

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ROBERT ROUSSARIE

Constructions de feuilletages

Séminaire N. Bourbaki, 1978, exp. n° 499, p. 138-154

http://www.numdam.org/item?id=SB_1976-1977__19__138_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONSTRUCTIONS DE FEUILLETAGES

[d'après W. THURSTON]

par Robert ROUSSARIE

I. Introduction

La construction, due à W. Thurston, dont il va être question ci-dessous, apporte une réponse complète à la question suivante :

Quelles variétés admettent un feuilletage de codimension 1 ?

(C'est-à-dire, un feuilletage dont les feuilles sont des sous-variétés de dimension $n-1$.) En fait, le résultat de Thurston est plus précis et s'énonce de la façon suivante :

THÉORÈME 1.- Soit M^n une variété compacte sans bord. Alors tout champ de $(n-1)$ -plans sur M^n est homotope au champ de plans tangent à un feuilletage de codimension 1 et de classe \mathcal{C}^∞ . (C'est-à-dire à un champ complètement intégrable de $(n-1)$ -plans.)

En particulier, on a :

COROLLAIRE.- Toute variété compacte sans bord, de caractéristique d'Euler nulle admet un feuilletage de codimension 1 et de classe \mathcal{C}^∞ .

Haefliger a montré dans [5] que le théorème 1 et son corollaire étaient faux dans le cas analytique (il n'existe pas, par exemple, de feuilletage analytique sur S^3).

Le théorème 1 a été démontré par Phillips [11] pour les variétés non compactes (l'existence d'un feuilletage de codimension 1 sur chaque variété non compacte est d'ailleurs facile à établir). Malheureusement la méthode de démonstration utilisée par A. Phillips (puis généralisée par Gromov [4]) ne s'applique pas aux variétés compactes.

Depuis l'origine de la théorie des feuilletages, on s'est efforcé de construire des feuilletages de codimension 1 sur des variétés compactes de plus en plus générales. Avant le travail de Thurston, la méthode sous-jacente aux différentes constructions proposées était de décomposer géométriquement la variété en sous-variétés

plus facile à feuilletter. Ainsi, Reeb décrivit un feuilletage de S^3 en décomposant S^3 en une union de deux tores solides. Puis, Lichkorish [8] et Novikov et Zieschang [10] montrèrent que toute variété orientable de dimension 3 admet un feuilletage et Wood [18] étendit ce résultat aux variétés non-orientables.

L'étape suivante fut la construction de feuilletages sur toutes les sphères de dimension $2^k + 3$ par Lawson [7], puis sur toutes les sphères de dimension impaire par Tamura [13] et Durfee [3].

Au contraire des constructions précédentes, la méthode de Thurston est de nature locale. Elle présente le désavantage de conduire à des feuilletages difficiles à décrire. Aussi peut-on penser que la recherche de méthodes géométriques de constructions présente encore quelque intérêt.

W. Thurston a également établi des versions relatives du théorème 1 pour les variétés à bord, le feuilletage étant supposé soit transverse, soit tangent aux composantes du bord. L'énoncé du résultat est un peu plus compliqué en raison du phénomène de stabilité de Reeb récemment étendu par Thurston aux feuilles compactes dont le premier groupe d'homologie réelle est nul [14] (voir [16] et [17] pour plus de précisions). Enfin, je signale, bien qu'il n'en sera pas question dans la suite, que des résultats comparables ont été établis par Thurston pour les feuilletages de codimension quelconque. Un champ de $(n-k)$ -plans pour $k \geq 2$, n'est pas en général homotope à un champ complètement intégrable, en raison d'un théorème de Bott [2]. On peut cependant énoncer un résultat en utilisant la notion de Γ -structure introduite par Haefliger. La donnée d'une Γ -structure de codimension k est équivalente à celle d'un micro-fibré équipé d'un feuilletage transverse aux fibres. Haefliger a montré que ces structures admettent un classifiant $B\Gamma_k^\infty$ [6]. Il y a une application canonique : $B\Gamma_k^\infty \rightarrow BO_k$. On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 2 [15].- Soient M^n une variété, τ^{n-k} un champ de plans sur M de codimension k , soient $\nu^k = T(M)/\tau^{n-k}$ le fibré normal et $\chi : M^n \rightarrow BO_k$ l'application classifiante ν^k . Alors le champ τ^{n-k} est homotope à un feuilletage si et seulement si χ se factorise par une application dans $B\Gamma_k^\infty$ et chacune de ses factorisations est réalisée par un feuilletage dont le champ de plans tangents est homotope à τ^{n-k} .

La construction de feuilletage, qui va être décrite, comporte deux grandes étapes :

- 1) Obtention d'un feuilletage avec trous.

2) Elimination des trous.

La première étape est réalisée dans le paragraphe 2. Le théorème de stabilité de Reeb implique qu'il est impossible en général d'étendre le feuilletage obtenu en un feuilletage de la variété entière. La deuxième étape commence dans le paragraphe 3 par la construction de transversales allant du sommet à la base de chaque trou (on peut construire de telles transversales en creusant éventuellement quelques nouveaux trous et en modifiant le feuilletage). Ces transversales permettent de remplacer les trous primitifs par de nouveaux trous dans lesquels on pourra étendre le feuilletage. Ce programme est réalisé dans le paragraphe 4 pour la dimension $n = 3$, et dans les paragraphes 5 et 6 pour les dimensions supérieures.

Je me contenterai dans la suite d'établir le résultat d'existence énoncé dans le corollaire. Si l'on veut démontrer le théorème 1 dans toute sa force, il est nécessaire de contrôler la classe d'homotopie du feuilletage construit. Ceci entraîne quelques difficultés techniques supplémentaires qui n'apportent rien à la compréhension générale de la méthode. Le seul changement important réside dans le fait que l'on doit remplacer la méthode de construction du feuilletage avec trous donnée dans le paragraphe 2 ci-dessous par une méthode consistant à homotoper un champ de plan donné, simplexe par simplexe en un feuilletage défini en dehors de trous. Cette méthode est d'ailleurs la même que celle utilisée en codimension supérieure à un dans [15].

2. Construction de feuilletages avec trous

Dans la suite D^n désigne le disque unitaire de R^{n+1} , S^{n+1} son bord.

