SÉMINAIRE N. BOURBAKI

BARRY MAZUR
JEAN-PIERRE SERRE

Points rationnels des courbes modulaires $X_0(N)$

Séminaire N. Bourbaki, 1976, exp. n° 469, p. 238-255
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1974-1975__17__238_0>

Séminaire BOURBAKI 469-01
27e année, 1974/75, n° 469 Juin 1975

POINTS RATIONNELS DES COURBES MODULAIRES $X_0(N)$

[d'après [7] , [9]]

par Barry MAZUR et Jean-Pierre SERRE

§ 1. Rappels sur les courbes $X_0(N)$

On se borne à de brèves indications. Pour plus de détails voir [1], [13], [14].

1.1 Définitions

Soient N un entier ≥ 1 , et $\Gamma_0(N)$ le sous-groupe de $SL_2(\mathbf{Z})$ formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $c \equiv 0 \pmod{N}$. Soit $H = \{z \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. Le quotient $H/\Gamma_0(N)$ est une courbe algébrique affine $Y_0(N)_{/\mathbf{C}}$ sur $\mathbf{C}$; on la compactifie en lui adjoignant l'ensemble de ses "pointes", i.e. le quotient $P_1(\mathbf{Q})/\Gamma_0(N)$; la courbe projective ainsi obtenue est notée $X_0(N)_{/\mathbf{C}}$. Son corps de fonctions est $\mathbf{C}(j, j_N)$, où $j = j(z)$ est l'invariant modulaire usuel, et $j_N(z) = j(Nz)$. Les courbes $Y_0(N)_{/\mathbf{C}}$ et $X_0(N)_{/\mathbf{C}}$ se déduisent par extension des scalaires de courbes algébriques sur $\mathbf{Q}$, notées $Y_0(N)$ et $X_0(N)$, caractérisées par le fait que leur corps de fonctions est $\mathbf{Q}(j, j_N)$; on trouvera dans [1], p. 221-227, une définition plus naturelle (sinon plus simple) de $Y_0(N)$ et $X_0(N)$, qui a notamment l'avantage de s'appliquer en toute caractéristique ne divisant pas N .

On renvoie à Hecke [3], p. 810 (resp. Ogg [9a]) pour la détermination des pointes (resp. de leur corps de rationalité), et du genre de $X_0(N)$. Bornons-nous à signaler que :

a) si N est premier, il n'y a que deux pointes, 0 et ∞ ; elles sont rationnelles sur $\mathbf{Q}$;

b) l'application $f \longmapsto f\, dq/q$ (où $q = e^{2\pi i z}$) définit une bijection entre

formes modulaires paraboliques de poids 2 sur $\Gamma_0(N)$

et

formes différentielles de première espèce sur $X_0(N)_{/\mathbb{C}}$.

L'importance de $X_0(N)$ et $Y_0(N)$ provient de ce que $Y_0(N)$ classifie les couples (E,A) , où E est une courbe elliptique et A un sous-groupe cyclique d'ordre N de E . De façon plus précise (cf. [1], p. 274), si (E,A) est défini sur un corps k , il lui correspond un point $j(E,A)$ de $Y_0(N)(k)$, et tout point de $Y_0(N)(k)$ est obtenu ainsi ; on a $j(E,A) = j(E',A')$ si et seulement si (E,A) et (E',A') deviennent isomorphes sur une extension de k .

1.2 L'involution w

C'est un automorphisme de $X_0(N)$ de carré 1 , caractérisé par le fait qu'il échange j et j_N ; il laisse stable les pointes (en particulier, il échange 0 et ∞), et opère donc sur $Y_0(N)$. Son action sur $X_0(N)_{/\mathbb{C}}$ s'obtient par passage au quotient à partir de $z \mapsto -1/Nz$.

Du point de vue modulaire, w transforme (E,A) en $(E/A\,,\, E_N/A)$, où E_N désigne le noyau de la multiplication par N dans E .

