J. M. LEMAIRE

Le transfert dans les espaces fibrés

Séminaire N. Bourbaki, 1977, exp. n° 472, p. 23-37

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1975-1976__18__23_0>

LE TRANSFERT DANS LES ESPACES FIBRÉS
[D'après J.BECKER et D.GOTTLIEB]

par J.M. LEMAIRE

§ 1. Introduction: essai d'analyse chronologique

1.1 Le transfert est une notion classique en (co)homologie des groupes : soit G un groupe discret, H un sous-groupe d'indice fini N , et $\mathfrak{M}$ un G-module. La trace :

$$\tau \ : \ \mathfrak{M}^H \longrightarrow \mathfrak{M}^G$$

induit un homomorphisme, appelé transfert :

$$\tau \ : \ H^*(H;\mathfrak{M}) \longrightarrow H^*(G;\mathfrak{M}) .$$

Si $\rho : H^*(G;\mathfrak{M}) \longrightarrow H^*(H;\mathfrak{M})$ est la restriction, la composée $\tau \circ \rho$ est la multiplication par l'indice N . (cf [L], p.55). On peut aussi définir le transfert par la (co)homologie singulière des revêtements finis d'ordre N : au niveau des chaînes, le transfert associe à un simplexe la somme de ses relèvements (cf par exemple [B] p.118).

Toujours dans le cas d'un revêtement $p: Y \to X$ d'ordre N , Atiyah ([A], p. 29) a remarqué que l'image directe des fibrés définit un transfert en K-théorie.
On a la formule :

(1) $\qquad \forall \xi \in \mathrm{Vect}(X), \ \forall \eta \in \mathrm{Vect}(Y) \quad , \quad f_*(f^*\xi \otimes \eta) = \xi \otimes f_*\eta$

qui est à rapprocher de la formule :

$$\forall x \in C^*(X) \ , \ \forall y \in C^*(Y), \ \tau(p^* x \cup y) = x \cup \tau y$$

pour les cochaines singulières. Mais on notera qu'en général le fibré $f_*(1)$ n'est pas trivial, de sorte que $f_*(f^* \xi) = \xi \otimes f_*(1) \neq N.\xi$.

Dans [KP] , Kahn et Priddy généralisent tout cela en construisant une S-application (i.e. un morphisme dans la catégorie stable) :

$$\tau_p : \Sigma^r X^+ \longrightarrow \Sigma^r Y^+$$

qui induit les transferts ci-dessus ($X^+ = X \amalg * = X/\emptyset$). Par suite il y a un transfert en toute théorie de (co)homologie, et ce transfert commute aux opérations cohomologiques stables : on explique ainsi des résultats d'Evens [E] pour les opérations de Steenrod et de Quillen [Q] pour les opérations d'Adams localisées.

1.2 Les résultats précédents suggèrent les questions suivantes : soit $F \to E \xrightarrow{p} B$ une fibration ; dans quelles conditions :

a/ a-t-on un transfert $\tau_p : h^*(E) \to h^*(B)$ verifiant la formule :

(1')
$$\tau_p(p\, x \cup y) = x \cup \tau_p \eta$$

pour une théorie multiplicative h^* ?

b/ ce transfert est-il induit par une S-application ?

Ces questions ont été résolues, avec un succès croissant, dans les articles [I] à [V] .(*)

Dans [I], Gottlieb définit le transfert en (co)homologie ordinaire, à coefficients (constants) quelconques, pour les fibrations localement triviales de fibre une variété topologique compacte M_n. Cette construction repose sur deux idées :

a/ "l'intégration de long de la fibre" : supposons M orientable, et, pour simplifier l'écriture, sans bord. Si le système local $\underset{\sim}{H}^n(M;\mathbb{Z})$ est trivial, la suite spectrale de Serre de cohomologie du fibré $M \to E \to B$ permet de définir:

$$p_{\#} : H^i(E,G) \to H^{i-n}(B;G)$$

par la composée :

(2)
$$H^i(E) \twoheadrightarrow E_\infty^{i-n,n} \rightarrowtail E_2^{i-n,n} = H^{i-n}(B, H^n(M;G)) = H^{i-n}(B)$$

b/ le "théorème d'inclusion de la fibre". Il dit que, sous les mêmes hypothèses sur M, il existe une classe $\chi \in H^n(E,\mathbb{Z})$ telle que

(*) Le rapporteur remercie D. Gottlieb pour son "leitfaden".