Soit φ_t une isotopie de l'intervalle $D^1 = [-1, +1]$, $t \in [0, 1]$, à support compact contenu dans $\text{int}.D^1$ et constante au voisinage de $t = 0$ et 1 . On va associer à une telle isotopie un feuilletage $\mathbb{F}\varphi_t$ sur le bord de la variété anguleuse $D^2 \times D^1$ (on entend par feuilletage sur le bord de $D^2 \times D^1$, la donnée de la trace d'un feuilletage défini sur un voisinage de $\partial(D^2 \times D^1)$ dans $D^2 \times D^1$). Le feuilletage $\mathbb{F}\varphi_t$ est défini par les conditions suivantes :

- Les sous-variétés $D^2 \times \{+1\}$, $D^2 \times \{-1\} \subset D^2 \times D^1$ sont des feuilles.
- Si ∂D^2 est paramétré par $t \in [0, 1]$, la feuille passant par $\{0\} \times \{x\} \in \partial D^2 \times D^1$ est la courbe $t \rightarrow \varphi_t(x)$.

Nous pouvons alors énoncer :

PROPOSITION 2.- Soit M^n , $n \geq 3$, une variété compacte sans bord, à caractéristique d'Euler nulle. Alors il existe un feuilletage défini sur $M - \text{int} \bigcup_i H_i$ où H_i est un ensemble fini de sous-variétés disjointes. Chaque H_i est difféomorphe à une variété $N^{n-3} \times D^2 \times D^1$ où N^{n-3} est un produit de 2 sphères (ou bien un point si $n = 3$). Le feuilletage induit sur le bord de H_i est conjugué au feuilletage produit par le facteur N^{n-3} d'un feuilletage $F\varphi_i$ sur $\partial(D^2 \times D^1)$ où φ_i est une isotopie de D^1 définie comme plus haut.

Le feuilletage défini sur $M^n - \bigcup_i H_i$ contient le sommet $N_i^{n-3} \times D^2 \times \{+1\}$ et la base $N_i^{n-3} \times D^2 \times \{-1\}$ de chaque trou $H_i = N_i^{n-3} \times D^2 \times D^1$. Le feuilletage est d'autre part transverse au facteur D^1 le long de $N_i^{n-3} \times \partial D^2 \times D^1$ et indépendant du facteur N_i^{n-3} . Sur cette partie de ∂H_i , le feuilletage est entièrement défini à conjugaison près par $\varphi_{i,1}$. Il suit du théorème de stabilité de Reeb que le feuilletage admet un prolongement dans H_i si et seulement si $\varphi_{i,1} = \text{Id}$.

Démonstration de la proposition

a) En dimension $n = 3$

Considérons un champ de plan τ^2 quelconque, de classe \mathcal{E}^∞ . On dira que le champ τ^2 est une position générale par rapport à une triangulation α de M , si pour chaque 3-simplexe α_i et pour chaque point $x \in \alpha_i$, la projection linéaire définie par τ_x^2 :

$$L_x : \alpha_i \rightarrow \alpha_i / \tau_x^2 \in \mathbb{R}$$

est de rang maximum sur chaque sous-simplexe de α_i .

Partant d'une triangulation α quelconque, il est facile de trouver une subdivision admettant une triangulation voisine β , en position générale par rapport à τ^2 (voir [15]). C'est ce que l'on va supposer dans la suite.

Il est maintenant possible de perturber par homotopie le champ τ^2 en un champ $\bar{\tau}^2$, dans un voisinage du 2-squelette de β de façon que $\bar{\tau}^2$ soit complètement intégrable dans un voisinage plus petit U et soit toujours en position générale par rapport à β . (Ceci car le champ τ^2 intersecte les simplexes de dimension ≤ 2 selon des champs de plans de dimension ≤ 1 , qui sont donc intégrables.)

Considérons un 3-simplexe δ quelconque et $x \in \delta$.

Soient a et b les deux 0-simplexes de δ se projetant aux extrémités de $L_x(\delta)$. Dans le voisinage U et près de δ le feuilletage de δ défini par $\bar{\tau}^2$

a pour feuilles des disques dont le bord appartient à $\partial\delta$. Il est alors possible de trouver une sous-variété $H_\delta = D^2 \times D^1$ de δ telle que $\partial H_\delta \subset U$, $H_\delta \cup U \supset \delta$, que $D^2 \times \{+1\}$ et $D^2 \times \{-1\}$ soient dans des feuilles au voisinage de a et b respectivement et que le feuilletage soit transverse au facteur D^1 sur $\partial D^2 \times D^1$.

La collection des sous-variétés H_δ et le feuilletage défini par $\bar{\tau}^2$ dans $M - \bigcup_{\delta} H_\delta$ répond aux conditions de l'énoncé.

b) En dimension $n \geq 4$

On pourrait généraliser la construction indiquée ci-dessus. Je vais plutôt indiquer une autre construction proposée également par Thurston et qui est plus élémentaire. Cette autre construction utilise la notion introduite par Asimov, de décomposition d'une variété en anses rondes. On appelle ainsi toute présentation de M comme union croissante de sous-variétés de dimension n :

$$\emptyset = M_0^n \subset M_1^n \subset \dots \subset M_N^n = M$$

avec $M_{i+1} = M_i \cup (D^k \times D^{n-k-1} \times S^1)$, où $\text{int } M_i \cap \text{int}(D^k \times D^{n-k-1} \times S^1) = \emptyset$ et $M_i \cap (D^k \times D^{n-k-1} \times S^1) = \partial D^k \times D^{n-k-1} \times S^1$.

Chaque M_{i+1} est obtenue à partir de M_i par attachement d'une k -anse ronde (produit d'une k -anse ordinaire par un cercle).

Théorème de décomposition en anses rondes (Asimov [1])

Si M^n est une variété compacte sans bord, de dimension $n \geq 4$ et de caractéristique d'Euler nulle, alors M^n admet une décomposition en anses rondes.

La nullité de la caractéristique d'Euler est clairement nécessaire. En fait, l'existence d'une décomposition de M^n en anses rondes équivaut à celle d'une fonction numérique f ayant pour ensemble critique une union disjointe de cercles et étant conjuguée au voisinage de chacun de ces cercles critiques au produit d'une fonction de Morse par un cercle ; appelons une telle fonction : fonction de Morse ronde.

