Daniel Ferrand

Les modules projectifs de type fini sur un anneau de polynômes sur un corps sont libres

Séminaire N. Bourbaki, 1977, exp. nº 484, p. 202-221

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1975-1976__18__202_0>

Séminaire BOURBAKI 484-01
28e année, 1975/76, n° 484 Juin 1976

LES MODULES PROJECTIFS DE TYPE FINI SUR UN ANNEAU DE POLYNÔMES SUR UN CORPS SONT LIBRES

[d'après QUILLEN [11] et SUSLIN [16]]

par Daniel FERRAND

L'énoncé mis en titre vient d'être démontré simultanément par Quillen et Suslin ; il avait motivé pendant vingt ans des travaux considérables pour lesquels on pourra consulter les articles de Bass ([1]) et Swan ([17]).

Ce résultat apparaît aujourd'hui comme un cas particulier (dim R = 0) du théorème suivant :

THÉORÈME (Quillen-Suslin).- Si R est un anneau régulier de dimension ≤ 2, tout $R[T_1,\ldots,T_n]$-module projectif de type fini provient de R.

On conjecture évidemment que l'hypothèse restrictive sur la dimension est inutile.

Pour prouver ce résultat Quillen et Suslin utilisent le même principe de récurrence sur le nombre de variables mais leurs démonstrations du résultat clé 2.2 sont différentes ; celle de Quillen repose sur une remarquable propriété de recollement : la propriété pour un $A[T]$-module de présentation finie de provenir de A est locale sur A.

En utilisant des idées de Quillen et de Suslin, Vaseršteín a ensuite donné une démonstration particulièrement simple du théorème lorsque la base est un corps ; elle ne fait intervenir que des transformations élémentaires de matrices. Elle est reproduite au début de cet exposé car elle montre clairement le lien - et le progrès conceptuel - entre les méthodes utilisées dans les tentatives de démonstrations antérieures et les idées nouvelles de Quillen et Suslin.

Tous les anneaux considérés sont supposés commutatifs et unitaires.

Soit $A \to B$ un morphisme d'anneaux. On dit qu'un B-module F *provient* de A (en anglais : " is extended from A ") s'il existe un A-module E et un isomorphisme de B-modules $F \sim E \otimes_A B$.

1. La démonstration de VASERŠTEIN ([20])

THÉORÈME 1.1.- Soient $A = k[T_1,\ldots,T_n]$ un anneau de polynômes à n variables sur un corps k et $f = (f_1,\ldots,f_r)$ une suite unimodulaire d'éléments de A . Alors, il existe une matrice $r \times r$ inversible à coefficients dans A dont la première ligne est $f_1,\ldots,f_r$.

Si $r \leq 2$, l'énoncé est évident ; si $r \geq 3$, la démonstration montre qu'on peut choisir une telle matrice dans le sous-groupe $E_r(A)$ de $GL_r(A)$ engendré par les matrices élémentaires.

Dans ([13]), Serre a montré que tout A-module projectif de type fini est stablement libre et que, par suite, l'énoncé 1.1 implique que tout A-module projectif de type fini est libre.

Dans la suite, on considèrera une telle suite f comme un élément de A^r ; dans l'écriture matricielle, f correspond donc à une colonne.

Lemme 1.2 (Suslin).- Soient R un anneau et $f \in A = R[T]$ un polynôme unitaire de degré d . Si $g \in A$ est un polynôme de degré $< d$, chaque coefficient de g est coefficient dominant d'un polynôme de degré $d-1$ appartenant à l'idéal $fA + gA$.

La conclusion équivaut à l'énoncé suivant avec $s = 0$, énoncé que l'on démontre par récurrence descendante sur s à partir du cas $s = d-1$ où il est trivialement vrai :

" Soit $h = c_{d-1}T^{d-1} + \ldots + c_0$ un polynôme de degré $< d$; pour tout entier t tel que $s \leq t \leq d-1$, il existe un polynôme de degré $d-1$ dans $fA + hA$ de coefficient dominant c_t ."

Voici le passage de s à $s-1$, où on a écrit $f = T^d + a_{d-1}T^{d-1} + \ldots + a_0$:

Soit $g = \sum_0^{d-1} b_i T^i$ un polynôme de degré $< d$; on applique l'hypothèse de récurrence au polynôme $h = Tg - b_{d-1}f$ dont le coefficient du terme de degré s est $b_{s-1} - b_{d-1}a_s$.

Lemme 1.3 (Horrocks).- Soient R un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, et $f = (f_1,\ldots,f_r)$ une suite unimodulaire d'éléments de $A = R[T]$. On suppose que l'un des f_i est unitaire. Alors il existe $\sigma \in GL_r(A)$ tel que $\sigma f = (1,0,\ldots,0)$.

Démonstration d'après Suslin : l'assertion est trivialement vraie si $r = 1$ ou 2 ; on suppose donc $r \geq 3$ et on raisonne par récurrence sur le plus petit entier d tel que l'un des f_i, disons f_1, soit unitaire de degré d ; la division euclidienne par f_1 fournit une transformation élémentaire qui permet de supposer que $\deg f_i < d$ pour $i > 1$.

Comme la suite f reste unimodulaire par réduction modulo $\mathfrak{m}$, il existe un f_i avec $i > 1$, disons f_2, dont l'un des coefficients est inversible. Le lemme 1.2 montre que l'idéal $f_1A + f_2A$ contient un polynôme unitaire g de degré $d-1$; or, f_3 n'est pas unitaire et R est local ; donc $f_3 + g$ est unitaire de degré $d-1$; de plus, il existe $\sigma \in GL_r(A)$ tel que $\sigma f = (f_1, f_2, f_3 + g, f_4,\ldots,f_r)$. L'hypothèse de récurrence permet de conclure.

THÉORÈME 1.4 (Quillen-Suslin).- Soient R un anneau et $f = (f_1,\ldots,f_r)$ une suite unimodulaire d'éléments de $A = R[T]$. Si l'un des f_i est unitaire, il existe $\sigma \in GL_r(A)$ tel que $\sigma f = f(0)$.