$i^* \chi = \chi(M).\mu$, où $i : M \hookrightarrow E$ est l'inclusion, $\chi(M)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de M, et $\mu \in H^*(M ; \mathbb{Z})$ la classe d'orientation. Ce dernier théorème est une généralisation de la remarque suivante : si M est différentiable, et si le fibré admet un groupe structural de difféomorphismes, alors le fibré tangent à M s'étend en un fibré sur E , à savoir le fibré des "vecteurs tangents" aux fibres : $EG \times_G TM \to EG \times_G M = E$. Par suite toute classe caractéristique de M est dans l'image de i^*, en particulier la classe d'Euler !

Toujours sous les hypothèses sur M faites en a/ et b/ le transfert $\tau : H^i(E) \to H^i(B)$ est alors défini par :

(3) $$\forall\, x \in H^i(E)\,,\quad \tau(x) = p_{\#}(x \cup \chi)$$

ce transfert est naturel et satisfait la formule (1') . Il en résulte aisément que τp^* est la multiplication par $\chi(M)$. Cette approche reste intéressante car elle permet de définir, dans le cas où M est différentiable, des transferts associés à d'autres nombres caractéristiques (Pontryagin, Stiefel-Whitney) .
Dans [III] , elle est utilisée pour définir le transfert de Lefchetz, associé à un triangle :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & & E \arrow[dl, "\rho"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

mais cette construction est dépassée par celle de [V]: voir plus loin.

1.3 La question b/ est résolue dans [II] , toujours dans le cas où la fibre est une variété compacte M . Bien que cette construction soit aussi dépassée par celle de [V] , il n'est pas inutile d'en dire quelques mots . Considérons d'abord le fibré trivial $p : M \to *$. Le transfert cherché est une S-application :

$$\tau : S^r = S^r \wedge S^\circ \to S^r \wedge M^+$$

telle que la composée :

$$S^r \xrightarrow{\tau} S^r \wedge M^+ \xrightarrow{S^r p^+} S^r$$

soit de degré $\chi(M)$.

Supposons M différentiable, de fibré tangent α , plongée dans $\mathbb{R}^r$, de fibré normal β . Le choix d'un voisinage tubulaire définit l'application de Thom-Pontryagin $c : S^r \to T(\beta)$. Alors on peut prendre pour $\tau : S^r \to S^r \wedge M^+$ la composée :

$$S^r \subsetneq T(\beta) \to T(\beta \oplus \alpha) \cong T(\mathbb{R}^r) = S^r \wedge M^+ .$$

En effet la composée :

$$T(\beta) \to T(\beta \oplus \alpha) \cong T(\mathbb{R}^r) = S^r \wedge M^+ \xrightarrow{p^+} S^r$$

n'est autre que l'application de Gauss :

$$g : T(\beta) = D(\beta)/S(\beta) \to e^r/S^{r-1} = S^r$$

qui est de degré $\chi(M)$ d'après le théorème de Hopf (cf [M] , th.1 p.38).

La construction du transfert $S^r \wedge B^+ \to S^r \wedge E^+$ dans [II] consiste à faire ce qui précède "fibre par fibre" : Gottlieb et Becker utilisent une version G-équivariante de l'application $S^r \to S^r \wedge M^+$ (qui repose sur le théorème de plongement de Mostow) et des constructions plus ou moins classiques de G-fibrés. Entre autres propriétés, le transfert ainsi obtenu généralise celui de Kahn et Priddy pour les revêtements.