Soit f une fonction de Morse ronde, de cercles critiques $\{\gamma_i\}$ et de valeurs critiques $r_i = f(\gamma_i)$, supposées 2 à 2 distinctes. On veut essayer de construire un feuilletage dont les feuilles soient les surfaces de niveau de f en dehors des $A_i = f^{-1}([r_i - \epsilon, r_i + \epsilon])$ où $\epsilon > 0$ est choisi assez petit pour que les A_i soient 2 à 2 disjoints.

Si le i -ième cercle critique γ_i est non homologue à 0 dans l'homologie

réelle de A_i , on peut construire sur A_i un feuilletage dont les feuilles soient les surfaces de niveau de f dans un voisinage de ∂A_i . Pour cela, on choisit une 1-forme α , fermée, induite dans un voisinage de γ_i par une projection sur γ_i , de la classe fondamentale de γ_i . Grâce au théorème de De Rham, cette forme s'étend à A_i tout entier en une forme fermée.

Posons maintenant $\omega = Kdf + (g \circ f)\alpha$ où K est une constante positive et g est une fonction plateau, égale à 1 dans un voisinage de r_i et à zéro dans un voisinage de $r_i \pm \epsilon$; g étant fixée, si K est choisie assez grande, ω est une 1-forme intégrable, sans singularité. (En effet, α et df sont indépendantes dans un voisinage de γ_i , sauf le long de γ_i , où df s'annule.) Le feuilletage cherché est alors défini par $\omega = 0$.

Cette construction est possible si, par exemple, γ_i est un cercle minimal ou maximal de f . Malheureusement γ_i peut très bien avoir une homologie nulle : si par exemple la surface critique $f^{-1}(r_i)$ a une homologie nulle. Dans ce cas, en utilisant le théorème de stabilité de Reeb-Thurston, on peut montrer qu'il n'existe pas de feuilletage de A_i prolongeant le feuilletage défini par les surfaces de niveau de f dans un voisinage de ∂A_i .

L'idée de Thurston est de faire un trou dans A_i de façon à donner à γ_i une homologie non triviale. Plus précisément, supposons que f soit conjuguée dans un voisinage de γ_i à la fonction :

$$(\theta, x_1, \dots, x_{n-1}) \rightarrow \left(r_i - \sum_{j=1}^k x_j^2 + \sum_{j=k+1}^{n-1} x_j^2 \right)$$

avec $\theta \in S^1$ et $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D^k \times D^{n-k-1}$. On considère le plongement de $S^{k-1} \times S^{n-k-2}$ défini par

$$\theta = 0, \quad \sum_{j=1}^k x_j^2 = \frac{1}{2}, \quad \sum_{j=k+1}^{n-1} x_j^2 = \frac{1}{2}$$

(avec la convention $S^{-1} = \emptyset$).

La réunion des segments d'orbites du gradient de f , passant par les points de cette sous-variété et compris entre les surfaces de niveau $f^{-1}(r_i - \epsilon)$ et $f^{-1}(r_i + \epsilon)$ constitue un plongement de $S^{k-1} \times S^{n-k-2} \times D^1$ dans A_i . Cette dernière sous-variété est à fibré normal trivial. Le trou H à creuser dans A_i est un voisinage tubulaire de cette sous-variété, difféomorphe à $S^{k-1} \times S^{n-k-2} \times D^2 \times D^1$.

Le cercle γ_i a une homologie non triviale dans $A_i - H$ car l'équation $\theta = 0$ définit une $(n-1)$ -chaîne à bord contenu dans $\partial(A_i - H)$ et coupe γ_i en un seul point. On peut donc trouver une 1-forme fermée α sur $A_i - H$, induite au voisi-

nage de γ_i , de la forme fondamentale de γ_i par une projection sur γ_i . Il est facile de modifier α dans un voisinage de ∂H de façon que α soit induite sur ∂H par la projection : $\partial H \rightarrow \partial(D^2 \times D^1)$. (En effet, toute l'homologie de H est portée par le facteur ∂D^2 .)

La formule $\omega = Kdf + (g \circ f) = 0$ définit comme plus haut un feuilletage sans singularités sur $A_i - H$, dont la restriction au bord est bien égale à un feuilletage produit par $N^{n-3} = S^{k-1} \times S^{n-k-2}$ d'un feuilletage de $\partial D^2 \times D^1$ du type $F\varphi_i$ où φ_i est une isotopie de D^1 .

3. Construction de transversales au feuilletage

Nous avons déjà remarqué qu'il n'était en général pas possible d'étendre le feuilletage défini par la proposition 3 en un feuilletage de M . L'idée de Thurston, à ce point de la démonstration, est de modifier la forme des trous en utilisant des transversales au feuilletage joignant la base $N^{n-3} \times D^2 \times \{-1\}$ au sommet $N^{n-3} \times D^2 \times \{+1\}$.

Malheureusement, il n'existe pas toujours de telles transversales. (Penser par exemple à une feuille compacte d'un feuilletage à trous de S^3 coupant un trou $D^2 \times D^1$.) On se tire d'affaire en creusant éventuellement des nouveaux trous et en modifiant un peu le feuilletage.

Plus précisément, on choisit dans $M - UH_i$ une ensemble fini $\{\gamma_j\}$ de segments transverses au feuilletage contenant des sous-segments $\{\delta_j\}_j$, $\delta_j \subset \text{int } \gamma_j$ tels que chaque feuille coupe au moins un des segments δ_j . On plonge $D^{n-2} \times D^1$ dans un voisinage tubulaire de chaque segment γ_j de façon que $\{0\} \times D^1$ soit le segment original et que $D^{n-2} \times \{x\}$ soit dans une feuille pour $\forall x \in D^1$; ces différents plongements sont supposés deux à deux disjoints. On considère maintenant des voisinages tubulaires assez petits de $\partial D^{n-2} \times D^1$. Ces voisinages sont les nouveaux trous à creuser.

