SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-PIERRE SERRE

Représentations linéaires des groupes finis « algébriques »

Séminaire N. Bourbaki, 1977, exp. n° 487, p. 256-273

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1975-1976__18__256_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
28e année, 1975/76, n° 487

REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS "ALGÉBRIQUES"

[d'après DELIGNE-LUSZTIG]

par Jean-Pierre SERRE

Introduction

Les caractères irréductibles de $SL_2(F_p)$ sont connus depuis Frobenius [7]. A un petit nombre d'exceptions près, ils sont de deux types, suivant que leur degré est $p+1$ ou $p-1$; les formules qui définissent les deux types sont presque les mêmes : seuls, certains signes changent. Les caractères du premier type ont une définition simple : on les obtient en partant d'un caractère θ de degré 1 du tore $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$, en prolongeant θ au groupe de Borel $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$, et en induisant (au sens de Frobenius) le caractère ainsi obtenu au groupe SL_2 tout entier. Les caractères du second type n'ont pas de définition aussi simple ; leurs valeurs suggèrent qu'ils sont associés aux caractères θ d'un tore non déployé de SL_2, mais on ne peut plus les obtenir par prolongement et induction, puisqu'un tel tore n'est pas contenu dans un sous-groupe de Borel.

Cet exemple, ainsi que d'autres dus à Green (pour GL_n), Ennola (pour U_n), Srinivasan (pour Sp_4), a conduit à une série de conjectures (Macdonald [16], Springer [18]) sur l'existence et les propriétés de représentations R_T^θ associées aux divers types de tores maximaux T du groupe algébrique G considéré. Ces conjectures ont été démontrées dans de nombreux cas particuliers par Springer [18], [19], Srinivasan [21], Kazhdan [10]. Le cas général vient d'être traité par Deligne et Lusztig [4] ; leur point de départ est la construction, <u>par voie cohomologique</u>, d'une opération d'<u>induction</u> généralisée qui permet de passer directement des caractères de T à ceux de G.

Dans ce qui suit, je résume les principaux résultats de Deligne-Lusztig, en me bornant à de brèves indications sur les démonstrations ; pour plus de détails, le lecteur se reportera à [4].

§ 1. Notations et conventions

1.1 Notations

La lettre p désigne un nombre premier. Si N est un entier ≥ 1, on écrit $N = N_p . N'_p$, où N_p est la plus grande puissance de p qui divise N.

Si X est un ensemble fini, on pose $|X| = \mathrm{Card}(X)$.

Si s opère sur un ensemble (resp. une variété algébrique) X, on note X^s l'ensemble (resp. la sous-variété) des points fixes de s dans X.

1.2 Groupes et représentations

Soit Γ un groupe fini. On note $R(\Gamma)$ la $\mathbf{Z}$-algèbre des caractères (virtuels) de Γ, à valeurs dans un corps algébriquement clos C de caractéristique 0. (Le choix de C importe peu. On prendra, soit le corps des nombres complexes, soit une clôture algébrique $\bar{\mathbf{Q}}_\ell$ du corps $\mathbf{Q}_\ell$ des nombres ℓ-adiques.) Si E est une représentation C-linéaire de Γ, on note E son image dans $R(\Gamma)$; si $\gamma \in \Gamma$, on a donc $E(\gamma) = \mathrm{Tr}(\gamma\,; E)$: on identifie représentations et caractères.

Si f et f' sont deux fonctions centrales sur Γ, on pose

$$\langle f,f'\rangle_\Gamma = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\, f'(\gamma^{-1}) .$$

Si E et E' sont deux représentations linéaires de Γ, on a

$$\langle E,E'\rangle_\Gamma = \dim.\mathrm{Hom}^\Gamma(E,E') = \dim.\mathrm{Hom}^\Gamma(E',E) .$$

Vis-à-vis de ce produit scalaire, les caractères irréductibles de Γ forment une base orthonormale de $R(\Gamma)$.

1.3 Groupes réductifs

Soient k_o un corps fini de caractéristique p, et k une clôture algébrique de k_o. On pose $q = |k_o|$. On considère un groupe algébrique <u>réductif</u> G_o sur k_o (on convient, comme d'habitude, que "réductif" entraîne "connexe et lisse"). Un tel groupe définit par extension des scalaires un groupe algébrique réductif G sur k, muni d'un <u>endomorphisme de Frobenius</u> F. Le couple (G,F) détermine G_o sans ambiguïté ; en particulier, le groupe $G_o(k_o)$ des k_o-points de G_o n'est autre que le groupe G^F des points fixes de F dans G ; ce sont les caractères de G^F que l'on veut étudier.

On note W le groupe de Weyl canonique de G (cf. [4], 1.1, ainsi que Bourbaki, LIE VIII-110) ; c'est un groupe de Coxeter, muni d'une action de F . Si Bor désigne la variété des sous-groupes de Borel de G , on peut identifier W à l'ensemble des orbites de G dans Bor $\times$ Bor ("décomposition de Bruhat") ; si $w \in W$, on note $O(w)$ l'orbite correspondante, et, si (B,B') appartient à $O(w)$, on dit que les sous-groupes de Borel B et B' sont en position relative w , ce que l'on note $B \xrightarrow{w} B'$. Par exemple $B \xrightarrow{1} B'$ équivaut à $B = B'$.