Remarque.- Plus généralement, toute décomposition $N = N_1N_2$ de N en facteurs N_1 , N_2 premiers entre eux définit une involution $w(N_1,N_2)$ de $X_0(N)$, caractérisée par :

$$(E,A) \mapsto (E/A_1\,,\,(A + E_{N_1})/A_1) ,$$

où A_1 désigne l'unique sous-groupe d'ordre N_1 de A .

1.3 Les opérateurs de Hecke T_ℓ

Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas N . L'opérateur de Hecke T_ℓ est une correspondance sur $X_0(N)$ de degré $\ell+1$: le transformé $T_\ell(x)$ d'un point x est une somme de $\ell+1$ points. Du point de vue modulaire, T_ℓ est défini par

$$(E,A) \mapsto \sum_B (E/B\,,\,(A+B)/B) ,$$

où B parcourt l'ensemble des $\ell+1$ sous-groupes d'ordre ℓ de E .

Les T_ℓ commutent entre eux et à w ; ils laissent stables les pointes ; ils multiplient par $\ell+1$ les pointes 0 et ∞ . Leur action sur les différen-

tielles de première espèce (identifiées aux formes paraboliques de poids 2) est :

$$\Sigma a_n q^n \longmapsto \Sigma a_{\ell n} q^n + \ell \Sigma a_n q^{\ell n} .$$

§ 2. Idéal d'Eisenstein et théorèmes de finitude

2.1 Hypothèses et notations

Dans tout ce qui suit, on suppose que N est **premier**, et que le genre g de la courbe $X_0(N)$ est ≥ 1 , autrement dit que $N \neq 2, 3, 5, 7, 13$ (lorsque $g = 0$, la courbe $X_0(N)$ est isomorphe à la droite projective, et a donc une infinité de points rationnels).

On note J la jacobienne de $X_0(N)$; on plonge $X_0(N)$ dans J par l'application $x \longmapsto \mathrm{cl}((x) - (\infty))$.

Les correspondances T_ℓ (ℓ premier $\neq N$) et w du § 1 définissent des endomorphismes de J , que nous noterons encore T_ℓ et w ; on a $w^2 = 1$.

Remarque.- Toutes ces constructions se font "sur $\mathbb{Q}$" ; en particulier J est définie sur $\mathbb{Q}$ et les T_ℓ , ainsi que w , opèrent sur le groupe $J(\mathbb{Q})$ des points rationnels de J .

2.2 Le groupe C

Soit $c = \mathrm{cl}((0) - (\infty))$ l'image dans J de la pointe 0 de $X_0(N)$; on a $c \in J(\mathbb{Q})$; notons C le sous-groupe de $J(\mathbb{Q})$ engendré par c .

THÉORÈME 1 (Ogg [9a]).- Le groupe C est un groupe cyclique fini d'ordre égal au numérateur n de $\frac{N-1}{12}$.

Soit h le pgcd de $N-1$ et de 12 ; on a $n = (N-1)/h$. Considérons la fonction f sur le demi-plan de Poincaré définie par

$$f(z) = \left(\frac{\Delta(Nz)}{\Delta(z)} \right)^{1/h} = q^n \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{mN})^{24/h} (1 - q^m)^{-24/h} ,$$

où $q = e^{2\pi i z}$. On peut montrer que f est invariante par le groupe $\Gamma_0(N)$; elle s'identifie donc à une fonction rationnelle sur $X_0(N)$. Son diviseur est $n((\infty) - (0))$, ce qui prouve que $nc = 0$ dans $J(\mathbb{Q})$. Il reste à montrer que, si n' divise strictement n , on a $n'c \neq 0$; Ogg le fait en prouvant que

$f^{n'/n}$ n'est pas invariante par $\Gamma_0(N)$; cela peut aussi se déduire du th. 4 du n° 3.1 ci-après.

Remarques.- 1) On a $n > 1$ puisque $N-1$ n'est pas un diviseur de 12 ; d'ailleurs il est clair que $c \neq 0$ puisque $x \mapsto cl((x)-(\infty))$ est un plongement de $X_0(N)$ dans J.