On modifie maintenant le feuilletage en coupant M^n le long de chaque $D^{n-2} \times D^1$ et en recollant les deux lèvres de la coupure après avoir poussé les feuilles dans un sens, le long du facteur D^1 , grâce à une isotopie φ_j de $D^1 = \gamma_j$, dont le support contenu dans $\text{int } \gamma_j$, contient δ_j . Nous obtenons ainsi un nouveau feuilletage défini sur $M^n - U$ (anciens trous) - U (nouveaux trous). Les nouveaux trous sont difféomorphes à $\partial D^{n-2} \times D^2 \times D^1$. Le feuilletage sur le bord de chaque trou est le produit par $\partial D^{n-2} = S^{n-3}$ d'un feuilletage $F\varphi_j$ de $\partial(D^2 \times D^1)$. Toute feuille coupant $\{x\} \times \{y\} \times \delta_j$ pour $x \in \partial D^{n-2}$, $y \in \partial D^2$,

est non compacte car une telle feuille spirale d'un voisinage de la base à un voisinage du sommet du trou. Comme chaque feuille de l'ancien feuilletage coupait un segment δ_j , il en résulte que toutes les feuilles du nouveau feuilletage sont non compactes. Il suit alors d'un théorème de Novikov [10] que chaque couple de points est contenu dans une transversale fermée. Cela suffit si le feuilletage est transversalement orientable. Dans le cas contraire, en utilisant un revêtement à deux feuillets transversalement orientable, on peut voir que toute paire de vecteurs transverses au feuilletage sont tangents (dans le même sens) à une transversale fermée. Ainsi, dans tous les cas, on peut joindre par un segment transverse la base au sommet de chaque trou. Nous avons donc prouvé le résultat suivant :

PROPOSITION 3.- Soit M^n , $n \geq 3$, une variété compacte, sans bord, à caractéristique d'Euler nulle. Alors il existe un feuilletage à trous sur M^n , comme dans la proposition 2 (avec maintenant N^{n-3} égal à une sphère, un produit de 2 sphères ou bien à un point), tel que pour chaque trou $H = N^{n-3} \times D^2 \times D^1$, il existe un segment transverse au feuilletage joignant la base au sommet du trou.

4. Elimination des trous en dimension 3

Considérons un trou $H = D^2 \times D^1$ dans un feuilletage à trous donné sur M^3 par la proposition 3. Soit Γ un segment transverse joignant la base du trou à son sommet. Il est facile de remplacer le trou H par un trou H' difféomorphe $D^2 \times S^1$ de la façon suivante. On considère un voisinage tubulaire τ de Γ , difféomorphe à $D^2 \times D^1$ tel que $\{0\} \times D^1$ corresponde à Γ et que $D^2 \times \{x\}$ soit dans une feuille pour tout $x \in D^1$, puis on arrondit les arêtes de $\partial(H \cup \tau)$. On obtient ainsi un nouveau trou $H' = D^2 \times S^1$ que l'on peut supposer contenir H . Plus exactement, on peut choisir la paramétrisation de H' telle que le feuilletage soit transverse au facteur S^1 de $\partial D^2 \times S^1$, que D^1 soit un intervalle de S^1 .

Le feuilletage sur $\partial H'$ est alors défini par une isotopie ψ_t de S^1 qui se restreint sur D^1 en l'isotopie φ_t associée au trou H et qui est l'identité sur $S^1 - D^1$: on le notera $F\psi$.

Pour poursuivre, il faut savoir que le difféomorphisme φ_1 est égal à un produit de commutateurs dans le groupe $\text{Diff}_0(D^1)$ des difféomorphismes de D^1 à support compact. Cela suit d'un théorème de Mather démontrant la simplicité de ce groupe [9]. En fait ici, on peut se passer de ce résultat car il est facile de voir par des moyens élémentaires que l'on peut construire le feuilletage à trous dans les paragraphes 2 et 3 de façon que φ_1 s'écrive comme un produit de commutateurs.

Le fait que le feuilletage défini sur $\partial H'$ se prolonge dans H' suit alors de la proposition suivante :

PROPOSITION 4.- Soit un feuilletage $F\psi$ défini sur le bord de $D^2 \times S^1$ par une isotopie ψ_t dont le support est contenu dans l'intérieur d'un segment $D^1 \subset S^1$ et tel que si $\varphi_t = \psi_t/D^1$, le difféomorphisme φ_1 s'écrive comme un produit de commutateurs dans $\text{Diff}_0(D^1)$. Alors le feuilletage $F\psi$ se prolonge en un feuilletage F de $D^2 \times S^1$.

De plus, il existe un voisinage de ∂D^1 qui ne coupe que des feuilles compactes de F .

Remarque.- La dernière affirmation sera utilisée dans le paragraphe 6.

Démonstration

Supposons que φ_1 s'écrive comme un produit de g commutateurs dans $\text{Diff}_0(D^1)$:

$$\varphi_1 = [a_1, b_1] \cdot \dots \cdot [a_g, b_g] .$$

Soit Σ_g la surface orientable compacte de genre g moins un disque ouvert de bord α . Soient $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$, $2g$ cercles plongés dans Σ_g , engendrant l'homotopie de Σ_g , tels que :

$$\alpha = [\alpha_{1\#}, \beta_{1\#}] \cdot \dots \cdot [\alpha_{g\#}, \beta_{g\#}] .$$

L'homomorphisme ϕ_1 de $\pi_1(\Sigma_g)$ dans $\text{Diff}_0(D^1)$ défini par $\phi_1(\alpha_{i\#}) = a_i$ et $\phi_1(\beta_{i\#}) = b_i$, $i = 1, \dots, g$, est la représentation d'holonomie d'un feuilletage F_1 de $\Sigma_g \times D^1$. L'application retour sur le bord $\partial \Sigma_g$, identifié à ∂D^2 , est égal à $\phi_1(\alpha_{\#}) = \varphi_1$. On peut supposer que le feuilletage induit sur $\partial \Sigma_g \times D^1$ est $F\varphi_1$.

