PIERRE CARTIER

Les représentations des groupes réductifs p-adiques et leurs caractères

Séminaire N. Bourbaki, 1977, exp. nº 471, p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1975-1976__18__1_0>

Séminaire BOURBAKI
28e année, 1975/76, n° 471

LES REPRÉSENTATIONS DES GROUPES RÉDUCTIFS P-ADIQUES ET LEURS CARACTÈRES

par Pierre CARTIER

Introduction

Commençons par indiquer certains traits saillants de la théorie des représentations dans le cas réel ; cette dernière est toute entière l'oeuvre de Harish-Chandra (voir le rapport de Varadarajan [25]).

Soit G un groupe algébrique réel, supposé réductif, et soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire irréductible de G. Cette représentation admet un <u>caractère</u> Θ_π qui jouit des propriétés suivantes :

a) Θ_π est une fonction localement intégrable sur G, analytique sur l'ensemble G' des points réguliers de G.

b) Soit D la fonction bien connue telle que G' soit l'ensemble des points de G où D ne s'annule pas (voir n° 5.1). Alors $|D|^{\frac{1}{2}}\Theta_\pi$ est localement bornée sur G.

c) Soit f une fonction indéfiniment différentiable à support compact sur G. L'opérateur $\pi(f) = \int_G f(x)\, \pi(x)\, dx$ dans $\mathcal{H}$ est alors nucléaire, et l'on a

$$(1) \qquad \operatorname{Tr}(\pi(f)) = \int_G f(x)\, \Theta_\pi(x)\, dx .$$

Pour démontrer les résultats précédents, on commence par prouver que si K est un sous-groupe compact maximal de G, il existe une constante $C > 0$, indépendante de π, telle que

$$(2) \qquad (\pi : \mathfrak{d}) \leq C \,.\, \deg \mathfrak{d}$$

pour toute représentation unitaire irréductible $\mathfrak{d}$ de K ; on a noté $(\pi : \mathfrak{d})$ la multiplicité de $\mathfrak{d}$ dans la restriction de π à K. On en déduit facilement (cf. par exemple mon exposé de l'année dernière [4]) que $\pi(f)$ est nucléaire sous les hypothèses de c) ci-dessus. Il existe alors une <u>distribution</u> Θ_π sur G définie par

(3) $\Theta_\pi(f) = \mathrm{Tr}(\pi(f))$

et il s'agit de prouver que Θ_π est une fonction.

Pour cela, on définit, dans un voisinage de 0 dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G , une distribution θ_π par la formule symbolique

(4) $\Theta_\pi(\exp X) = |\det h(\mathrm{ad}\, X)|^{-\frac{1}{2}}\, \theta_\pi(X)$

(en posant $h(t) = \frac{2}{t}\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{2}$). On montre alors que θ_π est distribution propre de tous les opérateurs différentiels sur $\mathfrak{g}$, invariants par les translations de $\mathfrak{g}$ et le groupe adjoint de G . On peut alors utiliser la transformation de Fourier sur $\mathfrak{g}$, et l'on est ramené à étudier la transformée de Fourier de la mesure invariante portée par une orbite de Ad G dans $\mathfrak{g}$. On en déduit le comportement de Θ_π au voisinage de l'origine. Pour étudier Θ_π au voisinage d'un point semi-simple x , on se ramène à l'étude de distributions sur le centralisateur M de x dans G (voir n° 5.3, formule (31)).

Harish-Chandra s'est consacré depuis quelques années à la tâche de transposer les résultats précédents au cas des groupes p-adiques (voir son grand rapport [10] de 1972). Dans son cours de 1969, rédigé par van Dijk [11], il n'avait réussi à remplir assez complètement ce programme que dans le cas des représentations de carré intégrable. Il s'était contenté de conjecturer une inégalité analogue à (2) et en avait indiqué quelques conséquences pour le cas général. En 1972, R. Howe [13] a obtenu[1] des résultats à peu près complets pour le cas du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{Q}_p)$, basés sur un lemme très astucieux, qu'on retrouvera plus loin (voir § 4) sous une forme généralisée. Le lemme de R. Howe, étendu à tous les groupes réductifs p-adiques, a permis à Harish-Chandra de démontrer l'existence de caractères avec toutes les propriétés requises. Pour l'instant, l'utilisation intensive de l'algèbre de Lie et de l'exponentielle oblige à se limiter au cas des groupes sur un corps de caractéristique 0 . Cependant, une note récente de I. N. Bernshtein [1] donne une démonstration simple, et valable en toutes caractéristiques, d'une inégalité analogue à (2). Nous l'avons suivie au § 2.

Cet exposé est une compilation, presque sans démonstrations, de résultats de R. Howe, I. N. Bernshtein, Jacquet et surtout Harish-Chandra. Ce dernier a exposé ses trouvailles dans plusieurs séries de conférences à Princeton (de novembre 1973 à avril 1974), dont je fus l'un des trop rares auditeurs. J'ai utilisé

---

[1] Voir aussi [6'], [7'] et [8'].

pour cet exposé mes notes prises lors de ces conférences, ainsi que des lettres, notes privées, etc... mises généreusement à ma disposition par Harish-Chandra. Je ne saurais trop le remercier de son amicale confiance.

§ 1. Généralités sur les groupes p-adiques

1.1 Groupes réductifs et sous-groupes paraboliques [2]

On note F un corps local, $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de F , $\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}$, ϖ un générateur de $\mathfrak{p}$, q l'ordre du corps résiduel $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$, et $|x|$ la valeur absolue d'un élément x de F , normalisée par $|\varpi| = q^{-1}$. On note aussi $\bar{F}$ une clôture algébrique de F .

Soit $\mathbb{G}$ un groupe algébrique, réductif et connexe, défini sur le corps F . Pour tout sous-groupe algébrique $\mathbb{H}$ de $\mathbb{G}$ (défini sur F), on note H le groupe "abstrait" $\mathbb{H}(F)$ formé des points de $\mathbb{H}$ rationnels sur F . Le centre de $\mathbb{G}$ est un tore, qui contient un plus grand sous-tore déployé $\mathbb{Z}$. Tout tore déployé maximal de $\mathbb{G}$ contient $\mathbb{Z}$; ces tores sont conjugués par des éléments de G et leur dimension commune s'appelle le rang déployé de $\mathbb{G}$. La dimension commune des tores maximaux de $\mathbb{G}$, qui sont conjugués par le groupe $\mathbb{G}(\bar{F})$, s'appelle le rang de G ; on note ℓ ce rang.

On dit qu'un sous-groupe algébrique $\mathbb{P}$ de $\mathbb{G}$ est parabolique si la variété algébrique $\mathbb{G}/\mathbb{P}$ est propre (d'aucuns disent : complète). Soit $\mathbb{N}$ le radical unipotent de $\mathbb{P}$, c'est-à-dire le plus grand sous-groupe algébrique unipotent distingué dans $\mathbb{P}$. Il existe alors un sous-groupe algébrique réductif connexe $\mathbb{M}$ de $\mathbb{G}$ tel que $\mathbb{P}$ soit le produit semi-direct $\mathbb{M}.\mathbb{N}$ (décomposition de Levi de $\mathbb{P}$). Soit $\mathbb{A}$ le plus grand sous-tore déployé du centre de $\mathbb{M}$; inversement, $\mathbb{M}$ est le centralisateur de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{G}$. On dit dans ces conditions que $(\mathbb{P},\mathbb{A})$ est une paire parabolique ; lorsque $\mathbb{P}$ est donné, $\mathbb{A}$ est défini à automorphisme intérieur près par un élément de N . La dimension de $\mathbb{A}$ s'appelle le rang parabolique de $\mathbb{P}$. On dit que la paire parabolique $(\mathbb{P},\mathbb{A})$ domine la paire parabolique $(\mathbb{P}',\mathbb{A}')$ si $\mathbb{P} \supset \mathbb{P}'$ et $\mathbb{A} \subset \mathbb{A}'$; s'il en est ainsi, il existe un sous-groupe parabolique $\mathbb{P}_1$ de $\mathbb{M}$ tel que $\mathbb{P}' = \mathbb{P}_1 . \mathbb{N}$ et $(\mathbb{P}_1 , \mathbb{A}')$ est une paire parabolique dans $\mathbb{M}$. Ce résultat est très utilisé dans les démonstrations par récurrence sur le rang déployé de $\mathbb{G}/\mathbb{Z}$.