2) On verra plus loin (n° 3.2, th. 5) que C est le sous-groupe de torsion de $J(\mathbb{Q})$.

3) Il est facile de voir que $T_\ell c = (1+\ell)c$ et $wc = -c$; en particulier, C est stable par les T_ℓ et w.

2.3 Algèbre de Hecke

C'est le sous-anneau $\underline{T}$ de $\mathrm{End}(J)$ engendré par les T_ℓ (ℓ premier $\nmid N$) et w ; il est commutatif, et libre de rang g sur $\mathbb{Z}$. La $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbb{Q} \otimes \underline{T}$ est un produit de corps de nombres algébriques totalement réels K_α ; les noyaux $\mathfrak{p}_\alpha$ des homomorphismes $\underline{T} \to K_\alpha$ sont les idéaux premiers minimaux de $\underline{T}$. La décomposition $\mathbb{Q} \otimes \underline{T} = \prod_\alpha K_\alpha$ correspond à une décomposition de J (à isogénie près)

$$J \sim \prod_\alpha J_\alpha \qquad \text{avec} \quad \dim(J_\alpha) = g_\alpha = [K_\alpha : \mathbb{Q}] ,$$

les J_α étant des variétés abéliennes absolument simples, deux à deux non isomorphes, telles que

$$\mathbb{Q} \otimes \mathrm{End}(J_\alpha) = \mathbb{Q} \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(J_\alpha) = K_\alpha , \qquad \text{cf. [12].}$$

Exemples

$N = 11, 17, 19$: $g = 1$, $\mathbb{Q} \otimes \underline{T} = \mathbb{Q}$, $\underline{T} = \mathbb{Z}$, $w = -1$;

$N = 23, 31$: $g = 2$, $\mathbb{Q} \otimes \underline{T} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\underline{T} = \mathbb{Z}[(1+\sqrt{5})/2]$, $w = -1$;

$N = 37$: $g = 2$, $\mathbb{Q} \otimes \underline{T} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $\underline{T}$ est le sous-anneau de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ formé des (a,b) tels que $a \equiv b \pmod 2$, $w = (1,-1)$.

2.4 Idéal d'Eisenstein

C'est l'idéal I de $\underline{T}$ engendré par $1+w$ et par les $1+\ell-T_\ell$, avec ℓ premier $\nmid N$. Le quotient $\underline{T}/I$ est cyclique fini.

Avec les notations de 2.2, on a $I.C = 0$. Comme C est cyclique d'ordre

$n = \mathrm{Num}\left(\frac{N-1}{12}\right)$, on en déduit une surjection $\underline{T}/I \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. En particulier, on a $I \neq \underline{T}$.

Soit maintenant p un nombre premier. Faisons l'hypothèse

(i) p *divise* n .

Il résulte de ce qui précède que :

(ii) *L'idéal* $P = I + p\underline{T}$ *est un idéal maximal de* $\underline{T}$ *contenant* I , *et* $\underline{T}/P = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(En effet, P annule le sous-groupe d'ordre p de C , donc est distinct de $\underline{T}$, et il est clair que $\underline{T}/P = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.)

(iii) *Le groupe* $J(\mathbb{Q})$ *contient un élément d'ordre* p .

Si $\bar{\mathbb{Q}}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, notons $J(\bar{\mathbb{Q}})[p]$ le noyau de la multiplication par p dans $J(\bar{\mathbb{Q}})$; c'est un module sur la $\mathbb{F}_p$-algèbre du groupe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, et (iii) entraîne évidemment :

(iv) *Le module galoisien* $J(\bar{\mathbb{Q}})[p]$ *possède un quotient de Jordan-Hölder isomorphe à* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (ainsi qu'un quotient isomorphe au groupe μ_p des racines p-ièmes de l'unité, cela en résulte par dualité).