1.4 Il restait à construire le transfert pour un fibré de Hurewicz , de fibre un cw-complexe compact. Dans [IV] , Casson et Gottlieb ont d'abord résolu ce problème en utilisant des lemmes techniques d'approximation des fibrations de Hurewicz par des fibrés de fibre une variété. Mais l'approche de [V] est beaucoup plus élégante, c'est donc elle que nous allons examiner plus en détail.

§ 2. Construction homotopique du transfert de Lefschetz

2.1 Les résultats

On considérera dans la suite un triangle commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

dans lequel p est une fibration de Hurewicz et B un cw-complexe connexe, de dimension finie ; on suppose en outre que la fibre F de p a le type d'homotopie d'un cw-complexe fini. On désignera par Λ_f le nombre de Lefschetz de la restriction de f à F.

Théorème de transfert

Soit A un sous-complexe de B. Il existe une S-application :

$$\tau(f) : \Sigma^r(B/A) \to \Sigma^r(E/p^{-1}(A))$$

cette application est naturelle, ne dépend que de la classe d'homotopie fibrée de f, et possède les propriétés suivantes :

a/ Si $B = *$, la composée

$$S^r \xrightarrow{\tau(f)} \Sigma^r B^+ \xrightarrow{p^+} S^r$$

est de degré Λ_f.

b/ Pour toute théorie multiplicative h, on a les formules suivantes, pour tous $x \in h^*(B)$, $y \in h^*(E)$, $z \in h_*(B)$:

$$\tau(f)^* (p^* x \cup y) = x \cup (\tau(f)^* y)$$

$$p_* (y \cap \tau(f)_* z) = (\tau(f)^* y) \cap z \quad .$$

On déduit facilement des propriétés précédentes le :

Corollaire 1 : la composée :

$$H^* (B,A;G) \xrightarrow{p^*} H^*(E,p^{-1}(A);G) \xrightarrow{\tau(f)^*} H^* (B,A;G)$$

est la multiplication par Λ_f.

et la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch fournit immédiatement le :

Corollaire 2 : Pour toute théorie de cohomologie h, la composée :

$$h^* (B,A)\otimes Z[\Lambda_f^{-1}] \xrightarrow{p^*} h^* (E,p^{-1}(A))\otimes Z[\Lambda_f^{-1}] \xrightarrow{\tau(f)} h^* (B,A)\otimes Z[\Lambda_f^{-1}]$$

est un isomorphisme.

En particulier, si $\Lambda_f = 1$, l'homomorphisme $p^*: h^*(B,A) \to h^*(E, p^{-1}(A))$ est une injection sur un facteur direct. Une autre conséquence moins immédiate est le :

Théorème de transgression

Supposons la fibre F connexe, et soit $\omega : \Omega B \to F$ l'évaluation de l'action en un point de F (qui figure dans la suite d'Eckmann-Hilton). Alors, pour tout cw-complexe fini X, l'homomorphisme :

$$\omega_* : \{X, \Omega B\} \to \{X, F\}$$

est tel que $\Lambda_f \cdot \omega_* = 0$.

2.2 Construction de $\tau(f)$

Elle repose sur l'extension de la S-dualité (de Spanier-Whitehead, cf [H] p.207, ou [S] pp.321-335) aux fibrés, plus précisément aux ex-espaces de James ([J]).

L'idée d'utiliser la S-dualité est suggérée par la dualité d'Atiyah : reprenons les notations de 1.3, et considérons la composée :

$$S^r \xrightarrow{c} T(\beta) \xrightarrow{d} T(\beta) \wedge M^+$$

où d est défini par $d\, v_m = (v_m, m)$. C'est une S-dualité. Considérons maintenant l'application

$$\theta : T(\beta) \wedge M^+ \to S^r \wedge M^+$$

obtenue comme suit : le fibré normal au plongement diagonal $M \hookrightarrow D(\beta) \times M$ est $\alpha \oplus \beta \cong \mathbf{R}^r$, par suite on peut choisir un voisinage tubulaire de M dans $D(\beta) \times M$ homéomorphe à $e^r \times M$.

