HAROLD ROSENBERG

Les difféomorphismes du cercle

Séminaire N. Bourbaki, 1977, exp. nº 476, p. 81-98
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1975-1976__18__81_0>

LES DIFFÉOMORPHISMES DU CERCLE

[d'après M. R. HERMAN]

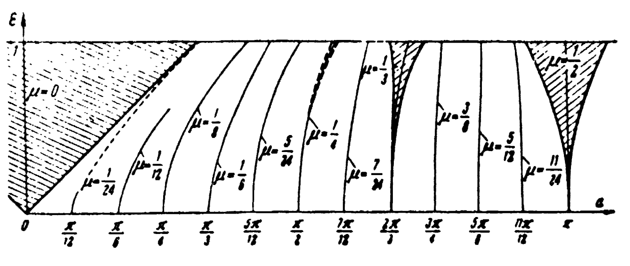
par Harold ROSENBERG

Introduction

Nous considérons le groupe $G(r)$ des C^r difféomorphismes du cercle T qui conservent l'orientation ; $0 \leq r \leq \infty$. Ce groupe, muni de la C^r topologie, est un espace métrique complet. Du point de vue topologique, Arnold (et Peixoto) [1], [7], ont démontré que les difféormorphismes qui sont C^1 structurellement stables sont un ouvert dense dans $G(r)$, qui admet une classification simple par leur nombre de rotation (qui est rationnel) et un nombre fini de points périodiques hyperboliques. Mais cet ouvert dense est petit du point de vue de la mesure. Si on se place en une rotation irrationnelle R_α , la "probabilité" qu'un point voisin soit de nombre de rotation irrationnel est très voisine de 1 . Les ouverts de nombre de rotations rationnel ont une frontière avec un cusp dont les branches sont très proches en R_α . Par exemple, la famille à deux paramètres dans $G(\infty)$:

$$f_{a,\varepsilon}(x) = x + \varepsilon \cos x + a .$$

Je reproduis ici, la figure d'Arnold qui montre les régions de nombre de rotation ρ = constant par rapport à a et ε . On "voit" que quand $\varepsilon \to 0$, la mesure $\{a/ \rho(f_{a,\varepsilon}) \in R - Q\}$ tend vers 1 .



Arnold a démontré :

THÉORÈME.- Soit $f_{a,b} : z \to z + a + F(z,b)$ une famille de transformations, holomorphe dans $|\mathrm{Im}\, z| < K$, $|b| < b_0$, et $F(z,b)$ de période 1 en z , F réelle sur

R et $|F(z,b)| < L|b|$. Alors

$$\lim_{b\to 0} \frac{\text{mes } E_b}{|b|} = 1 ,$$

où $E_b = \{(u,v) \in [0,1]\times[0,b] \mid f_{u,v}$ est analytiquement conjugué à une rotation irrationnelle$\}$.

Arnold décrit aussi plusieurs exemples dans la nature où les rotations irrationnelles sont fréquentes : relaxation des oscillations, le problème de Dirichlet pour l'équation d'une corde, les systèmes hamiltoniens.

Considérons un difféomorphisme f de T conjugué à une rotation irrationnelle R_α : $f = g^{-1}R_\alpha g$. La conjugaison g est l'intégrale d'une mesure de probabilité μ invariante par f . Donc l'étude de la mesure μ donnera les renseignements sur g . Le théorème de Denjoy [2] dit que si f est de classe C^2 et $\rho(f) \in R - Q$, alors il existe un homéomorphisme g de T tel que $f = g^{-1}R_\alpha g$, $\alpha = \rho(f)$. Arnold était le premier à montrer que g n'est pas forcément C^1 . Voici l'idée. Un difféomorphisme avec un nombre fini de points périodiques laisse invariant une mesure qui est singulière, la masse est concentrée en les points périodiques. Soit α un nombre de Liouville, c'est-à-dire un nombre irrationnel très bien approché par les rationnels. On construit une suite de difféomorphismes f_i qui convergent vers f , $\rho(f_i) = \frac{p_i}{q_i}$, $|\alpha - \frac{p_i}{q_i}| < \frac{1}{q^i}$, $\rho(f) = \alpha$, et la nature singulière des mesures invariantes par f_i persiste dans la mesure invariante par f ; bien que cette mesure soit sans masse atomique. Herman a généralisé et simplifié cet exemple d'Arnold. Nous décrirons cela dans le numéro 4.

Arnold a démontré que si α est un nombre diophantien (loin des rationnels) et si f est un difféomorphisme analytique, proche de R_α , et $\rho(f) = \alpha$, alors f est analytiquement conjugué à R_α . Ce théorème a été généralisé par Moser et Herman [6], [4].

THÉORÈME.- Il existe $A \subset [0,1] - Q$, de mesure 1 ; si $\alpha \in A$, il existe un voisinage V_α de R_α dans la C^3 topologie, tel que si $f \in G(r)$, $r \geq 3$, $f \in V_\alpha$ et $\rho(f) = \alpha$, alors f est C^{r-2} conjugué à R_α . De plus, si $f \in V_\alpha \cap G(\infty)$, $\rho(f) = \alpha$, alors f est C^∞ conjugué à R_α . Il en est de même pour $G(\omega)$. (Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $A = \{\alpha \mid$ il existe c tel que pour tout $\frac{p}{q}$, $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^{2+\varepsilon}}$.)

Les nombres diophantiens sont de mesure 1 dans $[0,1]$ et ils sont maigres. Les Liouvilles sont de mesure zéro et résiduels. Arnold a conjecturé :

<u>Il y a un ensemble</u> A <u>de mesure</u> 1 <u>dans</u> $[0,1]-Q$, <u>tel que si</u> $f \in G(\omega)$, $\rho(f) \in A$, <u>alors</u> f <u>est analytiquement conjugué à une rotation</u>.

Cette conjecture n'est pas résolue (que je sache). Herman a démontré qu'il suffit d'obtenir une conjugaison dans $C^{1+\varepsilon}$ pour presque tout nombre de rotation.