§ 2. Cohomologie et représentations

2.1 Représentations définies par la cohomologie à supports propres

Soient X une variété algébrique sur k , et ℓ un nombre premier $\neq p$. On note $H^i_c(X ; \mathbf{Q}_\ell)$ le i-ème groupe de cohomologie à supports propres de X , à coefficients dans $\mathbf{Q}_\ell$ (pour la topologie étale, cf. [3], [9]) ; c'est un $\mathbf{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie, nul si $i < 0$ ou si $i > 2\dim(X)$.

Si Γ est un groupe fini qui opère sur X , on fait agir Γ sur les $H^i_c(X ; \mathbf{Q}_\ell)$ par transport de structure ; après extension des scalaires à $C = \bar{\mathbf{Q}}_\ell$, on obtient ainsi des éléments $H^i_c(X ; C)$ de $R(\Gamma)$; leur somme alternée

$$\sum_i (-1)^i H^i_c(X ; C) \qquad \text{dans } R(\Gamma)$$

sera notée $H^{\cdot}_c(X ; C)$, ou simplement $H^{\cdot}_c(X)$. Elle jouit des propriétés suivantes :

Additivité - Si X est réunion disjointe de sous-variétés X_α stables par Γ , en nombre fini, on a :

$$H^{\cdot}_c(X ; C) = \sum_\alpha H^{\cdot}_c(X_\alpha ; C) \qquad \text{dans } R(\Gamma) .$$

Cela résulte de la suite exacte de cohomologie à supports propres.

Partie fixe - Supposons que X/Γ existe, ce qui est le cas si X est quasi-projective. Alors les invariants de Γ dans $H^i_c(X ; \mathbf{Q}_\ell)$ s'identifient à $H^i_c(X/\Gamma ; \mathbf{Q}_\ell)$: cela se démontre en utilisant la suite spectrale de la projection $X \to X/\Gamma$. Si l'on pose

$$\chi_c(X/\Gamma) = \sum_i (-1)^i \dim.H^i_c(X/\Gamma ; \mathbf{Q}_\ell) ,$$

on en déduit que

$$\langle 1 , H_c^{\cdot}(X ; C)\rangle_{\Gamma} = \chi_c(X/\Gamma) .$$

<u>Intégralité et indépendance de</u> ℓ - La suppression de C dans la notation $H_c^{\cdot}(X)$ est justifiée par le résultat suivant :

PROPOSITION 1 ([4], prop. 3.3).- <u>Le caractère</u> $H_c^{\cdot}(X ; C)$ <u>est à valeurs dans</u> $\mathbf{Z}$, <u>et ne dépend pas de</u> ℓ .

(On ignore si le même résultat vaut pour chacun des $H_c^i(X ; C)$; c'est en tout cas vrai lorsque X est projective lisse, d'après Deligne, Katz et Messing.)

Indiquons le principe de la démonstration : on se ramène tout de suite au cas où X est quasi-projective, et définie, ainsi que les opérations de Γ , sur un sous-corps fini de k . L'endomorphisme de Frobenius F correspondant commute aux éléments de Γ ; il définit des automorphismes des $H_c^i(X ; C)$. On peut donc considérer $H_c^{\bullet}(X ; C)$ comme un <u>caractère</u> ψ_ℓ <u>de</u> $\Gamma \times \mathbf{Z}$, à valeurs dans $\mathbf{Q}_\ell$. Mais, si (γ,n) est un élément de $\Gamma \times \mathbf{Z}$, avec $n \geq 1$, l'élément $\psi_\ell(\gamma,n)$ est <u>un entier indépendant de</u> ℓ . En effet, $\psi_\ell(\gamma,n)$ est la somme alternée des traces de $F' = \gamma^{-1}F^n$ opérant (par fonctorialité) sur les $H_c^i(X ; \mathbf{Q}_\ell)$; or on peut considérer F' comme un endomorphisme de Frobenius de X (pour une structure convenable), et d'après un résultat connu ([3], [9]), on a

$$\psi_\ell(\gamma,n) = |X^{F'}| ,$$

ce qui est bien un entier indépendant de ℓ . Le résultat cherché se déduit de là en remarquant que deux caractères de $\Gamma \times \mathbf{Z}$ qui coïncident sur les éléments de la forme (γ,n) , avec $n \geq 1$, coïncident partout (et en particulier sur Γ).

<u>Remarque</u>.- Bien que le caractère $H_c^{\cdot}(X)$ soit à valeurs dans $\mathbf{Z}$, il n'est pas toujours <u>réalisable sur</u> $\mathbf{Q}$, ni même sur $\mathbf{R}$.

2.2 <u>Traces et décompositions de Jordan</u>

Si $\gamma \in \Gamma$, on peut décomposer γ de façon unique en $\gamma = su$, où s et u commutent, s est d'ordre premier à p , et u est d'ordre une puissance de p ; c'est la "décomposition de Jordan" de γ . Du fait que s et u commutent, u opère sur la sous-variété X^s de X fixée par s (1.1).

PROPOSITION 2 ([4], th. 3.2).- <u>On a</u> $H_c^{\cdot}(X)(\gamma) = H_c^{\cdot}(X^s)(u)$.

En d'autres termes :

$$\sum (-1)^i \, \mathrm{Tr}(\gamma \,;\, H^i_c(X)) = \sum (-1)^i \, \mathrm{Tr}(u \,;\, H^i_c(X^s)) \ .$$

Le calcul du caractère $H^{\cdot}_c(X)$ se ramène donc à deux opérations :

1) détermination des sous-espaces X^s fixés par les éléments s d'ordre premier à p ;

2) détermination des traces des p-éléments u opérant sur la cohomologie des X^s.

