSITION.- Si A vérifie le principe du maximum positif, B est une application bilinéaire symétrique vérifiant

(i) $\forall f, g \in D(A)$ $\qquad$ f contraction normale de $g \Longrightarrow B(f,f) \leq B(g,g)$

(ii) $\forall f, g \in D(A)$, $\forall x \in X$, $\qquad$ $f(x) = \sup f \geq 0$ et $g(x) = \sup g \geq 0 \Longrightarrow B(f,g)(x) \geq 0$.

Nous donnons ici une démonstration directe de cette proposition (la démonstration initiale de J. P. ROTH utilisait l'approximation des opérateurs vérifiant le PMP). Supposons que f est une contraction normale de g, f et g étant dans $D(A)$.
$(B(f,f) - B(g,g))(x) = A[(f - f(x))^2 - (g - g(x))^2 + g(x)^2 - f(x)^2](x)$.

$h = (f - f(x))^2 - (g - g(x))^2 + g(x)^2 - f(x)^2$ est un élément de $D(A)$ atteignant son sup positif ou nul en x, ce qui implique (i).

Si, maintenant, les hypothèses de (ii) sont vérifiées, posons
$$k = (f - f(x))(g - g(x)) - f(x)g(x) .$$
k appartient à $D(A)$ et atteint son inf négatif ou nul en x, ce qui implique (ii).

Remarques.- 1) (i) implique en particulier $B(f,f) \geq 0$ pour tout f de $D(A)$.

2) Supposons que A vérifie les hypothèses plus fortes du paragraphe précédent. Avec les notations utilisées dans les paragraphes 2 et 3, on obtient, pour $x \in X$ et $f \in D(A)$,
$$B(f,f)(x) = -f(x)^2\, C(x) + G(f,f)(x) + \int (f(y) - f(x))^2\, d\mu_x(y) .$$

Cette formule va être généralisée dans ce qui suit.

DÉFINITION.- Soit $W \subset \mathcal{C}(X)$ un sous-espace dense de $\mathcal{C}_0(X)$ tel que
$\forall f \in W$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, $\qquad \varphi \circ f \in W$.

Soit $\mathfrak{F}(X)$ un sous-espace de l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{R}$.

On appelle opérateur carré du champ de domaine W (et à valeurs dans $\mathfrak{F}(X)$), une application bilinéaire symétrique B de $W \times W$ dans $\mathfrak{F}(X)$ satisfaisant à

(i) $\forall f, g \in W$, $\qquad$ f contraction normale de $g \Longrightarrow B(f,f) \leq B(g,g)$

(ii) $\forall f, g \in W$, $\forall x \in X$, $f(x) = \sup f \geq 0$ et $g(x) = \sup g \geq 0 \Longrightarrow B(f,g)(x) \geq 0$.

On a alors le théorème de représentation suivant :

THÉORÈME.- Soit B un opérateur carré du champ de domaine W et à valeurs dans $\mathcal{C}(X)$. Il existe :

. une famille $\{\mu_x\}_{x \in X}$ de mesures de Radon positives sur $X \setminus \{x\}$ telles que, pour tout f de W, $x \longmapsto \int (f(y) - f(x))^2\, d\mu_x(y)$ est une fonction s.c.i. finie sur X

. une fonction $\mathcal{a}$ s.c.s., positive ou nulle sur X

. un opérateur carré du champ G, de domaine W, à valeurs dans l'espace vectoriel engendré par les fonctions s.c.i. finies sur X, de caractère local (i.e. $\forall f, g \in W, \forall x \in X$, f constante au voisinage de $x \Longrightarrow G(f,g)(x) = 0$), de sorte que

$\forall f, g \in W$, $\qquad B(f,g) = \mathcal{a}fg + G(f,g) + \int (f(y) - f(.))(g(y) - g(.))d\mu_{\bullet}(y)$.

Nous allons esquisser les diverses étapes de la démonstration dont la rédaction détaillée est longue et assez technique.

