SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MUSTAPHA RAÏS

Opérateurs différentiels bi-invariants

Séminaire N. Bourbaki, 1978, exp. nº 498, p. 125-137

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1976-1977__19__125_0>

Séminaire BOURBAKI
29e année, 1976/77, n° 498

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS BI-INVARIANTS

[d'après M. DUFLO]

par Mustapha RAÏS

1. Introduction

1.1. Un opérateur différentiel P sur une variété est dit localement résoluble en un point x s'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{W}$ de x tel que toute équation $Pg = f$ (à second membre fonction indéfiniment dérivable à support compact dans $\mathcal{W}$) admette une solution (distribution) g dans $\mathcal{W}$. Lorsque la variété est un groupe de Lie G et lorsque l'opérateur P est invariant (à gauche ou à droite) par G, la résolubilité locale de P en tout point équivaut à sa résolubilité locale à l'origine et aussi à l'existence d'un voisinage ouvert $\mathcal{W}$ de l'origine et d'une distribution E sur $\mathcal{W}$ (qu'on peut appeler une solution élémentaire locale de P) telle que $PE = \varepsilon$ (ε étant la mesure de Dirac à l'origine) ([1], proposition 2, paragraphe 3). Il est actuellement bien connu qu'un opérateur différentiel invariant (d'un seul côté) sur un groupe de Lie n'a aucune raison d'être localement résoluble en général : à un changement d'écriture près, l'opérateur de LEWY est un opérateur différentiel invariant du premier ordre sur le groupe de Heisenberg (de dimension 3) (cette remarque est faite dans [2]). Par contre, un opérateur différentiel invariant des deux côtés est toujours localement résoluble (il faudra bien sûr s'assurer en plus qu'il est ... non nul !). Cela résulte du théorème suivant de Michel DUFLO ([3]) que je vais énoncer après avoir présenté les objets nécessaires.

1.2. Dans la suite, G est un groupe de Lie simplement connexe et $\mathfrak{g}$ est son algèbre de Lie. On désigne par $\mathcal{V}$ l'ensemble des éléments X de $\mathfrak{g}$ ayant la propriété suivante : chaque valeur propre de l'endomorphisme $\operatorname{ad} X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ a sa partie imaginaire dans l'intervalle ouvert $]-\pi, +\pi[$. Soit $\mathcal{W} = \exp(\mathcal{V})$ l'image de $\mathcal{V}$ par l'application exponentielle de G. En fait, les ensembles $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont des ouverts (l'un de G, l'autre de $\mathfrak{g}$), invariants par G (qui opère dans $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe et dans G par automorphismes intérieurs), et $\operatorname{Exp} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ est un isomorphisme de G-espaces. Dans la suite, on parlera de distributions sur des ouverts de G ou de $\mathfrak{g}$. On entendra toujours par distribution une mesure généralisée, c'est-à-dire une forme linéaire continue sur un espace $\mathcal{C}_c^\infty$ de fonctions indéfiniment dérivables à support compact. (Notation pour les espaces de distributions : $\mathcal{D}'$.)

1.3. THÉORÈME A.- Soient G et $\mathcal{W}$ comme on vient de dire. Tout opérateur différentiel bi-invariant (non nul) P sur G possède une solution élémentaire locale E sur $\mathcal{W}$ $(PE = \varepsilon)$ qui est de plus G-invariante.

1.4. Ce résultat absorbe ceux précédemment connus (cas des groupes semi-simples, résolubles). Le lecteur peut consulter [4], § 1 pour un résumé, dans l'ordre chronologique, des résultats obtenus autour des questions d'équations aux dérivées partielles invariantes sur des groupes de Lie ou leurs espaces homogènes.

2. Cas des groupes nilpotents

2.1. On munit G d'une mesure de Haar à gauche dx . Si dX est une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}$ (on dira mesure de Lebesgue au lieu de mesure de Haar lorsqu'il s'agira de groupes abéliens), il existe une fonction positive J sur $\mathcal{V}$ telle que $d(\exp X) = J(X)\, dX$. On munira $\mathfrak{g}$ de la mesure de Lebesgue dX ayant la propriété suivante : la fonction J qui lui correspond vaut 1 à l'origine de $\mathfrak{g}$ $(J(0) = 1)$. Soit ψ une fonction numérique intégrable sur $\mathfrak{g}$. La transformée de Fourier $\mathcal{F}\psi$ de ψ est la fonction sur $\mathfrak{g}^*$ (espace vectoriel des formes linéaires ℓ sur $\mathfrak{g}$) définie par :

$$(\mathcal{F}\psi)(\ell) = \int \psi(X)\, e^{i\langle \ell,X\rangle}\, dX .$$

On désignera par $d\ell$ la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}^*$ duale de dX .