THÉORÈME.- Soit $A = \{\alpha \in [0,1] \mid$ il existe $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{C}{q^{2+\varepsilon}}$ pour tout $\frac{p}{q} \in Q\}$. Alors si $f \in G(\infty)$, $\rho(f) = \alpha$ et $\rho(f) \in A$, S'il existe $\varepsilon' > 2\varepsilon$ tel que f est $C^{1+\varepsilon'}$ conjugué à R_α , alors f est C^∞ conjugué à R_α . (Remarquons que mesure$(A) = 1$.)

Herman a introduit des invariants K_r et H_r dans $G(r)$ qui donnent beaucoup de renseignements. Voici un exemple. Soit $O_\alpha^r = \{g^{-1}R_\alpha g \mid g \in G(r)\}$ et soit $O^\infty = \bigcup_\infty O_\alpha^\infty$. Soit $\overline{O^\infty}$ la fermeture de O^∞ dans $G(\infty)$ pour la C^∞ topologie.

THÉORÈME.- Les deux propriétés suivantes sont génériques dans $\overline{O^\infty}$:

1) f est C^0 conjugué à une rotation irrationnelle, soit $f = g^{-1}R_\alpha g$; on a presque partout $Dg = Dg^{-1} = 0$;

2) le centralisateur C^∞ de f a la puissance du continu.

Il y a une multitude de résultats intéressants dans le papier de Herman [4]. J'en ai choisis quelques uns pour les exposer ici ; j'espère que je lui rends justice.

Voici l'organisation du papier :

1. Préliminaires : nombres de rotations et critères de conjugaison
2. Les invariants K_r et H_r
3. Les centralisateurs
4. Les exemples d'Arnold et Herman : la mesure singulière
5. La catégorie de O_α^r : des voisinages de R_α .

1. Préliminaires

Nous noterons $D^r(T)$ le groupe des C^r difféomorphismes de R qui s'écrivent $f(x) = x + \varphi(x)$ avec φ une fonction Z périodique ; c'est le revêtement universel de $G(r)$ avec la topologie C^r. Quand on veut distinguer entre f et sa projection dans $G(r)$, nous noterons $\bar{f}$ la projection.

1.1 Nombre de rotation. Soit $f \in D^o(T)$ et soit μ une mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$. Alors le nombre de rotation de f :

$$\rho(f) = \mu(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{f^n(x) - x}{n} \right) \qquad \text{pour tout } x \in R .$$

Naturellement $f = \mathrm{Id} + \varphi$, on peut voir la convergence de $\dfrac{f^n - \mathrm{Id}}{n}$ vers $\mu(\varphi)$ de la façon suivante :

$$f^n(x) - x = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) ,$$

d'où $\mu(f^n - \mathrm{Id}) = n\mu(\varphi)$ car $\mu(\varphi \circ f) = \mu(\varphi)$.

Alors $|\psi(x)| = |f^n(x) - x - n\mu(\varphi)| \leq 1$ parce que ψ s'annule en au moins un point et $\max \psi - \min \psi \leq 1$.

Maintenant si $\bar{f} \in G(0)$, on choisit un relèvement $f \in D^o(T)$ et on définit $\rho(f) = \rho(\bar{f})$ mod. 1 . C'est clair que pour $n \in Z$, $\rho(f + n) = \rho(f) + n$, donc $\rho(\bar{f})$ est défini mod. 1 c'est-à-dire $\rho : D^r(T) \to R$ et $\rho : G(r) \to T$. Il y aura peu de chance de confusion si on appelle les deux applications ρ .

1.2 Quelques propriétés de ρ

1) La fonction $\rho : D^o(T) \to R$ est continue ; et ρ est un invariant de C^o conjugaison.

2) $\rho(R_\lambda) = \lambda$.

3) Si f, $g \in G(0)$ et $fg = gf$, alors

$$\rho(fg) = \rho(f) + \rho(g) .$$

Pour voir 3) facilement, on le démontre d'abord pour les éléments commutants de $D^o(T)$ et ensuite, on démontre que les relèvements à $D^o(T)$ des éléments commutants de $G(0)$ sont commutants.

4) (Arnold [1]) Si $f \in D^0(T)$, la fonction $\lambda \mapsto \rho(R_\lambda f)$ est continue croissante surjective, et si $\rho(f) \in R - Q$, alors $\rho(R_\lambda f) = \rho(f)$ entraîne $\lambda = 0$.

5) Si $f \in G(0)$, alors $\rho(f) = \frac{p}{q}$ si et seulement si f^q a un point fixe. Donc $\rho(f)$ est irrationnel, est équivalent à f , est sans points périodiques.

6) Si $\alpha \in R - Q$ et $g_1^{-1} R_\alpha g_1 = g_2^{-1} R_\alpha g_2$, alors $g_1 = R_c g_2$ pour $c \in R$. Donc la classe de différentiabilité de la conjugaison avec une rotation irrationnelle est bien définie. 6) résulte du fait qu'un homéomorphisme de T qui commute avec R_α , $\alpha \notin Q$, est aussi une rotation.

1.3 <u>Critères de conjugaison</u>. Il y a plusieurs critères de mesure et de géométrie pour que f soit C^0 conjugué à une rotation. Nous décrirons ceux utilisés (et introduits) par Herman. Nous notons $F_\alpha^r = \rho^{-1}(\alpha) \cap G(r)$, $0_\alpha^r = \{g^{-1} R_\alpha g \mid g \in G(r)\}$, et $0_\alpha^{r,k} = 0_\alpha^k \cap G(r)$ pour $k \leq r$.