En passant l'extérieur des voisinages au quotient, on obtient θ. Il est clair que $\theta d\, c : S^r \to S^r \wedge M^+$ n'est autre que τ, et on peut montrer que $p\theta : T(\beta) \wedge M^+ \to S^r$ est S-dual de dc.

Le théorème de Hopf assure que la composée $(p\,\theta)(dc) : S^r \to S^r$ est de degré $\chi(M)$. Mais ceci se généralise :

Lemme ([V] , 2.1).- Soit X un cw-complexe fini et $f: X \to X$ une application continue ; soit $\widetilde{\lambda}(f) = \Sigma(-1)^i \operatorname{tr} \widetilde{H}_i(f)$. Soit $\mu : S^r \to X \wedge \widetilde{X}$ une S-dualité et $\widetilde{\mu} : X \wedge \widetilde{X} \to S^r$ le dual de μ pour la dualité :

$$S^{2r} = S^r \wedge S^r \xrightarrow{\mu \wedge \widetilde{\mu}} X \wedge \widetilde{X} \wedge X \wedge \widetilde{X} \xrightarrow{T} X \wedge \widetilde{X} \wedge X \wedge \widetilde{X}$$

(où T permute les X). Alors la composée :

$$S^r \xrightarrow{\mu} X \wedge \widetilde{X} \xrightarrow{f \wedge \widetilde{X}} X \wedge \widetilde{X} \xrightarrow{\mu} S^r$$

est de degré $\widetilde{\lambda}(f)$.

Preuve. Comme $\hat{\mu}$ est une S-dualité, $\hat{\mu}_*: \widetilde{H}_*(X, \mathbf{Q}) \otimes \widetilde{H}_*(X; \mathbf{Q}) \to \widetilde{H}_*(S^r; \mathbf{Q})$ est une dualité, i.e. la transposée $\widetilde{\mu}_*: \widetilde{H}_*(X;\mathbf{Q}) \xrightarrow{\cong} \widetilde{H}^*(\hat{X};\mathbf{Q})$ est un isomorphisme de degré r . Par suite, en appliquant $\widetilde{H}_*(\,.\, ;\mathbf{Q})$, on est ramené à la version graduée de l'assertion suivante : si $u : V \to V$ est un endomorphisme d'un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension finie, la composée :

$$\mathbf{Q} \xrightarrow{id} \operatorname{Hom}(V,V) = V^* \otimes V \xrightarrow{V^* \otimes u} V^* \otimes V \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Q}$$

où ε est la forme canonique (évaluation), est la multiplication par $\operatorname{tr} u$: c'est la définition intrinsèque de la trace !

Il s'ensuit que dans le cas du fibré trivial $F \to *$, on a la définition suivante du transfert : soit $\mu : S^r \to F^+ \wedge \widetilde{F}$ une S-dualité, $\widetilde{\mu}$ son dual comme ci-dessus.

Alors $\tau(f)$ est la composée :

$$S^r \xrightarrow{\mu} F^+ \wedge \widetilde{F} \xrightarrow[(F,f)^+ \wedge \widetilde{F}]{} F^+ \wedge F^+ \wedge \widetilde{F} \xrightarrow[F^+ \wedge \widetilde{\mu}]{} F^+ \wedge S^r = S^r \wedge F^+ .$$

Le transfert par une fibration quelconque n'est autre que l'extension de de cette construction aux ex-espaces.

2.3 Ex-espaces

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons les principales définitions :

un ex-espace (au-dessus d'un cw-complexe fixé B) est la donnée de deux applications continues $p : E \to B$ et $\Delta : B \to E$ telles que $p\Delta = B$. On notera simplement $E = (E, B, p, \Delta)$.

Une ex-application $f : E \to E'$ entre deux ex-espaces est une application continue telle que $p'f = p$ et $f\Delta = \Delta'$. On définit de même une ex-homotopie.