Dans cet énoncé $f(0)$ désigne la suite unimodulaire $(f_1(0),\ldots,f_r(0))$ d'éléments de R ; la démonstration utilise des changements de variables variés qui obligent à faire figurer dans l'écriture des éléments les variables dont ils dépendent $(\sigma(T), f(T), \text{etc}\ldots)$.

Désignons par I l'ensemble des $x \in R$ tels qu'il existe $\sigma(T,X) \in GL_r(A[X])$ vérifiant

$$\sigma(T,X)f(T + xX) = f(T) .$$

Il s'agit de montrer que $1 \in I$ car si $\sigma(T,X)f(T + X) = f(T)$, on a $\sigma(0,T)f(T) = f(0)$. On raisonne par l'absurde : comme I est un idéal de R, on suppose donc que I est contenu dans un idéal maximal $\mathfrak{m}$. Le lemme de Horrocks 1.3 appliqué à $R_{\mathfrak{m}}$ montre qu'il existe $\sigma \in GL_r(A_{\mathfrak{m}})$ tel que $\sigma f = (1,0,\ldots,0)$ (c'est une égalité dans $A_{\mathfrak{m}}^r$). Posons $\tau(T,X) = \sigma(T)^{-1}\sigma(T + X) \in GL_r(R_{\mathfrak{m}}[T,X])$.

Dans $R_{\mathfrak{m}}[T,X]^r$, on a $\tau(T,X)f(T + X) = f(T)$.

Par définition, $\tau(T,0) = \mathrm{Id}$, et $\tau(T,X)$ ne fait intervenir qu'un nombre fini de coefficients dans $R_{\mathfrak{m}}$; par suite, il existe $s \in R - \mathfrak{m}$ tel que $\tau(T,sX) \in GL_r(A[X])$. L'élément $\tau(T,sX)f(T + sX) - f(T)$ de $A[X]^r$ s'écrit sous la forme $sXg(T,X)$ pour un g convenable, et est nul après localisation ; il existe donc $s' \in R - \mathfrak{m}$ tel qu'on ait dans $A[X]^r$:
$\tau(T,ss'X)f(T + ss'X) = f(T)$, c'est-à-dire $ss' \in I$; d'où la contradiction cherchée.

Démonstration de 1.1 : le changement de variables classique (et dû à Nagata) $X_1 = T_1$ et $X_i = T_i + T_1^{m_i}$ pour $i > 1$ permet de transformer pour des m_i convenables f_1 en un polynôme unitaire en X_1 à coefficients dans $R = k[X_2,\ldots,X_n]$; on peut donc raisonner par récurrence en utilisant 1.4.

2. Le procédé de récurrence

2.1 L'anneau $A(T)$

Pour tout anneau A , on désigne par $A(T)$ l'anneau de fractions $S^{-1}A[T]$, où S est l'ensemble des polynômes unitaires à coefficients dans A .

On trouvera ci-dessous les propriétés algébriques de cette construction ; ses propriétés géométriques proviennent d'un morphisme $\mathrm{Spec}(A(T)) \to \mathbb{P}^1_A$, explicité en 3.1, et qui clarifiera le rôle de $A(T)$ dans ce qui suit.

Cette construction ne commute en général pas à la localisation sur A ; par contre, si $A \to B$ est un morphisme entier (par exemple surjectif), le morphisme canonique

$$B \otimes_A A(T) \to B(T)$$

est un isomorphisme.

Le morphisme $A \to A(T)$ est fidèlement plat.

Si A est noethérien, il en est de même de $A(T)$ et $\dim A = \dim A(T)$. En effet, soient $\mathfrak{n}$ un idéal maximal de $A(T)$ et $\mathfrak{m} = A \cap \mathfrak{n}$; on a $\dim A(T)_{\mathfrak{n}} \leq 1 + \dim A_{\mathfrak{m}}$. Si $\dim A_{\mathfrak{m}} < \dim A$, on a bien $\dim A(T)_{\mathfrak{n}} \leq \dim A$. Si $\dim A_{\mathfrak{m}} = \dim A$, alors $\mathfrak{m}$ est maximal donc $A(T)/\mathfrak{m}A(T) = (A/\mathfrak{m})(T)$ est un corps ; par suite $\mathfrak{n}$ est engendré par $\mathfrak{m}$ et $\dim A(T)_{\mathfrak{n}} = \dim A_{\mathfrak{m}} = \dim A$.

Si A est régulier (resp. normal, factoriel, principal), il en est de même de $A(T)$.

2.2 Le résultat clé

THÉORÈME (Quillen-Suslin).- *Soient* A *un anneau et* E *un* $A[T]$-*module projectif de type fini. Si le* $A(T)$-*module* $E \otimes_{A[T]} A(T)$ *provient de* A , *alors* E *provient de* A .

Cet énoncé sera complété et démontré aux §§ 3 et 4.

2.3 Le cas d'une variable

Rappelons d'abord le résultat qu'il s'agit de démontrer :

THÉORÈME 2.3.1 (Quillen-Suslin).- *Si* R *est un anneau régulier de dimension* ≤ 2 , *tout* $R[T_1,\ldots,T_n]$-*module projectif de type fini provient de* R .

Quitte à se restreindre à une composante connexe de $\mathrm{Spec}(R)$, on peut supposer - et on supposera - que R est intègre.

Considérons ici le cas où $n = 1$. Soit E un $R[T]$-module projectif de type fini.

- Si $\dim R = 0$, R est un corps et $R[T]$ est principal ; par suite E est libre et provient donc de R .

- Si $\dim R = 1$, R est un anneau de Dedekind et le résultat est dû à Seshadri (cf. [15]) mais 2.2 permet d'en donner une démonstration immédiate : comme $R(T)$ est un anneau de Dedekind, $E \otimes_{R[T]} R(T)$ est isomorphe à la somme directe de son déterminant et d'un $R(T)$-module libre ; or le $R[T]$-module inversible $\det(E)$ provient de R puisque R est normal.

- Supposons $\dim R = 2$ (*). D'après un théorème de Murthy ([6]), pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R , le $R_{\mathfrak{m}}[T]$-module $E_{\mathfrak{m}}$ est libre, donc provient de $R_{\mathfrak{m}}$; le théorème de recollement de Quillen 3.3 permet de conclure.