1) Soient f et g dans W^+ avec $\operatorname{Supp} f \cap \operatorname{Supp} g = \emptyset$. Alors $(f + g)$ est une contraction normale de $(f - g)$ (puisque $f + g = |f - g|$) et donc $B(f,g) \leq 0$. On en déduit l'existence de mesures (σ_x), positives sur $X^2 \setminus \Delta$ (Δ étant la diagonale), symétriques, telles que :

$\forall f, g \in W$, $\forall x \in X$, $\qquad \operatorname{Supp} f \cap \operatorname{Supp} g = \emptyset \Longrightarrow B(f,g)(x) = -\int f \otimes g \, d\sigma_x$.

D'autre part, d'après (ii),

$\forall g, f \in W \cap \mathcal{K}^+(X \setminus \{x\}) \qquad B(f,g)(x) \geq 0$.

D'où l'existence, pour tout x de X, d'une mesure de Radon positive τ_x sur $(X \setminus \{x\})^2$ telle que

$\forall g, f \in W \cap \mathcal{K}(X \setminus \{x\}) \qquad B(f,g)(x) = \int f \otimes g \, d\tau_x$.

On déduit alors de ce qui précède

$$\operatorname{Supp} \sigma_x \subset [(\{x\} \times X) \cup (X \times \{x\})] \setminus \{(x,x)\}$$

et

$$\operatorname{Supp} \tau_x \subset \Delta \setminus \{(x,x)\} .$$

Il en résulte qu'il existe deux mesures de Radon positives sur $X \setminus \{x\}$, ν_x et ζ_x, telles que

$\forall h \in \mathcal{K}(X^2 \setminus \Delta) \qquad \int h d\sigma_x = \int h(x,y)d\nu_x(y) + \int h(y,x)d\nu_x(y)$

$\forall h \in \mathcal{K}((X \setminus \{x\})^2) \qquad \int h d\tau_x = \int h(y,y)d\zeta_x(y)$.

On montre ensuite que $\zeta_x = \nu_x$ et, posant μ_x cette mesure, on a

$\forall x \in X \ \forall f, g \in W$, $\operatorname{Supp} f \times \operatorname{Supp} g \not\ni (x,x) \Longrightarrow B(f,g)(x) = \int (f - f(x))(g - g(x))d\mu_x$.

2) Soit $f \in W^+$. Notant E_f l'ensemble des fonctions de W^+, inférieures ou égales à 1, valant 1 sur $\operatorname{Supp} f$, on voit à partir de (i) que $\{B(f,\alpha)(x)\}_{\alpha \in E_f}$ est une famille filtrante décroissante minorée par 0. On peut noter $\lambda_x(f)$ la limite (λ_x est une mesure de Radon positive). Puis, utilisant (ii), on voit que $\lambda_x = \mathcal{a}(x)\,\delta_x$.

3) On montre

$$\forall\, x \in X\ ,\quad \forall\, f \in W\ ,\qquad \int (f(y) - f(x))^2\, d\mu_x(y) < +\infty\ .$$

On définit alors G sur $W \times W$ par différence (à partir de la formule de l'énoncé du théorème 1) et on montre que G a les propriétés requises. C'est la partie la plus longue et la plus difficile de la démonstration.

Remarque.- Dans [15], J. P. ROTH donne un énoncé un peu plus faible du théorème 1 (seules les contractions $\mathcal{C}^\infty$ "opérant" sur G). Pour obtenir le théorème 1, on doit compléter la démonstration de la façon suivante ([17]) :

Lemme.- Soit une forme quadratique R sur W sous-espace de $\mathcal{K}(X)$ et U la forme bilinéaire associée. Sont équivalents :

a) $\forall\, f, g \in W\ ,\quad \forall\, T \in \mathcal{C}\ ,\qquad g = T \circ f \Longrightarrow R(g) \leq R(f)$

b) $\forall\, f, g \in W\ ,\quad \forall\, T$ fonction continue croissante nulle en 0 ,

$$g = T \circ f \Longrightarrow U(f,g) \geq 0$$

c) $\forall\, f \in \mathcal{K}(X)\ ,\ \forall\, g, h \in W\ ,\quad \forall\, T, S$ continues croissantes nulles en 0

$$g = T \circ f\quad ,\ h = S \circ f \Longrightarrow U(g,h) \geq 0\ .$$

Soient alors f et g appartenant à W tels que $g = T \circ f$ avec T croissante continue nulle en 0 . Soit $x \in X$.