On identifie un espace pointé $(X, *)$ à l'ex-espace $(B \times X, B, p_B, j)$, avec $jb = (b, *)$. A toute application continue $p : E \to B$ on associe l'ex-espace :

$$\overline{E} = (E \amalg B, B, \overline{p}, \overline{\Delta})$$

où $\overline{p}$ et $\overline{\Delta}$ sont définis de façon évidente.

Si E, E' sont deux ex-espaces, on définit sans beaucoup d'imagination les ex-espaces $E \times_B E'$, $E \vee_B E'$, $E \wedge_B E'$, $\Sigma E = S^1 \times B \wedge_B E$. On définit ΩE comme étant l'ex-espace des lacets dans les fibres issus de la section $\Delta(B)$, etc ...

Dans ce rapport, on appellera "bon" ex-espace un ex-espace $E = (E, B, p, \Delta)$ qui vérifie les conditions suivantes :

1/ $p : E \to B$ est une ex-fibration, i.e. il existe une fonction de relèvement de chemins :

$$\Gamma : E \times_B B^I \longrightarrow E^I$$

telle que pour tout $\sigma \in B^I$, on ait

$$\Gamma(\Delta(\sigma(o)), \sigma) = \Delta\sigma$$

2/ E est "bien basé", i.e. il existe une rétraction (au sens des ex-applications)

$$r : E \times_B I \longrightarrow E \vee_B I .$$

Il est clair qu'un espace bien pointé s'identifie à un bon ex-espace comme indiqué plus haut, et que si $p : E \to B$ est une fibration, $\overline{E}$ est un bon ex-espace.

Pour les bons ex-espaces, on peut développer une théorie de l'homotopie entièrement analogue à la théorie classique (théorème de suspension, suites exactes, etc...). Pour les ex-espaces dont la base est de dimension finie et la fibre a le type d'homotopie d'un cw-complexe fini fini, on définit la S-dualité comme dans le cas classique :

$\mu : S^r \times B \to E \wedge_B \widetilde{E}$ est une S-dualité si :

$$D_\mu \ : \{X \wedge_B E, Y\}_q \ \to \ \{X, Y \wedge_B \tilde{E}\}_{q+r}$$

$$D^\mu \ : \{E \wedge_B X, Y\}_q \ \to \ \{X, E \wedge Y\}_{q+r}$$

sont des isomorphismes, pour tout q, quels que soient les bons ex-espaces X et Y .

On a les résultats suivants :

<u>Théorème 2.3.1</u>

<u>$S^r \times B \to E \wedge_B \tilde{E}$ est une S-dualité si la restriction à chaque fibre est une S-dualité</u>.

<u>Théorème 2.3.2</u>

<u>Tout bon ex-espace, de base de dimension finie et de fibre ayant</u> le <u>type d'homotopie d'un cw-complexe fini</u>, <u>admet un S-dual</u>.

Nous pouvons à présent définir le transfert :

soit
$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$
un triangle commutatif, avec B cw-complexe de dimension finie, p fibration de fibre F ayant le type d'homotopie d'un cw-complexe fini. D'après le théorème 2.3.2, il existe une S-dualité d'ex-espaces :

$$\mu : S^r \times B \ \to \ \bar{E} \wedge_B \tilde{E}$$

comme dans le cas des espaces, $\bar{E} \wedge_B \tilde{E}$ est S^{2r}-autodual et on définit

$$\tilde{\mu} : \bar{E} \wedge_B \tilde{E} \ \to \ S^r \times B \ .$$

Soit la composée :

$$S^r \times B \xrightarrow{\mu} \bar{E} \wedge_B \tilde{E} \xrightarrow{(\bar{E}, \bar{f}) \wedge \tilde{E}} \bar{E} \wedge_B \bar{E} \wedge_B \tilde{E} \xrightarrow{\bar{E} \wedge \tilde{\mu}} \bar{E} \wedge_B B \times S^r \xrightarrow{\cong} \Sigma^r \bar{E}$$

et soit $A \subset B$, et $E_A = p^{-1}(A)$. La composée ci-dessus envoie

$S^r \times A \cup \{s_\circ\} \times B$ dans $S^r \times E_A \cup \{s_\circ\} \times E$; par passage au quotient, on obtient donc :

$$\tau(f) : S^r \wedge (B/A) \longrightarrow S^r \wedge (E/E_A)$$

qui est le transfert cherché. Les vérifications nécessaires se font sans surprise.