1.2 Structure des groupes p-adiques [3]

Le corps F est localement compact, et par suite G est un groupe topologique localement compact (plonger G comme sous-groupe (algébrique) fermé de $GL_n(F)$ pour n convenable ; la topologie ainsi obtenue sur G ne dépend pas du plongement choisi). De plus, tout voisinage de l'élément neutre e de G contient un sous-groupe compact ouvert.

D'après Bruhat et Tits, il existe un analogue p-adique des décompositions bien connues de Cartan et d'Iwasawa pour les groupes de Lie semi-simples réels. Choisissons un tore déployé maximal $\mathbb{A}$ de $\mathbb{G}$, et notons $\mathbb{Z}$ le plus grand sous-tore déployé contenu dans le centre de $\mathbb{G}$. Notons Δ le système de racines de $\mathbb{G}$ par rapport à $\mathbb{A}$ (voir [2]) et Π l'ensemble des racines positives par rapport à une chambre de Weyl. Pour toute racine α, on note ξ_α le caractère rationnel de $\mathbb{A}$ correspondant. On note alors A^+ l'ensemble des $a \in A$ tels que $|\xi_\alpha(a)| \geq 1$ pour tout $\alpha \in \Pi$; il existe un sous-groupe compact L de A et des éléments $a_1,\dots,a_r$ de A tels que tout élément de A^+ s'écrive sous la forme

$$(5) \qquad a = k\, a_1^{n_1} \dots a_r^{n_r} z$$

avec $k \in L$, $z \in Z$ et des entiers positifs $n_1,\dots,n_r$. Soit Σ le monoïde engendré par $a_1,\dots,a_r$. Il existe un sous-groupe compact ouvert K_o de G et un ensemble fini Ω tels que

$$G = K_o \Sigma Z \Omega K_o \qquad \text{("décomposition de Cartan").}$$

Soit $\mathbb{P}$ le sous-groupe parabolique de $\mathbb{G}$ associé à l'ensemble Π de racines de $\mathbb{A}$; alors $(\mathbb{P},\mathbb{A})$ est une paire parabolique minimale. Comme $\mathbb{G}/\mathbb{P}$ est une variété propre, l'espace homogène G/P est compact, et comme K_o est ouvert, il existe un ensemble fini Ω_1 tel que $G = K_o \Omega_1 P$. On peut préciser comme suit ce résultat (Bruhat-Tits, non publié ; Raynaud et moi-même avons une autre démonstration).

THÉORÈME 1.- <u>Soit</u> $\rho : \mathbb{G} \to \mathbb{GL}(V)$ <u>une représentation linéaire rationnelle de</u> $\mathbb{G}$. <u>Pour tout caractère</u> χ <u>de</u> $\mathbb{A}$, <u>soit</u> V_χ <u>le sous-espace de poids</u> χ <u>de</u> V. <u>Il existe alors un sous-groupe compact ouvert</u> K_1 <u>de</u> G, <u>et un réseau</u> Λ <u>dans</u> V <u>avec les propriétés suivantes</u> :

a) <u>On a la décomposition d'Iwasawa</u> $G = K_1 . P$.

b) <u>On a</u> $\Lambda = \bigoplus_{\chi} (V_{\chi} \cap \Lambda)$.

c) <u>Le réseau</u> Λ <u>est stable par</u> $\rho(K_1)$.

§ 2. Représentations admissibles

2.1 Représentations continues et représentations admissibles [5], [15], [3']

Soit (π, V) une représentation du groupe G dans un espace vectoriel <u>complexe</u> V . Pour tout sous-groupe Γ de G , notons V^{Γ} l'ensemble des vecteurs de V invariants par $\pi(\Gamma)$. On note V_{∞} la réunion des sous-espaces V^{L} où L parcourt l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts de G . Soit K un sous-groupe compact ouvert de G et soit $\mathcal{E}(K)$ l'ensemble des classes de représentations irréductibles continues de K ; pour tout $\mathfrak{d} \in \mathcal{E}(K)$, soit $V_{\mathfrak{d}}$ la composante isotypique de type $\mathfrak{d}$ de la restriction de π à K . On a

(6) $$V_{\infty} = \bigoplus_{\mathfrak{d} \in \mathcal{E}(K)} V_{\mathfrak{d}} \quad .$$

On dira que la représentation (π, V) est <u>continue</u> (= smooth en anglais) si l'on a $V = V_{\infty}$, c'est-à-dire si le stabilisateur dans G de tout vecteur de V est ouvert.

Supposons désormais (π, V) continue. Soit $\mathcal{H}(G)$ l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact sur G . Pour tout $f \in \mathcal{H}(G)$, on définit l'opérateur $\pi(f)$ dans V par

(7) $$\pi(f).v = \int_G f(x)\, \pi(x) v \, dx \qquad (v \in V)$$

où l'intégrale se réduit en fait à une somme finie. Alors V est un module sur $\mathcal{H}(G)$ satisfaisant à la condition suivante de non-dégénérescence :

(ND) <u>Tout élément de</u> V <u>est de la forme</u> $\sum_{i=1}^{n} \pi(f_i).v_i$ <u>avec</u> $f_i \in \mathcal{H}(G)$ <u>et</u> $v_i \in V$ <u>pour</u> $i \leq i \leq n$.

Réciproquement, toute structure de $\mathcal{H}(G)$-module sur V satisfaisant à (ND) est associée à une unique représentation π de G d'espace V . Les sous-$\mathcal{H}(G)$-modules de V sont les sous-espaces de V stables par $\pi(G)$; en particulier, la représentation (π, V) de G est irréductible (au sens algébrique) si et seulement si V est un $\mathcal{H}(G)$-module simple.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout sous-groupe compact ouvert L de G, l'espace V^L est de dimension finie.

(ii) Pour tout $\mathfrak{d} \in \mathcal{E}(K)$, l'espace $V_{\mathfrak{d}}$ est de dimension finie.

(iii) Pour tout $f \in \mathcal{H}(G)$, l'opérateur $\pi(f)$ est de rang fini dans V.

S'il en est ainsi, on dit que (π,V) est <u>admissible</u>. Posons alors

(8) $$\Theta_\pi(f) = \mathrm{Tr}(\pi(f)) \qquad (f \in \mathcal{H}(G))\ ;$$

on dit que les formes linéaires sur $\mathcal{H}(G)$ sont les <u>distributions</u> sur G et que Θ_π est le <u>caractère</u> de π. On dit que la représentation (π,V) a un <u>caractère central</u> s'il existe un homomorphisme ω_π de Z dans $\mathbf{C}^\times$ tel que $\pi(z) = \omega_\pi(z).1$ pour tout $z \in Z$. C'est le cas si la représentation (π,V) est admissible et irréductible ("lemme de Schur").