Soient $f \in D^r(T)$ et $\rho(f) = \alpha \in R - Q$. C'est bien connu que $\bar{f}$ est uniquement ergodique (Fürstenberg [3]), donc qu'il y a une unique mesure de probabilité μ invariante par $\bar{f}$. La mesure μ est sans masse atomique car il n'y a pas de point périodique. Soit $g : R \to R$; on pose :

$$g(x) = \int_0^x \mu \qquad \text{pour } 0 \leq x \leq 1 ,$$

et $g(x + n) = g(x) + n$. Alors g est continue, croissante, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, et g est strictement croissante si et seulement si $\mathrm{supp}(\mu) = T$. On a

$$g(f(x)) - g(f(0)) = g(x) - g(0) \qquad \text{car } f_*(\mu) = \mu .$$

Donc $g \circ f = R_c . g$ où $c = g(f(0)) - g(0) = \rho(f)$. Alors :

1.3.1 f est C^0 conjugué à R_α , $\alpha \in R - Q$, si et seulement si le support de la mesure invariante par f est T .

On sait que quand $\rho(f) = \alpha \in R - Q$, f a un ensemble minimal M unique, et $M = T$ où M est un Cantor. Si $M = T$, $f \in 0_\alpha^0$. On voit facilement que $M = \mathrm{supp}(\mu)$.

Supposons que M soit un Cantor. Soient I_n les intervalles ouverts dans $T - M$; f opère librement sur les I_n car il n'y a pas de point périodique. Les longueurs des I_n tendent vers zéro car ils sont tous disjoints. On a

$f^n(f^{-n}(I_i)) = I_i$, donc il existe une suite $n_j \to \infty$ et des intervalles E_j de longueur tendant vers zéro tels que $f^{n_j}(E_j)$ ait une longueur fixée. Cela donne le critère

1.3.2 Soient $f \in D^0(T)$, $\rho(f) = \alpha \in R - Q$, et supposons qu'il existe une suite $n_j \to \infty$ telle que $\{f^{n_j}\}$ soit équicontinue. Alors $f \in O^0_\alpha$.

Finalement, quand $\alpha \in Q$, $\alpha = \frac{p}{q}$, nous avons besoin de

1.3.3 Si $\rho(f) = \frac{p}{q}$, $f \in D^r(T)$ et $f^q = R_p$, alors f est C^r conjugué à $R_{\frac{p}{q}}$.

<u>Démonstration</u>. Soit $g = \sum_{i=1}^{q} \frac{f^i - i\alpha}{q}$. Alors g est strictement croissante et si $r \geq 1$, $Dg = \Sigma \frac{Df^i}{q} > 0$. On a aussi

$$g \circ f = R_{\frac{p}{q}} \circ g .$$

2. <u>Les invariants</u> K_r <u>et</u> H_r

Soit $f \in G(r)$, Herman définit

$$K_r(f) = \inf_{n \geq 1} d_r(f^n, Id) ,$$

où d_r est une métrique qui définit la C^r topologie sur $G(r)$. Si $f \in O^r_\alpha$, $f = g^{-1}R_\alpha g$, soit n_i une suite d'entiers tels que $n_i\alpha \to 0 \pmod{1}$. Alors $f^{n_i} = g^{-1}R_{n_i\alpha}g$ converge vers Id dans la topologie C^r . Donc $K_r(f) = 0$. Pour $r = 0$, Herman a démontré la réciproque :

THÉORÈME 2.1.- <u>Pour</u> $f \in G(0)$, <u>on a</u> $K_0(f) = 0$ <u>si et seulement si</u> $f \in O^0$.

<u>Démonstration</u>. Considérons d'abord le cas $\rho(f) = \frac{p}{q}$. Par 1.3.3, il suffit de voir que $f^q = Id$ si $K_0(f) = 0$. Supposons, au contraire, que $f^q \neq Id$. Soit n_i une suite tendant vers ∞ telle que $d_0(f^{n_i}, Id) \to 0$. Ecrivons $n_i = k_i q + r_i$ avec $0 \leq r_i < q$ et $k_i \to \infty$. Les points $x_0 , f(x_0), \dots, f^{q-1}(x_0)$ sont tous distincts ; x_0 est un point fixe de f^q . Soit c la plus petite dis-

tance entre x_o et $f^i(x_o)$ pour $1 \leq i \leq q-1$. Alors

$$d_o(f^{n_i}, \mathrm{Id}) \geq \| f^{r_i}(x_o) - x_o \| \geq c > 0 ,$$

sauf si $r_i = 0$. Mais $f^{n_i} \to \mathrm{Id}$, donc $r_i = 0$ pour tout i . Maintenant, choisissons un segment $[a,b]$ sur T (avec $a = b$ éventuellement) tel que $f^q(a) = a$, $f^q(b) = b$ et $f^q(x) \neq x$ pour $a < x < b$. Toutes les itérées d'un point f dans $]a,b[$ par f^q tendent vers a ou vers b. Donc c'est impossible que $f^{k_i q}$ tende vers Id .

Maintenant supposons que $\rho(f) = \alpha \in R - Q$. Si $K_o(f) = 0$, il existe une suite n_j telle que $f^{n_j} \to \mathrm{Id}$. Donc la famille $\{f^{n_j}\}$ est équicontinue et par 1.3.2, $f \in O^o_\alpha$.

Comme première application de $K_o(f)$, nous démontrons que c'est générique dans F^o_α , $\alpha \in R - Q$, d'être conjugué à R_α .

THÉORÈME 2.2.- Soit $\alpha \in R - Q$; O^o_α est résiduel dans F^o_α ; $O^{1,0}_\alpha$ est résiduel dans F^1_α pour la C^1 topologie. (Donc l'exemple de Denjoy d'un difféomorphisme f C^1 , $\rho(f) = \alpha$, et f pas C^0 conjugué à R_α , est un phénomène maigre dans F^1_ρ .)

Démonstration. Pour chaque $f \in G(0)$, il existe un unique $\alpha(f) \in R$ tel que $\rho(R_{\alpha(f)} \circ f) = \alpha$, par 1.2.4. Ceci entraîne que F^k_α est dense dans F^r_α pour tout $k \geq r$, car si $g \in F^r_\alpha$, on approche g dans la C^r topologie par $f \in G(k)$. Puis $R_{\alpha(f)} \circ f \in F^r_\alpha$ et quand $f \to g$, $\alpha(f) \to 0$ et $R_{\alpha(f)} \circ f \to g$. Donc F^2_α est dense dans F^o_α et par le théorème de Denjoy [2] et théorème 2.1, nous avons $K_o^{-1}(0) \cap F^o_\alpha$ dense dans F^o_α .