Cela explique la structure des formules obtenues par Deligne-Lusztig (cf. th. 5).

COROLLAIRE 1.- _Si_ Γ _opère librement sur_ X , _le caractère_ $H^{\cdot}_c(X)$ _est nul sur les éléments de_ Γ _dont l'ordre n'est pas une puissance de_ p .

En effet, si γ est un tel élément, la composante s de γ est $\neq 1$, et l'on a $X^s = \emptyset$.

COROLLAIRE 2.- _Si_ s _est d'ordre premier à_ p , _on a_

$$H^{\cdot}_c(X)(s) = \chi_c(X^s) \ .$$

C'est le cas $u = 1$.

COROLLAIRE 3.- _Si_ $(p, |\Gamma|) = 1$, _et si_ Γ _opère librement sur_ X , _le caractère_ $H^{\cdot}_c(X)$ _est un multiple du caractère_ r_Γ _de la représentation régulière de_ Γ :

$$H^{\cdot}_c(X) = \lambda \, r_\Gamma \ , \qquad \underline{\text{avec}} \ \lambda = \chi_c(X/\Gamma) = \frac{1}{|\Gamma|} \chi_c(X) \ .$$

Remarque.- Deligne-Lusztig démontrent d'abord le cor. 1 (par une méthode inspirée de Zaruela et Verdier), et en déduisent la prop. 2 par un argument de dévissage.

2.3 Un cas d'action triviale

PROPOSITION 3 ([4], prop. 6.4).- _Soit_ H _un groupe algébrique connexe, opérant sur la variété_ X . _Pour tout_ $h \in H$, _tout_ $i \in \mathbf{Z}$ _et tout_ ℓ _premier_ $\neq p$, _l'action de_ h _sur_ $H^i_c(X \,;\, \mathbf{Q}_\ell)$ _est triviale_.

Cela résulte facilement du "théorème de changement de base", cf. [4], _loc. cit_.

COROLLAIRE.- _Si l'action de_ Γ _sur_ X _peut se prolonger en une action d'un groupe algébrique connexe, le caractère_ $H^{\cdot}_c(X)$ _est un multiple du caractère unité_.

§ 3. La construction fondamentale

3.1 Définition des R_T^θ

Soit T un tore maximal de G, défini sur k_o, i.e. tel que $FT = T$. Le groupe $T^F = T(k_o)$ de ses k_o-points est un sous-groupe du groupe fini G^F. On se propose de définir un homomorphisme $R(T^F) \to R(G^F)$ ayant des propriétés analogues à celles de l'induction classique. Vu l'autodualité de $R(T^F)$ et $R(G^F)$, cf. 1.2, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}(R(T^F), R(G^F)) = \mathrm{Hom}(R(G^F), R(T^F)) = R(G^F) \otimes R(T^F) ,$$

et tout revient à définir un élément $\Theta_{T,G}$ du groupe

$$R(G^F) \otimes R(T^F) = R(G^F \times T^F) ,$$

i.e. une représentation (virtuelle) de $G^F \times T^F$. La méthode de Deligne-Lusztig consiste à prendre pour $\Theta_{T,G}$ la cohomologie $H_c^{\cdot}(X)$ d'une certaine variété algébrique $X = X_U$ sur laquelle opère $G^F \times T^F$ (cf. 2.1). La définition de cette variété est la suivante :

on choisit un sous-groupe unipotent U de G tel que $B = T.U$ soit un sous-groupe de Borel de G (U est donc le radical unipotent de B) ; on prend pour X_U la sous-variété de G formée des éléments g tels que $g^{-1}Fg \in FU$. Si $(x,t) \in G^F \times T^F$, et $g \in X_U$, on a $xgt \in X_U$, d'où une action de $G^F \times T^F$ sur X_U. Le choix de U n'a pas d'importance :

THÉORÈME 1 ([4], cor. 4.3).- L'élément $H_c^{\cdot}(X_U)$ de $R(G^F \times T^F)$ ne dépend pas de U.

On peut donc bien définir $\Theta_{T,G}$ comme $H_c^{\cdot}(X_U)$.

Si $\theta \in R(T^F)$, on note R_T^θ son image dans $R(G^F)$ par l'homomorphisme associé à $\Theta_{T,G}$. Le cas le plus important est celui où θ est un caractère irréductible de T^F, autrement dit (puisque T est commutatif) un élément du groupe dual

$$(T^F)^{\vee} = \mathrm{Hom}(T^F, \mathbf{C}^*) .$$

Remarque.- Le th. 1 revient à dire que R_T^θ ne dépend pas de U. Dans [4], cela est démontré tout d'abord dans le cas particulier $\theta = 1$ ([4], th. 1.6), et le cas général est ramené à celui-là grâce à la formule des caractères (th. 5).

Deligne m'a signalé une autre possibilité : on démontre directement la formule d'orthogonalité (th. 2), et on en déduit que, si f et f' sont les R_T^θ associés à deux choix différents de U, on a

$$\langle f,f\rangle = \langle f,f'\rangle = \langle f',f'\rangle ,$$

ce qui entraîne $\langle f-f', f-f'\rangle = 0$, d'où $f = f'$.