Posons $C^1 = S^1 - D^1$ et considérons $2g$ difféomorphismes de $\text{Diff}_0(C^1)$, $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \dots, \bar{a}_g, \bar{b}_g$ tels que : $[\bar{a}_1, \bar{b}_1] \dots [\bar{a}_g, \bar{b}_g] = \text{Id}_{C^1}$ et que $\bar{a}_i \neq \text{Id}$ et $\bar{b}_i \neq \text{Id}$ pour tout $i = 1, \dots, g$. Soient ϕ_2 la représentation de $\pi_1(\Sigma_g)$ dans $\text{Diff}_0(C^1)$ définie par $\phi_2(\alpha_{i\#}) = \bar{a}_i$ et $\phi_2(\beta_{i\#}) = \bar{b}_i$ et F_2 le feuilletage de $\Sigma_g \times C^1$ associé à ϕ_2 . Les deux feuilletages F_1 et F_2 se recollent en un feuilletage F' de $\Sigma_g \times S^1$.

Comme \bar{a}_i et $\bar{b}_i \neq \text{Id}$, on peut trouver $2g$ cercles α'_i, β'_i dans $\alpha_i \times \text{int } C^1$ et $\beta_i \times \text{int } C^1$, $i = 1, \dots, g$, isotopes respectivement à $\alpha_i \times \{0\}$ et

$\beta_i \times \{0\}$ ($0 \in C^1 = [-1, +1]$) et transverses à F_2 . Soit $\{\tau'_j\}$ un système de petits voisinages tubulaires des $2g$ cercles α'_i, β'_i .

Alors on peut voir qu'il existe un système de $2g$ tores solides $\{\tau_j\}$ voisinages tubulaires de $2g$ cercles plongés dans l'intérieur $D^2 \times S^1$ tel que :

$$D^2 \times S^1 - \bigcup_i \tau_i \simeq (\Sigma_g \times C^1 - \bigcup_i \tau_i) \cup \Sigma_g \times D^1 \\ \Sigma_g \times S^1 - \bigcup_i \tau'_i$$

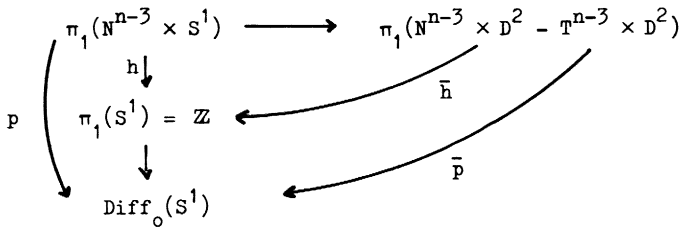
par un difféomorphisme respectant l'identification $\partial D^2 = \partial \Sigma_g$. (Voir [12] pour la construction d'un tel difféomorphisme.)

Ce difféomorphisme transporte le feuilletage F' de $\Sigma_g \times S^1 - \bigcup_i \tau'_i$ sur un feuilletage F de $D^2 \times S^1 - \bigcup_i \tau_i$, induisant sur le bord $\partial D^2 \times S^1$ le feuilletage $F\psi$. D'autre part, le feuilletage F induit sur chaque $\partial \tau_i$ un feuilletage par cercles (en fait, par les cercles parallèles à l'âme du tore solide). Ce feuilletage se prolonge dans l'intérieur de chaque τ_i en ajoutant une composante de Reeb et en faisant spiraler des feuilles cylindriques entre $\partial \tau_i$ et le bord de la composante.

Le feuilletage F vérifie manifestement la dernière condition de l'énoncé.

5. Enroulement des trous

Venons en maintenant à une variété de dimension ≥ 4 et à un trou quelconque $H = N^{n-3} \times D^2 \times D^1$ avec $N^{n-3} = S^k \times S^{n-k-3}$ ou bien S^{n-3} . (Pour $k = 0$ ou $n-3$, on considérera séparément les deux composantes du trou.) Il existe un plongement de T^k dans $S^k \times \text{int}(D^1) \simeq \mathbb{R}^{k+1} - \{0\}$ tel que la projection de T^k sur S^k soit de degré 1. Il en résulte qu'il existe un plongement de T^{n-3} dans $N^{n-3} \times D^2$ tel que la projection de T^{n-3} sur N^{n-3} soit de degré 1 et que le fibré normal à T^{n-3} soit trivial. Considérons maintenant $N^{n-3} \times D^2 - (T^{n-3} \times D^2)$ ($T^{n-3} \times D^2$ désignant un voisinage tubulaire). Si h désigne l'homomorphisme $h : \pi_1(N^{n-3} \times S^1) \rightarrow \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ (où $S^1 = \partial D^2$), l'holonomie du bord feuilleté $\partial H = N^{n-3} \times S^1 \times D^1$ se factorise à travers cet homomorphisme. Mais cet homomorphisme s'étend en un homomorphisme h de $\pi_1(N^{n-3} \times D^2 - T^{n-3} \times D^2)$ dans \mathbb{Z} :



Pour construire \bar{h} , il suffit de remarquer que si $0 \in S^1 = \partial D^2$, les deux sous-variétés $T^{n-3} \times \{0\} \subset T^{n-3} \times D^2$ et $N^{n-3} \times \{0\} \subset N^{n-3} \times D^2$ sont homologues dans $N^{n-3} \times D^2 - T^{n-3} \times D^2$ (car la projection de T^{n-3} sur N^{n-3} est de degré 1). On choisit un cycle z dans $C_{n-2}(N^{n-3} \times D^2 - T^{n-3} \times D^2; \partial(N^{n-3} \times D^2 - T^{n-3} \times D^2))$ dont le bord est $T^{n-3} \times \{0\} \cup N^{n-3} \times \{0\}$; il lui correspond une classe duale au sens de Lefschetz dans $H^1(N^{n-3} \times D^2 - T^{n-3} \times D^2; \mathbb{Z})$. Comme $z \cap N^{n-3} \times \partial D^2 = N^{n-3} \times \{0\}$, cette classe est un homomorphisme \bar{h} désiré. De plus, comme $z \cap T^{n-3} \times \partial D^2 = T^{n-3} \times \{0\}$, cet homomorphisme \bar{h} , restreint à $\pi_1(T^{n-3} \times \partial D^2)$, est la projection sur $\pi_1(\partial D^2)$.

On se sert de \bar{h} pour étendre p en $\bar{p} : \pi_1(N^{n-3} \times D^2 - T^{n-3} \times D^2) \rightarrow \text{Diff}_0(D^1)$.