De plus :

(v) Il existe une *forme modulaire parabolique* f *de poids* 2 (mod.p) *sur* $\Gamma_0(N)$ (cf. Katz [4]) *dont le développement à l'infini est*

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma'_1(m)\, q^m \qquad \text{avec} \quad \sigma'_1(m) = \sum_{\substack{d \mid m \\ (d,N)=1}} d \ .$$

En effet, si $p \neq 2$ (ou si $p = 2$ et $N \equiv 1$ (mod.16)) , on peut prendre pour f la réduction (mod. p) $\tilde{G}_2(N)$ de la série d'Eisenstein

$$G_2(N) = \frac{N-1}{24} + \sum_{m=1}^{\infty} \sigma'_1(m)\, q^m \ , \qquad \text{cf. [3], p. 817.}$$

Si $p = 2$ et $N \not\equiv 1$ (mod. 16) , on prend $f = \tilde{G}_2(N) + 1$, ce qui est loisible car la constante 1 est une forme modulaire (mod. 2) de n'importe quel poids ≥ 0 .

En fait :

PROPOSITION 1 ([7]).- Les propriétés (i), (ii), (iii), (iv) et (v) sont équivalentes.

L'équivalence de (i) et (v) se déduit des propriétés des formes modulaires (mod.p), cf. [7] ainsi que Koike [5] (noter que, pour $p = N$, (v) doit être convenablement interprété ...).

Supposons (ii) satisfaite. Un argument élémentaire d'algèbre commutative montre qu'il existe un sous-module galoisien simple W de $J(\bar{\mathbb{Q}})[p]$ qui est annulé par I. Utilisant la relation d'Eichler-Shimura, on constate que, pour presque tout ℓ, les valeurs propres de Frob_ℓ dans W sont congrues à 1 ou ℓ modulo p ; on en déduit facilement que W est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ou μ_p ; d'où (ii) $\Rightarrow$ (iv). Un argument analogue montre l'existence d'une forme parabolique $F = \Sigma\, a_n q^n$ de poids 2 sur $\Gamma_0(N)$, à coefficients p-entiers, telle que $F \not\equiv 0 \pmod{p}$ et $I.F \equiv 0 \pmod{p}$; il en résulte que $a_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$, et, si l'on normalise F en prenant $a_1 = 1$, la réduction $f = \tilde{F}$ de $F \pmod{p}$ satisfait à (v) ; d'où (ii) $\Rightarrow$ (v).

Pour les démonstrations des autres implications, on se borne à renvoyer à [7] ([1]).

COROLLAIRE.- Les idéaux maximaux de $\underline{T}$ contenant I sont les idéaux $P = I + p\underline{T}$, où p parcourt l'ensemble des facteurs premiers de n.

Cela résulte de l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

2.5 Quotient d'Eisenstein et théorèmes de finitude

Soit $\underline{T}_I$ le complété de $\underline{T}$ pour la topologie I-adique ; c'est un anneau semi-local dont les composantes correspondent aux idéaux maximaux P de $\underline{T}$ contenant I. Le noyau $\mathfrak{a}$ de l'homomorphisme $\underline{T} \to \underline{T}_I$ est l'intersection des idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_\alpha$ tels que $\mathfrak{p}_\alpha + I \neq \underline{T}$, i.e. tels qu'il existe un idéal maximal P contenant à la fois $\mathfrak{p}_\alpha$ et I. Comme $I \neq \underline{T}$, il existe au moins un tel $\mathfrak{p}_\alpha$, et l'on a $\mathfrak{a} \neq \underline{T}$.

Soit $\mathfrak{a}J$ la sous-variété abélienne de J engendrée par les images des endomorphismes appartenant à $\mathfrak{a}$. La variété abélienne quotient $\tilde{J} = J/\mathfrak{a}J$ est appelée (par Mazur) le quotient d'Eisenstein de J ; avec les notations de 2.3,

([1]) Le cas $p = 2$ présente des difficultés particulières que l'auteur de [7] espère avoir surmontées.

$\tilde{J}$ est isogène au produit des J_α relatifs aux $\mathfrak{p}_\alpha$ tels que $\mathfrak{p}_\alpha + I \neq \underline{T}$.