On montre facilement que

$$G(g,f)(x) = \lim_{n\to\infty} B(\varphi_n \circ g, f)(x)$$

où φ_n est une fonction continue croissante appartenant à $\mathcal{J}$, vérifiant $|\varphi_n| \leq \frac{1}{n}$, $\varphi_n(t) = a_n + t$ pour t voisin de $g(x)$, d'où le résultat en utilisant le Lemme.

En fait, on peut décrire plus précisément l'opérateur G et montrer que c'est, en un sens abstrait, un "carré de gradient".

THÉORÈME 2.- . $\forall\, f, g, h \in W\ ,\qquad G(h,fg) = f\,G(h,g) + g\,G(h,f)$

. $\forall\, f, g \in W\ ,\ \forall\, \theta, \psi \in \mathcal{J}\ ,\qquad G(\theta \circ f, \psi \circ g) = (\theta' \circ f)(\psi' \circ g)G(f,g)$

. Si X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $W = \mathcal{K}(X) \cap \mathcal{C}^1(X)$, il existe une matrice symétrique $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ de fonctions réelles telles que

$$\forall\, x \in X\ ,\quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n\ ,\qquad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq 0$$

et

$$\forall\, f, g \in W\ ,\qquad G(f,g) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}\ .$$

Le 3-ième point découle d'une extension du 2-ième à des fonctions θ et ψ de n variables. Le 2-ième point découle assez simplement du 1er. Donnons une indication sur la démonstration du 1er point : soit $f \in W$ avec $f(x) = 0$. On voit alors que, sur un voisinage de x assez petit, f^2 est une contraction de εf . D'où, d'après le caractère local de G , on obtient

$$G(f^2,f^2)(x) \leq \varepsilon^2\, G(f,f)(x)$$

soit, à la limite

$$G(f^2,f^2)(x) = 0 \ .$$

D'après l'inégalité de Schwarz, il en résulte que

$$\forall\, g \in W \,, \qquad G(f^2,g)(x) = 0 \ .$$

Donc,

$$\forall\, f, g, h \in W \qquad G[(f-f(x))(g-g(x)), h](x) = 0$$

ce qui donne le résultat.

Remarque.- Les théorèmes 1 et 2 permettent, dans le cas où X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $W = \mathcal{K}(X) \cap \mathcal{C}^2(X)$, de "remonter" de l'opérateur carré du champ B à un opérateur A vérifiant le principe du maximum positif. Avec les notations précédentes, il suffit de poser

$$\begin{aligned} A f(x) = & - a(x)f(x) + \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \\ & + \int \Big[f(y) - f(x) - \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,(y_i - x_i) \Big) \theta_x(y) \Big]\, d\mu_x(y) \end{aligned}$$

où $\theta_x \in \mathcal{D}(X)$ et $\theta_x = 1$ sur un voisinage de x (A ainsi défini n'est cependant pas, en général, à valeurs continues).

§ 4. Formes de Dirichlet généralisées

Soit X un espace localement compact et B un opérateur carré du champ de domaine W , à valeurs dans $\mathcal{C}(X)$. Soit μ une mesure positive sur X telle que

$$\forall\, f \in W \qquad \int B(f,f)(y)\, d\mu(y) < +\infty \ .$$

Posons alors

$$Q(f,g) = \int B(f,g)(y)\, d\mu(y) \ .$$

Q est une forme bilinéaire symétrique sur $W \times W$ telle que, si f et g appartiennent à W et f est une contraction normale de g ,

$$Q(f,f) \leq Q(g,g) \ .$$

Nous allons généraliser cette situation.