Les raisonnements de Quillen et Suslin permettraient de démontrer 2.3.1 sans restriction sur la dimension si on savait prouver la conjecture suivante :

CONJECTURE 2.3.2.- *Soient* R *un anneau local régulier et* E *un* $R[T]$-*module projectif de type fini. Alors* $E \otimes_{R[T]} R(T)$ *est libre*.

(*) La paternité du résultat dans ce cas est délicate à attribuer et la question n'a même peut-être guère de sens : Quillen ignorait le résultat de Murthy et se contentait de signaler que la conjecture 2.3.2 est vérifiée si R contient un corps, hypothèse dont Horrocks ([4]) ne savait pas se débarrasser. Dans ([16]), Suslin doit supposer que 2 est inversible dans R car il utilise la théorie de Karoubi ; dans une lettre ultérieure (adressée à Serre), il donne le résultat sans cette hypothèse mais en utilisant ([6]) et le théorème de recollement de Quillen. Finalement, je reçois une démonstration par Murthy voisine des précédentes.

2.4 La récurrence

Soit n un entier ≥ 2 . Supposons que 2.3.1 soit vrai lorsqu'il fait intervenir $n-1$ variables.

Soient R un anneau régulier de dimension ≤ 2 et E un $R[T_1,\ldots,T_n]$-module projectif de type fini.

Introduisons l'ensemble $S \subset R[T_1]$ des polynômes unitaires en T_1 . On a $S^{-1}R[T_1,\ldots,T_n] = R(T_1)[T_2,\ldots,T_n]$ et $R(T_1)$ est régulier de dimension ≤ 2 . L'hypothèse de récurrence implique que $S^{-1}E$ provient de $R(T_1)$, donc est isomorphe à $(S^{-1}E_1)[T_2,\ldots,T_n]$ où $E_1 = E/(T_2,\ldots,T_n)E$; mais E_1 est un $R[T_1]$-module projectif de type fini, donc provient de R ; bref, si $E_o = E/(T_1,\ldots,T_n)E$, on a un isomorphisme

$$S^{-1}E \sim S^{-1}(E_o[T_1,\ldots,T_n]) \ .$$

Le résultat clé 2.2 implique E provient de $A = R[T_2,\ldots,T_n]$ et l'hypothèse de récurrence permet de conclure.

3. La méthode de Quillen

3.1 Prolongement à $\mathbb{P}^1$

Lemme.- Soient $p : \mathbb{P}^1_A \to \operatorname{Spec}(A)$ la droite projective sur un anneau A et $\mathbb{A}^1_A \to \mathbb{P}^1_A$ un plongement de la droite affine dans la droite projective associé au choix d'un diviseur à l'infini D .

Soient M un A-module de présentation finie et E un $A[T]$-module de présentation finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Les $A(T)$-modules $M \otimes_A A(T)$ et $E \otimes_{A[T]} A(T)$ sont isomorphes.

(ii) Il existe un faisceau sur $\mathbb{P}^1_A$ qui est isomorphe à $\widetilde{E}$ sur $\mathbb{A}^1_A = \mathbb{P}^1_A - D$ et à $p^*\widetilde{M}$ sur un voisinage de D .

Cela résulte immédiatement de l'isomorphisme explicité ci-dessous entre $\operatorname{Spec}(A(T))$ et la trace sur $\mathbb{A}^1_A$ de l'intersection des voisinages de D .

Identifions $\mathbb{P}^1_A$ au schéma obtenu par recollement de deux droites affines $U_i = \operatorname{Spec}(A[T_i])$, $i = 0 , 1$, le long des complémentaires de leur diviseur $T_i = 0$ par l'isomorphisme $A[T_o]_{T_o} \sim A[T_1]_{T_1}$ donné par $T_o \longmapsto T_1^{-1}$. L'intersection des ouverts contenant le diviseur à l'infini $(T_1 = 0)$ s'identifie au schéma affine d'anneau

$$(1 + T_1A[T_1])^{-1}A[T_1] .$$

L'ouvert induit sur ce schéma par $U_o = \mathbb{A}^1_A$ est affine et son anneau

$$(1 + T_1A[T_1])^{-1}A[T_1]_{T_1}$$

est isomorphe à $A(T_o)$: en effet, si f est un polynôme de degré $< n$, $g(T_1^{-1}) = T_1^{-n}(1 + T_1f(T_1))$ est un polynôme unitaire de degré n en $T_o = T_1^{-1}$, et on les obtient tous par ce procédé.

3.2 Le théorème de Horrocks

THÉORÈME 3.2.1 (Horrocks [4]).- *Soient* A *un anneau local et* E *un faisceau localement libre de rang* n *sur* $P = \mathbb{P}^1_A$. *Alors il existe une filtration de* E : $0 = E_o \subset E_1 \subset \ldots \subset E_n = E$ *telle que chaque quotient* E_i/E_{i-1} *soit isomorphe à une puissance* $O_P(m_i)$ *du faisceau inversible standard, avec* $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_n$.

C'est le corollaire suivant qui est utilisé par Quillen ; on en donnera en 4.2 une autre démonstration, purement algébrique.

COROLLAIRE 3.2.2.- *Soient* A *un anneau local et* E *un* $A[T]$-*module projectif de type fini*. *Si* E *se prolonge à* $\mathbb{P}^1_A$, *alors* E *est libre*.

En effet, chacun des $O_P(m_i)$ est trivial sur l'ouvert $U_o \sim \mathrm{Spec}(A[T])$; donc E est extension successive de modules libres, donc est libre.