Remarques.- 1) Le fait qu'il existe au moins un tel $\mathfrak{p}_\alpha$ entraîne que $\tilde{J} \neq 0$.

2) On peut montrer ([1]) que $1 + w$ appartient à $\mathfrak{a}$, autrement dit que $\tilde{J}$ est un quotient de la variété abélienne $J^- = J/J_+$, où $J_+ = (1 + w)J$. Lorsque $N < 250$, on a $\tilde{J} = J^-$ sauf pour $N = 67, 109, 139, 151, 179, 227$, cf. § 4.

THÉORÈME 2 ([7]).- Le groupe $\tilde{J}(\mathbb{Q})$ est fini.

Voir n° 2.6.

Remarque.- Le comportement de J_+ est très différent de celui de $\tilde{J}$. En effet $J_+(\mathbb{Q})$ est infini (cf. [7]) dès que $\dim(J_+) \geq 1$, ce qui se produit pour tout $N \geq 73$, ainsi que pour $N = 37, 43, 53, 61, 67$, cf. § 4.

THÉORÈME 3 ([7]).- $X_0(N)(\mathbb{Q})$ est fini.

(On rappelle que N est supposé premier $\neq 2, 3, 5, 7, 13$.)

En effet, soit $\tilde{X}$ l'image de $X_0(N)$ dans $\tilde{J}$ par la projection canonique $X_0(N) \to J \to \tilde{J}$. Le th. 2 entraîne que $\tilde{X}(\mathbb{Q})$ est fini. D'autre part, on a $\dim(\tilde{J}) \geq 1$, et $\tilde{X}$ engendre $\tilde{J}$; il s'ensuit que $\tilde{X}$ est une courbe, et les fibres de $X_0(N) \to \tilde{X}$ sont finies. La finitude de $X_0(N)(\mathbb{Q})$ résulte alors de celle de $\tilde{X}(\mathbb{Q})$.

Remarque.- On savait déjà, d'après Manin (cf. [13], th. 2') que, pour tout nombre premier N , il existe un entier $m(N) \geq 1$ tel que $X_0(N^m)(\mathbb{Q})$ soit fini pour $m \geq m(N)$ (ou pour $m = m(N)$, cela revient au même). Le th. 3 équivaut à dire que l'on peut prendre $m(N)$ égal à 1 si $N \neq 2, 3, 5, 7, 13$.

2.6 Démonstration du théorème 2

2.6.1 p-groupes admissibles

Soit p un nombre premier $\neq N$. Par un p-groupe admissible on entendra un schéma en groupes G sur $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ jouissant des propriétés suivantes :

(i) G est quasi-fini, plat et séparé ;

(ii) G est annulé par une puissance de p ;

(iii) au-dessus de $S' = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{N}])$, le groupe $G_{/S'}$ est fini et plat, et admet une filtration (dite admissible) par des sous-groupes finis et plats dont

les quotients successifs sont S'-isomorphes à l'un des schémas en groupes $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et μ_p (racines p-ièmes de l'unité).

A un tel groupe on attache les invariants numériques suivants :

$\ell(G) = \log_p(\text{ordre de } G_{/S'})$

$\delta(G) = \log_p(\text{ordre de } G_{/S'}) - \log_p(\text{ordre de } G_{/\mathbb{F}_N})$

$\alpha(G) =$ nombre de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ intervenant dans les quotients successifs d'une filtration admissible de $G_{/S'}$

$h^i(G) = \log_p(\mathrm{Card}(H^i(S,G)))$, la cohomologie étant prise pour la topologie fppf.

En raisonnant par récurrence sur $\ell(G)$, on démontre l'inégalité

(*) $\qquad h^1(G) - h^0(G) \leq \delta(G) - \alpha(G)$.