2.4 Démonstration du théorème de transgression

Nous en indiquons seulement les étapes essentielles.

Soit
$$\begin{tikzcd} E' \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "p'"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & \Sigma X & \end{tikzcd}$$
un triangle commutatif,

avec les hypothèses du théorème de transfert mais où la base est la suspension d'un espace pointé X.

Si $F' = p'^{-1}(*)$ est la fibre de p', on a le transfert :

$$\tau(f') : \Sigma^{r+1} X \longrightarrow \Sigma^r(E'/F')$$

ce dernier a ici une interprétation très simple : en relevant les chemins canoniques de ΣX, à savoir $\lambda_{<t,x>} : u \mapsto <ut, x>$, on définit une application continue

$$\sigma \quad : \Sigma X \longrightarrow E'/F' .$$

<u>Lemme</u> - <u>Si</u> F' <u>est connexe</u>, <u>les S-applications</u> $\tau(f')$ <u>et</u> $\wedge \sigma$ <u>sont égales</u> ($\wedge$ <u>désigne le nombre de Lefschetz de</u> $f'|F'$).

Soit maintenant le triangle
$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$
toujours avec les mêmes hypothèses. Soit $b_\circ \in B$, et $\omega : \Omega B \to F$ l'évaluation de l'action en $b_\circ$.

Soit X un complexe de dimension finie, et $g : X \to \Omega B$ une application continue pointée.

La composée :

$$\Sigma X \xrightarrow{\Sigma g} \Sigma \Omega B \xrightarrow{a} B$$

où a est l'adjointe de l'identité de ΩB , induit un triangle :

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "p'"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & \Sigma X & \end{tikzcd}$$

Lemme :- Le carré :

$$\begin{tikzcd} E'/F \arrow[r, "k"] & \Sigma F \\ \Sigma X \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r, "\Sigma g"] & \Sigma\Omega B \arrow[u, "\Sigma\omega"'] \end{tikzcd}$$

dans lequel $k : E'/F \to \Sigma F$ est le "bord" de la suite de Puppe de la cofibration $F \hookrightarrow E'$, est commutatif .

Pour établir le théorème de transgression, il suffit de montrer que $\wedge\{\omega g\} = o$, pour toute $g : X \to \Omega B$ avec X de dimension finie .
D'après le second lemme, on a $\{\omega g\} = \{k\sigma\}$ et d'après le premier , $\wedge\{\omega g\} = \{k . \wedge\sigma\} = \{k\} . \tau(f')$. Or le diagramme commutatif suivant de S-applications :

$$\begin{tikzcd} E'^{+} \arrow[r, "c'"] & E' \arrow[r, "j"] & E'/F \arrow[r, "k"] & \Sigma F \\ \Sigma X^{+} \arrow[u, "\tau(f')"] \arrow[r, "c"] & \Sigma X \arrow[ur, "\tau(f')"] & & \end{tikzcd}$$

où c, c', j sont les quotients évidents, et $kj = o$ par Puppe, montre que $\{k\}\tau\{c\} = o$, d'où $\{k\}\tau = o$ puisque c a une section.

§ 3. Applications

3.1 Un principe de scindement ([II])

Théorème.- Soit ξ un 2n-fibré vectoriel réel de base B de dimension finie . Il existe un cw-complexe (de dimension finie) X et une application $\lambda : X \to B$ tels que :

(1) le groupe structural de $\lambda^*\xi$ se réduit au normalisateur $N(T)$ d'un tore maximal de $O(2n)$.

(2) $\lambda^* : h^* B^+ \to h^* E^+$ est un monomorphisme sur un facteur direct , pour toute théorie h^* .