Maintenant K_r est une fonction semi-continue supérieurement, donc $K_o^{-1}[0, \frac{1}{n}[= U_n$ est un ouvert. Alors $U_n \cap F^o_\alpha$ est dense dans F^o_α et $O^o_\alpha = K_o^{-1}(0) \cap F^o_\alpha = (\bigcap_{n \geq 1} U_n) \cap F^o_\alpha$ est résiduel.

Le même raisonnement marche pour montrer que $O^{1,0}_\alpha$ est résiduel dans F^1_α .

Pour indiquer la complexité des espaces, j'annonce un théorème de Herman sans démonstration. Le point de départ est l'exemple de Denjoy et nous allons faire des constructions analogues pour C^r .

THÉORÈME 2.3.- Pour $\alpha \in R - Q$, $F^o_\alpha - O^o_\alpha$ est dense dans F^o_α , et $F^1_\alpha - O^{1,0}_\alpha$ est dense dans F^1_α (dense dans la C^o topologie) .

Avant de donner des applications de K_r aux centralisateurs, nous introduisons le H_r .

<u>L'invariant</u> H_r . Soit $g : R \to R$ une fonction Z périodique et soit $|g|_o = \sup_{x \in R} |g(x)|$. Pour $f \in D^r(T)$, $1 \leq r < \infty$, nous posons

$$|Df|_{r-1} = |Df|_o + |D^2f|_o + \ldots + |D^rf|_o \ .$$

Alors, Herman a défini

$$H_r(f) = \sup_{n \in Z} |Df^n|_{r-1} \ .$$

Si $m \in Z$, $D((R_m \circ f)^n) = D(f^n)$ donc H_r est défini sur $G(r)$; H_r prend ses valeurs dans $R^+ \cup \infty$ et est semi-continu inférieurement. Dire que $H_1(f)$ est fini veut dire que les dérivées n-ièmes des itérées de f sont bornées.

Si $f = g^{-1}R_\alpha g$ avec $g \in D^r(T)$, alors $t \longmapsto D(g^{-1}R_+g)$ est une application continue et Z périodique, donc $\sup_{n \in Z} |Df^n|_k < \infty$ pour tout $k < r$. Donc si f est C^r conjugué à R_α , $H_r(f) < \infty$. Herman a démontré la réciproque.

THÉORÈME 2.4.- Soient $f \in D^r(T)$, $1 \leq r < \infty$, et $f \in G(r)$, $\alpha = \rho(f)$. Alors $f \in O^r_\alpha$ si et seulement si $H_r(f) < \infty$. Si $\ell = H_r(f) < \infty$ et $f = g^{-1}R_\alpha g$, alors

$$|Dg|_{r-1} + |Dg^{-1}|_o \leq (r+1)\ell \ .$$

Si $r = \infty$, $f \in O^\infty_\alpha$ si et seulement si $H_r(f) < \infty$ pour tout r fini.

<u>Démonstration</u>. Considérons d'abord le cas $\rho(f) = \frac{p}{q}$. Nous savons déjà que si $f^q = R_p$ alors $f \in O^r_{\frac{p}{q}}$; donc il suffit de démontrer que $f^q \neq R_p$ entraîne $\sup_n |Df^n|_o = \infty$. Soient $a , b \in R$, $a < b$, avec $f^q(a) = a$, $f^q(b) = b$ et f^q sans point fixe sur $]a,b[$. On peut supposer que f^q est croissante sur $]a,b[$. Soit $M > 0$ et choisissons $c \in]a,b[$ tel que $\frac{b-a}{2(c-a)} \geq M$. Il existe

n_o tel que $f^{n_o q}(c) \geq \frac{b-a}{2}$, donc pour $n \geq n_o$, $f^{nq}(c) \geq \frac{b-a}{2}$. Alors $|Df^{nq}|_o \geq M$ pour $n \geq n_o$ et $\sup_n |Df^n|_o = \infty$. Pour α irrationnel, nous allons démontrer le théorème pour $r = 1$ seulement ; le cas général est plus difficile et nous renvoyons le lecteur à [4]. D'abord nous avons besoin d'un théorème de Gottschalk-Hedlund [9].

THÉORÈME 2.5.- Soient X un espace métrique compact et f un homéomorphisme minimal de X . Soit $h \in C(X)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) il existe $\varphi \in C(X)$ tel que $\varphi \circ f - \varphi = h$;
2) il existe $x_o \in X$ tel que
$$\sup_{n \in N} \left|\sum_{i=0}^{n} h\, f^i(x_o)\right| < \infty \ .$$

Démonstration. C'est clair que 1) implique 2), car
$$\sum_{i=0}^{n-1} h\, f^i(x_o) = \varphi(f^n(x_o)) - \varphi(x_o)$$
et φ est bornée sur X . Démontrons que 2) entraîne 1). Soient $F : X \times R \to X \times R$, $F(x,t) = (f(x)\, ,\, t + h(x))$. Alors F est un homéomorphisme et
$$F^n(x_o\, ,\, 0) = (f^n(x_o)\, ,\, \sum_{i=0}^{n-1} h\, f^i(x_o)) \ .$$
Par 2), la fermeture de $\{F^n(x_o\, ,\, 0) \mid n \in N\}$ est compacte, donc contient un ensemble minimal M de F . Soit $p : X \times R \to X$ la projection ; alors $p(M) = X$ puisque f est minimal. Il est facile de voir que M est le graphe d'une fonction $\varphi : X \to R$ et que $\varphi \circ f - \varphi = h$.

Retournons maintenant à l'invariant $H_1(f)$. Soient $f \in D^1(T)$, $\rho(f) = \alpha \in R - Q$ et $H_1(f) < \infty$.