3.2 Variantes

a) Prenons $C = \bar{\mathbf{Q}}_\ell$. Si $\theta \in (T^F)^\vee$, et si V est une représentation linéaire de $G^F \times T^F$, notons V_θ la représentation linéaire de G^F dans la θ-composante de V (ensemble des $v \in V$ tels que $t.v = \theta(t)v$ pour tout $t \in T^F$). Avec cette notation, on a

$$R_T^\theta = \sum_i (-1)^i H_c^i(X_U ; C)_\theta \qquad \text{dans } R(G^F) ,$$

autrement dit R_T^θ est la θ-composante de $H_c^\cdot(X_U)$.

b) Notons Y_U le quotient de X_U par T^F ; le groupe G^F opère sur Y_U, et l'élément $H_c^\cdot(Y_U)$ de $R(G^F)$ n'est autre que R_T^1.

c) Le groupe unipotent $U \cap FU$ opère à droite sur X_U, et cette action est compatible avec celle de $G^F \times T^F$. Soit $Z_U = X_U/(U \cap FU)$; si $r = \dim(U \cap FU)$, on a des isomorphismes

$$H_c^i(X_U) \simeq H_c^{i-2r}(Z_U)$$

qui commutent à l'action de $G^F \times T^F$. D'où :

$$H_c^\cdot(X_U) = H_c^\cdot(Z_U) \qquad \text{dans } R(G^F \times T^F) ,$$

ce qui permet d'utiliser à volonté X_U ou Z_U.

d) Si w est un élément du groupe de Weyl W, notons $\mathrm{Bor}(w)$ la sous-variété de Bor formée des B' tels que B' et FB' soient en position relative w (cf. 1.3). Choisissons w de telle sorte que B appartienne à $\mathrm{Bor}(w)$. Alors $\mathrm{Bor}(w)$ est isomorphe à $Z_U/T^F = X_U/T^F.(U \cap FU)$; on a $H_c^\cdot(\mathrm{Bor}(w)) = R_T^1$.

3.3 Exemples.- i) Supposons U défini sur k_o, i.e. égal à FU (ce qui est le cas lorsque T est déployé) ; avec les notations de 3.2 d), c'est le cas $w = 1$. On a alors $X_U = G^F.U$ et la variété Z_U de 3.2 c) est de dimension 0 : c'est l'ensemble fini G^F/U^F, sur lequel G^F opère par translations à gauche, et T^F par translations à droite. Le module $H_c^\cdot(Z_U)$ est le module des fonctions sur

G^F/U^F . L'interprétation de R_T^θ est celle que l'on pense : on identifie θ à un caractère θ_B de $B^F = T^F.U^F$ grâce à la projection $B^F \to T^F$, et on <u>induit</u> θ_B (au sens usuel du terme) de B^F à G^F . (L'interprétation de l'homomorphisme transposé $R(G^F) \to R(T^F)$ est encore plus simple : à un G^F-module on associe le T^F-module formé par les éléments invariants par U^F .)

ii) On prend $G = \mathbf{SL}_2$, et T non déployé, de sorte que $U \not\subset FU$ et $U \cap FU = \{1\}$. Le choix de U identifie T^F au groupe μ_{q+1} des racines $(q+1)$-èmes de l'unité. On peut montrer que X_U est isomorphe à la courbe affine d'équation

$$(*) \qquad XY^q - YX^q = 1 ,$$

sur laquelle $G^F = \mathbf{SL}_2(k_o)$ opère linéairement, et $T^F = \mu_{q+1}$ opère par homothéties (cet exemple, dû à Drinfeld, a été le point de départ de Deligne-Lusztig).

On notera que la courbe $(*)$ est isomorphe à la courbe

$$(**) \qquad X^{q+1} + Y^{q+1} = 1 ,$$

cas particulier de variétés considérées par Tate et Thompson [23] ; voir aussi Lusztig [13] qui généralise $(*)$ à tous les $\mathbf{SL}_n$ et $(**)$ à tous les $\mathbf{SU}_n$; l'isomorphisme $\mathbf{SL}_2 \simeq \mathbf{SU}_2$ "explique" que $(*)$ soit isomorphe à $(**)$.

§ 4. <u>Relations d'orthogonalité entre les</u> R_T^θ

4.1 <u>Enoncé du résultat</u>

Soient T et T' deux tores maximaux de G , définis sur k_o , et soient $\theta \in (T^F)^\vee$, $\theta' \in (T'^F)^\vee$. Notons $N(\theta,\theta')$ le nombre des isomorphismes $w : T \to T'$ qui sont induits par un automorphisme intérieur $x \mapsto gxg^{-1}$, avec $g \in G^F$, et qui transforment θ en θ' (on a $\theta'(wt) = \theta(t)$ pour tout $t \in T^F$).

THÉORÈME 2 ([4], th. 6.8).- <u>On a</u> $\langle R_T^\theta , R_{T'}^{\theta'} \rangle_{G^F} = N(\theta,\theta')$.

COROLLAIRE 1.- <u>Pour que</u> R_T^θ <u>et</u> $R_{T'}^{\theta'}$ <u>soient orthogonaux, il faut et il suffit que</u> (T,θ) <u>et</u> (T',θ') <u>ne soient pas</u> G^F-<u>conjugués</u>.

En effet, cela revient à dire que $N(\theta,\theta') = 0$.

Disons que θ est <u>général</u> si $N(\theta,\theta) = 1$, autrement dit si le seul automorphisme de T qui fixe θ et est induit par un élément de G^F est l'identité.