DÉFINITION.- Soit V un sous-espace de $\mathcal{K}(X)$, dense dans $\mathcal{C}_0(X)$, tel que

$\forall f \in V , \ \forall \varphi \in \mathcal{J} \qquad \varphi \circ f \in V$.

Soit Q une forme bilinéaire symétrique sur $V \times V$. Q est dite forme de Dirichlet généralisée de domaine V si, en outre,

$\forall f , g \in V \qquad f$ contraction normale de $g \Longrightarrow Q(f,f) \leq Q(g,g)$.

Le théorème de représentation suivant a été démontré par G. ALLAIN ([1]), avec une définition plus restrictive de la notion de forme de Dirichlet ; il a été modifié sous la forme donnée ici par J. P. ROTH ([17]). Il s'agit d'une généralisation d'un résultat donné sans démonstration par A. BEURLING et J. DENY dans [3].

THÉORÈME 1.- Soit Q une forme de Dirichlet généralisée de domaine V. Alors il existe

. une mesure de Radon positive, symétrique, σ sur $X^2 \setminus \Delta$ (Δ étant la diagonale de X^2)

. une mesure de Radon positive, μ, sur X

. une forme de Dirichlet généralisée N, de domaine V, locale (i.e. $\forall f , g \in V$, g constante sur un voisinage de $\operatorname{Supp} f \Longrightarrow N(f,g) = 0$) avec

$\forall f , g \in V , \qquad Q(f,g) = \int fg \, d\mu + N(f,g) + \int (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) d\sigma(x,y)$.

La démonstration suit des idées de J. DENY.

1) Comme au paragraphe 3 on voit que, si f et g sont dans V^+ et $\operatorname{Supp} f \cap \operatorname{Supp} g = \emptyset$, alors $Q(f,g) \leq 0$. Il existe donc une mesure de Radon positive symétrique σ, sur $X^2 \setminus \Delta$, telle que

$\forall f , g \in V \qquad \operatorname{Supp} f \cap \operatorname{Supp} g = \emptyset \Longrightarrow Q(f,g) = -2 \int f \otimes g \, d\sigma$.

De même qu'au paragraphe 3 on voit aussi que si f appartient à V^+, $\{Q(f,\alpha)\}_{\alpha \in E_f}$ est une famille filtrante décroissante minorée par 0 et on pose $\int f \, d\mu$ la limite.

2) On montre que, si f et g sont des éléments de V et T une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue strictement croissante, telle que $T(0) = 0$ et $g = T \circ f$,

$$\int (g(x) - g(y))(f(x) - f(y)) d\sigma(x,y) + \int fg \, d\mu \leq Q(f,g) .$$

Cette partie de la démonstration est assez difficile. La méthode consiste à faire un "découpage en tranches" de f de façon que chaque "tranche" soit à support disjoint du support de presque toutes les autres "tranches". La démonstration de [1] doit, à cet endroit être modifiée pour n'utiliser que des contractions appartenant à $\mathcal{J}$.

On peut alors définir N par différence et montrer (en utilisant le lemme cité au § 3) que N a toutes les propriétés voulues.

Le problème se pose alors de la détermination des formes de Dirichlet généralisées locales. Le théorème suivant, sous une forme un peu différente, a été démontré par L. E. ANDERSSON ([2]), puis, avec une démonstration simplifiée par J. P. ROTH ([16]).

THÉORÈME 2.- Soit X un ouvert de R^n, $V = \mathcal{K}(X) \cap \mathcal{C}^1(X)$, N une forme de Dirichlet généralisée, de domaine V, locale. Alors, il existe une famille symétrique $(\sigma_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ de mesures de Radon sur X telle que :

$$\forall \xi \in R^n \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \xi_j \sigma_{ij} \text{ est une mesure positive}$$

et

$$\forall f, g \in \mathcal{K}(X) \cap \mathcal{C}^1(X) \qquad N(f,g) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} d\sigma_{ij} .$$

La démonstration est assez longue, l'étape la plus difficile étant de montrer la continuité de N pour la norme de la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées premières.