Nous démontrons que f est C^1 conjugué à R_α . Nous avons
$$|Df^n|_o \leq K \quad \text{donc} \quad \inf_n(\min Df^n) \geq \frac{1}{K} > 0 \ .$$
Alors $\sup_n |\mathrm{Log}\, Df^n| < \infty$, donc
$$\sup_n \left|\sum_{i=0}^{n} \mathrm{Log}\, Df(f^i(x))\right| < \infty \ .$$
Par le théorème 2.5 et par 1.3.2, $\bar{f}$ est bien minimal, il existe $\varphi \in C^0(T)$ tel que $\varphi \circ f - \varphi = -\mathrm{Log}\, Df$. Posons

$$h(x) = \int_0^x e^{\varphi(x)+c}\,dx$$

où c est choisi tel que $h(1) = 1$. On a $h \in D^1(T)$ et

$$\operatorname{Log} Dh \circ f + \operatorname{Log} Df = \operatorname{Log} Dh$$

$$D(h \circ f) = Dh \quad ,$$

soit $h \circ f = R_\alpha \circ h$. Alors $f \in O^1_\alpha$.

3. Les centralisateurs

Quiconque a considéré les difféomorphismes qui commutent a du respect pour le problème. On comprend très peu des actions de $Z + Z$ sur les espaces. Herman, en utilisant l'invariant K_r , obtient des théorèmes d'existence remarquables.

THÉORÈME 3.- 1) Si $f \in D^r(T)$, $1 \leq r \leq \infty$, et $K_r(f) = 0$ avec $\rho(f) \in R - Q$, alors $\mathrm{Cent}^r(f)$ a la puissance du continu.

2) C'est générique dans $\overline{O^r}$ d'avoir un centralisateur qui a la puissance du continu.

Remarques.- 1) On sait que c'est générique dans $\overline{O^r}$ d'être C^0 conjugué à une rotation et pas C^1 conjugué à la rotation. Donc ces C^r difféomorphismes avec de grands centralisateurs ne sont pas sur les groupes à un paramètre C^r .

2) L'invariant K_r peut se définir sur une variété quelconque de la même façon . Dans la démonstration de 3.1), on démontre en fait : si $f \in \mathrm{Diff}^r(V)$ et f n'est pas périodique, $K_r(f) = 0$, alors $\mathrm{Cent}^r(f)$ a la puissance du continu.

Démonstration du théorème 3. Soit $Z_f = \{f^n \mid n \in Z\}$. La fermeture de Z_f dans $D^r(T)$, $= \overline{Z_f}$ est un sous-groupe abélien. Si $f \in D^r(T)$ et si f n'est pas périodique, la condition $K_r(f) = 0$ veut dire que $\mathrm{Id} \in \overline{Z_f}$ n'est pas un point isolé, c'est-à-dire, il existe $n_i \to \infty$, tel que $f^{n_i} \to \mathrm{Id}$ dans la topologie C^r , et c'est une suite dénombrable $\{f^{n_i}\}$. Or, si Id n'est pas isolé, aucun point n'est isolé et $\overline{Z_f}$ est un espace parfait. Donc $\overline{Z_f}$ a la puissance du continu et $\overline{Z_f} \subset \mathrm{Cent}^r(f)$ donc 3.1) est démontrée.

Considérons maintenant $\overline{O^r}$. Nous avons $K_r^{-1}(0) \cap \overline{O^r} = \bigcap_n U_n$, $U_n = K_r^{-1}[0,\frac{1}{n}[\cap \overline{O^r}$. Alors U_n est ouvert dans $\overline{O^r}$ par la semi-continuité de K_r .

Si $f \in O^r$, on sait que $K_r(f) = 0$ donc $O^r \subset U_n$ et U_n est dense dans $\overline{O^r}$.
Ceci démontre 3.2).

Problème.- Est-ce que $\overline{Z_f} = \mathrm{Cent}^r(f)$?

Dans un certain sens, $\mathrm{Cent}^r(f)$ est comme un Cantor quand $f \notin O^r$. Plus exactement :

THÉORÈME 3.3.- Si $1 \leq r \leq \infty$ et $f \in D^r(T)$, $\rho(f) \in R - Q$, $f \notin O^r$, $K_r(f) = 0$, alors $\rho(\mathrm{Cent}^r(f))$ est un sous-groupe borélien de T de mesure de Haar zéro.

Démonstration. L'homomorphisme $\rho : \mathrm{Cent}^r(f) \to T$ est continu. Il est injectif parce que f est C^0 conjugué à une rotation irrationnelle. Par un théorème de L. Schwartz [8], $\rho(\mathrm{Cent}^r(f))$ est un sous-groupe borélien de T . Il est facile de voir qu'un sous-groupe mesurable de T , de mesure positive, est égal à T , donc il suffit de démontrer que $\rho(\mathrm{Cent}^r(f)) \neq T$.

Supposons, au contraire, que $\rho(\mathrm{Cent}^r(f)) = T$. Alors T est un sous-groupe compact de $D^r(T)$ dans la topologie C^0 . Par le théorème de Montgomery-Zippin [5] (ρ est un C^0-isomorphisme) $\mathrm{Cent}^r(f)$ est aussi un sous-groupe compact de $D^r(T)$ dans la C^r topologie. Mais ceci entraîne que $H_r(f) < \infty$ donc que f est C^r conjugué à une rotation, contraire aux hypothèses. [On voit facilement que $\mathrm{Cent}^r(f)$ est aussi totalement discontinu.]

4. Les exemples d'Arnold et de Herman

Considérons la famille dans $D^\omega(T)$:

$$f_b(x) = x + a\sin(2\pi x) + b$$

avec $0 < a < \frac{1}{2\pi}$ et $0 \leq b \leq 1$. Soient $h(b) = \rho(f_b)$ et $K_a = [0,1] - \mathrm{Int}(h^{-1}Q)$.
Nous verrons que K_a est un Cantor dans $[0,1]$. Herman a démontré :

THÉORÈME 4.- C'est générique dans K_a que f_b soit C^0 conjugué à une rotation irrationnelle mais pas C^1 conjugué. Génériquement, la conjugaison g n'est même pas absolument continue (c'est-à-dire, il existe un ensemble borélien A , $\mathrm{mes}(A) = 0$, et $\mathrm{mes}(h(A)) > 0$).