2.2. Supposons maintenant que $\mathfrak{g}$ est nilpotente. Alors l'isomorphisme de variétés $\mathrm{Exp} : \mathfrak{g} \to G$ permet de définir un isomorphisme vectoriel topologique $a : \mathcal{D}'(G) \to \mathcal{D}'(\mathfrak{g})$ qui n'est autre que l'application image réciproque par Exp . Soit u une distribution invariante à support l'origine de G et soit $v = a(u)$. La distribution v est invariante et à support l'origine de $\mathfrak{g}$, et on peut en calculer la transformée de Fourier abélienne $\mathcal{F}v$. De façon précise, on pose (pour chaque ℓ dans $\mathfrak{g}^*$) :

$$\hat{u}(\ell) = \mathcal{F}v(\ell) = \int e^{-i\langle \ell,X\rangle}\, dv(X) .$$

La fonction $\hat{u}$ est une fonction polynôme G-invariante sur $\mathfrak{g}^*$.

2.2.a) Supposons que cette fonction $\hat{u}$ soit à valeurs positives. Pour chaque nombre complexe s à partie réelle non négative, on peut définir la distribution v^s qui est une distribution tempérée sur $\mathfrak{g}$ telle que :

$$(2.2) \qquad \langle v^s , \psi \rangle = \int_{\mathfrak{g}^*} (\hat{u}(\ell))^s \, (\mathcal{F}\psi)(\ell) \, d\ell$$

pour chaque ψ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathfrak{g})$ puis la distribution u^s sur G qui est l'image de v^s par Exp . On a donc $a(u^s) = v^s$ et :

$$\langle u^s , \varphi \rangle = \int_{\mathfrak{g}^*} (\hat{u}(\ell))^s \, (\mathcal{F} (\varphi \circ \mathrm{Exp}))(\ell) \, d\ell$$

pour chaque φ dans $\mathcal{C}_c^\infty(G)$. L'essentiel dans la suite est l'égalité :

$$(\mathrm{A}) \qquad u * u^s = u^{s+1}$$

(dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geq 0$). S'il en est ainsi en effet, un raisonnement classique ([5], [6]) montre qu'il existe une distribution E sur G telle que $u * E = E * u = \varepsilon$.

2.2.b) Revenons à l'égalité souhaitée $u * u^s = u^{s+1}$. Elle n'est pas évidente sur la définition pourtant "explicite" de u^s . Il faut passer à une autre écriture de u^s qui provient des remarques suivantes : dans l'espace vectoriel $\mathfrak{g}^*$ se trouvent les orbites du groupe G opérant au moyen de la représentation contragrédiente de la représentation adjointe (et qu'on appelle la représentation <u>coadjointe</u> de G), et chaque telle orbite Ω (notation consacrée) porte une mesure positive G-invariante <u>canonique</u> β_Ω qu'on appelle la mesure de KOSTANT ([7], chapitre II). De plus, la mesure de Lebesgue $d\ell$ se désintègre suivant la famille des mesures β_Ω : il existe une mesure dm sur $\mathfrak{g}^*/G$ telle que :

$$\langle u^s , \varphi \rangle = \int_{\mathfrak{g}^*/G} (\hat{u}(\Omega))^s \, dm(\Omega) \int_\Omega \mathcal{F} (\varphi \circ \mathrm{Exp})(\ell) \, d\beta_\Omega(\ell)$$

pour chaque φ dans $\mathcal{C}_c^\infty(G)$.

2.2.c) On est alors amené à associer à chaque orbite Ω une distribution T_Ω sur G telle que

$$\langle T_\Omega , \varphi \rangle = \int_\Omega \mathcal{F}(\varphi \circ \mathrm{Exp})(\ell) \, d\beta_\Omega(\ell)$$

(pour chaque φ dans $\mathcal{C}_c^\infty(G)$), ce qui a un sens précis parce que chaque orbite Ω est <u>fermée</u> dans $\mathfrak{g}^*$ et parce que la mesure β_Ω , considérée comme une mesure sur $\mathfrak{g}^*$ portée par Ω , est une distribution <u>tempérée</u>. On a donc :

$$\langle u^s , \varphi \rangle = \int_{\mathfrak{g}^*/G} \langle T_\Omega , \varphi \rangle \, (\hat{u}(\Omega))^s \, dm(\Omega) .$$

Le miracle dans le cas nilpotent est que l'on reconnaît dans la distribution T_Ω

le caractère de la (classe de) représentations unitaires irréductibles π_Ω de G associée par KIRILLOV à l'orbite Ω et que ceci permet de lire dans [8] les relations :

$$\text{(C)} \qquad u * T_\Omega = \hat{u}(\Omega)\, T_\Omega$$

valables pour toute orbite Ω et pour toute distribution invariante u à support l'origine de G . Si on désire calculer maintenant $u * u^s$ lorsque $\mathrm{Re}(s) \geq 0$, on n'a plus dévider la suite d'évidences :

$$\begin{aligned}\langle u * u^s , \varphi\rangle &= \langle u^s , \check{u} * \varphi\rangle = \int_{\mathfrak{g}^*/G} \langle T_\Omega , \check{u} * \varphi\rangle \, (\hat{u}(\Omega))^s \, dm(\Omega) \\ &= \int \langle u * T_\Omega , \varphi\rangle \, (\hat{u}(\Omega))^s \, dm(\Omega) = \int \langle T_\Omega , \varphi\rangle \, (\hat{u}(\Omega))^{s+1} \, dm(\Omega) \\ &= \langle u^{s+1} , \varphi\rangle .\end{aligned}$$