§ 5. Problèmes, résultats complémentaires, généralisations

- Un des problèmes qui se posent est de savoir, dans le cas général, "remonter" d'une forme de Dirichlet généralisée à un opérateur carré du champ, ou d'un opérateur carré du champ à un opérateur vérifiant le principe du maximum positif.

Dans le cas d'un ouvert de R^n et de domaines constitués de fonctions régulières, les théorèmes de représentation permettent, grosso-modo, de résoudre le problème.

Dans le cas général, J. P. ROTH a donné dans [16] un élément de réponse au problème de l'existence d'un opérateur carré du champ associé à une forme de Dirichlet généralisée :

PROPOSITION.- Soit Q une forme de Dirichlet généralisée, de domaine V.

On suppose en outre que

$\forall f, g \in V$, $\forall \Phi \in \mathcal{C}^1(R^2)$ $\quad \Phi(0) = 0 \Longrightarrow \Phi(f,g) \in V$.

Notons, pour $h \in V^+$,

$$Q_h(f,g) = Q(fh,g) + Q(gh,f) - Q(h,fg) .$$

Alors Q_h est une forme bilinéaire symétrique vérifiant

$$\forall\ T \in \mathcal{T} \cap \mathcal{C}^1(R)\ ,\quad \forall\ f \in V\ ,\quad Q_h(T \circ f, T \circ f) \leq Q_h(f,f)\ .$$

En effet, soit h dans V^+. Avec les notations du paragraphe 4,

$$Q_h(f,g) = \int f\,g\,h\,d\mu + N_h(f,g) + \int (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))(h(x)+h(y))d\sigma(x,y)\ .$$

On considère, pour f fixé dans V, la forme bilinéaire symétrique

$$S : (\Phi,\Psi) \in [\mathcal{K}(R^2) \cap \mathcal{C}^1(R^2)]^2 \longrightarrow N[\Phi(h,f)-\Phi(0,0)\ ,\ \Psi(h,f)-\Psi(0,0)]\ .$$

On a alors une forme de Dirichlet généralisée locale sur R^2 à laquelle on peut appliquer le théorème 2 du § 4.

Si T est dans $\mathcal{T} \cap \mathcal{C}^1(R)$, on obtient

$$N_h(T \circ f\ ,\ T \circ f) = 2 \int x_1 [T'(x_2)]^2 d\sigma_{2,2}(x_1,x_2)$$

où $\sigma_{2,2}$ est positive et portée par $R^+ \times R$ (d'après la positivité de h). La proposition est donc démontrée.

<u>Conséquence</u>. $h \to Q_h(f,f)$ se prolonge en une mesure positive bornée. Donc, pour f et g dans V, il existe une mesure de Radon bornée $\Gamma(f,g)$ telle que

$$Q_h(f,g) = \int h(x)\ \Gamma(f,g)\ (dx)\ .$$

Posons

$$B(f,g) = \tfrac{1}{2}\,\Gamma(f,g) + \tfrac{1}{2}\,(fg)\mu\ .$$

B est une application bilinéaire symétrique de $V \times V$ dans l'ensemble des mesures de Radon bornées sur X, sur laquelle les contractions $\mathcal{C}^1$ opèrent. B peut être considéré comme un opérateur carré du champ à valeurs mesures et

$$Q(f,g) = \int 1(x)\ B(f,g)(dx)\ .$$

- Un autre problème est le suivant :

Si Q est une forme de Dirichlet généralisée de domaine V, existe-t-il $(\nu_i)_{i \in I}$ une famille de mesures de Radon positives symétriques bornées sur X^2, $(\mu_i)_{i \in I}$ une famille de mesures de Radon positives bornées sur X et un filtre $\mathfrak{F}$ sur I tel que

$$\forall\ f \in V \qquad Q(f,f) = \lim_{\mathfrak{F}} \left(\int (f(x))^2 d\mu_i(x) + \int (f(x)-f(y))^2\ d\nu_i(x,y) \right)\ .$$

La réponse est positive dans le cas où X est un ouvert de R^n et $V = \mathcal{K}(X) \cap \mathcal{C}^1(X)$, d'après les théorèmes de représentation (cf. [16]). Le cas général n'est pas connu. Dans [16], J. P. ROTH montre que le problème est équivalent à celui des "contractions généralisées".