COROLLAIRE 2.- <u>Si θ est général, il existe un signe $\pm$ tel que $\pm R_T^\theta$ soit un caractère irréductible de G^F</u> .

On sait en effet que, pour tout groupe fini Γ , les seuls éléments f de $R(\Gamma)$ tels que $\langle f,f\rangle_\Gamma = 1$ sont les caractères irréductibles de Γ et leurs opposés.

4.2 Remarques

Le cor. 2 ci-dessus peut être précisé de la manière suivante :

a) Notons ρ le k_o-rang de G , et posons $\varepsilon_G = (-1)^\rho$; définissons de même ε_T . Alors le signe $\pm$ qui intervient dans le cor. 2 est $\varepsilon_T\varepsilon_G$; cela résulte de la formule donnant la valeur $R_T^\theta(1)$ du caractère R_T^θ en l'élément neutre de G^F , cf. 6.1, th. 6.

b) Pour que $\pm R_T^\theta$ soit cuspidale (i.e. appartienne à la "série discrète", cf. [2], C), il faut et il suffit que le tore T ne soit contenu dans aucun sous-groupe parabolique de G distinct de G et défini sur k_o ([4], § 8).

c) On a $R_T^\theta = \sum_i (-1)^i H_c^i(Z_U)_\theta$, cf. 3.2, a) et c). En fait, un seul des $H_c^i(Z_U)_\theta$ est non nul, celui correspondant à $i = \dim(Z_U)$, et la représentation de G^F sur cet espace est $\pm R_T^\theta$. (Ce "vanishing theorem" est vrai, plus généralement, pour tout θ qui est non singulier au sens de [4], 5.15 ; ce résultat est prouvé dans [4], cor. 9.9, en supposant Z_U affine, hypothèse que Deligne a montré récemment être inutile.)

d) Le nombre des caractères irréductibles de G^F fournis par le cor. 2 est de la forme $q^r + O(q^{r-1})$, où r est le k-rang de G (cela se voit en interprétant θ comme une classe de conjugaison du "groupe dual" de G , cf. [4], § 5). D'autre part, le nombre de classes de conjugaison de G^F est aussi de la forme $q^r + O(q^{r-1})$, cf. [14], [22]. En comparant, on voit que le cor. 2 fournit "presque tous" les caractères irréductibles de G^F .

4.3 Conjugaison "géométrique" de deux caractères

Si k_1 est une extension finie de k_o , tout caractère θ de $T(k_o)$ définit un caractère θ_1 de $T(k_1)$ par composition avec la norme

$N_{k_1/k_o} : T(k_1) \to T(k_o)$. On dit que (T,θ) et (T',θ') sont <u>géométriquement conjugués</u> s'il existe une extension finie k_1 de k_o telle que (T,θ_1) et (T',θ'_1) soient $G(k_1)$-conjugués ; cette notion peut aussi s'interpréter comme une conjugaison dans le groupe dual de G , cf. [4], prop. 5.22.

THÉORÈME 3 ([4], cor. 6.3).- <u>Si</u> (T,θ) <u>et</u> (T',θ') <u>ne sont pas géométriquement conjugués, les caractères</u> R_T^θ <u>et</u> $R_{T'}^{\theta'}$ <u>sont disjoints</u>.

(Autrement dit, aucun caractère irréductible de G^F n'intervient à la fois dans R_T^θ et dans $R_{T'}^{\theta'}$; c'est une propriété plus forte que l'orthogonalité.)

On a d'autre part :

THÉORÈME 4 ([4], cor. 7.7).- <u>Tout caractère irréductible</u> χ <u>de</u> G^F <u>intervient dans l'un au moins des</u> R_T^θ .

Vu le th. 3, on peut donc <u>associer à</u> χ <u>un couple</u> (T,θ) , défini à conjugaison géométrique près. Le cas où $\theta = 1$ est spécialement intéressant ; dans ce cas, Deligne-Lusztig disent que χ est <u>unipotent</u> ([4], 7.8).

<u>Remarque</u>.- Dans [4], Deligne-Lusztig démontrent d'abord le th. 3, en déduisent (<u>via</u> le th. 5) une relation d'orthogonalité pour les "fonctions de Green" (5.1), et en tirent le th. 2. Dans un Séminaire à l'IHES, Deligne a exposé une méthode un peu différente, qui donne directement le th. 2 et a l'avantage de s'appliquer au groupe de Ree $^2F_4(2)$, cf. 7.1 c).

§ 5. <u>Fonctions de Green et formule des caractères</u>

5.1 <u>Définition des fonctions de Green</u>

Soit T un tore maximal de G défini sur k_o . Si u est un élément <u>unipotent</u> de G^F , la valeur $R_T^1(u)$ en u du caractère R_T^1 sera notée $Q_{T,G}(u)$. La fonction $Q_{T,G}$ est appelée la <u>fonction de Green</u> attachée au couple (T,G) ; elle est définie sur les éléments unipotents de G^F ; d'après la prop. 1, ses valeurs appartiennent à $\mathbf{Z}$.