Le groupe G agit sur le dual V^* de V par $g \mapsto {}^t\pi(g^{-1})$; on note $\widetilde{V}$ le sous-espace $(V^*)_\infty$ de V^*, et $\widetilde{\pi}(g)$ la restriction de ${}^t\pi(g^{-1})$ à $\widetilde{V}$. Alors $(\widetilde{\pi},\widetilde{V})$ est une représentation de G, dite <u>contragrédiente</u> de (π,V) ; si (π,V) est admissible, il en est de même de $(\widetilde{\pi},\widetilde{V})$ et (π,V) est la contragrédiente de $(\widetilde{\pi},\widetilde{V})$. On appelle <u>coefficient</u> de π toute fonction sur G de la forme

$$\pi_{\widetilde{v},v}(g) = \langle \widetilde{v}, \pi(g)v\rangle$$

avec $v \in V$, $\widetilde{v} \in \widetilde{V}$. L'ensemble des combinaisons linéaires de coefficients de π se note $\mathcal{A}(\pi)$.

2.2 <u>Représentations paraboliques</u> [14], [5], [10']

On dit que la représentation (π,V) de G est <u>parabolique</u> ("pointue" chez Jacquet [14] et "supercuspidal" en anglais) si elle est admissible et si tout coefficient de π est à support compact modulo Z (autrement dit, nulle en dehors d'un ensemble de la forme $Z\Omega$ où $\Omega \subset G$ est compact).

Soit χ un homomorphisme continu de Z dans $\mathbf{C}^\times$. On note $\mathcal{H}_\chi(G)$ l'espace des fonctions localement constantes sur G, à support compact modulo Z, telles que

(9) $$f(zx) = \chi(z)f(x) \qquad \text{pour } z \in Z,\ x \in G.$$

On dit qu'une fonction f de $\mathcal{H}_\chi(G)$ est parabolique si l'on a

(10) $$\int_N f(xn)dn = 0$$

pour tout sous-groupe parabolique $\mathbb{P} \neq \mathbb{G}$ de $\mathbb{G}$, de radical unipotent $\mathbb{N}$; l'ensemble de ces fonctions se note $\mathcal{H}^{\circ}_{\chi}(G)$.

De plus, on note $\mathcal{E}(G,\chi)$ l'ensemble des classes de représentations admissibles irréductibles de caractère central χ , et $\mathcal{E}^{\circ}(G,\chi)$ le sous-ensemble de celles de ces représentations qui sont paraboliques.

THÉORÈME 2.- Pour toute représentation admissible irréductible (π,V) de G , il existe un isomorphisme de $V \otimes \widetilde{V}$ sur $\mathcal{A}(\pi)$ transformant $v \otimes \widetilde{v}$ en $\pi_{\widetilde{v},v}$. De plus, $\mathcal{H}^{\circ}_{\chi}(G)$ est somme directe des espaces $\mathcal{A}(\pi)$ où π parcourt $\mathcal{E}^{\circ}(G,\chi)$.

Voici maintenant une variante des relations d'orthogonalité de Schur [5,p.11]

$$(11) \quad \int_{G/Z} \langle\widetilde{v}_1,\pi(x)v_1\rangle\langle\widetilde{v}_2,\pi(x^{-1})v_2\rangle dx = d(\pi)^{-1}\langle\widetilde{v}_1,v_2\rangle\langle\widetilde{v}_2,v_1\rangle \quad ;$$

dans cette formule, (π,V) est une représentation parabolique irréductible, v_1 et v_2 sont dans V , $\widetilde{v}_1$ et $\widetilde{v}_2$ dans $\widetilde{V}$, et $d(\pi)$ est une constante strictement positive ne dépendant que de π . On appelle $d(\pi)$ le degré formel de π .

L'espace $\mathcal{H}_{\chi}(G)$ est une algèbre pour le produit de convolution défini par

$$(12) \qquad (f_1 * f_2)(x) = \int_{G/Z} f_1(xy^{-1})f_2(y)dy \quad ;$$

ici, comme dans (11), la fonction à intégrer sur G est invariante par translation par Z , donc provient de G/Z , ce qui justifie d'intégrer sur G/Z . Alors $\mathcal{H}^{\circ}_{\chi}(G)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{H}_{\chi}(G)$, de même que $\mathcal{A}(\pi)$ pour toute π dans $\mathcal{E}^{\circ}(G,\chi)$. La structure de $\mathcal{A}(\pi)$ se décrit comme suit : soit $\mathcal{L}(\pi)$ l'algèbre des opérateurs T dans l'espace V de π pour lesquels il existe un sous-groupe compact ouvert L de G avec $\pi(k)T\pi(k') = T$ pour k , k' dans L . Pour $T \in \mathcal{L}(\pi)$, posons

$$(13) \qquad \varphi_T(x) = d(\pi)\mathrm{Tr}(T.\pi(x^{-1})) \qquad (x \in G) \quad ;$$

alors $T \mapsto \varphi_T$ est un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{L}(\pi)$ sur $\mathcal{A}(\pi)$. Par suite, comme $\mathcal{H}_{\chi}(G)$-module, V est isomorphe à un facteur direct de $\mathcal{A}(\pi)$, donc aussi de $\mathcal{H}_{\chi}(G)$. Malgré l'absence d'élément unité dans $\mathcal{H}_{\chi}(G)$, on en déduit le résultat suivant avec Casselman [5,p.12].

THÉORÈME 3.- Soit (π,V) une représentation parabolique irréductible de G , de caractère central χ . Alors V est projectif dans la catégorie des $\mathcal{H}_{\chi}(G)$-modules non-dégénérés (cf. condition (ND), page 471-05).

COROLLAIRE 1.- Toute représentation parabolique de G qui admet un caractère central est somme directe de représentations paraboliques irréductibles.

COROLLAIRE 2.- Soit (π,V) une représentation parabolique de G qui admet un caractère central. Pour qu'elle soit irréductible, il faut et il suffit que tout opérateur dans V qui commute à $\pi(G)$ soit une homothétie.

2.3 Représentations induites

Soit Γ un sous-groupe fermé de G. On laisse au lecteur le soin de définir l'algèbre $\mathcal{H}(\Gamma)$ et les notions de représentation continue ou admissible de Γ.

Soit alors (λ,W) une représentation continue de Γ. Considérons l'espace V des applications f de G dans W, localement constantes, telles que [1]

$$f(\gamma g) = \beta(\gamma)\lambda(\gamma)f(\gamma) \qquad (\gamma \in \Gamma,\ g \in G)\ ,$$

et nulles en dehors d'un ensemble de la forme $\Gamma\Omega$ où Ω est compact. On note $\pi(g)$ la translation à droite par g dans V. Alors (π,V) est une représentation continue de G, qu'on appelle la représentation de G induite par la représentation (λ,W) de Γ ; on la note $\mathrm{Ind}_{\Gamma}^{G}\lambda$. Si G/Γ est compact et si (λ,W) est admissible, alors (π,V) est admissible ; noter que G/P est compact si $\mathbb{P}$ est un sous-groupe parabolique de $\mathbb{G}$.

On définit un isomorphisme de $\mathcal{H}(G)\otimes_{\mathcal{H}(\Gamma)} W$ sur V, d'où immédiatement une propriété universelle de (π,V) exprimant la réciprocité de Frobenius. Les théorèmes classiques de Mackey se transposent sans difficulté [17].