Cet homomorphisme \bar{h} définit une extension du feuilletage à $H - H'$ où $H' = T^{n-3} \times D^2 \times D^1$. Le feuilletage sur $\partial H'$ est le produit par le facteur T^{n-3} du feuilletage F_φ sur $\partial(D^2 \times D^1)$ (où φ est l'isotopie de D^1 relative au trou H).

L'avantage de T^{n-3} sur N^{n-3} est que l'on peut "enrouler" successivement chacun des facteurs de T^{n-3} de façon que le tore obtenu à la fin du processus soit contenu dans un disque et puisse être modifié à l'aide d'une transversale, comme en dimension 3.

Pour cela, on définit une suite de plongements :

$$F_i : T^{n-2} \times D^1 \subset T^{n-3} \times D^2 \quad (1 \leq i \leq n-2).$$

Pour obtenir F_1 , on reparamètre $T^{n-3} \times D^2$ en $D^2 \times T^{n-3}$, on enlève $D^2_{\frac{1}{2}} \times T^{n-3}$ pour obtenir $\partial D^2 \times T^{n-3} \times D^1 = F_1(T^{n-2} \times D^1)$. Par récurrence, on définit $F_{i+1} \subset F_i$, $i \geq 1$, en enroulant F_i sur son $(i+1)$ -ième facteur : c'est-à-dire que l'on plonge T^{n-3} dans $T^{n-3} \times D^2$ comme $F_i(T^i \times \{0\} \times T^{n-i-3} \times \{0\})$, que l'on prend un voisinage tubulaire de ce plongement, paramétré comme $T^i \times D^2 \times T^{n-i-3}$ et que l'on enlève un plus petit voisinage tubulaire pour obtenir le plongement $F_{i+1}(T^{n-2} \times D^1)$. Cette construction dépend

de la trivialisatlon d'un voisinage tubulaire de $T^i \times \{0\} \times T^{n-i-3} \times \{0\}$ dans $T^{n-2} \times \{0\}$. Cette trivialisatlon est choisie de façon que F_{i+1} ait une orientatlon opposée à celle de F_i ; avec cette condition, le choix est canonique.

Chaque plongement $F_i(T^{n-2} \times \{-1\})$ est le bord d'un plongement G_i de $(T^{i-1} \times D^2 \times T^{n-i-2})$. Les images des G_i sont deux à deux disjointes. Soit $B = T^{n-3} \times D^2 - \bigcup_{i=1}^{n-2} G_i(T^{i-1} \times D^2 \times T^{n-i-2})$. On va étendre le feuilletage à $B \times D^1 \subset H'$. A nouveau, cette extension sera faite en tant que D^1 -fibré feuilleté. Nous verrons dans le paragraphe 6 que chaque nouveau trou peut être feuilleté sauf le dernier, $G_{n-2}(T^{n-3} \times D^2) \times D^1$ qui est contenu dans une boule de H' . Pour étendre le feuilletage à $B \times D^1$, on va tout d'abord définir un homomorphisme h de $\pi_1(B) \rightarrow \mathbb{Z}^{n-2}$ en choisissant $n-2$ éléments de $H^1(B; \mathbb{Z})$ notés $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}$. On définit α_1 comme étant la classe induite sur B par le premier cocycle coordonnée de $F_1(T^{n-2} \times D^1)$. D'autre part, pour $i \geq 1$, $F_i(T^{i-1} \times \{0\} \times T^{n-i-2} \times \{-1\})$ est homologue à $F_{i+1}(T^{i-1} \times \{0\} \times T^{n-i-2} \times \{-1\})$ dans $\text{Image}(F_i) - \text{Image}(G_{i+1})$. On définit α_{i+1} comme étant la classe duale au sens de Lefschetz de cette homologie, dans $T^{n-3} \times D^2 - \bigcup_{j=1}^{i+1} \text{Image}(G_j)$, restreinte à B . L'homomorphisme est $h = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}) : \pi_1(B) \rightarrow \mathbb{Z}^{n-2}$. Choisissons une suite de difféomorphismes $\psi_i : D^1 \rightarrow D^1$ pour $2 \leq i \leq n-2$, avec les conditions suivantes :

- Support $\psi_i = S_i \cup T_i$ où S_i, T_i sont deux intervalles disjointes et fermés.

- Les différents supports sont deux à deux disjointes et disjointes du support de φ .

- L'intervalle minimum contenant $S_i \cup T_i$ contient l'ensemble

$$\text{Support}(\varphi) \bigcup_{j < i} \text{Support}(\psi_j).$$

- Pour $\forall x \in \text{int}(S_i \cup T_i)$, $\psi_i(x) > x$.

(D'autres conditions seront posées plus tard.)

On définit maintenant un homomorphisme $\sigma : \pi_1(B) \rightarrow \text{Diff}_0(D^1)$ en composant h avec l'application $\mathbb{Z}^{n-2} \rightarrow \text{Diff}_0(D^1)$ envoyant les générateurs canoniques de \mathbb{Z}^{n-2} sur les difféomorphismes commutants : $\varphi, \psi_2, \dots, \psi_{n-2}$.

Soit $\sigma = \varphi^{\alpha_1} \circ \psi_2^{\alpha_2} \circ \dots \circ \psi_{n-2}^{\alpha_{n-2}}$.

Cette représentation définit un D^1 -fibré feuilleté sur B , qui est le fibré

trivial puisque chaque difféomorphisme préserve l'orientation de D^1 . Sur le bord du trou original H' , soit $F_1(T^{n-2} \times \{+1\}) \times D^1$, le feuilletage est défini par la représentation d'holonomie $\sigma/\pi_1(F_1(T^{n-2} \times \{+1\}) \times D^1) = \varphi^{\alpha 1}$ et se recolle avec le feuilletage à l'extérieur de H' .

6. Elimination finale des trous

Dans le paragraphe précédent nous avons remplacé chaque trou original $H = N^{n-3} \times D^2 \times D^1$ où N^{n-3} était une sphère ou un produit de deux sphères par des trous plus petits :

$$G_i(T^{i-1} \times D^2 \times T^{n-2-i}) \times D^1, \quad i = 1, \dots, n-2,$$

c'est-à-dire des trous difféomorphes à $T^{n-3} \times D^2 \times D^1$.