- Dans [10], H. KUNITA a introduit la notion de générateur infinitésimal étendu d'un processus de Markov standard, par rapport à une fonctionnelle additive φ, bien choisie, de ce processus. Ce générateur étendu est noté A_φ et H. KUNITA en donne une expression explicite au moyen de la formule d'Ito (le théorème 3.1 de [10] est à comparer au théorème 2 du § 2 de cet exposé). Il déduit ensuite de ce théorème que $D(A_\varphi)$ est une algèbre et donne, en corollaire, l'expression analytique et la signification probabilite de l'opérateur

$$(u,v) \in [D(A_\varphi)]^2 \longrightarrow A_\varphi(uv) - u A_\varphi(v) - v A_\varphi(u)$$

("l'opérateur carré du champ" associé à A_φ).

- Dans [13], P. A. MEYER a introduit une autre notion, en général différente de celle de H. KUNITA, de domaine étendu d'un générateur infinitésimal : si on suppose, pour simplifier, que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur un espace localement compact à base dénombrable X , et si on désigne par $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ la famille résolvante associée, on dit que f appartient au domaine étendu de A ($D_e(A)$) si f est universellement mesurable bornée et si il existe g universellement mesurable (notée $A_e f$), telle que

$$\forall \lambda > 0 \qquad R_\lambda |g| \text{ est bornée et } f = R_\lambda(\lambda f - g) .$$

P. A. MEYER pose alors le problème de savoir quand $D_e(A)$ est une algèbre, et montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que, si l'on note P^μ la loi du processus de Markov associé à A et à la loi initiale μ :

pour toute loi P^μ , toute martingale (M_t) relative à P^μ et de carré intégrable, la mesure aléatoire $d\langle M, M\rangle_t$ est absolument continue par rapport à dt .

Dans ce cas, on dit que l'opérateur carré du champ associé à A existe et on le définit par

$$\forall f, g \in D_e(A) \qquad B_e(f,g) = A_e(fg) - f A_e g - g A_e f .$$

P. A. MEYER montre que, si l'opérateur carré du champ associé à A existe, les fonctions de n variables de classe $\mathcal{C}^2$ opèrent sur $D_e(A)$ (ce qui est une application de la formule d'Ito) et que, si $(P_t)_{t\geq 0}$ et $(Q_t)_{t\geq 0}$ sont deux semi-groupes auxquels on peut associer un opérateur carré du champ, il en est de même de $(P_t \otimes Q_t)_{t\geq 0}$.

Des conséquences pour l'étude des inégalités de Littlewood-Paley en sont tirées.

Le problème de l'existence d'un opérateur carré du champ associé à un générateur infinitésimal sur R^n est résolu par l'affirmative dans de nombreux cas (et en particulier dans le cas "invariant par translations"). Ceci découle de la condition de P. A. MEYER mentionnée plus haut et de résultats de [9]. La question suivante reste ouverte :

La propriété d'inclusion de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans le domaine étendu d'un générateur infinitésimal A sur $\mathbb{R}^n$ entraîne-t-elle automatiquement l'existence de l'opérateur carré du champ associé à A ?

Signalons enfin que Y. LE JAN ([11]) et G. MOKOBODZKI ([14]) ont apporté aussi des éléments de réponse, dans des cadres un peu différents, au problème de l'existence d'un opérateur carré du champ.

- Dans [19], M. YOR a montré que les différentes notions introduites par J. P. ROTH (opérateur carré du champ associé à un opérateur A, formes "tronquées" Q_h associées à une forme de Dirichlet Q, partie locale d'un opérateur carré du champ, etc...) gardaient un sens et pouvaient être étudiées dans le cadre des semimartingales, les opérations $(X,Y) \to [X,Y]$, $[X,Y]^c$, $\langle X,Y\rangle$ donnant des exemples d'opérateurs carré du champ généralisés.