Le théorème 3.2.1 lorsque A est un corps (algébriquement clos) k est dû à Grothendieck ; dans ce cas, on a mieux : le faisceau E est décomposable en somme directe des $O_P(m_i)$. Voici la démonstration brutale que Serre en donne dans [14], et qui est valable même si k n'est pas algébriquement clos : on associe à E un module gradué M sur l'anneau $R = k[T_o,T_1]$; comme E est localement libre, M et son bidual $M^{\vee\vee}$ induisent le même faisceau E sur P ; mais si M est réflexif, on a $\mathrm{prof}(M_{\mathfrak{m}}) \geq 2$, où $\mathfrak{m} = (T_o,T_1)$; comme $R_{\mathfrak{m}}$ est un anneau régulier de dimension 2 , on a $\mathrm{prof}(M_{\mathfrak{m}}) + \dim \mathrm{proj}(M_{\mathfrak{m}}) = 2$; donc $M_{\mathfrak{m}}$ est libre ; mais M est gradué, donc M lui-même est libre et E est décomposé.

Pour passer de là au cas d'un anneau local A de corps résiduel $k = A/\mathfrak{m}$, notons par des " $^-$ " tout ce qui s'obtient par réduction modulo $\mathfrak{m}$. D'après ce qui précède, on a une filtration du faisceau localement libre $\bar{E}$ sur $\bar{P} = \mathbb{P}^1_k$

$$0 = F_o \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n = \bar{E}$$

avec $F_i/F_{i-1} = \bar{O}(m_i)$ et $m_1 \leq m_2 \ldots$. Par récurrence sur n , il suffit de montrer qu'il existe une injection $O_P(m_1) \to E$ qui se réduit modulo $\mathfrak{m}$ à $F_1 \to \bar{E}$; quitte à remplacer E par $E \otimes O_P(-m_1)$, on peut supposer que $m_1 = 0$. On a alors $H^1(\bar{P},\bar{E}) = 0$ puisque $H^1(\bar{P},\bar{O}(m)) = 0$ pour $m \geq -1$. Le théorème de changement de base de Grothendieck (voir par exemple [5], p. 53, cor. 3) implique que

$$H^o(P,E) \to H^o(\bar{P},\bar{E})$$

est surjectif. La section donnée par $F_1 = O_{\bar{P}} \to \bar{E}$ se relève donc en une section $s : O_P \to E$.

3.3 Le théorème de recollement

THÉORÈME (Quillen [11]).- *Soient* A *un anneau et* E *un* $A[T]$*-module de présentation finie. On suppose que pour tout idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* A *le* $A_\mathfrak{m}[T]$*-module* $E_\mathfrak{m}$ *provient de* $A_\mathfrak{m}$ *. Alors* E *provient de* A .

Soit S l'ensemble des $f \in A$ tels que E_f provienne de A_f . Il s'agit de montrer que $1 \in S$.

Posons $F = E/TE$. Par hypothèse, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , on a un isomorphisme $E_\mathfrak{m} \sim F_\mathfrak{m}[T]$; comme E est de présentation finie, cet isomorphisme se prolonge à un voisinage de $\mathfrak{m}$; autrement dit, il existe $f \in A - \mathfrak{m}$ tel que $f \in S$; ainsi S n'est contenu dans aucun idéal maximal de A et il suffit de montrer que S est stable par addition pour pouvoir conclure.

Soient f_o , $f_1 \in S$; quitte à localiser, on peut supposer que $f_oA + f_1A = A$. On dispose donc de deux isomorphismes

$$u_i : E_{f_i} \to F_{f_i}[T] \qquad (i = 0 , 1)$$

se réduisant modulo T aux isomorphismes canoniques

$$E_{f_i} / TE_{f_i} = (E/TE)_{f_i}$$

et il s'agit de les modifier pour qu'ils coïncident sur l'intersection $D(f_of_1)$ des ouverts où ils sont définis ; on obtiendra ainsi, par recollement, un isomorphisme

$$E \sim F[T] .$$

On cherche donc des isomorphismes $v_i : F_{f_i}[T] \to F_{f_i}[T]$ se réduisant à l'identité modulo T et tels que $v_{of_1} u_{of_1} = v_{1f_o} u_{1f_o}$, c'est-à-dire tels que

3.3.1 $$u_{1f_o} u_{of_1}^{-1} = v_{1f_o}^{-1} v_{of_1} .$$

Posons $R = \mathrm{End}_A(F)$; comme F est de présentation finie et que le morphisme $A \to A_f[T]$ est plat pour tout $f \in A$, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{End}_{A_f}(F_f[T]) = R_f[T] .$$

Désignons par $R_f[T]^*$ le groupe des éléments inversibles de l'anneau $R_f[T]$, et par θ le membre de gauche de 3.3.1. On a

$$\theta \in R_{f_o f_1}[T]^* \qquad \text{et} \qquad \theta \equiv 1 \pmod{T} .$$

Pour tout $a \in A$, on peut écrire formellement

$$\theta(T) = [\theta(aT)\theta(T)^{-1}]^{-1}[\theta(aT)\theta(0T)^{-1}]$$

et on va montrer qu'il existe un a tel que $\theta(aT)\theta(T)^{-1} = v_{1f_o}$ et $\theta(aT) = v_{of_1}$ pour des v_i convenables dans $R_{f_i}[T]^*$.

__Lemme__ 3.3.2.- __Soient__ A __un anneau,__ R __une__ A-__algèbre__ (__non nécessairement commutative__) __et__ $f \in A$. __Pour tout__ $\theta \in R_f[T]^*$ __tel que__ $\theta(0) = 1$, __il existe un entier__ $k \geq 0$ __vérifiant la propriété suivante__ :

__pour tout couple__ a , b __d'éléments de__ A __tels que__ $a - b \in f^k A$, __il existe__ $v \in R[T]^*$ __tel que__ $v(0) = 1$ __et__ $v_f(T) = \theta(aT)\theta(bT)^{-1}$.

Avant de donner la démonstration de ce lemme, montrons comment il permet de conclure : Soit k un entier ayant la propriété indiquée dans le lemme, à la fois pour la A_{f_o}-algèbre R_{f_o} et l'élément f_1 et pour la A_{f_1}-algèbre R_{f_1} et l'élément f_o ; comme $f_o^k A + f_1^k A = A$, il existe $a \in f_1^k A$ tel que $a - 1 \in f_o^k A$; pour un tel a , le lemme affirme l'existence des v_i cherchés.