<u>Exemple</u>.- Prenons $G = \mathbf{SL}_2$. On a alors :

$$Q_{T,G}(u) = 1 \qquad \text{si } u \neq 1$$

$$Q_{T,G}(1) = \begin{cases} 1+q & \text{si T est déployé} \\ 1-q & \text{sinon.} \end{cases}$$

5.2 Formule des caractères

Une fois les fonctions de Green connues, les R_T^θ le sont aussi :

THÉORÈME 5 ([4], th. 4.2).- Soient x un élément de G^F, s sa composante semi-simple et u sa composante unipotente (de sorte que $x = su = us$). Soit G_s la composante neutre du centralisateur de s dans G. Pour tout $\theta \in R(T^F)$, on a :

$$R_T^\theta(x) = \frac{1}{|G_s^F|} \sum_{\substack{g \in G^F \\ g^{-1}sg \in T}} Q_{gTg^{-1},G_s}(u)\ \theta(g^{-1}sg) .$$

(Noter que G_s est un groupe réductif défini sur k_0 et contenant l'élément unipotent u ; si $g \in G^F$ et $g^{-1}sg \in T$, le groupe gTg^{-1} est un tore maximal de G_s défini sur k_0 ; cela donne un sens au terme $Q_{gTg^{-1},G_s}(u)$.)

COROLLAIRE 1.- On a $R_T^\theta(x) = 0$ si s n'est pas G^F-conjugué à un élément de T.

COROLLAIRE 2.- Pour tout $\theta \in (T^F)^\vee$ et tout élément unipotent u de G^F, on a $R_T^\theta(u) = Q_{T,G}(u)$.

On peut aussi exprimer le th. 5 comme une formule donnant la valeur du caractère $\Theta_{T,G}$ de $G^F \times T^F$:

THÉORÈME 5'.- Soit $x = su = us$ comme ci-dessus, et soit $t \in T^F$. On a

$$\Theta_{T,G}(x,t) = \frac{|T^F|}{|G_s^F|} \sum_{\substack{g \in G^F \\ g^{-1}sg = t^{-1}}} Q_{gTg^{-1},G_s}(u) .$$

Indiquons comment on démontre le th. 5' (donc aussi le th. 5). Vu la prop. 2, tout revient à déterminer la sous-variété $X_U^{(s,t)}$ de X_U fixée par l'élément (s,t) de $G^F \times T^F$. Soit Σ un système de représentants (mod. G_s^F) des éléments $g \in G^F$ tels que $g^{-1}sg = t^{-1}$. Si $g \in \Sigma$, soit X_{U_g} la variété construite de façon analogue à X_U, à partir du groupe réductif G_s et de son sous-groupe unipotent $G_s \cap gUg^{-1}$. L'application $z \mapsto zg$ définit un plongement φ_g de X_{U_g} dans $X_U^{(s,t)}$, et l'on vérifie que $X_U^{(s,t)}$ est réunion disjointe des images des φ_g. Le th. 5' s'en déduit facilement (compte tenu de la prop. 2).

5.3 Détermination des fonctions de Green

On n'a que des résultats partiels :

i) Si u est un unipotent régulier (i.e. contenu dans un seul sous-groupe de Borel de G, cf. [2], p. 215-226), on a

$$Q_{T,G}(u) = 1 \qquad ([4], \text{ th. } 9.16).$$

Cela entraîne une formule simple (conjecturée par Macdonald, cf. [2], p. 117) pour la valeur de R_T^θ en un élément régulier x de G^F, de composante semi-simple s :

$$R_T^\theta(x) = \sum_{\substack{g \in G_s^F \backslash G^F \\ g^{-1} sg \in T}} \theta(g^{-1}sg) .$$

ii) On connaît la valeur de $Q_{T,G}(u)$ lorsque $u = 1$:

$$Q_{T,G}(1) = \varepsilon_T \varepsilon_G \, (G^F : T^F)_p' \quad , \quad \text{cf. 6.1, th. 6.}$$

iii) Lorsque $G = \mathbf{GL}_n$, la classe de conjugaison de u (resp. T) est définie par une partition λ (resp. μ) de n, et $Q_{T,G}(u)$ est égal à la valeur en q du polynôme de Green Q_μ^λ, cf. [8], [13].

iv) Lusztig [13] a déterminé $Q_{T,G}$ lorsque G est un groupe classique, et T un tore "de Coxeter".

v) Lorsque la caractéristique p de k est assez grande (par rapport au type de G), on peut exprimer $Q_{T,G}(u)$ au moyen de la formule de Springer-Kazhdan ([10], [18]) : soit $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{t}$) l'algèbre de Lie de G (resp. T) ; soit $U = \log(u) \in \mathfrak{g}$; soit A un élément régulier de $\mathfrak{g}$, défini sur k_o, et contenu dans $\mathfrak{t}$; soit B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Si $c \in k_o$, notons N_c le nombre des éléments $A' \in \mathfrak{g}$ qui sont G^F-conjugués à A et tels que $B(U,A') = c$; pour $c \neq 0$, ce nombre est indépendant du choix de c. On a alors :

$$Q_{T,G}(u) = \varepsilon_T \varepsilon_G (N_o - N_1) / |G^F|_p .$$

§ 6. Valeurs des R_T^θ aux éléments semi-simples

6.1 Dimension de R_T^θ

Soit $\theta \in (T^F)^\vee$. D'après le cor. 2 au th. 5, la dimension $R_T^\theta(1)$ de la représentation (virtuelle) R_T^θ est égale à $Q_{T,G}(1)$, et ne dépend donc pas de θ. Elle est donnée par :

THÉORÈME 6 ([4], th. 7.1).- *On a*

$$Q_{T,G}(1) = \varepsilon_T\varepsilon_G \, |G^F|_p' / |T^F| = \varepsilon_T\varepsilon_G \, (G^F : T^F)_p' .$$

Rappelons que, si N est un entier ≥ 1, $N_p' = N/N_p$ désigne le plus grand diviseur de N premier à p, cf. 1.1 ; pour la définition des signes ε_T et ε_G, voir 4.2 a).