2.3. La démonstration du théorème A dans le cas général est une adaptation (je ne dis pas une simple adaptation) de ce qui précède. Je vais commenter cette démonstration en insistant successivement sur ce qui correspond aux parties a, b et c mises en évidence dans 2.2, à savoir : le choix de l'isomorphisme a qui transforme les distributions sur G en distributions sur $\mathfrak{g}$, la possibilité de la désintégration de la mesure $d\ell$ suivant la famille des mesures β_Ω et l'existence des distributions T_Ω , enfin la formule $u * T_\Omega = \ldots$.

3. Le passage du groupe à l'algèbre de Lie

3.1. Supposons qu'on dispose d'un isomorphisme vectoriel topologique $a : \mathcal{D}'(\mathcal{W}) \to \mathcal{D}'(\mathcal{V})$, qui transforme les distributions invariantes portées par l'origine de G en des distributions invariantes portées par l'origine de $\mathfrak{g}$. Soit alors u une distribution invariante portée par l'origine de G , et soit $v = a(u)$. Si la fonction $\hat{u} = \mathcal{F} v$ est à valeurs positives, il est toujours possible de définir dans $\mathcal{V}$ des distributions v^s par les formules (2.2), puis dans $\mathcal{W}$ des distributions u^s telles que $a(u^s) = v^s$. Si chaque fois qu'il en est ainsi, on a $u * u^s = u^{s+1}$, on dira de l'isomorphisme a qu'il est convenable. On voit immédiatement que cela signifie que $a(u * u^s) = a(u) \underset{+}{*} a(u^s)$, où au second membre, la convolution des distributions $a(u)$ et $a(u^s)$ (qui sont des distributions sur $\mathcal{V}$) est relative à la structure de groupe abélien de $\mathfrak{g}$. Autrement dit, on a l'égalité fondamentale $u * u^s = u^{s+1}$ si et seulement si l'isomorphisme a transforme le produit de convolution multiplicatif $u * u^s$ dans le produit de convolution additif $a(u) * a(u^s)$. Si a est convenable, on a en particulier

$a(u * u) = a(u) \underset{+}{*} a(u)$ et la restriction de a à l'algèbre (de convolution) des distributions invariantes portées par l'origine de G n'est pas loin d'être un isomorphisme de cette algèbre sur celle des distributions invariantes portées par l'origine de $\mathfrak{g}$. Il y a d'ailleurs une autre raison pour laquelle on souhaite disposer d'un isomorphisme a ayant cette dernière propriété : c'est que cette propriété est utile par ailleurs pour passer des distributions u à $\hat{u}$ positif aux autres. Comme dans le cas abélien on est amené à définir pour une distribution u, la distribution $\tilde{u}$ telle que $d\tilde{u}(x) = \overline{du(x^{-1})}$ et à considérer la distribution $w = u * \tilde{u}$. Si a transforme la convolution multiplicative en convolution additive (et si $a(\tilde{u}) = \widetilde{a(u)}$), on voit que $\hat{w}$ est positive et si E est telle que $w * E = u * \tilde{u} * E = \varepsilon$, il vient que $\tilde{u} * E$ est un "inverse local" de u.