2.4 Réduction au cas des représentations paraboliques

On fixe une paire parabolique $(\mathbb{P},\mathbb{A})$ de $\mathbb{G}$, de décomposition de Levi $\mathbb{P} = \mathbb{M}\circ\mathbb{N}$. Soit (π,V) une représentation continue de G. Notons $V(P)$ le sous-espace de V engendré par les vecteurs $\pi(n)v - v$ avec $v \in V$, $n \in N$, et V_P le quotient $V/V(P)$. On montre facilement que $V(P)$ se compose des vecteurs v de V pour lesquels il existe un sous-groupe compact ouvert U de N avec

$$\int_U \pi(n)v.dn = 0\ .$$

Il est clair que $V(P)$ est stable par $\pi(M)$, d'où, par passage au quotient, une représentation (σ,V_P) de M. On a donc défini un foncteur $V \Rightarrow V_P$ de la caté-

---

[1] On pose $\beta = \Delta_G/\Delta_\Gamma$ où Δ_G (resp. Δ_Γ) est la fonction module de G (resp. Γ).

gorie des $\mathcal{H}(G)$-modules non-dégénérés dans celle des $\mathcal{H}(M)$-modules non-dégénérés. Ce foncteur est exact d'après Casselman [7]. Les théorèmes suivants sont dus essentiellement à Jacquet [14], [16].

THÉORÈME 4.- Si la représentation (π,V) de G est admissible, avec un nombre fini de générateurs, alors la représentation (σ,V_P) de M est admissible, avec un nombre fini de générateurs.

THÉORÈME 5.- Pour qu'une représentation admissible irréductible (π,V) de G soit parabolique, il faut et il suffit que l'on ait $V_P = 0$ pour tout sous-groupe parabolique $\mathbb{P} \neq \mathbb{G}$ de $\mathbb{G}$.

Par induction sur le rang déployé de $\mathbb{G}/\mathbb{Z}$, on déduit de là le résultat fondamental suivant de Jacquet.

THÉORÈME 6.- Soit (π,V) une représentation admissible irréductible de G. Il existe une paire parabolique $(\mathbb{P},\mathbb{A})$ de décomposition de Levi $\mathbb{P} = \mathbb{M}.\mathbb{N}$, et une représentation parabolique irréductible (σ,W) de M telles que (π,V) soit contenue dans la représentation induite $\mathrm{Ind}_P^G \tau$, où τ est l'extension de σ à $P = MN$, triviale sur N.

Ce dernier théorème montre l'importance des représentations paraboliques. Le seul moyen dont on dispose pour en fabriquer remonte à Mautner [19]. Soit K un sous-groupe compact ouvert de G, et soit (σ,W) une représentation de K avec la propriété suivante : pour tout sous-groupe parabolique $\mathbb{P}$ de $\mathbb{G}$, il n'existe aucun vecteur non nul de W invariant par $\sigma(K \cap N)$. Alors la représentation $\mathrm{Ind}_K^G \sigma$ de G est parabolique. Pour $\mathbb{G} = \mathbb{GL}_2$, on sait par Mautner [19], Shalika [22] et Silberger [23] que toutes les représentations paraboliques irréductibles de G s'obtiennent de cette manière, au moins lorsque q est impair ; une démonstration valable aussi pour q pair est due à Casselman [6] (voir aussi Kutzko [18]). En dehors de $\mathbb{GL}_2$, on ne sait rien ; même le cas de $\mathbb{GL}_3$ n'est pas résolu.

§ 3. Existence des caractères

3.1 Le théorème de finitude de Bernshtein [1]

Reprenons les notations du n° 1.2. Notons $\mathbb{P}$ le sous-groupe parabolique de $\mathbb{G}$ associé à Π, et $\mathbb{N}'$ le radical unipotent du sous-groupe parabolique associé à $-\Pi$. Soit K un sous-groupe compact ouvert de G ; on fait les deux hypothèses suivantes :

(i) K est distingué dans K_o ;

(ii) si l'on pose $\Gamma^+ = P \cap K$ et $\Gamma^- = N' \cap K$, on a $K = \Gamma^-\Gamma^+$ et
$a_i \Gamma^- a_i^{-1} \subset \Gamma^-$, $a_i^{-1}\Gamma^+ a_i \subset \Gamma^+$.

D'après Jacquet, tout voisinage de e dans G contient un tel sous-groupe K .

Soit $\mathcal{H}(G,K)$ la sous-algèbre de $\mathcal{H}(G)$ formée des fonctions biinvariantes par K. Normalisons la mesure de Haar m sur G par $m(K) = 1$. Alors la fonction caractéristique e_K de K est l'élément unité de $\mathcal{H}(G,K)$. Pour tout $g \in G$, soit δ_g la masse unité en g et $H(g) = e_K * \delta_g * e_K$; c'est un multiple constant de la fonction caractéristique de KgK. Lorsque g parcourt un système de représentants des doubles classes modulo K , $H(g)$ décrit une base de l'espace vectoriel $\mathcal{H}(G,K)$; de plus $H(e) = e_K$.

THÉORÈME 7.- <u>Il existe un entier</u> $N > 0$ <u>tel que tout</u> $\mathcal{H}(G,K)$-<u>module simple de dimension finie sur</u> $\mathbf{C}$ <u>ait une dimension</u> $\leq N$.

Voici en abrégé la démonstration.

Pour $p \in \Sigma$, posons $\Gamma_p^+ = p^{-1}\Gamma^+ p$ et $\Gamma_p^- = p\,\Gamma^- p^{-1}$, d'où $\Gamma_p^+ \subset \Gamma^+$, $\Gamma_p^- \subset \Gamma^-$. Le calcul suivant

(14) $\quad KpKqK = Kp\Gamma^-\Gamma^+ qK = K\Gamma_p^- pq\,\Gamma_q^+ K = KpqK$

entraîne $H(p)H(q) = H(pq)$ pour p , q dans Σ .

Soit $\mathcal{A}$ (resp. $\mathfrak{Z}$) la sous-algèbre de $\mathcal{H}(G,K)$ formée des fonctions à support dans $K\Sigma ZK$ (resp. KZK). Alors $\mathfrak{Z}$ est contenue dans le centre de $\mathcal{H}(G,K)$, et d'après ce qui précède, $\mathcal{A}$ est l'algèbre de polynômes $\mathfrak{Z}[H(a_1),\ldots,H(a_r)]$.

Choisissons un ensemble fini Y tel que $K\Omega K_o = YK$, et pour tout $p \in \Sigma$ posons

(15) $$f(p) = \sum_{y \in Y} m(\Gamma_p^+ y K) .$$

On définit une relation d'ordre partiel sur Σ en posant $p \leq q$ s'il existe p' dans Σ avec $q = pp'$. La fonction f est à valeurs entières positives et satisfait à $f(p) \geq f(q)$ lorsque $p \leq q$. Soit Σ_o l'ensemble des $p \in \Sigma$ tels que $f(q) > f(p)$ pour tout $q < p$ dans Σ ; un argument combinatoire facile montre que Σ_o est <u>fini</u>. Si $p \in \Sigma - \Sigma_o$, il existe p' dans Σ tel que $p' < p$ et

$f(p') = f(p)$, d'où $\Gamma^+_{p'} yK = \Gamma^+_p yK$ pour tout $y \in Y$. Un calcul analogue à (14) entraîne alors $H(p'')H(p'y) = H(py)$ si $p = p'p''$. On en déduit que l'ensemble des fonctions de $\mathcal{H}(G,K)$ à support dans $K\Sigma ZK \cap K_o = K\Sigma ZYK$ est un $\mathcal{A}$-module à gauche de type fini engendré par les $H(py)$ pour $p \in \Sigma_o$ et $y \in Y$. Soit enfin X un ensemble fini tel que $K_o = XK$. Alors tout élément de $\mathcal{H}(G,K)$ s'écrit sous la forme

$$\sum_{x\in X} \sum_{p\in\Sigma_o} \sum_{y\in Y} H(x)a(p,x,y)H(py) \tag{16}$$

avec des éléments $a(p,x,y)$ de $\mathcal{A}$.