2.6.2 Finitude en p

On prend maintenant pour p un facteur premier de n , et l'on pose $P = I + p\underline{T}$, cf. n° 2.4. On note $\underline{T}_P$ le complété de T pour la topologie P-adique ; il est facile de voir que $\underline{T}_P$ est facteur direct de l'anneau semi-local $\underline{T}_p = \mathbb{Z}_p \otimes \underline{T}$, complété de $\underline{T}$ en p ; on note ε_p l'idempotent correspondant de $\underline{T}_p$.

Soit maintenant $J_{\mathbb{Z}}$ le modèle de Néron [8] de J sur $\mathbb{Z}$, et $J^o_{\mathbb{Z}}$ sa composante neutre (elle ne diffère d'ailleurs de $J_{\mathbb{Z}}$ qu'au-dessus du nombre premier N , cf. n° 3.1). Si $m \geq 1$, on note $J^o[p^m]$ le sous-schéma en groupes de $J^o_{\mathbb{Z}}$ noyau de p^m ; l'anneau $\underline{T}/p^m\underline{T}$ (donc aussi l'anneau $\underline{T}_p$) opère de façon naturelle sur $J^o[p^m]$, ce qui permet de définir la P-composante

$$J^o[p^m]_P = \varepsilon_p . J^o[p^m]$$

de $J^o[p^m]$.

Les schémas en groupes $J^o[p^m]$ et $J^o[p^m]_P$ jouissent des propriétés (i) et (ii) de 2.6.1. De plus :

(a) $J^o[p^m]_P$ jouit de la propriété (iii), i.e. est un p-groupe admissible.

Cela se démontre par un argument analogue à celui utilisé au n° 2.4, cf. [7].

(b) Quand m varie, l'ordre de $H^1(S, J^o[p^m]_p)$ reste borné.

Cela se voit de la manière suivante (cf. [7]) : on commence par prouver que

$$\delta(J^o[p^m]_p) = mg_p + O(1) \quad \text{pour} \quad m \to \infty$$

$$\alpha(J^o[p^m]_p) = mg_p + O(1) \quad \text{pour} \quad m \to \infty ,$$

où g_p est le rang de $\underline{T}_p$ sur Z_p (i.e. la somme des g_α relatifs aux $\mathfrak{p}_\alpha$ contenus dans P). Vu l'inégalité (*), on en conclut que $h^1(J^o[p^m]_p) - h^o(J^o[p^m]_p)$ reste borné. Mais $H^o(S, J[p^m]_p)$ est un sous-groupe du groupe de torsion de $H^o(S, J_{\mathbf{Z}}) = J(\mathbf{Q})$, donc est d'ordre borné ; il en résulte que $h^o(J^o[p^m]_p)$ est borné, et il en est par suite de même de $h^1(J^o[p^m]_p)$.

Posons maintenant

$$M = H^o(S, J_{\mathbf{Z}}) = J(\mathbf{Q}) \quad \text{et} \quad M^o = H^o(S, J^o_{\mathbf{Z}}) .$$

Le quotient M/M^o est fini. La suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de faisceaux fppf

$$0 \to J^o[p^m] \to J^o_{\mathbf{Z}} \xrightarrow{p^m} J^o_{\mathbf{Z}} \to 0$$

donne une injection de $M^o/p^m M^o$ dans $H^1(S, J^o[p^m])$, d'où par passage à la limite un homomorphisme injectif de $\underline{T}_p$-modules

$$\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \otimes M^o = \varinjlim. M^o/p^m M^o \to \varinjlim. H^1(S, J^o[p^m]) .$$

En passant aux P-composantes, on en déduit une injection

$$\underline{T}_P \otimes_{\underline{T}_p} (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \otimes M^o) \to \varinjlim. H^1(S, J^o[p^m]_p) .$$

Comme, d'après (b), le groupe $\varinjlim. H^1(S, J^o[p^m]_p)$ est fini, on en conclut que $\underline{T}_P \otimes_{\underline{T}_p} (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \otimes M^o)$ est fini, ce qui entraîne la finitude de $\underline{T}_P \otimes_{\underline{T}} M^o$, donc aussi celle de $\underline{T}_P \otimes_{\underline{T}} M$.