<u>Démonstration du lemme</u> 3.3.2 : dans l'anneau $R_f[X,Y]$, il existe un unique polynôme $\varphi(X,Y)$ tel que l'on ait

$$\theta(X + Y) - \theta(Y) = X\varphi(X,Y) .$$

Pour tout entier $r \geq 0$, on a donc dans $R_f[X,Y,T]$,

$$\begin{aligned}\theta((Y + f^rX)T)\theta(YT)^{-1} &= 1 + [\theta((Y + f^rX)T) - \theta(YT)]\theta(YT)^{-1} \\ &= 1 + f^rXT\varphi(f^rXT,YT)\theta(YT)^{-1} .\end{aligned}$$

Or, $\varphi\theta^{-1}$ est un polynôme et, par suite, ne fait intervenir qu'un nombre fini de coefficients dans R_f ; on en déduit l'existence d'un entier r tel que $f^r\varphi(X,Y)\theta(Y)^{-1}$ soit image d'un polynôme à coefficients dans R ; pour cet entier r , il existe donc un polynôme

$$w \in R[X,Y,T]$$

tel que l'on ait

$$\theta((Y + f^rX)T)\theta(YT)^{-1} = w_f(X,Y,T) .$$

Posons $w'(X,Y,T) = w(-X , Y + f^rX , T)$. On a $(ww')_f = (w'w)_f = 1$; donc, si on pose $ww' = 1 + XTh_1$ et $w'w = 1 + XTh_2$, une puissance convenable f^s de f annule h_1 et h_2 . Par suite $w(f^sX,Y,T)$ est inversible dans $R[X,Y,T]$. L'entier k cherché peut être pris égal à $r + s$: si $a = b + f^kc$, le polynôme

$$v(T) = w(f^sc,b,T)$$

possède les propriétés requises.

Résumons la démarche de Quillen en précisant le résultat obtenu :

THÉORÈME (Quillen-Suslin).- <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux</u> A[T]-<u>modules projectifs de type fini</u>. <u>On suppose que</u> F <u>provient de</u> A <u>et que les</u> A(T) <u>modules</u> $E \otimes_{A[T]} A(T)$ <u>et</u> $F \otimes_{A[T]} A(T)$ <u>sont isomorphes</u>. <u>Alors</u> E <u>et</u> F <u>sont isomorphes</u>.

<u>En particulier, si</u> P <u>et</u> Q <u>sont deux</u> A-<u>modules projectifs de type fini tels que</u> $P \otimes_A A(T)$ <u>et</u> $Q \otimes_A A(T)$ <u>soient isomorphes, alors</u> P <u>et</u> Q <u>sont isomorphes</u>.

D'après 3.1, dont on reprend les notations, il existe un faisceau localement libre $\underline{E}$ sur $\mathbb{P}^1_A$ qui est isomorphe à $\tilde{E}$ sur U_o et à $\tilde{F}$ sur un voisinage du diviseur à l'infini ; le théorème de Horrocks 3.2.2 montre que pour tout idéal maximal

$\mathfrak{m}$ de A le $A_{\mathfrak{m}}[T]$-module $E_{\mathfrak{m}}$ est libre, donc provient de $A_{\mathfrak{m}}$; donc E provient d'un A-module P d'après le théorème de recollement ; posant $Q = F/TF$, on est donc ramené à prouver la deuxième partie de l'énoncé. Les images réciproques de $\underline{E}$ sur les diviseurs $T_o = 0$ et $T_o = 1$ sont isomorphes à P ; le même raisonnement appliqué au $A[T_1]$-module projectif $\Gamma(U_1, \underline{E})$ montre que les images réciproques de $\underline{E}$ sur les diviseurs $T_1 = 0$ et $T_1 = 1$ sont isomorphes à Q ; donc P et Q sont isomorphes.

4. La méthode de Suslin

4.1 La présentation de Towber

PROPOSITION ([9] et [19]).- *Soient A un anneau et E et F deux $A[T]$-modules projectifs de type fini. On suppose que F provient d'un A-module F_o et que les $A(T)$-modules $E \otimes_{A[T]} A(T)$ et $F \otimes_{A[T]} A(T)$ sont isomorphes. Alors il existe deux A-modules projectifs de type fini P et Q et deux applications linéaires u et v de P dans Q et des suites exactes*

$$0 \to P \xrightarrow{v} Q \to F_o \to 0 ,$$

$$0 \to P[T] \xrightarrow{u+Tv} Q[T] \to E \to 0 .$$

Par hypothèse, il existe un polynôme unitaire f et un isomorphisme $E_f \sim F_f$; cet isomorphisme provient par localisation d'une application $E \to F$ qui est injective puisque f est régulier dans $A[T]$, et dont le conoyau est annulé par une puissance f^n de f ; quitte à remplacer f par f^n, on peut supposer qu'on a des inclusions

$$fF \subset E \subset F .$$

Soit F_1 le sous-A-module $F_o + TF_o + \dots + T^{d-1}F_o$ de $F = F_o[T]$, où $d = \deg f$. L'application composée $F_1 \to F \to F/fF$ est un isomorphisme ; l'image réciproque de E/fF est un sous-A-module P de F_1, contenu dans E et tel que le composé

$$P \to E \to E/fF$$

est un isomorphisme. Soit α l'endomorphisme de P qui correspond à la multiplication par $-T$ dans E/fF ; comme E est un $A[T]$-module, il existe une application A-linéaire $\beta : P \to F$ telle que

$$(T+\alpha)(x) = f\beta(x) , \qquad \text{pour } x \in P .$$

Comme $TF_1 \subset F_1 \oplus fF_0$, β envoie P dans F_0 et l'égalité ci-dessus se traduit par la commutativité du diagramme d'applications $A[T]$-linéaires

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P[T] \arrow[r, "\alpha + T"] \arrow[d, "\beta"'] & P[T] \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & F_0[T] \arrow[r, "f"'] & E \arrow[r] & E/fF \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

En posant $Q = P \oplus F_0$, $u = \binom{\alpha}{\beta}$ et $v = \binom{1}{0}$, on obtient les suites exactes annoncées. Il reste à voir que $P \sim E/fF$ est un A-module projectif de type fini. Or, l'exactitude de la suite $0 \to E/fF \to F/fF \to F/E \to 0$ et le fait que $A[T]/fA[T]$ soit une A-algèbre libre de rang fini (f est unitaire) impliquent que F/E est un A-module de présentation finie et il suffit de montrer qu'il est projectif ; pour ce faire, on suppose que A est local de corps résiduel k et il faut montrer que $\mathrm{Tor}_1^A(F/E, k) = 0$, i.e. que $E \otimes_A k \to F \otimes_A k$ est injectif (F est plat sur A) ; or, cette application est un isomorphisme après localisation par l'image de f dans $k[T]$.