Soit V un $\mathcal{H}(G,K)$-module de dimension finie n sur $\mathbf{C}$. Les opérateurs $A_1,\dots,A_r$ dans V, correspondant à $H(a_1),\dots,H(a_r)$ commutent deux à deux ; soit $\mathcal{R}$ l'algèbre qu'ils engendrent. Posons $c = 2(1 - 2^{-r})$. Comme $\mathcal{R}$ est <u>commutative, on a</u> $\dim \mathcal{R} \leq n^c$. Comme V est un $\mathcal{H}(G,K)$-module simple, $\mathcal{Z}$ agit par homothéties dans V , tout opérateur dans V provient d'un élément de $\mathcal{H}(G,K)$ (th. de Burnside). De (16), on déduit

$$|X||\Sigma_o||Y| \cdot \dim \mathcal{R} \geq \dim \mathrm{End}(V) = n^2$$

et finalement

$$\dim V \leq (|X||\Sigma_o||Y|)^{2^{r-1}} \tag{17}$$

3.2 <u>La majoration fondamentale</u>

THÉORÈME 8.- <u>Soit</u> K <u>un sous-groupe compact ouvert de</u> G , <u>et soit</u> $\mathfrak{d}$ <u>une classe de représentations irréductibles continues de</u> K . <u>Il existe une constante</u> $N > 0$ <u>telle que</u> $(\lambda:\mathfrak{d}) \leq N$ <u>pour toute représentation unitaire irréductible</u> $(\lambda,\mathcal{H})$ <u>de</u> G .

Il suffit de prouver que, pour tout sous-groupe compact ouvert K de G , il existe une constante N_K telle que $\dim \mathcal{H}^K \leq N_K$ pour toute représentation unitaire irréductible $(\lambda,\mathcal{H})$ de G . On prouve tout d'abord que $\mathcal{H}^K$ est un $\mathcal{H}(G,K)$-module simple. Supposons alors λ de carré intégrable ; l'opérateur $\lambda(e_K)$ est de Hilbert-Schmidt puisque e_K est une fonction continue à support compact. Comme $\lambda(e_K)$ est le projecteur orthogonal de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}^K$, on voit que $\mathcal{H}^K$ est de dimension finie. Le théorème 7 fournit alors une majoration de la dimension de $\mathcal{H}^K$.

On en déduit, par la méthode de Godement [9] pour les fonctions sphériques, l'existence d'un entier $p \geq 1$ tel que le commutateur

$[f_1,\ldots,f_p] = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} \varepsilon_\sigma f_{\sigma(1)} \cdots f_{\sigma(p)}$ soit nul quels que soient $\chi : Z \to \mathbf{C}^\times$ et $f_1,\ldots,f_p$ dans la sous-algèbre $\mathcal{H}^{\circ}_\chi(G) \cap \mathcal{H}_\chi(G,K)$ (cf. n° 2.2), où $\mathcal{H}_\chi(G,K)$ se compose des fonctions de $\mathcal{H}_\chi(G)$ biinvariantes par K.

On utilise ensuite une construction analogue à celle de $V(P)$ au n° 2.4, mais cette fois pour le groupe K. Il n'est pas difficile d'en déduire l'existence d'un entier $q \geq 1$ tel que $[f_1,\ldots,f_q] = 0$ quels que soient χ et $f_1,\ldots,f_q$ dans $\mathcal{H}_\chi(G,K)$. On en déduit une majoration uniforme (aussi en χ) de la dimension des $\mathcal{H}_\chi(G,K)$-modules simples de dimension finie sur $\mathbf{C}$. Le théorème 8 est alors de démonstration facile (prendre pour χ le caractère central de λ).

Le lecteur pourra reconstituer les détails de cette démonstration à l'aide du chapitre II de Harish-Chandra et van Dijk [11].

3.3 Quelques conséquences de la majoration

Soit (π,V) une représentation admissible de G. On dit que π est <u>préunitaire</u> s'il existe sur V une forme hermitienne positive Φ, non-dégénérée, invariante par G. S'il en est ainsi, π est somme directe de représentations admissibles préunitaires irréductibles π_i, chacune des π_i n'intervenant qu'un nombre fini de fois. De plus, soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert complété de V pour Φ. Alors π se prolonge en une représentation unitaire λ de G dans $\mathcal{H}$, et l'on a $V = \mathcal{H}_\infty$ avec les notations du n° 2.1. Si de plus, (π,V) est algébriquement irréductible, alors $(\lambda,\mathcal{H})$ est topologiquement irréductible.

Les remarques précédentes sont élémentaires. Voici une réciproque, corollaire du théorème 8.

THÉORÈME 9.- <u>L'opération de complétion est une équivalence de la catégorie des représentations admissibles préunitaires</u> (algébriquement) <u>irréductibles de</u> G <u>sur celle des représentations unitaires</u> (topologiquement) <u>irréductibles</u>.

Une forme plus faible du théorème 9 assure l'existence des caractères :

THÉORÈME 10.- <u>Si</u> $(\lambda,\mathcal{H})$ <u>est une représentation unitaire irréductible de</u> G, <u>l'opérateur</u> $\lambda(f)$ <u>est de rang fini pour toute fonction localement constante</u> f <u>à support compact sur</u> G. <u>En particulier, le caractère de</u> λ <u>est défini en tant que distribution sur</u> G.

Par passage à la limite, $\lambda(f)$ est un opérateur compact pour toute fonction f intégrable sur G . D'après Dixmier [8, p.111], on en déduit que G est <u>de type</u> I . Autrement dit, soit $(\lambda,\mathcal{H})$ une représentation unitaire de G qui n'est pas équivalente à la somme de deux représentations unitaires $(\lambda_i , \mathcal{H}_i)$ avec $\mathrm{Hom}_G(\mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2)$ réduit à 0 . Alors $(\lambda,\mathcal{H})$ est un multiple d'une représentation irréductible. Rappelons qu'il existe une formule de Plancherel "abstraite" pour les groupes de type I (cf. [8, p.328]).

§ 4. Le théorème de R. Howe

4.1 Enoncé du théorème

On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G ; pour $X \in \mathfrak{g}$ et $x \in G$, on note $x.X$ le transformé de X par $\mathrm{Ad}\, x$. De plus, on note ω une partie de $\mathfrak{g}$ sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

Il existe une partie compacte R de $\mathfrak{g}$ telle que ω soit l'adhérence de la réunion des orbites X^G des points X de R .

On note $J(\omega)$ l'espace des distributions sur $\mathfrak{g}$ invariantes par le groupe adjoint $\mathrm{Ad}\, G$, de support contenu dans ω . Enfin, soit Λ un réseau dans $\mathfrak{g}$ (c'est-à-dire un $\mathfrak{o}$-module de type fini engendrant $\mathfrak{g}$ sur le corps F). Pour toute distribution T sur $\mathfrak{g}$ et tout $X \in \mathfrak{g}$, on pose $j_\Lambda T(X) = T(\varphi_{X+\Lambda})$ où φ_A est la fonction caractéristique d'une partie A de $\mathfrak{g}$. La fonction $j_\Lambda T$ sur $\mathfrak{g}$ est invariante par les translations de Λ .