Nous avons besoin du

Lemme 4.1.- Soit $f(x) = x + \varphi(x) \in D^{\omega}(T)$ et on suppose que φ se prolonge en une fonction holomorphe de $\mathbf{C}$. Alors si $f^q = R_p$ pour $p , q \in Z$, on a φ = constante.

Démonstration. Soient $\bar{f}$ et $\bar{\varphi}$ les prolongements holomorphes de f et φ . Supposons que $f^q = R_p$. Alors $\bar{f}^q = R_p$ donc

$$(R_{-p}\bar{f}^{q-1})\bar{f} = Id \quad \text{sur } \mathbf{C} .$$

Donc $\bar{f}$ est un automorphisme biholomorphe de $\mathbf{C}$, d'où $\bar{f}(z) = \alpha z + \gamma$ avec $\alpha \in \mathbf{C}^*$. Mais $f(x) = x + \varphi(x)$, donc $\alpha = 1$ et φ est constante.

Maintenant, nous démontrons que génériquement, la conjugaison g n'est pas de classe C^1 . On a $h^{-1}(\frac{p}{q}) = [a_1, a_2]$ avec $a_1 \leq a_2$. On peut voir (cf. Arnold [1]) que f_{a_1} est semi-stable en arrière ; c'est-à-dire, $f^q_{a_1} \leq R_p$, avec l'inégalité atteinte, et f_{a_2} est semi-stable en avant. Donc $a_1 = a_2$ si et seulement si $f^q_{a_1} = R_p$. Mais par 4.1, ceci est impossible, donc pour tout $\frac{p}{q}$, $h^{-1}(\frac{p}{q})$ est un intervalle d'intérieur non vide. On sait que si $\rho(f_b) \notin Q$ et $\rho(R_\lambda f_b) = \rho(f_b)$, alors $\lambda = 0$. Il suit que $K_a = [0,1] - \mathrm{Int}\, h^{-1}(Q)$ est un Cantor.

Posons $D = \{a_i\}_{i \in N} = K_a \cap h^{-1}(Q)$; c'est les extrémités des intervalles ouverts de $h^{-1}(Q)$, donc D est dénombrable. C'est bien connu que D est dense dans K_a et $K_a - D$ est résiduel dans K_a .

Maintenant H_1 est semi-continue inférieurement sur K_a . Ecrivons

$$G = \bigcap_n U_n \quad , \quad U_n = \{b \in K_a \mid H_1(f_b) > n\} .$$

Chaque U_n est ouvert dans K_a et $G = \{b \in K_a \mid H_1(f_b) = \infty\}$. Si $b \in D$, $h(b) = \frac{p}{q}$ et $f^q_b \neq R_p$. Donc $H_1(f_b) = \infty$ et $D \subset G$; G est dense dans K_a .

Alors $(K_a - D) \cap G$ est résiduel et si $b \in (K_a - D) \cap G$, f_b est C^0 conjugué à une rotation et pas C^1 conjugué.

Maintenant, nous démontrons que génériquement, g n'est pas absolument continue.

<u>Lemme</u> 4.2.- Soient $f \in D^o(T)$, $\rho(f) = \frac{p}{q}$ et f^q a un nombre fini de points fixes. Alors, il existe un compact K (réunion d'intervalles), $mes(K) = 1 - \frac{1}{q}$, un voisinage V de f dans $G(0)$ et un entier N tel que si $f_o \in V$ alors

$$f_o^N(K) \subset T - K .$$

<u>Démonstration</u>. Quand $k \to \infty$, $f^{kq}(x)$ tend vers les points fixes de f^q. Soit $K \subset T - Fixe(f^q)$, $mes(K) = 1 - \frac{1}{q}$, tel qu'il existe k et $f^{kq}(K) \subset T - K$.

On choisit $N = kq$. La propriété $f_o^N(K) \subset T - K$ est ouverte dans $G(0)$, donc le lemme est démontré.

Retournons à la famille f_b et soit b tel que $\rho(f_b) = \frac{p}{q}$. On a $f_b^q \neq R_p$, donc $\bar{f}_b^q$ a un nombre fini de points fixes car c'est C^ω.

Notons $h^{-1}(\frac{p}{q}) = [b(\frac{p}{q}), c(\frac{p}{q})]$. Pour chaque $\frac{p}{q} \in Q \cap [0,1]$, il existe un ouvert $V(b(\frac{p}{q}))$, un compact $K(b(\frac{p}{q}))$, $mes(K(b(\frac{p}{q}))) = 1 - \frac{1}{q}$, un entier $N(\frac{p}{q})$ tels que si $b \in V(b(\frac{p}{q}))$, on ait :

$$f_b^{N(\frac{p}{q})}(K(b(\tfrac{p}{q}))) \subset T - K(b(\tfrac{p}{q})) .$$

La même chose pour $c(\frac{p}{q})$: il existe $V(c(\frac{p}{q}))$, etc. Posons

$$U_n = \bigcup_{\substack{\frac{p}{q} \in Q \cap [0,1] \\ q \geq n}} (V(b(\tfrac{p}{q})) \cup V(c(\tfrac{p}{q}))) = \cup W_{\frac{p}{q}} .$$

U_n est ouvert dans K_a et dense parce que D_n est dense dans K_a.

$G_1 = \bigcap_n U_n$ est résiduel et si $b \in G_1$, b appartient à une infinité de $W_{\frac{p}{q}}$. Soit $G = G_1 - D$; D est dénombrable, donc G est résiduel.