3.2. Ceci étant, il est bien connu que l'algèbre de convolution constituée par les distributions portées par l'origine de G s'identifie à l'algèbre universelle enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ complexifiée de $\mathfrak{g}$ (un élément X de $\mathfrak{g}$ donne naissance à la distribution $\varphi \mapsto (\frac{d}{dt})_0 \varphi(\exp(tX))$) et que dans cette identification l'algèbre des distributions invariantes correspond au centre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. De même, il y a une identification naturelle entre l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ et l'algèbre des distributions à support $\{0\}$ dans $\mathfrak{g}$, qui envoie la sous-algèbre $Y(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ de $S(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ constituée par les éléments $\mathfrak{g}$-invariants sur celle des distributions invariantes à support $\{0\}$ (les notations sont celles de [9]). Une fois ceci rappelé, on peut dire qu'on souhaite disposer d'un isomorphisme convenable $a : \mathcal{D}'(\mathcal{W}) \to \mathcal{D}'(\mathcal{V})$ dont la restriction $\alpha : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}) \to Y(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ à l'algèbre des distributions invariantes à support $\{1\}$ est un isomorphisme de cette algèbre sur celle des distributions invariantes à support $\{0\}$. Le fait qu'un tel isomorphisme α existe (n'est pas très ancien et) a été établi par DUFLO en 1971 ([10]). Je rappelle trop rapidement comment cet isomorphisme a été "explicitement" construit. Soit $\mathfrak{l}$ une algèbre de Lie complexe (ou plus généralement sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro). On dit qu'une forme linéaire ℓ sur $\mathfrak{l}$ est régulière si la sous-algèbre $\mathfrak{l}(\ell)$ de $\mathfrak{l}$ qui stabilise ℓ ($\mathfrak{l}$ opérant dans $\mathfrak{l}^*$ au moyen de la représentation coadjointe) a la plus petite dimension possible (parmi les sous-algèbres $\mathfrak{l}(\ell')$, ℓ' parcourant $\mathfrak{l}^*$). A chaque forme régulière ℓ, DUFLO associe un idéal primitif $I(\ell)$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{l})$ (primitif veut dire que cet idéal est le noyau d'une représentation irréductible de $\mathfrak{l}$). Soit alors u dans $\mathcal{Z}(\mathfrak{l})$. Il existe un nombre complexe $\mathring{u}(\ell)$ tel que $u = \mathring{u}(\ell)$ mod. $I(\ell)$ (pour chaque ℓ régulière). Duflo a ainsi associé à chaque élément u de $\mathcal{Z}(\mathfrak{l})$ une fonction $\hat{\mathring{u}}$ à valeurs complexes définie dans l'ouvert de Zariski de $\mathfrak{l}^*$ constitué par les formes régulières. Il se trouve qu'en fait, cette fonction $\hat{u}$ est (la restriction à son domaine de définition $\mathfrak{d}'$) une fonction polynomiale sur $\mathfrak{l}^*$, ou encore un élément de $S(\mathfrak{l})$ et même de $Y(\mathfrak{l})$ (la fonction $\hat{u}$ est $\mathfrak{l}$-invariante). On peut enfin énoncer le théorème : l'application $\gamma : \mathfrak{Z}(\mathfrak{l}) \to Y(\mathfrak{l})$, qui envoie chaque u sur la fonction $\hat{u}$ qui lui correspond comme on vient de l'expliquer, est un isomorphisme d'algèbres ([9], théorèmes 10.4.2 et 10.4.5), (qu'on appelle depuis l'isomorphisme <u>canonique</u> de DUFLO). En plus, lorsque $\mathfrak{l}$ est soit résoluble, soit semi-simple, DUFLO avait montré que l'isomorphisme canonique γ était donné par une formule <u>explicite</u> (voir plus bas) mais la question de la validité en général de cette formule était restée ouverte. En fait, le deuxième théorème important de [3] affirme que cette formule est valable dans tous les cas. Pour en écrire un énoncé précis, je vais donner la bonne définition de l'isomorphisme $a : \mathcal{D}'(\mathcal{W}) \to \mathcal{D}'(\mathcal{V})$ à laquelle je me tiendrais dans la suite. Pour chaque X dans $\mathcal{V}$, on pose :

$$j(X) \equiv \left| \det \frac{\operatorname{sh} \frac{\operatorname{ad} X}{2}}{\frac{\operatorname{ad} X}{2}} \right|^{\frac{1}{2}} .$$

La fonction j est analytique, G-invariante et partout non nulle. On définit a comme suit : si T est une distribution sur $\mathcal{W}$, la distribution $S = a(T)$ qui lui correspond par a est telle que :

$$\int \varphi(x)\, dT(x) = \int \varphi(\operatorname{Exp} X)\, j(X)\, dS(X)$$

pour chaque φ dans $\mathcal{E}_c^\infty(\mathcal{W})$. Le passage de S à T est très clair : on <u>multiplie</u> la distribution S par la fonction j puis on prend l'<u>image</u> de jS par <u>l'application</u> Exp . Bien entendu, DUFLO démontre que cet isomorphisme a est convenable, mais aussi le :

3.3. THÉORÈME B.- La restriction $\alpha : \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \to Y(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ de a à $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ coïncide avec l'isomorphisme canonique γ .

3.4. Le théorème dit que $\gamma(u)$ est donné par la "formule" suivante : on prend l'image réciproque par Exp de la distribution u , puis on multiplie cette image réciproque par la fonction j^{-1} .

3.5. Le fait que a est convenable lorsque $\mathfrak{g}$ est résoluble est essentiellement démontré dans [11]. Quant au cas où $\mathfrak{g}$ est semi-simple, il avait été réglé par un théorème de HARISH-CHANDRA ([12], Lemma 24) qui dit bien plus que ce qu'on voulait : si u et T sont des distributions invariantes sur $\mathcal{W}$, la première étant portée par l'origine de G , alors $a(u * T) = a(u) * a(T)$. A ma connaissance, il n'existe aucun énoncé de ce type en dehors du cas semi-simple. La question est ouverte <u>même dans le cas nilpotent</u>, à part le cas des groupes de Heisenberg (qui est évident) et aussi celui des groupes nilpotents de dimension ≤ 5 qui se prêtent à une vérification calculatoire directe.