COROLLAIRE.- *Si* θ *est général, le degré du caractère irréductible* $\varepsilon_T\varepsilon_G R_T^\theta$ *est égal à* $(G^F : T^F)_p'$.

6.2 Valeurs des R_T^θ aux éléments semi-simples

En combinant les ths. 5 et 6, on obtient :

THÉORÈME 7.- *Si* s *est un élément semi-simple de* G^F, *on a*

$$R_T^\theta(s) = \varepsilon_T\varepsilon_{G_s} \frac{1}{|G_s^F|_p |T^F|} \sum_{\substack{g \in G^F \\ g^{-1}sg \in T}} \theta(g^{-1}sg) .$$

Ce résultat peut se récrire de façon plus agréable en utilisant le caractère de Steinberg St_G de G^F (cf. [12], [20], [22]). On a en effet :

$$St_G(s) = \varepsilon_G\varepsilon_{G_s} |G_s^F|_p \qquad \text{si } s \text{ est semi-simple}$$

$$St_G(x) = 0 \qquad \text{si } x \text{ n'est pas semi-simple,}$$

de sorte que le th. 7 équivaut à :

THÉORÈME 7' ([4], prop. 7.3).- $\quad R_T^\theta . St_G = \varepsilon_T\varepsilon_G \, \mathrm{Ind}_{T^F}^{G^F}(\theta)$.

En particulier, le caractère $\mathrm{Ind}(\theta)$ est *divisible* par le caractère de Steinberg St_G. Plus généralement :

THÉORÈME 8 ([6], [12]).- *Pour qu'un élément* χ *de* $R(G^F)$ *soit de la forme* $\psi.St_G$, *avec* $\psi \in R(G^F)$, *il faut et il suffit que* χ *soit nul sur les éléments non semi-simples de* G^F .

Remarque.- Dans [4], Deligne-Lusztig démontrent d'abord que, si $\theta \neq 1$, R_T^θ est orthogonal à St_G : cela résulte du th. 3 et du fait que St_G intervient dans $R_{T_o}^1$, si T_o est du type "quasi-déployé" de 3.3 i). Utilisant la formule des caractères (th. 5), ils en déduisent les ths. 6 et 7 par récurrence sur le rang semi-simple de G , du moins lorsque $|T^F| \neq 1$. Lorsque $|T^F| = 1$, le tore T est déployé, et le th. 6 résulte directement de 3.3 i).

6.3 *Fonctions uniformes*

Une fonction centrale sur G^F est dite *uniforme* si elle est combinaison linéaire des R_T^θ .

Exemples.- a) Si $G = \mathbf{GL}_n$ ou $\mathbf{U}_n$, toute fonction centrale est uniforme.

b) Si $G = \mathbf{SL}_2$, une fonction centrale f sur G^F est uniforme si et seulement si $f(u) = f(u')$ et $f(-u) = f(-u')$ quels que soient les éléments unipotents u , u' de G^F , distincts de 1 .

THÉORÈME 9 ([4], prop. 7.11).- *Soit* f *une fonction centrale sur* G^F *telle que* $f(x)$ *ne dépende que de la composante semi-simple de* x . *Alors* :

a) f *et* $f.St_G$ *sont uniformes* ;

b) *pour tout* (T,θ) , *on a*

$$\langle f , R_T^\theta \rangle_{G^F} = \langle f , \theta \rangle_{T^F} = \varepsilon_T \varepsilon_G \langle f.St_G , R_T^\theta \rangle_{G^F} .$$

En particulier 1 et St_G sont uniformes ; on peut même les écrire explicitement comme combinaisons linéaires des R_T^1 , cf. [4], cor. 7.14.

COROLLAIRE.- *La fonction caractéristique d'une classe de conjugaison semi-simple est uniforme*.

Cela résulte de la deuxième assertion de a).

§ 7. Compléments

7.1 Autres résultats

Je renvoie à [4], [14], [15], [21], pour :

a) la compactification des variétés $\mathrm{Bor}(w) \simeq X_U / T^F.(U \cap FU)$, cf. [4], § 9 ;

b) la décomposition de la représentation de Gelfand-Graev de G^F ([4], § 10) ;

c) l'extension des résultats ci-dessus aux groupes de Suzuki et de Ree ([4], § 11) : on remplace F par un endomorphisme de G dont le carré est un Frobenius ;

d) une étude détaillée du cas où T est un tore "de Coxeter" [15] ;

e) une généralisation de la "construction fondamentale" dans laquelle on remplace le tore maximal T par un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de G (Srinivasan-Deligne-Lusztig, cf. [14] ainsi que le Séminaire Deligne, IHES 1975/76) ;

f) une majoration du nombre des classes d'unipotents de G^F en fonction du rang de G (mais pas de l'ordre de k_o) ; il en résulte que le nombre des classes d'unipotents de G est fini ([14]).