THÉORÈME 11.- *Supposons F de caractéristique 0 . L'espace des fonctions $j_\Lambda T$, où T parcourt $J(\omega)$, est de dimension finie.*

4.2 Démonstration abrégée

On dit qu'un élément X de $\mathfrak{g}$ est <u>nilpotent</u> s'il appartient à $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ et si $\mathrm{ad}\, X$ est nilpotent ; soit $\mathcal{N}$ l'ensemble de ces éléments. En appliquant le théorème de Jacobson-Morozov, la conjugaison des tores déployés maximaux dans $\mathbb{G}$, et le théorème 1 (avec $\rho = \mathrm{Ad}$), on prouve ce qui suit. Etant donné $X_0 \in \mathcal{N}$, il existe un réseau Λ_1 dans $\mathfrak{g}$, un sous-groupe compact ouvert K de G , et une paire parabolique $(\mathbb{P},\mathbb{A})$ de $\mathbb{G}$ de décomposition de Levi $\mathbb{P} = \mathbb{M}\,.\,\mathbb{N}$, avec les propriétés suivantes :

a) Soient $\mathfrak{m}$ l'algèbre de Lie de $\mathbb{M}$ et $\mathfrak{n}$ celle de $\mathbb{N}$, et soit $\mathfrak{n}'$ l'algèbre de Lie du radical unipotent $\mathbb{N}'$ du groupe parabolique opposé à $\mathbb{P}$ (cf. début du n° 3.1). On a $X_0 \in \mathfrak{n}$ et

(18) $\Lambda_1 = (\Lambda_1 \cap \mathfrak{n}') \oplus (\Lambda_1 \cap \mathfrak{m}) \oplus (\Lambda_1 \cap \mathfrak{n})$.

b) Le réseau Λ_1 est stable par Ad K .

c) On a $G = K.P$.

On considère ensuite la norme sur $\mathfrak{g}$ telle que Λ_1 soit l'ensemble des X avec $\|X\| \leq 1$.

Choisissons $\gamma \in A$ tel que l'on ait $|\xi_\alpha(\gamma)| < 1$ pour toute racine α associée à N . On a alors $\|\gamma.X_0\| < \|X_0\|$ et $\gamma.(\Lambda_1 \cap \mathfrak{n}') \supset (\Lambda_1 \cap \mathfrak{n}')$. Pour $X \in \mathfrak{g}$, notons $K_\gamma(X)$ l'intersection des normalisateurs dans K des sous-ensembles $\gamma.\Lambda_1$ et $\gamma.X + \Lambda_1$ de $\mathfrak{g}$. On définit une application β de $K_\gamma(X)$ dans $\Lambda_1 \cap \mathfrak{n}$ par la congruence

(19) $\beta(k) \equiv k\gamma.X - \gamma.X \qquad \text{mod. } \mathfrak{m} + \mathfrak{n}'$.

<u>Lemme</u> 1.- <u>Il existe un voisinage ouvert</u> U_1 <u>de</u> X_0 <u>et un nombre</u> $t > 0$ <u>tels que pour tout</u> $X \in \mathfrak{g}$ <u>de la forme</u> $X = c.Y$ <u>avec</u> $c \in F$, $Y \in U_1$ <u>et</u> $\|X\| \geq t$, <u>l'application</u> β <u>de</u> $K_\gamma(X)$ <u>dans</u> $\Lambda_1 \cap \mathfrak{n}$ <u>soit une submersion surjective</u>.

Comme $\mathfrak{n}$ est contenu dans $[X_0, \mathfrak{g}]$, il existe un sous-espace $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathrm{ad}(\gamma.X_0)$ induise un isomorphisme de $\mathfrak{u}$ sur $\mathfrak{n}$. Par continuité, il existe un voisinage ouvert U de X_0 tel que ad Z induise un isomorphisme β_Z de $\mathfrak{u}$ sur $\mathfrak{n}$ pour tout $Z \in \gamma.U$. Par suite, β est submersive pour tout X assez voisin de X_0 . Le fait que β soit surjective se voit par un argument d'approximations successives assez délicat.

Sous les hypothèses du lemme 1, toute fonction localement constante sur $\Lambda_1 \cap \mathfrak{n}$ est donc l'intégrale sur les fibres de β d'une fonction localement constante sur $K_\gamma(X)$. On en déduit facilement l'énoncé suivant.

<u>Lemme</u> 2.- <u>Quitte à rapetisser</u> U_1 <u>et augmenter</u> t <u>dans le lemme 1, on a la propriété suivante. Pour tout</u> X <u>comme dans le lemme 1, il existe une fonction</u> $\alpha \in \mathcal{H}(G)$, <u>d'intégrale</u> 1 <u>et telle que la fonction</u> $\varphi_{\alpha,X}$ <u>définie par</u>

(20) $\varphi_{\alpha,X}(Y) = \int_G \alpha(x)\, \varphi_\Lambda(x^{-1}.Y - X)dx \qquad (Y \in \mathfrak{g})$

soit invariante par les translations de Λ , et de support contenu dans l'ensemble des $Y \in \mathfrak{g}$ tels que $\|Y\| < \|X\|$.

Un argument géométrique facile, utilisant la relation $G = K.P$, entraîne le lemme suivant.

Lemme 3.- Il existe un réseau Λ_2 tel que ω soit contenu dans $\mathcal{N} + \Lambda_2$.

Un argument de compacité montre alors l'existence d'un nombre $t_1 \geq t$ tel que tout $X \in \omega$ avec $\|X\| \geq t_1$ ait la propriété énoncée dans le lemme 2. Un calcul facile montre alors que pour tout $X \in \mathfrak{g}$ avec $\|X\| \geq t_1$, il existe des constantes complexes $c_1,\dots,c_r$ et des éléments $X_1,\dots,X_r$ de $\mathfrak{g}$ avec $\|X_i\| < \|X\|$ pour $1 \leq i \leq r$, tels que l'on ait

(21) $$j_\Lambda T(X) = \sum_{i=1}^{r} c_i \; j_\Lambda T(X_i)$$

pour toute distribution T dans $J(\omega)$. Comme l'ensemble des valeurs non nulles prises par la norme est discret, le théorème de R. Howe s'obtient immédiatement.

4.3 Une conjecture [12]

Soit Ω une partie de G ; on suppose qu'il existe une partie compacte R de G telle que Ω soit l'adhérence de la réunion des classes de conjugaison des points de R . Notons $I(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur G , à support dans Ω , invariantes par les automorphismes intérieurs de G . Soit enfin L un sous-groupe compact ouvert de G ; pour toute distribution T sur G , définissons la fonction $i_L T$ sur G par

(22) $$i_L T(x) = T(\varphi_{x \cdot L}) \; .$$

CONJECTURE.- L'espace des fonctions $i_L T$, où T parcourt $I(\Omega)$, est de dimension finie.

§ 5. Structure des caractères

5.1 Transformation de Fourier dans l'algèbre de Lie

On suppose désormais que le corps F est de caractéristique 0 . On fixe un caractère additif ψ de F , de conducteur σ et une forme bilinéaire symétrique B sur $\mathfrak{g}$, invariante par $\operatorname{Ad} G$, et non-dégénérée. On définit la transformation de Fourier sur $\mathfrak{g}$ par

(23) $$\hat{f}(X) = \int_{\mathfrak{g}} \psi(B(X,Y))f(Y)dY ,$$

la mesure de Haar sur $\mathfrak{g}$ étant normalisée de sorte que l'on ait la formule d'inversion

(24) $$f(X) = \int_{\mathfrak{g}} \psi(-B(X,Y))\hat{f}(Y)dY .$$

Ces définitions ont un sens pour f dans l'espace $C_c^\infty(\mathfrak{g})$ des fonctions localement constantes à support compact sur $\mathfrak{g}$; par dualité, on définit la transformation de Fourier pour les distributions sur $\mathfrak{g}$.