La démonstration s'appuie sur le fait que $\chi(G/N(T)) = 1$ pour tout groupe de Lie compact G (cf par exemple [B] , p.27, 6.3) . On prend alors $X = \tilde{E}/N(T)$, où $\tilde{E}$ est l'espace total du $0(2n)$-fibré principal associé à ξ et l'on applique le corollaire 2 à la fibration :

$$0(2n)/N(T) \to \tilde{E}/N(T) \xrightarrow{\lambda} \tilde{E}/0(2n) = B .$$

Ce théorème est à la base de la démonstration du théorème de Quillen-Friedlander-Sullivan, alias la conjecture d'Adams, proposée dans [II], § 7 . L'idée consiste à appliquer le théorème à la théorie de cohomologie associée à l'espace de lacets infini BF, et compte-tenu de ce que $N(T) = \mathfrak{S}_n \int 0(2)$, de se ramener via des techniques inspirées de [Q], à la "conjecture" pour les fibrés de rang 2 , démontrée par Adams.

3.2 "The fibering question" (cf [III] et [IV])

Il s'agit de savoir si un espace E peut être l'espace total d'une fibration de façon non triviale. Dans ce qui suit, "compact" signifie homotope à un cw-complexe fini.

Théorème : Il n'existe pas de fibration non triviale , de fibre et base compacte , d'espace total $\mathbb{R}P^{2n}$, $\mathbb{C}P^{2n}$, $\mathbb{H}P^{2n}$, cay P^2 .

Théorème : Soit $p : S^n \to B$, $n \geq 2$ une fibration non triviale de base et de fibre F compacte . Alors :

- si n est pair , $F \sim S^0$
- si n est impair , $[p] \in \pi_n(B)$ est d'ordre infini .

Faute de l'espace nécessaire, nous nous contenterons de montrer à titre d'exemple qu'il n'existe pas de submersion non triviale $p : \mathbb{R}P^{2n} \to M$ sur une variété M . D'après Ehresmann, p est une fibration de fibre une variété compacte F . On a $\chi(M) . \chi(F) = \chi(\mathbb{R}P^{2n}) = 1$, d'où $\chi(F) = \pm 1$.

On en déduit que F est connexe , et la suite exacte d'homotopie montre que $\pi_1(M) = 0$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Le transfert en cohomologie entière montre que p^* est injective , donc $H^*(M)$ est de torsion et M n'est pas orientable : ergo $\pi_1(M) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Soit $\tilde{M}$ le revêtement universel de M ; on a le diagramme :

$$\begin{tikzcd} S^{2n} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{p}"'] & \mathbb{R}\mathbb{P}^{2n} \arrow[d, "p"] \\ \tilde{M} \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

et le transfert montre que $\tilde{p}^*$ est injective : par suite, ou bien $\tilde{M}$ est acyclique, donc un point, ou bien F est de dimension nulle et connexe, donc un point.

3.3 Applications du théorème de transgression

Notons d'abord que ce théorème entraîne que $\Lambda\omega_* = o$ pour toute théorie d'homologie, en particulier l'homotopie stable, et que $\Lambda\omega^* = o$ au moins en cohomologie ordinaire.

Quant à l'application ω, elle apparaît sous des formes variées : projection $G \to G/H$, où G est un groupe topologique et G/H un quotient compact ; évaluation $\omega : M \to X$ où M est un espace d'équivalences d'homotopie de X ; inclusion de la fibre d'un fibré principal. D'où une variété d'applications, qu'on trouvera dans [III], [IV], ou [V].

En voici quelques unes :

<u>Proposition.-</u> <u>Soit</u> G <u>un groupe de Lie compact</u>, <u>et</u> N <u>le normalisateur d'un tore maximal</u>. <u>Alors la projection</u> $G \to G/N$ <u>est stablement triviale</u>.

En effet, $\chi(G/N) = 1$ et G est un polyèdre. On observera que $p_* : \pi_n(G) \to \pi_n(G/N)$ est un isomorphisme pour $n \geq 3$!