7.2 Questions

a) Peut-on préciser la structure des fonctions de Green ? En quel sens peut-on dire que ce sont des polynômes en q ?

b) Peut-on donner des recettes générales pour la décomposition de ceux des R_T^θ qui sont réductibles ? Ainsi, pour $\mathbf{SL}_2$, si l'on prend θ d'ordre 2, la représentation $\pm R_T^\theta$ se décompose en deux représentations irréductibles de degré $(q \pm 1)/2$, échangées par l'automorphisme externe de $\mathbf{SL}_2$; ces représentations sont particulièrement intéressantes pour la théorie des formes modulaires (Hecke, Math. Werke, p. 704). Que se passe-t-il pour $\mathbf{SL}_n$, $n \geq 3$? (Noter que l'on ne connaît pas la table des caractères de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{F}_q)$.)

c) Dans quel cas peut-on réaliser R_T^θ sur le corps $\mathbf{Q}(\theta)$ engendré par les valeurs de θ ? Il revient au même de demander si la représentation virtuelle $\Theta_{T,G}$ de $G^F \times T^F$ est réalisable sur $\mathbf{Q}$. Deligne m'a fait observer que ce n'est pas toujours le cas (par exemple, lorsque $G = \mathbf{SU}_3$ ou $\mathbf{SU}_6$, et que T est un "tore de Coxeter", cette représentation n'est même pas réalisable sur $\mathbf{R}$, cf. [15], prop. 10).

On peut aussi se demander (c'est là une question plus précise) quels sont les indices de Schur des R_T^θ , et les corps gauches correspondants ; par exemple, est-il vrai que ces corps gauches ne soient ramifiés qu'aux places à l'infini et à celles divisant p ? Le cas de SL_2 a été étudié par Hecke (Math. Werke, p. 761-766), et celui de GL_n par A. Helversen-Pasotto (CR t. 282, 1976).

d) On ne peut manquer d'être frappé par le fait que la cohomologie fournit (presque) toutes les représentations irréductibles des groupes réductifs, lorsque le corps de base est, soit celui des nombres réels (cf. [17]), soit un corps fini. Y a-t-il des résultats analogues sur un corps p-adique ? On peut l'espérer. Pour l'instant, seule la représentation "spéciale" a une interprétation cohomologique en termes de l'immeuble de Bruhat-Tits (cf. [1]) ; pour aller plus loin, il sera sans doute nécessaire d'utiliser, non seulement la structure combinatoire de cet immeuble, mais encore les structures (ind- pro- ...)-algébriques sous-jacentes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BOREL - Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup, Invent. Math., 35 (1976), p. 233-259.

[2] A. BOREL et al. - Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups, Lecture Notes in Math. 131, Springer-Verlag, 1970.

[3] P. DELIGNE - Rapport sur la formule des traces, SGA 4 $\frac{1}{2}$, à paraître.

[4] P. DELIGNE and G. LUSZTIG - Representations of reductive groups over finite fields, Ann. of Math., 103 (1976), p. 103-161.

[5] V. ENNOLA - On the characters of the finite unitary groups, Ann. Acad. Sci. Fenn., ser. A, n° 313 (1963).

[6] W. FEIT - Divisibility of projective modules of finite groups, Journal of Pure and Applied Algebra, 8 (1976), p. 183-185.

[7] F.G. FROBENIUS - Über Gruppencharaktere, Sitz. König. Pr. Akad. Wiss. Berlin (1896), p. 985-1021 (Ges. Abh., III, p. 1-37).

[8] J.A. GREEN - The characters of the finite general linear groups, Trans. A.M.S. 80 (1955), p. 402-447.

[9] A. GROTHENDIECK - Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L , Sém. Bourbaki, exposé 279 (1964), Benjamin, New York (reproduit dans "Dix Exposés sur la cohomologie des schémas", North-Holland, 1968).

[10] D. KAZHDAN - Proof of Springer's Hypothesis, à paraître.

[11] G. LUSZTIG - Sur la conjecture de Macdonald, C.R. Acad. Sci. Paris, Série A, 280 (1975), p. 317-320.

[12] G. LUSZTIG - Divisibility of projective modules of finite Chevalley groups by the Steinberg module, à paraître.

[13] G. LUSZTIG - On the Green polynomials of classical groups, Proc. London Math. Soc., à paraître.

[14] G. LUSZTIG - On the finiteness of the number of unipotent classes, Invent. Math., à paraître.

[15] G. LUSZTIG - Coxeter orbits and eigenspaces of Frobenius, Invent. Math., à paraître.

[16] I.G. MACDONALD - Principal parts and the degeneracy rule, non publié.

[17] W. SCHMID - L^2-cohomology and the discrete series, Ann. of Math., 103 (1976), p. 375-394.

[18] T.A. SPRINGER - Generalization of Green's polynomials, Proc. Symp. Pure Math. XXI (1971), A.M.S., p. 149-153.

[19] T.A. SPRINGER - On the characters of certain finite groups, Lie groups and their representations (ed. by I.M. Gelfand), Budapest (1975), p. 621-644.

[20] B. SRINIVASAN - The Steinberg character of a finite simple group of Lie type, J. Austr. Math. Soc., 12 (1971), p. 1-14.

[21] B. SRINIVASAN - Isometries in finite groups of Lie type, J. of Algebra, 26 (1973), p. 556-563.

[22] R. STEINBERG - Endomorphisms of linear algebraic groups, Memoirs Amer. Math. Soc., 80, 1968.

[23] J. TATE - Algebraic cycles and poles of zeta functions, Arith. Alg. Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963), Harper and Row, New York, 1965, p. 93-110.