Si $b \in G$, $\alpha = \rho(f_b) \in R - Q$, donc par le théorème de Denjoy, il existe $g \in D^o(T)$ tel que

$$gf_b = R_\alpha g .$$

Montrons que g n'est pas absolument continue. Soit $b \in \bigcap_i W_{\frac{p_i}{q_i}}$

avec $q_i \to \infty$. Pour chaque i , il existe un compact K_i , un entier N_i tels que $f^{N_i}(K_i) \subset T - K_i$. On a $g \circ f^{N_i} = R_{N_i\alpha} g$, donc

$$\mathrm{mes}(g\, f^{N_i}(K_i)) = \mathrm{mes}(R_{N_i\alpha} g)(K_i) = \mathrm{mes}\; g(K_i) \; .$$

Mais $g\, f^{N_i}(K_i) \subset g(T - K_i)$, donc $\mathrm{mes}(g(T - K_i)) \leq 1 - \mathrm{mes}(g(K_i))$ et $\mathrm{mes}\; g(K_i) \leq \frac{1}{2}$. Comme $\mathrm{mes}(K_i) = 1 - \frac{1}{q_i} \to 1$, g n'est pas absolument continue.

5. La catégorie de O_α^r

Par une construction d'une suite $f_i \in F_\alpha^r$ qui converge vers R_α dans la C^r topologie, Herman obtient des renseignements sur la catégorie de O_α^r dans F_α^r . L'idée est de contrôler les dérivées des h_i qui conjuguent f_i avec R_α de sorte que $\|h_i\|_r \to \infty$ quand $i \to \infty$. Par théorème 2.4, R_α ne sera pas dans un ouvert dans F_α^r pour la C^r topologie. Par la semi-continuité de H_r , on arrive à montrer que O_α^r est maigre dans F_α^r . Quand $r = \infty$ et α est Liouville, on peut aussi construire une suite f_i .

THÉORÈME 5.- 1) Si $1 \leq r < \infty$ et $\alpha \in R - Q$, alors O_α^r est maigre dans F_α^r .

2) Si α est un nombre de Liouville, alors $\overline{O_\alpha^\infty} \cap O_\alpha^{\infty,1}$ est maigre dans $\overline{O_\alpha^\infty}$.

Démonstration. Soit $H_{r,\alpha}$ la restriction de H_r à F_α^r . Nous savons par 2.4 que $O_\alpha^r = H_{r,\alpha}^{-1}([0,\infty[)$. Ecrivons

$$H_{r,\alpha}^{-1}([0,\infty[) = \bigcup_n G_n \quad ,$$

où $G_n = H_{r,\alpha}^{-1}[0,n]$; G_n est fermé par la semi-continuité de H_r . Il suffit de démontrer que G_n est sans point intérieur. Supposons, au contraire, que U est ouvert dans F_α^r et $U \subset G_n$. Soient $1 \leq r < \infty$ et $f_o \in U$. Nous savons que $f_o = g^{-1} R_\alpha g$ avec $g \in D^r(T)$ et

$$\|g\|_r \leq n(r + 1) \quad .$$

Soit $\Phi : F_\alpha^r \to F_\alpha^r$,

$$\Phi(f) = g f g^{-1} \; .$$

Il est clair que Φ est un homéomorphisme ; donc $\Phi(U)$ est un ouvert autour de

$\Phi(f_o) = R_\alpha$, dans la topologie C^r .

Le théorème 5.1 découlera, par 2.4, de la proposition suivante :

5.2 Il existe une suite $f_i \in F_\alpha^r$ satisfaisant :

1) $f_i = h_i^{-1} R_\alpha h_i$ avec $h_i \in D^r(T)$;

2) $f_i \to R_\alpha$ dans la topologie C^r ;

3) $\|h_i\|_r \to \infty$ quand $i \to \infty$;

4) si $r = \infty$ et α est Liouville, il existe f_i satisfaisant 1) et 2) avec $|Dh_i|_o \to \infty$.

<u>La construction de</u> f_i . Considérons la famille à deux paramètres d'applications :

$$z \to e^{2\pi i\lambda} . \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

où $\lambda \in R$ et $|a| < 1$. C'est un difféomorphisme C^ω sur T , $f = f_{\lambda,a}$, avec $T = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$.

Si f n'a pas de points fixes sur T , $f \in O^\omega$. Car $f(z) = z$ a deux racines a_1 , a_2 dans $\mathbf{C}$ et $|a_1||a_2| = 1$. Si elles n'appartiennent pas à T , alors on peut supposer $|a_1| < 1$ et

$$\frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z} \cdot f \cdot \frac{z + a_1}{1 + \bar{a}_1 z} = R_\beta \qquad \text{avec } \beta = \frac{df}{dz}(a_1) .$$

Pour $a \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$, la famille $z \to \dfrac{z - a}{1 - az}$ est dans $G(\omega)$ et pour $a \neq 0$, il y a exactement deux points fixes ± 1 .

On remonte cette famille à R :

$$f_a : x \to x + \varphi_a(x) \qquad \text{avec } \varphi_o(x) \equiv 0 .$$

Le relèvement de $f_{\lambda,a}$ est $R_\lambda \circ f_a$, donc si $\rho(f_{\lambda,a}) \neq 0$ (c'est-à-dire $f_{\lambda,a}$ sans points fixes), alors $R_\lambda \circ f_a \in O^\omega$. Or $\rho(f_{\lambda,a}) = 0$ si et seulement si $\rho(R_\lambda \circ f_a) \in Z$, donc $\rho(R_\lambda f_a) \notin Z$ entraîne $R_\lambda f_a \in O^\omega$.

Pour contrôler $\|h_i\|_r$, Herman introduit les revêtements d'ordre finis. Soient $g \in N$ et $h_q(x) = qx$. Si $0 \leq r \leq \omega$ et $f = Id + \varphi \in D^r(T)$, alors

$$h_q^{-1} f h_q(x) = x + \frac{1}{q} \varphi(qx) .$$

On peut vérifier facilement les propriétés 1) à 4) :

1) si $f \in D^r(T)$ alors $\hat{f} = h_q^{-1} f h_q \in D^r(T)$;

2) $\rho(h_q^{-1} R_p f h_q) = \dfrac{\rho(f)}{q} + \dfrac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$;

3) si $f \in C_\alpha^r$, alors $h_q^{-1} R_p f h_q \in C^r_{\frac{\alpha}{p}+\frac{p}{q}}$;

4) si $\rho(f) = 0$ et $f \neq Id$, alors $(h_q^{-1} R_p f h_q)^q \neq R_p$.