<u>Remarque</u>.- La présentation de Towber redonne un prolongement de E à $\mathbb{P}_A^1$: le conoyau de l'application $T_1 u + T_0 v : p^*(\widetilde{P}) \to p^*(\widetilde{Q})(1)$.

4.2 <u>Une autre démonstration du théorème de Horrocks</u>

Swan a remarqué que la présentation de Towber permet de donner une démonstration élémentaire du résultat de Horrocks, c'est-à-dire n'utilisant aucun argument géométrique ; nous la reproduisons ici à l'intention du lecteur strictement algébriste.

<u>Lemme</u> 4.2.1.- <u>Soient</u> A <u>un anneau et</u> $0 \to P \xrightarrow{v} Q \xrightarrow{q} F \to 0$ <u>une suite exacte d'applications</u> A-<u>linéaires où</u> $P \neq 0$. <u>Si</u> $u : P \to Q$ <u>est une application telle que</u> $u + Tv : P[T] \to Q[T]$ <u>admette un inverse à gauche</u>, $qu : P \to F$ <u>est non nulle</u>.

En effet, si $qu = 0$, u se factorise par v , i.e. $u = vw$; on a donc $u + Tv = v(w + T)$; or, si $P \neq 0$, l'endomorphisme $w + T$ de $P[T]$ n'est pas inversible à gauche (spécialiser T en $-w$ dans la A-algèbre commutative $A[w] \subset \mathrm{End}_A(P)$).

THÉORÈME (Horrocks).- Soient A un anneau local et E un $A[T]$-module projectif de type fini. S'il existe un polynôme unitaire f tel que E_f soit libre, alors E est libre.

Démonstration de Swan : d'après 4.1, E admet une présentation de Towber

$$0 \to P[T] \xrightarrow{u+Tv} Q[T] \to E \to 0$$

où P et Q sont des A-modules libres ; on se ramène au cas trivial où $P = 0$. Choisissons un inverse à gauche de v, de sorte qu'on peut identifier Q à $P \oplus F$ et que u s'écrit $\binom{\alpha}{\beta}$ et v s'écrit $\binom{1}{0}$.

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A. D'après le lemme qui précède, il existe $x \in P - \mathfrak{m}P$ tel que $\beta(x) = y \in F - \mathfrak{m}F$; comme x et y engendrent des facteurs directs, on a des décompositions $P = xA \oplus P'$ et $F = yA \oplus F'$. Il existe une application $\gamma : P' \to xA$ telle que pour l'automorphisme $g = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de P, on ait $\beta g(P') \subset F'$. Il est clair que le conoyau de $\begin{pmatrix} g^{-1}\alpha g + T \\ \beta g \end{pmatrix}$ est isomorphe à E ; on peut donc supposer que $\beta(P') \subset F'$; mais alors le conoyau de l'application

$$\begin{pmatrix} \alpha + T \\ \beta \end{pmatrix} : P'[T] \to (P \oplus F')[T]$$

est encore isomorphe à E et $\operatorname{rg} P' < \operatorname{rg} P$.

4.3 Le théorème de Suslin ([16])

THÉORÈME.- Soient A un anneau, P et Q des A-modules projectifs de type fini et u et v des applications A-linéaires de P dans Q inversibles à gauche.

Si l'application $u + Tv : P[T] \to Q[T]$ admet un inverse à gauche ($A[T]$-linéaire), alors son conoyau provient de A et est donc isomorphe à $\operatorname{Coker}(u)[T]$.

La démonstration de Suslin consiste à prouver l'existence d'un automorphisme s de $Q[T]$ tel que

$$s.(u + Tv) = u .$$

Soit I l'ensemble des $\lambda \in A$ tels qu'il existe $s \in \operatorname{Aut}_{A[T]}(Q[T])$ vérifiant

$$s.(u + Tv) = u + (T + \lambda)v .$$

Il suffit de montrer que $I = A$; en effet, appliquant ce résultat à $A[T']$, on en déduit l'existence d'un automorphisme s de $Q[T,T']$ tel que $s.(u + Tv) = u + (T + T')v$ et on spécialise T' en $-T$.

L'ensemble I est stable par addition : si $s(T).(u + Tv) = u + (T + \lambda)v$ et $s'(T).(u + Tv) = u + (T + \lambda')v$, alors $s'(T+\lambda).s(T).(u+Tv) = u+(T+\lambda+\lambda')v$.

Choisissons un inverse à gauche r de v et une forme linéaire $f : F \to A$.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, shift left, "v"] & Q \arrow[l, shift left, "r"] \arrow[r, "q"] & F \\ & P \arrow[ul, "a"] \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$

Posons $a = ru$ et $b = qu$, et désignons par $t_{r,f} : P \to A^m$ $(m = \mathrm{rg}\, P)$ l'application de coordonnées

$$(fb\,, fba\,, \ldots, fba^{m-1})\,.$$

On va montrer que l'idéal image de l'application

$$\det(t_{r,f}) : \det(P) \to \det(A^m) = A$$

est contenu dans I.

Soient $\varepsilon : A^m \to A^m$ l'endomorphisme défini, sur la base canonique, par $\varepsilon(e_i) = e_{i+1}$ pour $i < m$ et $\varepsilon(e_m) = 0$, et $j : A \to A^m$ l'injection sur le premier facteur.