Par une dernière transformation (de nature différente pour $1 \leq i \leq n-2$ et $i = n-2$), nous allons remplacer ces trous par des trous difféomorphes à $T^{n-3} \times D^2 \times S^1$ munis d'un feuilletage du bord tel que l'on puisse prolonger le feuilletage grâce à la proposition suivante qui est une généralisation directe de la proposition 4 :

PROPOSITION 5.- Soit \mathcal{F} un feuilletage sur $T^{n-3} \times \partial D^2 \times S^1 = \partial(T^{n-3} \times D^2 \times S^1)$ transverse au facteur S^1 , d'holonomie engendrée par $n-2$ difféomorphismes de S^1 , $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-3}$ (correspondant aux générateurs de $\pi_1(T^{n-3})$) et σ_{n-2} (correspondant à $\pi_1(D^2)$). Supposons que ces difféomorphismes aient des supports deux à deux disjoints et que σ_{n-2} soit égal à un produit de commutateurs. Alors, il existe un feuilletage de $T^{n-3} \times D^2 \times S^1$ prolongeant le feuilletage \mathcal{F} .

Démonstration

Considérons le difféomorphisme σ_{n-2} . Il définit sur $\partial D^2 \times S^1$ un feuilletage F transverse au facteur S^1 . Grâce à la proposition 4, il existe un prolongement de F , encore noté F à $D^2 \times S^1$.

Comme les supports des difféomorphismes $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-3}$ sont disjoints de celui de σ_{n-2} , il suit de la dernière affirmation faite dans l'énoncé de la proposition que l'on peut supposer que les supports des σ_i , $1 \leq i \leq n-3$, sont contenus dans un intervalle $I \subset S^1$ ne coupant que des feuilles compactes de F . Il en résulte que la représentation de Z^{n-3} dans $\text{Diff}(S^1)$ définie par $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-3}$, qui laissait invariant le feuilletage $F/\partial D^2 \times S^1$, peut se prolonger en une représentation σ de Z^{n-3} dans $\text{Diff}(D^2 \times S^1)$ laissant invariant F .

Soient \tilde{T}^{n-3} le revêtement universel de T^{n-3} et la représentation de \mathbb{Z}^{n-3} dans les difféomorphismes de $\tilde{T}^{n-3} \times (D^2 \times S^1)$ obtenue en prenant le produit de la représentation de revêtement dans \tilde{T}^{n-3} par la représentation σ dans $D^2 \times S^1$. Il est alors clair que le feuilletage produit par les feuilles $\tilde{T}^{n-3} \times \{x\}$ définit sur le quotient $T^{n-3} \times (D^2 \times S^1) = \tilde{T}^{n-3} \times_{\mathbb{Z}^{n-3}} (D^2 \times S^1)$ un feuilletage se restreignant au feuilletage donné sur $\partial(T^{n-3} \times D^2 \times S^1)$.

Revenons maintenant aux trous $\text{Image}(G_1) \times D^1$ et commençons par le trou $\text{Image}(G_{n-2}) \times D^1 \subset H = N^{n-3} \times D^2 \times D^1$. Nous savons qu'il existe un segment Γ transverse au feuilletage, joignant le sommet du trou H à sa base, et disjoint des autres trous et autres segments. On peut supposer que Γ commence et finit dans $\text{Image}(G_{n-2}) \times D^1$. Comme $\text{Image}(G_{n-2})$ est contenu dans un disque, on peut étendre le plongement de $T^{n-3} \times D^2 \times D^1$ donné par G_{n-2} en un plongement de $T^{n-3} \times D^2 \times S^1$ dans M^n , en utilisant un petit voisinage tubulaire de Γ . Elargissons le trou $\text{Image}(G_{n-2}) \times D^1$ en enlevant le feuilletage dans $T^{n-3} \times D^2 \times (S^1 - D^1)$. Le feuilletage sur le bord de ce nouveau trou est transverse au facteur S^1 et son holonomie fait correspondre au générateur de $\pi_1(T^{n-3})$ les difféomorphismes $\varphi, \psi_2, \dots, \psi_{n-3}$ et au générateur de $\pi_1(D^2)$ le difféomorphisme ψ_{n-2} , où $\varphi, \psi_2, \dots, \psi_{n-2}$ sont considérés comme étant des difféomorphismes de S^1 , grâce à l'inclusion $D^1 \subset S^1$.

Si l'on choisit maintenant ψ_2 , en plus des conditions données au paragraphe 5, d'être égal à un produit de commutateurs dans $\text{Diff}_0(S_{n-2} \cup T_{n-2})$, on peut appliquer la proposition 5 pour prolonger le feuilletage au trou élargi.

Considérons maintenant les autres trous, $H_\ell = \text{Image}(G_\ell) \times D^1$ pour $1 \leq \ell \leq n-3$. H_ℓ est paramétré comme $T^{\ell-1} \times D^2 \times T^{n-\ell-2} \times D^1$. Le feuilletage sur $T^{\ell-1} \times \partial D^2 \times T^{n-\ell-2} \times D^1$ est transverse au facteur D^1 ; les générateurs de $\pi_1(T^{\ell-1} \times \partial D^2 \times T^{n-\ell-2})$ sont envoyés, par la représentation d'holonomie sur les difféomorphismes $\varphi, \psi_2, \dots, \psi_{\ell+1}, \text{Id}, \dots, \text{Id}$. Soit $U \subset D^1$ un intervalle contenant le support de ψ_ℓ (et donc les supports de $\varphi, \psi_2, \dots, \psi_{\ell-1}$) mais disjoint du support de $\psi_{\ell+1}$. Alors $(T^{\ell-1} \times D^2 \times T^{n-\ell-2}) \times (D^1 - U)$ a un feuilletage F_1 , se recollant sur le bord avec le feuilletage donné, et induit par la projection

sur le $((l + 1)$ -ième facteur S^1) $\times (D^1 - U)$, puisque le feuilletage sur cette partie de D^1 ne dépend que du $(l + 1)$ -ième paramètre.