Définissons encore les fonctions η sur $\mathfrak{g}$ et D sur G , à valeurs dans F, par

(25) $$\det(t - \mathrm{ad}\, X) \equiv t^{\ell}\, \eta(X) \qquad \mathrm{mod.}\ t^{\ell+1} ,$$

(26) $$\det(t - \mathrm{Ad}\, g + 1) \equiv t^{\ell}\, D(g) \qquad \mathrm{mod.}\ t^{\ell+1} ,$$

pour $X \in \mathfrak{g}$, $g \in G$. On pose $\mathfrak{g}' = \{\eta \neq 0\}$ et $G' = \{D \neq 0\}$.

THÉORÈME 12.- *Soit* $\omega \subset \mathfrak{g}$ *comme au paragraphe 4, et soit* $T \in J(\omega)$. *La distribution* $\hat{T}$ *jouit des propriétés suivantes :*

a) *C'est une fonction localement intégrable sur* $\mathfrak{g}$.

b) *C'est une fonction localement constante sur* $\mathfrak{g}'$.

c) *La fonction* $|\eta|^{\frac{1}{2}}\, \hat{T}$ *est localement bornée sur* $\mathfrak{g}$.

Comme corollaire, considérons l'orbite ζ d'un point X_o de $\mathfrak{g}$. Le stabilisateur Γ de X_o dans G est unimodulaire tout comme G , et il existe donc une mesure invariante ν sur G/Γ , qu'on transporte à ζ par l'application $g\Gamma \mapsto g \cdot X_o$. On sait par Rao [20] et Deligne que l'image de ν par l'injection de ζ dans $\mathfrak{g}$ attribue une masse finie à tout compact de $\mathfrak{g}$, donc peut être considérée comme une mesure de Radon μ_ζ sur $\mathfrak{g}$, ayant pour support l'adhérence $\bar{\zeta}$ de ζ . Le théorème 12 montre alors que $\hat{\mu}_\zeta$ est une fonction sur $\mathfrak{g}$, avec les propriétés a), b) et c) dudit théorème. Cette construction est surtout utile lorsque X_o est nilpotent ; en particulier, on a $\hat{\mu}_{\{0\}} = 1$.

5.2 Comportement local sur l'algèbre de Lie

Soient A un tore maximal dans $\mathbf{G}$, $\mathfrak{a}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}'$. Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$, on définit une fonction Φ_f^A sur $\mathfrak{a}'$ par

(27) $$\Phi_f^A(H) = |\eta(H)|^{\frac{1}{2}} \int_{G/A} f(x.H)dx .$$

Noter qu'on a $xa.H = x.H$ pour $x \in G$ et $a \in A$, d'où la possibilité d'intégrer sur G/A .

THÉORÈME 13.- <u>Soit</u> T <u>une distribution sur</u> $\mathfrak{g}$ <u>invariante</u> (par $\mathrm{Ad}\, G$), <u>et soit</u> $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$. <u>Si l'on a</u> $\Phi_f^A = 0$ <u>pour tout tore maximal</u> $\mathbb{A}$, <u>on a</u> $T(f) = 0$.

Le théorème suivant est dû à Shalika [21].

THÉORÈME 14.- <u>Soit</u> $\mathbb{A}$ <u>un tore maximal de</u> $\mathbb{G}$. <u>On peut associer à toute orbite nilpotente</u> ζ <u>dans</u> $\mathfrak{g}$ <u>une fonction</u> Γ_ζ^A <u>sur</u> $\mathfrak{a}'$, <u>satisfaisant aux conditions</u> :

(i) <u>On a</u>

(28) $$\Gamma_\zeta^A(t^2H) = |t|^{\dim\mathfrak{g} - \dim\zeta - \ell}\, \Gamma_\zeta^A(H)$$

<u>pour</u> H <u>dans</u> $\mathfrak{a}'$ <u>et</u> $t \neq 0$ <u>dans</u> F .

(ii) <u>Pour toute fonction</u> $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$, <u>on a</u>

(29) $$\Phi_f^A(H) = \sum_\zeta \mu_\zeta(f)\, \Gamma_\zeta^A(H)$$

<u>pour tout</u> H <u>dans</u> $\mathfrak{a}'$ <u>assez voisin de</u> 0 .

Rappelons que le tore $\mathbb{A}$ est dit <u>elliptique</u> si A/Z est compact. On peut montrer que $\Gamma_{\{0\}}^A$ est nulle lorsque A n'est pas elliptique. Par contre, il existe une constante $c \neq 0$ telle que l'on ait

(30) $$\Gamma_{\{0\}}^A(H) = c|\eta(H)|^{\frac{1}{2}} \qquad (H \in \mathfrak{a}')$$

quel que soit le tore maximal elliptique $\mathbb{A}$.

5.3 <u>Structure locale des caractères</u>

Soit (π,V) une représentation préunitaire irréductible de G . On sait, d'après le th. 10, que π est admissible, donc admet un caractère Θ_π qui est une distribution. Voici le théorème fondamental.

THÉORÈME 15.- <u>La distribution</u> Θ_π <u>sur</u> G <u>est une fonction localement intégrable sur</u> G , <u>localement constante sur l'ensemble</u> G' <u>des points réguliers de</u> G , <u>et</u> $|D|^{\frac{1}{2}}\, \Theta_\pi$ <u>est localement bornée sur</u> G .

On a en fait des renseignements plus précis sur la structure de Θ_π . Soit $\gamma \in G$ un élément semi-simple, régulier ou non. Soient $\mathbb{M}$ le centralisateur de γ dans $\mathbb{G}$ et $\mathfrak{m}$ l'algèbre de Lie de $\mathbb{M}$. Il existe des constantes $c_\zeta(\pi)$ telles que

$$(31) \qquad \Theta_\pi(\gamma \cdot \exp X) = \sum_\zeta c_\zeta(\pi)\, \hat{\mu}_\zeta(X)$$

pour tout X assez voisin de 0 dans $\mathfrak{m}$; dans cette formule, ζ parcourt l'ensemble des orbites nilpotents de $\mathrm{Ad}\, M$ dans $\mathfrak{m}$. Ceci s'applique au cas $\gamma = e$, où l'on a $\mathbb{M} = \mathbb{G}$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}$.

La démonstration de ces résultats utilise tout ce qui précède, et occupe 50 à 60 pages. Il n'est pas question d'en donner une idée ici.

5.4 Application au degré formel

Voici le dernier résultat.

THÉORÈME 16.- Il est possible de normaliser la mesure de Haar sur G de sorte que le degré formel $d(\pi)$ de toute représentation parabolique irréductible π soit entier.