Posant $t = t_{r,f}$, on a

$$t = \varepsilon t a + jfb\,.$$

Soient $\xi \in \det(P)$, $\lambda = \det(t)(\xi)$ et t' l'application composée

$$A^m \overset{\text{can.}}{=\!=} \mathrm{Hom}(\overset{m-1}{\textstyle\bigwedge} A^m, A) \xrightarrow{(\overset{m-1}{\bigwedge} t)^{\vee}} \mathrm{Hom}(\overset{m-1}{\textstyle\bigwedge} P, A) \xrightarrow{\xi} \mathrm{Hom}(\overset{m-1}{\textstyle\bigwedge} P, \det(P)) \overset{\text{can.}}{=\!=} P$$

Les applications $t't$ et tt' sont les homothéties de rapport λ ; par suite $t'\varepsilon t$ est un endomorphisme nilpotent de P.

L'endomorphisme s de Q (identifié à $P \oplus F$ <u>via</u> r) donné par la matrice

$$s = \begin{pmatrix} 1 + t'\varepsilon t & t'jf \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un automorphisme, et on a $su = u + \lambda v$.

Montrons que $\lambda \in I$: remplaçons A par $A[X]$ et u par $u + Xv$; alors a est remplacé par $a + X$ et t par l'application de composantes

$$(fb\,, fb(a + X)\,, \ldots, fb(a + X)^{m-1})\ ,$$

mais le déterminant de cette application est encore égal à $\det(t)$ car le $i+1$-ième terme $fb(a + X)^i$ est somme de fba^i et d'une combinaison linéaire des termes précédents. On a donc encore $s.(u+Xv) = u + (X + \lambda)v$. Bref, on a montré ce qui suit :

Pour tout inverse à gauche r de v et toute forme linéaire $f : F \to A$, désignons par $t_{r,f} : P \to A^m$ l'application de composantes $(fqu\,, fquru\,, \ldots, fqu(ru)^{m-1})$. On a

$$\sum_{r,f} \mathrm{Im}(\det(t_{r,f})) \subset I\ .$$

Il reste à prouver que l'idéal de gauche est égal à A ; on peut supposer pour cela que A est un corps et il suffit de construire r et f tels que $t_{r,f}$ soit bijectif. D'après 4.2.1, $b = qu$ est non nul ; on peut choisir f tel que $fb \neq 0$.

Soient r une rétraction donnée et $a = ru$; soit k le plus grand entier tel que les formes linéaires $fb\,, fba\,, \ldots, fba^k$ soient linéairement indépendantes ; si $k = m-1$, on a fini ; sinon, on va modifier r pour faire croître k : posons

$$P' = \bigcap_0^k \mathrm{Ker}(fba^i) \qquad\qquad P'' = \bigcap_0^{k-1} \mathrm{Ker}(fba^i)\ .$$

On a $\mathrm{rg}\,P' = m-(k+1) > 0$ et $\mathrm{rg}\,P'' = m-k > \mathrm{rg}\,P'$. Comme fba^{k+1} est combinaison linéaire des fba^i pour $i \leq k$, on a $aP' \subset P'$. Comme A est un corps, $P' \to P$ est inversible à gauche ; par suite $\binom{a+T}{b} : P'[T] \to P'[T] \oplus F[T]$ est inversible à gauche et d'après 4.2.1, il existe $x \in P'$ tel que $b(x) \neq 0$. Soit $g : F \to P''$ une application linéaire telle que $gb(x) \notin P'$. Montrons que la rétraction $r' = r + gq$ convient : par construction, on a $fba^ig = 0$ pour $i = 0,1,\ldots,k-1$. On en déduit

$$fb(a + gb)^i = fba^i \qquad\qquad \text{pour } i \leq k$$

$$fb(a + gb)^{k+1} = fba^{k+1} + fba^kgb\ .$$

Cela montre que les formes $fb(a + gb)^i$ pour $i \leq k$ sont linéairement indépendantes et s'annulent, ainsi que fba^{k+1} , en l'élément $x \in P'$ choisi plus haut ; comme $gb(x) \notin P'$, $fba^k gb(x) \neq 0$; donc la forme $fb(a+gb)^{k+1}$ est linéairement indépendante des précédentes.

Cela achève la démonstration du théorème.

<u>Lemme.- Sous les hypothèses du théorème, l'application</u> $v + Tu$ <u>est inversible à gauche</u>.

Comme P et Q sont projectifs, il suffit de montrer que la réduction de $v + Tu$ modulo un idéal maximal $\mathfrak{n}$ de $A[T]$ est injective ; or, si $T \in \mathfrak{n}$, $v + Tu \equiv v$ mod. $\mathfrak{n}$ et v est inversible à gauche par hypothèse ; si T est inversible modulo $\mathfrak{n}$, on utilise l'hypothèse que $T'v + u$ est inversible à gauche et l'isomorphisme $T' \mapsto T^{-1}$.

Résumons la démarche de Suslin :

THÉORÈME.- <u>Soient</u> A <u>un anneau et</u> E <u>et</u> F <u>deux</u> $A[T]$-<u>modules projectifs de type fini</u>. <u>On suppose que</u> F <u>provient de</u> A <u>et que</u> $E \otimes_{A[T]} A(T)$ <u>et</u> $F \otimes_{A[T]} A(T)$ <u>sont isomorphes</u>. <u>Alors</u> E <u>et</u> F <u>sont isomorphes</u>.

On construit une présentation de Towber c'est-à-dire des suites exactes

$$0 \to P \xrightarrow{v} Q \to F_o \to 0$$

$$0 \to P[T] \xrightarrow{u+Tv} Q[T] \to E \to 0 ,$$

où P et Q sont des A-modules projectifs de type fini et où $F_o = F/TF$. Le théorème de Suslin dit que E est isomorphe à $\mathrm{Coker}(u)[T]$; faisant $T = 1$, on en déduit que $\mathrm{Coker}(u)$ et $\mathrm{Coker}(u+v)$ sont isomorphes ; mais, d'après le lemme qui précède, on peut aussi appliquer le théorème de Suslin à $v + Tu$; on en déduit que $\mathrm{Coker}(u+v)$ est isomorphe à $\mathrm{Coker}(v) = F_o$; finalement, E est donc isomorphe à $F = F_o[T]$.