3.6. Autre question ouverte : trouver une démonstration purement algébrique du théorème B (voir dans [3] comment interpréter γ et α dans le cas d'une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique zéro).

4. Les orbites tempérées et la désintégration de la mesure de Lebesgue de $\mathfrak{g}^*$

4.1. Soit Ω une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$. On dira que Ω est <u>tempérée</u> si la mesure canonique β_Ω admet une mesure image dans $\mathfrak{g}^*$ (i.e. si chaque fois que K est un compact de $\mathfrak{g}^*$, alors $K \cap \Omega$ est β_Ω-intégrable) et si cette mesure image est à <u>croissance lente</u> (ou encore définit une distribution <u>tempérée</u> dans $\mathfrak{g}^*$). En fait, une orbite Ω est tempérée si et seulement s'il existe une norme $\| \ \|$ sur l'espace vectoriel $\mathfrak{g}^*$ et un entier positif r tel que :

$$\int_\Omega (1 + \|\ell\|)^{-r} \, d\beta_\Omega(\ell) < +\infty$$

([13], chap. VII, théor. VII). Dès qu'on dispose d'une orbite tempérée Ω , on peut définir sur $\mathcal{W}$ une distribution invariante T_Ω de la manière suivante :

$$\langle T_\Omega , \varphi \rangle = \int_\Omega \mathfrak{F}(j\varphi \circ \mathrm{Exp})(\ell) \, d\beta_\Omega(\ell)$$

pour chaque φ dans $\mathcal{E}_c^\infty(\mathcal{W})$. Autrement dit, l'image S_Ω de T_Ω par l'isomorphisme a n'est autre que la restriction à $\mathcal{V}$ de la transformée de Fourier "abélienne" de la distribution tempérée définie sur $\mathfrak{g}^*$ par la mesure β_Ω .

4.2. Comme on l'a déjà dit, toutes les orbites sont tempérées lorsque $\mathfrak{g}$ est nilpotente. Ce résultat est contenu dans celui-ci : lorsque $\mathfrak{g}$ est résoluble algébrique, chaque orbite fermée est tempérée ([14], paragraphe 5.5).

4.3. Lorsque $\mathfrak{g}$ est <u>compacte</u>, toutes les orbites sont tempérées, mais bien peu d'entre elles correspondent à des <u>caractères</u> du groupe G .

4.4. Lorsque $\mathfrak{g}$ est semi-simple, il est démontré dans [15] que la mesure canonique β_Ω de chaque orbite Ω admet une mesure image dans $\mathfrak{g}^*$, mais je ne sais pas si les calculs y figurant montrent que chaque orbite Ω est tempérée, ce qui est pourtant raisonnable.

4.5. Lorsque $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie résoluble de dimension deux, aucune des deux orbites ouvertes n'est tempérée. En tout cas, on peut <u>conjecturer</u> que (dans le cas général d'une algèbre de Lie quelconque $\mathfrak{g}$), toute orbite <u>fermée</u> est tempérée.

4.6. De toute manière, voici un cas où il y a "beaucoup" d'orbites tempérées : on suppose que $\mathfrak{g}$ est <u>unimodulaire</u> (c'est-à-dire que chaque $\operatorname{ad} X$ est de trace nulle), et qu'il existe un ouvert G-invariant U de $\mathfrak{g}^*$, dont le complémentaire est de mesure de Lebesgue nulle et qui est réunion d'orbites fermées ayant toutes la même dimension. (Pour abréger, je dirai d'une algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ qui a ces propriétés qu'elle est <u>convenable</u>.) Alors la mesure de Lebesgue $d\ell$ de $\mathfrak{g}^*$ est invariante par G et il existe une et une seule mesure dm sur U/G telle que

$$\int_{\mathfrak{g}^*} \psi(\ell)\, d\ell = \int_{U/G} dm(\Omega) \int_{\Omega} \psi(\ell)\, d\beta_{\Omega}(\ell)$$

pour toute fonction ψ intégrable sur $\mathfrak{g}^*$. Comme la fonction $(1 + \|\ell\|)^{-r}$ est intégrable sur $\mathfrak{g}^*$ pour r assez grand, on en déduit que la réunion U' des orbites tempérées est de complémentaire négligeable ([11], 5.1.7).