Maintenant regardons $R_\lambda f_a$. Soient $\alpha \in R - Q$, et $p_i/q_i \in Q$ tels que $|\alpha - \dfrac{p_i}{q_i}| < \dfrac{1}{q_i^2}$ et $q_i \to \infty$. Soient $a_i = \dfrac{1}{q_i^{r-1+\varepsilon}}$ et λ_i tels que $\rho(R_{\alpha+\lambda_i} f_{a_i}) = \alpha$. Posons

$$f_i(x) = x + \frac{1}{q_i} \varphi_{a_i}(q_i x) + \alpha + \lambda_i .$$

C'est la suite f_i qui satisfait aux conditions 1, 2, 3 de 5.1. Observons d'abord qu'il existe des constantes c_r et d_r telles que :

$$d_r |a| \leq |D^r \varphi_a|_0 \leq c_r |a|$$

pour a suffisamment petit. Car

$$|D^r\varphi_a(x)| = |D^r\varphi_a(x) - D^r\varphi_0(x)| \leq |\frac{\partial}{\partial a} D^r \varphi_a|_0 |a|$$

et puis, pour $a \neq 0$, $\varphi_a(x) \not\equiv 0$ donc $|D^r\varphi_a|_0 \geq d_r|a|$ si $|a| > \varepsilon$. et pour $a = 0$

$$D^r\left(\frac{\partial}{\partial a} \varphi_a(x)|_{a=0} \right) = \frac{\partial}{\partial a} (D^r\varphi_a(x))|_{a=0} \not\equiv 0 ,$$

c'est-à-dire il existe x_0 tel que $\frac{\partial}{\partial a} D^r\varphi_a(x_0) = t_0 \neq 0$. Donc

$$\frac{|D^r\varphi_a(x_0)|}{|a|} = \frac{|D^r\varphi_a(x_0) - D^r\varphi_0(x_0)|}{|a|} \geq \frac{t_0}{2} \qquad \text{quand } |a| \to 0 .$$

Nous remarquons que f_i commute avec $R_{\frac{p_i}{q_i}}$ donc on peut écrire

$$f_i - R_{\frac{p_i}{q_i}} = h_i R_\alpha h_i^{-1} - h_i R_{\frac{p_i}{q_i}} h_i^{-1}$$

On a $|f_i - R_{\frac{p_i}{q_i}}| = |\frac{1}{q_i}\varphi_{a_i}(q_i x) + \lambda_i + \alpha - \frac{p_i}{q_i}|$.

Maintenant, si $g(x)$ est continue et bornée, $|g(x)| \leq M$ et si $g(x_o) = 0$, on a alors

$$\text{maximum}|g(x) + K| \geq \frac{M}{2} \qquad \text{pour toute constante } K .$$

Donc

$$|f_i - R_{p_i/q_i}|_o \geq \max \frac{1}{q_i} |\varphi_{a_i}(q_i x)|_o \geq \frac{c|a_i|}{q_i} = \frac{c}{q_i^{1+\varepsilon}} , \quad \text{avec } c > 0 .$$

Par le même raisonnement, on obtient :

$$\frac{\bar{c}}{q_i^{1+\varepsilon}} \leq |D^{r-1}(f_i - R_{p_i/q_i})|_o \quad \text{pour } \bar{c} > 0 .$$

Par la formule de la moyenne, si $r = 1$, on a

$$|D^{r-1}(h_i R_\alpha h_i^{-1} - h_i R_{p_i/q_i} h_i^{-1})| \leq |D^r h_i|_o |\alpha - \frac{p_i}{q_i}| \leq \frac{1}{q_i^2} |D^r h_i|_o ,$$

et pour $r > 1$, par un raisonnement analogue, utilisant la formule de Faa-Di-Bruno, on a

$$|D^r h_i|_o \geq c\frac{q_i^2}{q_i^{1+\varepsilon}} \to \infty \quad \text{quand } i \to \infty ;$$

c étant une constante > 0 .

Ceci démontre 5.1.

Le cas α Liouville se fait de la même façon. On choisit $\frac{p_i}{q_i}$ tel que $|\alpha - \frac{p_i}{q_i}| < \frac{1}{q_i^i}$ et on pose $a_i = \frac{1}{q_i^{i/2}}$. Alors f_i satisfait 1) à 4) de 5.2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. I. ARNOLD - Small denominators, I, Translations A.M.S., 2e série, vol. 46, p. 213-284, 1965.

[2] A. DENJOY - Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, J. Math. Pures et App., t. 11 (1932), p. 333-375.

[3] H. FÜRSTENBERG - Strict ergodicity and transformations of the torus, Am. J. Math., 83 (1961), p. 573-601.

[4] M. R. HERMAN - Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, en préparation, aussi annoncé à paraître au Colloque d'Analyse non linéaire de Lyon, Mai 1975.

[5] D. MONTGOMERY and ZIPPIN - Topological transformation groups, Interscience, New York, 1955.

[6] J. MOSER - A rapidly convergent iteration method, part II, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 20 (1965), p. 499-535.

[7] M. M. PEIXOTO - Structural stability on two dimensional manifolds, Topology, vol. 1 (1962), p. 101-121.

[8] L. SCHWARTZ - Radon Measure on arbitary topological spaces, and cylindrical measures, Tata Institute, Oxford Univ. Press, 1973.

[9] W. H. GOTTSCHALK and G. A. HEDLUND - Topological dynamics, Am. M. Soc. Coll. Pub. vol. 36, Providence, 1955.

Note : Le "Théorème" de A. FINZI (Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 3e série, T. 67 (1950), p. 243-305) est un problème ouvert : la démonstration contient une faute (que personne n'a su corriger) ; faute signalée par R. Sacksteder . (une erreur se trouve page 269, lignes 5 à 9, l'inégalité est fausse !).