<u>Proposition.-</u> <u>Soit</u> G <u>un groupe de Lie qui opère sur un cw-complexe connexe fini</u> X, <u>tel que</u> $\chi(X) \neq o$. <u>Soit</u> $x \in X$, <u>et soit</u> $\omega_x : G \to X$ <u>l'évaluation en</u> x. <u>Alors</u> $o = \omega_* : H_*(G; Z) \to H_*(X; Z)$.

Remarquons d'abord que l'assertion ne dépend pas de x. Ensuite, le théorème de Lefschetz, joint au fait qu'un tore admet un générateur, montre qu'un tore maximal T de G admet un point fixe x_o.

Par suite ω_{x_o} factorise à travers $\rho : G \to G/T$. Le théorème de transgression montre que $\chi(G/T) . \rho_* = 0$. Or, d'après Bott et Borel [BB], $H_*(G/T ; Z)$ est sans torsion. Comme $\chi(G/T) = |W(G)| \neq 0$ on a $\rho_* = 0$ et donc $\omega_* = 0$.

<u>Proposition.</u>– <u>Soit</u> $\alpha \in \pi_i(S^{2n})$, <u>soit</u> $\{\alpha\} \in \pi^S_{i-2n}$ <u>l'élément représenté par</u> α, <u>et soit</u> $\iota_{2n} \in \pi_{2n}(S^{2n})$ <u>un générateur</u>. <u>Alors, si</u> $[\alpha, \iota_{2n}] = 0$, <u>on a</u> $2\{\alpha\} = 0$.

<u>Preuve</u> $[\alpha, \iota_{2n}] = 0$ signifie qu'il existe une application $F : S^i \times S^{2n} \to S^{2n}$ dont la restriction à $S^i \times \{*\}$ est α et la restriction à $\{*\} \times S^{2n}$ est l'identité. Soit M l'espace des applications continues de degré 1 de S^{2n} dans S^{2n}. L'adjointe de F est $\tilde{F} : S^i \to M$, et on a $\omega \tilde{F} = \alpha$, où $\omega : M \to S^{2n}$ est l'évaluation au point de base. Comme $\chi(S^{2n}) = 2$, le théorème de transgression montre que $2\{\alpha\} = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[I] D.GOTTLIEB - Fibre bundles and the Euler characteristic, J.Diff. Geom. 10 (1975) pp 39-48

[II] J.C.BECKER - D.GOTTLIEB - The transfer map and fiber bundles, Topology 14 (1975) pp 1-12

[III] J.C.BECKER - D.H.GOTTLIEB - Applications of the evaluation map and transfer map theorems, Math.Ann. 211 (1974) pp 277-288

[IV] A.CASSON - D.GOTTLIEB - Fibrations with compact fibres, preprint

[V] J.C.BECKER - D.H.GOTTLIEB - The transfer for fibrations and duality, preprint

[A] M.ATIYAH - Characters and cohomology of finite groups, IHES n°9 (1961), pp 23-64

[BB] R.BOTT - On torsion in Lie groups, Proc.Nat. Acad.Sc. USA (1954) pp 586-588

[B] G.E.BREDON - Introduction to compact transformation groups, Academic Press. N.Y. 1972

[E] L.EVENS - Steenrod operations and the transfer, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968) pp 1387-1388

[H] D.HUSEMOLLER - Fibre bundles, McGraw-Hill, N.Y. 1966

[J] I.JAMES - Ex-homotopy theory, Ill Journ.Math. 15 (1971), pp 324-337

[KP] D.KAHN - S.PRIDDY - Applications of the transfer to stable homotopy theory, Bull.Amer. Math.Soc. 78 (1972) pp 981-986

[L] S.LANG - Rapport sur la cohomologie des groupes, Benjamin, N.Y. (1966)

[M] J.MILNOR - Topology from a differentiable viewpoint, U-Press of Virginia, Charlottesville 1965

[Q] D.QUILLEN - The Adams conjecture, Topology 10 (1970) pp 67-80

[S] R.SWITZER - Algebraic Topology - Homotopy and Homology Springer-Verlag Grundl. Math.Wiss. n°212, Berlin 1975