Le principe de la démonstration est très simple. On montre d'abord que, lorsque $\gamma = e$, la constante $c_{\{0\}}(\pi)$ de la formule (31) est égale à $c.d(\pi)$, où c est la constante de la formule (30) [on conjecture que c est égale à $(-1)^{\ell'}/d(\pi_0)$, où π_0 est la représentation de Steinberg [7], et $\ell' = \dim \mathbb{A}/\mathbb{Z}$ pour tout tore déployé maximal $\mathbb{A}$ de $\mathbb{G}$]. Soit ensuite Λ un réseau dans $\mathfrak{g}$, stable par le crochet et assez petit pour que l'exponentielle définisse un homéomorphisme de Λ avec un sous-groupe compact ouvert L de G . Soit θ_π l'image réciproque sur Λ de la distribution Θ_π restreinte à L . La dimension de l'espace V^L des points de V fixes par $\pi(L)$ est alors égale à

$$(32) \qquad m_\pi(\Lambda) = \frac{\theta_\pi(\varphi_\Lambda)}{\int_\Lambda dX} \quad .$$

Le théorème 14 et la formule (31) démontrent alors l'égalité

$$(33) \qquad m_\pi(t^2\Lambda) = \sum_\zeta c_\zeta(\pi)\,|t|^{-\dim \zeta}\, \mu_\zeta(\varphi_{\Lambda^*})$$

où Λ^* est l'adjoint du réseau Λ par rapport à B . Autrement dit, l'entier $m_\pi(t^2\Lambda)$ est exprimé comme un polynôme en $|t|^{-1}$, et $c_{\{0\}}(\pi)$ est le terme constant de ce polynôme. Un calcul facile de déterminant de van der Monde prouve l'existence d'un nombre $Q > 0$ tel que $Qc_{\{0\}}(\pi)$ soit entier pour tout π , d'où aussitôt le théorème 16.

COROLLAIRE.- *Soit* $\chi : Z \to \mathbf{C}^{\times}$ *un homomorphisme continu, soit* K *un sous-groupe compact ouvert de* G , *et soit* $\mathfrak{d} \in \mathcal{Z}(K)$. *Il n'existe qu'un nombre fini de représentations paraboliques irréductibles* π , *de caractère central* χ , *et telles que* $(\pi : \mathfrak{d}) \neq 0$.

La démonstration de ce corollaire est l'essentiel du chapitre III du cours [11] de Harish-Chandra.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. N. BERNSHTEIN - All reductive p-adic groups are tame, Journ. Funct. Anal. and its appl., 8 (1974), p. 91-93.

[2] A. BOREL et J. TITS - Groupes réductifs, Publ. Math. I.H.E.S., 27 (1965), p. 55-151.

[3] F. BRUHAT et J. TITS - Groupes réductifs sur un corps local I, Publ. Math. I.H.E.S., 41 (1972), p. 5-251.

[4] P. CARTIER - Vecteurs différentiables dans les représentations unitaires des groupes de Lie, Sém. Bourbaki (nov. 1974), exposé 454, Lecture Notes in Maths, vol. 514, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[5] W. CASSELMAN - An assortment of results on representations of $GL_2(k)$, in Modular Functions of one variable II, p. 1-54, Lecture Notes in Maths, vol. 349, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[6] W. CASSELMAN - The restriction of a representation of $GL_2(k)$ to $GL_2(\mathcal{O})$, Math. Annalen, 206 (1973), p. 311-318.

[7] W. CASSELMAN - The Steinberg character as a true character, in Harmonic Analysis on homogeneous spaces, p. 413-417, American Math. Soc., Providence, 1973.

[8] J. DIXMIER - Les C^*-algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[9] R. GODEMENT - A theory of spherical functions, Trans. A.M.S., 73 (1952), p. 496-556.

[10] HARISH-CHANDRA - Harmonic analysis on reductive p-adic groups, in Harmonic Analysis on homogeneous spaces, p. 167-192, American Math. Soc., Providence, 1973.

[11] HARISH-CHANDRA (Notes by G. van DIJK) - Harmonic analysis on reductive p-adic groups, Lecture Notes in Maths, vol. 162, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[12] R. HOWE - Two Conjectures about reductive p-adic groups, in Harmonic Analysis on homogeneous spaces, p. 377-380, American Math. Soc., Providence, 1973.

[13] R. HOWE - Some qualitative results on the representation theory of GL_n over a p-adic field, notes miméographiées.

[14] H. JACQUET - Représentations des groupes linéaires p-adiques, Theory of group representations and harmonic analysis (C.I.M.E., II Ciclo, Montecatini Terme, 1970), Edizioni Cremonese, Rome, 1971, p. 119-220.

[15] H. JACQUET and R. LANGLANDS - Automorphic forms on GL(2), Lecture Notes in Maths, vol. 114, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[16] R. GODEMENT and H. JACQUET - Zeta Functions of simple algebras, Lecture Notes in Maths, vol. 260, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[17] Ph. KUTZKO - Mackey's theorem for non-unitary representations, à paraître.

[18] Ph. KUTZKO - On the supercuspidal representations of GL_2, à paraître à l'Amer. Journal Math.

[19] F.I. MAUTNER - Spherical functions over p-adic fields, II, Amer. Journ. Math., 86 (1964), p. 171-200.

[20] R.R. RAO - Orbital integrals in reductive groups, Ann. of Maths, 96 (1972), p. 505-510.

[21] J. SHALIKA - A theorem on semi-simple $\mathfrak{P}$-adic groups, Ann. of Maths, 95 (1972), p. 226-242.

[22] J. SHALIKA - Representations of the two by two unimodular group over local fields, Seminar on Lie group representations, Institute for Advanced Study, Princeton, 1965 (miméographié).

[23] A.J. SILBERGER - PGL_2 over the p-adics : its Representations, Spherical Functions, and Fourier Analysis, Lecture Notes in Maths, vol. 166, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[24] G. van DIJK - Harmonic analysis on reductive $\mathfrak{p}$-adic groups (after Harish-Chandra), Séminaire Bourbaki, (nov. 1970), exposé 387; Lecture Notes in Mathematics, vol. 244, Springer Verlag, Berlin, 1971.

[25] V.S. VARADARAJAN - The theory of characters and the discrete series for semisimple Lie groups, in Harmonic Analysis on homogeneous spaces, p. 45-99, American Math. Soc., Providence, 1973.

BIBLIOGRAPHIE SUPPLÉMENTAIRE

[Travaux dont j'ai eu connaissance depuis novembre 1975]

[1'] I.N. BERNSHTEIN et A.V. ZELEVINSKII - Représentations du groupe GL(n,F) , où F est un corps local non-archimédien (en russe), Uspkhi Math. Nauk, 31 (1976), p. 5-70.

[2'] A. BOREL - Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under a Iwahori subgroup, Inv. Math., 35(1976), p. 233-259.

[3'] W. CASSELMAN - Some general results in the theory of admissible representations of p-adic reductive groups, notes miméographiées.

[4'] HARISH-CHANDRA - The Characters of reductive p-adic groups, notes miméographiées, Princeton, 1976.

[5'] HARISH-CHANDRA - The Plancherel formula for reductive p-adic groups, notes miméographies, Princeton, 1976.

[6'] R. HOWE - Tamely ramified supercuspidal representations of Gl_n , notes miméographiées.

[7'] R. HOWE - The Fourier transform and germs of characters (Case of Gl_n over a p-adic field), Math. Annalen, 208 (1974), p. 305-322.

[8'] R. HOWE - On the principal series of Gl_n over p-adic fields, Trans. Amer. Math. Soc., 177 (1973), p. 275-286.

[9'] R. HOWE - On the asymptotic behavior of matrix coefficients, notes miméographiées.

[10'] R. HOWE and A.J. SILBERGER - Why any unitary principal series representation of SL_n over a p-adic field decomposes simpliy, Bull. Amer. Math. Soc., 81 (1975), p. 599-601.

[11'] A.J. SILBERGER - On complementary series, Discrete series, and the Plancherel measure for a p-adic group, notes miméographiées.