4.7. <u>Remarques</u>.- a) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique. On désignera par $\widetilde{G}$ le groupe des points réels du groupe algébrique connexe défini sur $\mathbf{R}$ associé à $\mathfrak{g}$ et par $\widetilde{G}_{\mathbf{C}}$ le groupe de ses points complexes. Le groupe $\widetilde{G}_{\mathbf{C}}$ opère dans $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. Supposons qu'il existe dans le dual de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ un ouvert de Zariski qui est réunion de $\widetilde{G}_{\mathbf{C}}$-orbites fermées de dimension maximale. Alors il existe un ouvert de Zariski de $\mathfrak{g}^*$ qui est réunion d'orbites fermées de dimension maximale (l'intersection $\Omega \cap \mathfrak{g}^*$, supposée non vide, d'une $\widetilde{G}_{\mathbf{C}}$-orbite fermée de dimension maximale Ω avec $\mathfrak{g}^*$ est une réunion finie de G-orbites fermées de dimension maximale).

b) Supposons qu'il existe une fonction polynôme p sur l'espace vectoriel complexe $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})^*$, qui soit $\widetilde{G}_{\mathbf{C}}$-invariante, non nulle, mais nulle sur les éléments <u>non réguliers</u> de $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})^*$. Soit z un nombre complexe non nul. Dans l'ensemble fermé $p^{-1}(\{z\})$, les orbites de $\widetilde{G}_{\mathbf{C}}$ ont toutes la même dimension et sont donc fermées dans $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})^*$. Par suite, l'ouvert de Zariski des non zéros de p est réunion de $\widetilde{G}_{\mathbf{C}}$-orbites fermées de dimension maximale.

4.8. Compte-tenu de la conjecture de Dixmier, Duflo et Vergne ([16]), on peut espérer que toute algèbre de Lie algébrique <u>unimodulaire</u> est convenable.

4.9. Revenons au cas d'une algèbre de Lie convenable (4.6). On a alors :

$$\langle u^s , \varphi\rangle = \int_{U'/G} (\hat{u}(\Omega))^s \langle T_{\Omega} , \varphi\rangle\, dm(\Omega)$$

$$\langle u * u^s , \varphi \rangle = \int (\hat{u}(\Omega))^s \langle u * T_\Omega , \varphi \rangle \, dm(\Omega)$$

et on est amené à s'intéresser à $u * T_\Omega$. Voici le troisième théorème important de [3] :

4.10. THÉORÈME C.- Soit ℓ dans $\mathfrak{g}^*$ dont la G-orbite Ω est fermée, tempérée, de dimension maximale. Alors $u * T = 0$ si u est dans l'idéal $I(-i\ell)$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_C)$.

4.11. Il en résulte immédiatement sous les mêmes hypothèses que $u * T_\Omega = \gamma(u)(-i\ell)T_\Omega$ pour tout u dans $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_C)$ (γ étant l'isomorphisme canonique). Ainsi la distribution T_Ω est une "fonction" propre pour tous les opérateurs différentiels bi-invariants.

4.12. En fait, c'est ce théorème C qui est fondamental : je vais montrer tout de suite comment les théorèmes A et B en résultent dans le cas particulier d'une algèbre de Lie convenable. Soient u une distribution portée par l'origine et φ dans $\mathcal{E}_c^\infty(\mathcal{W})$. On a d'abord :

$$\langle u , \varphi \rangle = \int_{\mathfrak{g}^*} \hat{u}(\ell) \, \mathfrak{F}(j\varphi \circ \operatorname{Exp})(\ell) \, d\ell$$

et ensuite :

$$\langle u , \varphi \rangle = \check{u} * \varphi(1) = \int_{U'/G} \langle u * T_\Omega , \varphi \rangle \, dm(\Omega) = \int_{\mathfrak{g}^*} \gamma(u)(-i\ell) \, \mathfrak{F}(j\varphi \circ \operatorname{Exp})(\ell) \, d\ell \, .$$

En comparant, on voit que $\hat{u}(\ell) = \gamma(u)(-i\ell)$ pour tout ℓ et ceci dit exactement que le théorème B est vrai pour $\mathfrak{g}$. Une fois ceci acquis, on a immédiatement $u * u^s = u^{s+1}$, d'où le théorème A pour $\mathfrak{g}$.

5. Le théorème C

5.1. C'est celui dont la démonstration est la plus technique : il y a une récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$ et réduction à quatre cas particuliers. Les deux plus difficiles sont ceux où on utilise des calculs explicites de la mesure invariante β_Ω dus à KIRILLOV ([17]). On peut quand même donner la démonstration du théorème C dans un cas particulier qui a l'avantage de montrer des techniques courantes dans ce domaine et qui est en fait le cas général lorsque $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie $\mathfrak{l}^R$ obtenue par restriction des scalaires à partir d'une algèbre de Lie algébrique complexe $\mathfrak{l}$.