- Enfin, dans [11], Y. LE JAN donne aussi diverses interprétations de notions dont nous avons parlé dans cet exposé, dans le cadre des espaces de Dirichlet, à forme non nécessairement symétrique, et démontre plusieurs propriétés intéressantes les concernant. Ces notions avaient auparavant été introduites par M. L. SILVERSTEIN ([18]) dans le cas symétrique (en particulier la notion de mesure d'énergie de f qui n'est autre, avec les notations employées dans la conséquence de la proposition de ce paragraphe, que la mesure $B(f,f) - f^2\mu$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. ALLAIN - Sur la représentation des formes de Dirichlet, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 25, fasc. 3-4, 1975, 1-10.

[2] L. E. ANDERSON - On the representation of Dirichlet forms, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 25, fasc. 3-4, 11-25.

[3] A. BEURLING and J. DENY - Dirichlet spaces, Proc. Not. Acad. Sc., 45, 1959, 208-215.

[4] Ph. COURREGE - Sur la forme intégro-différentielle des opérateurs de $\mathcal{C}_K^\infty$ dans $\mathcal{C}$ satisfaisant au principe du maximum, Séminaire de Théorie du Potentiel, 10-ième année, 1965-66, fasc. 1, Exposé n° 2, Fac. des Sc. de Paris.

[5] Ph. COURREGE - Sur la forme intégro-différentielle du générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur une variété, Séminaire de Théorie du Potentiel, 10-ième année, 1965-66, fasc. 1, Exposé n° 3, Fac. des Sc. de Paris.

[6] J. DENY - Formes et espaces de Dirichlet, Séminaire Bourbaki, Exposé 187, 12-ième année, 1959/60, W. A. Benjamin/Addison-Wesley, 1966.

[7] J. DENY - Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel, Cours du C.I.M.E., Stresa, 1969.

[8] G. A. HUNT - Semi-groups of measures on Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc., 81, 1956, 264-293.

[9] J. JACOD et M. YOR - Etude des solutions extrémales et représentations intégrales des solutions pour certains problèmes de martingales, Zeitschrifft für Wahr., 38, 1977, 83-125.

[10] H. KUNITA - Absolute continuity of Markov processes and generators, Nagoya Math. J., 36, 1969, 1-26.

[11] Y. LE JAN - Mesures associées à une forme de Dirichlet, Séminaire de Théorie du Potentiel, Paris, vol. n° 2, 179-192, Lecture Notes in Math., n° 563, Springer, 1976.

[12] P. LEVY - Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes, Ann. R. Scuola Normale Sup. di Pisa, Séries (2), vol. 3, 1934, 337-366.

[13] P. A. MEYER - Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood-Paley, Exposé II : L'opérateur carré du champ, Séminaire de Probabilité X, 142-163, Lecture Notes in Math., n° 511, Springer, 1976.

[14] G. MOKOBODZKI - Domaine étendu d'un générateur infinitésimal, à paraître.

[15] J. P. ROTH - Opérateurs dissipatifs et semi-groupes dans les espaces de fonctions continues, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 26, fasc. 4, 1976, 1-97.

[16] J. P. ROTH - Formule de représentation et troncature des formes de Dirichlet sur $\mathbb{R}^m$, Séminaire de Théorie du Potentiel, Paris, vol. n° 2, 260-274, Lecture Notes in Math., n° 563, Springer, 1976.

[17] J. P. ROTH - Résultats non publiés.

[18] M. L. SILVERSTEIN - Symmetric Markov Processes, Lecture Notes in Math., n° 426, Springer, 1974.

[19] M. YOR - Une remarque sur les formes de Dirichlet et les semi-martingales, Séminaire de Théorie du Potentiel, Paris, vol. n° 2, 283-292, Lecture Notes in Math., n° 563, Springer, 1976.