5. Applications aux intersections complètes

Dans son article de 1960 ([15]), Serre a montré que la liberté des modules projectifs sur $k[T_1,\dots,T_n]$ implique que certains sous-schémas fermés de $\mathbb{A}^n_k$ sont intersection complète ; ce qui était alors un énoncé conditionnel est donc aujourd'hui un théorème :

THÉORÈME 5.1.- Soient k un corps et X un sous-schéma fermé purement de codimension deux dans l'espace affine $\mathbb{A}_k^n$. On suppose que X est de Cohen-Macaulay et que son faisceau dualisant ω_X est trivial. Alors X est intersection complète.

Esquisse de la démonstration : posons $A = k[T_1,\ldots,T_n]$ et soit $B = A/I$ l'anneau de X. Par hypothèse, $\omega_X = \mathrm{Ext}_A^2(B,A)$ est isomorphe à B ; mais $\mathrm{Ext}_A^2(B,A) \cong \mathrm{Ext}_A^1(I,A)$, donc un générateur de ce module correspond à une extension de I par A :

$$0 \to A \to E \to I \to 0 .$$

Serre montre que les hypothèses impliquent que E est projectif de rang deux ; d'après Quillen-Suslin, E est donc libre, ce qui implique bien que I est engendré par deux éléments.

COROLLAIRE 5.2.- Toute courbe lisse de genre 1 (*) dans $\mathbb{A}_k^3$ est intersection complète.

Rappelons que la liberté des modules projectifs sur $k[T_1,T_2,T_3]$, nécessaire pour établir ce corollaire, a été prouvée en 1973 par Murthy et Towber ([9]).

Un sous-schéma fermé de $\mathbb{A}_k^n$ est dit ensemblistement intersection complète si son idéal I contient un idéal J engendré par une suite régulière telle que $I \supset J \supset I^r$ pour un entier r convenable.

En utilisant encore la liberté des fibrés vectoriels sur $\mathbb{A}_k^3$ et, entre autres, des arguments de liaison (cf. [10]) comme dans la note [3], on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 5.3 (Szpiro).- Toute courbe de $\mathbb{A}_k^3$ qui est localement intersection complète (par exemple, lisse) est ensemblistement intersection complète.

Le cas des surfaces dans $\mathbb{A}_k^4$ requiert des arguments supplémentaires, notamment le théorème de "cancellation" de Murthy-Swan [8] ; voici les derniers résultats obtenus par Murthy ([7]) :

(*) ou de genre 0 si k est algébriquement clos (ou, plus généralement, si le pgcd des degrés des "points à l'infini" est 1 ou 2).

THÉORÈME 5.4 (Murthy).- _Soit_ X _un sous-schéma fermé localement intersection complète et de codimension deux dans_ $\mathbb{A}_k^4$ (k _algébriquement clos_). _Alors_ X _est ensemblistement intersection complète dans chacun des cas suivants_ :

1) _Une puissance positive_ $\omega_X^{\otimes r}$ _du faisceau dualisant est engendré par deux éléments_.

2) k _est la clôture algébrique d'un corps fini_.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BASS - Libération des modules projectifs sur certains anneaux de polynômes, Sém. Bourbaki, 26e année, 1973/74, exposé 448, Lecture Notes in Math., vol. 431, p. 228-254, Springer Verlag, Berlin.

[2] H. BASS, E. H. CONNELL and D. L. WRIGHT - Locally polynomial algebras are symmetric, à paraître.

[3] D. FERRAND - Courbes gauches et fibrés de rang 2, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 281 (1975), p. 345-347.

[4] G. HORROCKS - Projective modules over an extension of a local ring, Proc. London Math. Soc., (3) 14 (1964), p. 714-718.

[5] D. MUMFORD - Abelian varieties, Oxford University Press, 1970.

[6] M. P. MURTHY - Projective A[X]-modules, Journ. London Math. Soc., 41 (1966), p. 453-456.

[7] M. P. MURTHY - Complete Intersections [Conference on Commutative Algebra 1975, Edited by A. V. GERAMITA, Queen's Papers in Pure and Applied Math. n°42 Queen's Univ., Kingston, Ontario, 1975].

[8] M. P. MURTHY and R. G. SWAN - Vector Bundles Over Affine Surfaces, Inv. Math., 36 (1976), p. 125-165.

[9] M. P. MURTHY and J. TOWBER - Algebraic Vector Bundles Over $\mathbb{A}^3$ are Trivial, Inv. Math., 24 (1974), p. 173-189.

[10] Ch. PESKINE et L. SZPIRO - Liaison des variétés algébriques, I, Inv. Math., 26 (1974), p. 271-302.

[11] D. QUILLEN - Projective Modules over Polynomial Rings, Inv. Math., 36 (1976), p. 167-171.

[12] Michèle RAYNAUD - Modules projectifs universels, Inv. Math., 6 (1968), p. 1-26.

[13] J.-P. SERRE - Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle, Sém. P. DUBREIL, M.-L. DUBREIL-JACOTIN, C. PISOT, 1957/58, n° 23.

[14] J.-P. SERRE - Classes de corps cyclotomiques, Sém. Bourbaki, 11e année, 1958/59, exposé 174, Benjamin/Addison Wesley, New York, 1966.

[15] J.-P. SERRE - Sur les modules projectifs, Sém. DUBREIL-PISOT, 14e année, 1960/61, n° 2 (21 novembre 1960).

[16] A. SUSLIN - Modules projectifs sur un anneau de polynômes (en russe), Dokl. Akad. Nauk S.S.R., 26 fév. 1976.

[17] R. SWAN - SERRE's problem [Conference on Commutative Algebra, 1975, Edited by A. V. GERAMITA, Queen's Papers in Pure and Applied Math., n° 42, Queen's Univ., Kingston, Ontario, 1975].

[18] R. SWAN - Projective Modules Over Laurent Rings, à paraître.

[19] R. SWAN and J. TOWBER - A class of Projective Modules which are Nearly Free, Journ. of Alg. 36 (1975), p. 427-434.

[20] P. VASERŠTEIN - Le problème de SERRE pour les modules projectifs sur les anneaux de polynômes, d'après Suslin et Quillen (en russe), à paraître