5.2. Pour expliquer cette démonstration, on peut présenter les choses de la façon suivante : soit H un sous-groupe fermé de G . Soit ω un caractère unitaire de H et soit ℓ dans $\mathfrak{g}^*$ telle que la différentielle de ω soit la restriction de $i\ell$ à l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H . On s'intéresse à la représentation unitaire π de G induite par ω . On choisit une fonction positive ρ sur G telle que

$\rho(xh) = \rho(x)|\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)|$ pour tous x dans G et h dans H et on appelle $d\lambda$ la mesure $\rho(x)dx/dh$ sur H. Lorsque φ est dans $\mathcal{C}_c^\infty(G)$, l'opérateur $\pi(\varphi)$ est défini par le "noyau"

$$A_\varphi(x,y) = \int_H \varphi(xhy^{-1})\ (\rho(x)\rho(yh))^{-\frac{1}{2}}\ |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(y)|\ \omega(h)\ dh\ .$$

Fixons maintenant un x dans G et considérons l'application $\varphi \longmapsto A_\varphi(x,x)$. C'est une distribution T_x sur G, et on a :

$$\langle u * T_x, \varphi\rangle = \frac{|\det \mathrm{Ad}(x)|}{\rho(x)} \int_H (\check{u} * \varphi)(xyx^{-1})\ |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(y)|^{-\frac{1}{2}}\ \omega(y)\ dy\ .$$

On a $\check{u} * \varphi(xyx^{-1}) = v * \Phi(y)$ avec $v = \varepsilon_{x^{-1}} * \check{u} * \varepsilon_x$ et $\Phi = \varepsilon_{x^{-1}} * \varphi * \varepsilon_x$ (ε_z est la mesure de Dirac portée par le point z). Supposons maintenant que v soit dans l'idéal à <u>droite</u> $\mathfrak{b}$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)$ engendré par les éléments de la forme :

$$Y + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}\, Y) - i\langle \ell, Y\rangle$$

Y parcourant $\mathfrak{h}$. On a alors :

$$\int_H v * \Phi(y)\ |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(y)|^{-\frac{1}{2}}\ \omega(y)\ dy = 0$$

pour toute Φ dans $\mathcal{C}_c^\infty(G)$. Soit maintenant $\mathfrak{a}$ <u>le plus grand idéal bilatère de</u> $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)$ contenu dans l'idéal à <u>gauche</u> $\check{\mathfrak{b}}$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)$ engendré par les éléments de la forme :

$$Y - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}\, Y) + i\langle \ell, Y\rangle$$

(Y parcourant $\mathfrak{h}$). Si u est dans $\mathfrak{a}$, alors $\varepsilon_{x^{-1}} * \check{u} * \varepsilon_x$ est dans $\mathfrak{b}$ et ce pour tout x dans G, et par conséquent, on a : $u * T_x = 0$. (Remarquez que si π admet un caractère distribution T_π, on a aussi $u * T_\pi = 0$ sous les mêmes hypothèses, car on a $T_\pi = \int_{G/H} T_x\, d\lambda(\dot{x})$ ([7], V.3.1).) Pour finir, il faut dire que si ℓ est <u>régulière</u>, alors $\mathfrak{a}$ n'est autre que l'idéal primitif $I(-i\ell)$ de DUFLO.

5.3. PROPOSITION.- On suppose que G est localement isomorphe au groupe des points réels d'un groupe algébrique réel. Soit Ω une orbite tempérée, de dimension maximale, de G dans $\mathfrak{g}^*$. Soit ℓ dans Ω. On suppose qu'il existe une polarisation résoluble en ℓ, vérifiant la condition de PUKANSZKY. Alors on a $u * T_\Omega = 0$ pour tout u dans $I(-i\ell)$.

5.4. <u>Esquisse de la démonstration</u>. L'hypothèse portant sur l'existence d'une polarisation... dit qu'il existe une sous-algèbre résoluble $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telle que la restriction de ℓ à $\mathfrak{h}$ soit une représentation (de dimension 1) de $\mathfrak{h}$ et telle que l'orbite de ℓ sous l'action du sous-groupe connexe H_o de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ soit l'espace affine $\ell + \mathfrak{h}^{\perp}$. Supposons pour raccourcir que le stabilisateur $G(\ell)$ de ℓ normalise $\mathfrak{h}$. Alors le sous-groupe $H = G(\ell)H_o$ est fermé et $H.\ell = \ell + \mathfrak{h}^{\perp}$. La considération du triplet $G(\ell) \subset H \subset G$ permet de montrer par des arguments classiques ([7], II.3) le résultat suivant : on choisit une mesure quasi-invariante $d\lambda$ sur G/H comme plus haut. Soient φ dans $\mathcal{C}_c^{\infty}(\mathcal{W})$ et ψ dans $\mathcal{C}_c^{\infty}(\mathcal{V})$ telle que $\psi = j\varphi \circ \mathrm{Exp}$. On a alors

$$\langle T_{\Omega}, \varphi\rangle = \int d\lambda(\dot{x}) \int_{\mathfrak{h}^{\perp}} (\mathcal{F}\psi)\ (x.(\ell + \ell'))d\ell'$$

où $\mathfrak{h}^{\perp}$ est l'orthogonal de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}^*$ et $d\ell'$ est une mesure de Lebesgue bien déterminée sur $\mathfrak{h}^{\perp}$. Bien entendu, l'intégrale sur $\mathfrak{h}^{\perp}$ se transforme aussitôt en une intégrale sur $\mathfrak{h}$:

$$\langle T_{\Omega}, \varphi\rangle = \int |\det \mathrm{Ad}(x)|\ d\lambda(\dot{x}) \int_{\mathfrak{h}} j(Y)\ \varphi \circ \mathrm{Exp}(\mathrm{Ad}(x)Y)\ e^{i\langle \ell, Y\rangle}\ dY$$

où dY est une mesure de Lebesgue bien déterminée de $\mathfrak{h}$. La ressemblance entre cette formule et celle donnant $\langle T_{\pi}, \varphi\rangle$ (5.2) n'est pas fortuite. En tout cas, DUFLO montre en utilisant des arguments de groupes algébriques que le changement de variables $Y \longmapsto \mathrm{Exp}(Y)$ transforme l'intégrale sur $\mathfrak{h}$ en l'intégrale

$$\int_H \varphi(xyx^{-1})\ |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(y)|^{-\frac{1}{2}}\ \omega(y)\ dy$$

où la fonction ω est définie dans $\mathrm{Exp}(\mathcal{V} \cap \mathfrak{h})$ par la formule $\omega(\exp Y) = e^{i\langle \ell, Y\rangle}$. Une fois ceci acquis, le paragraphe précédent montre que $u * T_{\Omega} = 0$ si u est dans l'idéal $I(-i\ell)$.

5.5. On peut se demander si dans l'énoncé du théorème C on peut supprimer l'une des deux qualifications "fermée", "de dimension maximale". Une autre question est la suivante : quel est l'annulateur de la distribution T_{Ω} dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)$ (on sait qu'il contient l'idéal $I(-i\ell)$) ?

6. Conclusion - Résumé

On a rendu plausibles les théorèmes A et B lorsque $\mathfrak{g}$ est convenable. Pour passer au cas général, Duflo se livre à une gymnastique qui s'était déjà révélée indispensable dans le cas résoluble ([11]). Très rapidement, on peut dire ce qui suit :

a) Passage d'une algèbre de Lie (quelconque) à une algèbre de Lie convenable : soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie (réelle). On en prend d'abord l'enveloppe algébrique $\mathfrak{g}'$. Puis dans $\mathfrak{g}'$, on prend l'intersection $\mathfrak{g}''$ des noyaux des poids des semi-invariants de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g}')$. Alors $\mathfrak{g}''$ est convenable.

b) On sait donc que les théorèmes A et B sont vrais pour $\mathfrak{g}''$. Soit u dans $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}'_{\mathbf{C}})$. En fait, la distribution u est l'extension à G' d'une distribution u_o sur G" (qui est une sous-variété fermée de G') et on peut en dire autant de u^s relativement à u_o^s . On ramène ainsi les questions posées sur G' au niveau de G" . On passe ensuite de G à G' par des raisonnements de même nature.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. ROUVIÈRE - Sur la résolubilité locale des opérateurs bi-invariants, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Serie IV, vol. III, (1976), 231-244.

[2] A. CEREZO et F. ROUVIÈRE - Résolubilité locale d'un opérateur différentiel invariant du premier ordre, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 4, (1971), 21-30.

[3] M. DUFLO - Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie, à paraître.

[4] S. HELGASON - Solvability of invariant differential operators on homogeneous manifolds, In Differential operators on manifolds, C.I.M.E. 1975, ed. Cremoneze, Rome.

[5] M.F. ATIYAH - Resolution of singularities and division of distributions, Comm. Pure Appl. Math., 23(1970), 145-150.

[6] M. RAÏS - Solutions élémentaires des opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie nilpotent, C.R.A.S. Paris, 273(1971), 495-498.

[7] P. BERNAT et coll. - Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, Paris, 1972.

[8] A.A. KIRILLOV - Unitary representations of nilpotent Lie groups, Russ. Math. Surveys, vol. 17(1962), 53-104.

[9] J. DIXMIER - Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[10] M. DUFLO - Construction of primitive ideals in an enveloping algebra, in "Lie groups and their representations", Adam Hilger Ltd, Londres, 1975.

[11] M. DUFLO et M. RAÏS - Sur l'analyse harmonique sur les groupes de Lie résolubles, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., t. 9(1976), 107-144.

[12] HARISH-CHANDRA - Invariant eigendistributions on a semi-simple Lie group, Trans. Amer. Math. Soc., 119(1965), 457-508.

[13] L. SCHWARTZ - Théorie des Distributions, Hermann, 1966.

[14] L. PUKANSZKY - Characters of algebraic solvable groups, J. of Functional Analysis, vol. 3, (1969), 435-494.

[15] R. RANGARAO - Orbital integrals in reductive groups, Annals of Math., Second Series, vol. 96, (1972), 505-510.

[16] J. DIXMIER, M. DUFLO et M. VERGNE - Sur la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie, Compos. Mathematica, 29(1974), 309-323.

[17] A.A. KIRILLOV - The characters of unitary representations of Lie groups, Func. Analysis and Appl., 2(1968), 40-55, et 3(1969), 36-47.