Soient $u \in \text{Int}(S_{l+1})$ et $v \in \text{Int}(T_{l+1})$ des points où ψ_{l+1} est croissant. Alors, on peut supposer que $(T^{l-1} \times D^2 \times T^{n-l-2}) \times (\{u\} \times \{v\})$ est transverse à F_1 et que le feuilletage induit sur ces deux sous-variétés est le feuilletage trivial dont les feuilles correspondent aux différentes valeurs du $(l + 1)$ -ième facteur. En arrondissant les angles de $T^{l-1} \times D^2 \times T^{n-l-2} \times [u, v]$, on obtient un nouveau trou $H'_l \subset H_l$ et une extension du feuilletage dans $H_l - H'_l$. Le feuilletage est maintenant transverse au bord de H'_l . Les sous-variétés $N_1 = T^{l-1} \times \{0\} \times T^{n-l-2} \times \{u\}$ et $N_2 = T^{l-1} \times \{0\} \times T^{n-l-2} \times \{v\}$ sont transverses au feuilletage et le feuilletage induit y est trivial. On met un pilier P dans H'_l , de N_1 à N_2 , $P = T^{l-1} \times D^2_\epsilon \times T^{n-l-2} \times [u, v]$ et on étend le feuilletage de $N_1 \cup N_2$ sur P en un feuilletage de P dont les feuilles sont définies par les valeurs du $(l + 1)$ -ième facteur.

On arrondit les angles de $H'_l - P$ pour obtenir un nouveau trou $H''_l \subset H'_l$. H''_l est le produit par un tore de la section de H'_l dans la direction de $D^2 \times D^1$. Cette section ressemble à une pomme ($D^2 \times D^1$) à laquelle on aurait enlevé son trognon ($D^2_\epsilon \times D^1$), aussi $H''_l = T^{n-3} \times S^1 \times D^2$.

En utilisant le fait que ψ_{l+1} est croissant sur chaque composante de son support, il est possible de perturber légèrement la paramétrisation de façon que le facteur ∂D^2 devienne transverse au feuilletage; ainsi, le feuilletage de $\partial H''_l$ est celui d'un S^1 -fibré sur T^{n-2} ($S^1 = \partial D^2$).

L'holonomie envoie les générateurs de $\pi_1(T^{n-2})$ sur $\varphi, \psi_2, \dots, \psi_{l-1}, \psi_{l+1}^1, \text{Id}, \dots, \text{Id}, \psi_l$ respectivement. Le difféomorphisme ψ_{l+1}^1 provient de ψ_{l+1} , mais n'est pas entièrement déterminé par les indications de constructions données plus haut. On peut s'assurer que ψ_{l+1}^1 est un produit de commutateurs en supposant que ψ_{l+1}/S_{l+1} est conjugué à ψ_{l+1}/T_{l+1} , que cette conjugaison porte u sur v et que N_1 avec la trivialisatation donnée par son feuilletage est conjugué à N_2 avec la trivialisatation donnée par son feuilletage; ainsi ψ_{l+1}^1 est conjugué à ψ_{l+1}/S_{l+1} que l'on supposera être égal à un produit de commutateurs.

Remarquons qu'il suit très facilement de la proposition 5 qu'il existe un feuille-

tage F_2 de $T^{n-2} \times S^1 \times D^1$ induisant le feuilletage de $\partial H''_2$ sur la composante du bord $T^{n-2} \times S^1 \times \{+1\}$ et le feuilletage trivial par les feuilles $T^{n-2} \times \{x\} \times \{-1\}$ sur l'autre composante. Le feuilletage peut être regardé comme le produit par T^{n-3} du feuilletage de $S^1 \times S^1$ par les cercles $S^1 \times \{x\}$ qui s'étend facilement en un feuilletage de $S^1 \times D^2$ en ajoutant une composante de Reeb et faisant spiraler des feuilles cylindriques entre le bord et cette composante. Le produit par T^{n-3} fournit alors une extension de $F_2 | T^{n-2} \times S^1 \times \{+1\}$ en un feuilletage de $T^{n-2} \times D^2$. La réunion de F_2 et de cette extension est le feuilletage de H''_2 souhaité.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. ASIMOV - Flow Manifolds, Thèse, U. C. Berkeley, 1972.
- [2] R. BOTT - On topological obstruction to integrability, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, 127-131.
- [3] A. DURFEE - Foliations of odd-dimensional spheres, Annals of Math., 96(1972), 407-411.
- [4] M. L. GROMOV - Thèse, Leningrad, 1968.
- [5] A. HAEFLIGER - Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes, Comm. Math. Helv., 32(1958), 249-329.
- [6] A. HAEFLIGER - Feuilletages sur les variétés ouvertes, Topology 9(1970), 183-194.
- [7] B. LAWSON - Codimension one foliations of spheres, Ann. of Math., 82(1965), 494-503.
- [8] W. B. R. LICKORISH - A foliation for 3-manifolds, Ann. of Math., 82(1965), 414-420.
- [9] J. MATHER - Integrability in codimension 1, Comm. Math. Helv., 48(1973), 195-233.
- [10] S. P. NOVIKOV - Topology of foliations, Trans. Moscow Math. Soc., 14(1965), 248-278 [en russe], A.M.S. Translation, 1967, 268-304.
- [11] A. PHILLIPS - Foliations on open manifolds, Comm. Math. Helv., 44(1969), 367-370.
- [12] H. ROSENBERG and W. THURSTON - Some remarks on foliations, in Peixoto (ed), Dynamical Systems, Academic Press, New York, 1973.
- [13] I. TAMURA - Every odd dimensional homotopy sphere have a foliation of codimension one, Comm. Math. Helv., 47(1972), 164-170 .
- [14] W. THURSTON - A generalisation of the Reeb stability theorem, Topology, 13(1974), 304-307.
- [15] W. THURSTON - The theory of foliations of codimension greater than one, Comm. Math. Helv., 49(1974), 214-231.
- [16] W. THURSTON - A local construction of foliations for three-manifolds, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 27 (1975), 315-319.
- [17] W. THURSTON - Existence of codimension one foliations, Ann. of Math., 104 (1976), 249-268.
- [18] J. WOOD - Foliations on 3-manifolds, Ann. of Math., 89(1969), 336-358.