Remarque.- La méthode de "descente infinie" utilisée ci-dessus fournit en même temps la finitude de la composante P-primaire $Ш_P$ du groupe de Šafarevič-Tate de J sur $\mathbf{Q}$. En fait, on a $Ш_P = 0$ si $p \neq 2$; cela se voit par une descente simple ("first descent") utilisant l'existence (cf. [7]) d'un élément π_P de $\underline{T}$

tel que $I.\underline{T}_P = \pi_P.\underline{T}_P$.

2.6.3 Fin de la démonstration du th. 2

Soient (P_i) les idéaux maximaux de $\underline{T}$ contenant I . L'anneau $\underline{T}_I$ est produit des anneaux locaux $\underline{T}_{P_i}$. D'après 2.6.2, le groupe $\underline{T}_I \otimes_{\underline{T}} M$ est fini (car produit des $\underline{T}_{P_i} \otimes_{\underline{T}} M$), et il est facile de voir que cela équivaut à la finitude de $J(\mathbf{Q})$.

§ 3. Modèle de Néron et applications

3.1 Fibre en N du modèle de Néron $J_{\mathbf{Z}}$

Notons $J_{/\mathbf{F}_N}$ (resp. $J^0_{/\mathbf{F}_N}$) la fibre en N de $J_{\mathbf{Z}}$ (resp. de sa composante neutre $J^0_{\mathbf{Z}}$). Tout élément x de $M = J(\mathbf{Q})$ définit par spécialisation un point rationnel $\bar{x}$ de $J_{/\mathbf{F}_N}$; le point $\bar{x}$ appartient à $J^0_{/\mathbf{F}_N}$ si et seulement si x appartient au sous-groupe M^0 de M , cf. 2.6.2. En particulier, le groupe C du n° 2.2 se spécialise en un sous-groupe $\bar{C}$ de $J_{/\mathbf{F}_N}$ formé de points rationnels sur $\mathbf{F}_N$.

THÉORÈME 4.- On a $J_{/\mathbf{F}_N} = \bar{C} \times J^0_{/\mathbf{F}_N}$, et $\bar{C}$ est d'ordre n .

(Ce résultat est essentiellement dû à Deligne-Rapoport [1], cf. l'Appendice de [7], écrit en collaboration avec Rapoport.)

Voir n° 3.4.

3.2 Rétraction de $J(\mathbf{Q})$ sur C et torsion de $J(\mathbf{Q})$

Le th. 4 montre en particulier que, pour tout $x \in J(\mathbf{Q})$, il existe un unique $y \in C$ tel que l'image de $\bar{x}$ par la projection de $J_{/\mathbf{F}_N}$ sur $\bar{C}$ soit $\bar{y}$. L'application $x \mapsto y$ est une rétraction ρ de $J(\mathbf{Q})$ sur C ; en particulier C est facteur direct dans $J(\mathbf{Q})$.

THÉORÈME 5 ([7]).- Le sous-groupe de torsion de $J(\mathbf{Q})$ est réduit à C .

(Ce résultat avait été conjecturé par Ogg [9b].)

Vu ce qui précède, on a $J(\mathbf{Q}) = M^0 \oplus C$ et il suffit de montrer que M^0 est sans torsion. Sinon, M^0 contiendrait un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$,

avec p premier. D'après la prop. 1 du n° 2.4, p diviserait l'ordre n de C, et $J(\mathbb{Q})$ contiendrait donc un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$; si $p \neq 2$ (resp. si $p = 2$) un argument facile (resp. pas si facile, cf. note ([1]), n° 2.4) sur les formes modulaires (mod.p) montre que c'est impossible (voir [7] pour plus de détails).

3.3 Image de $X_0(N)(\mathbb{Q})$ dans C

Si l'on restreint la rétraction ρ à $X_0(N)(\mathbb{Q})$ on obtient une application

$$\rho : X_0(N)(\mathbb{Q}) \to C = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} .$$

THÉORÈME 6 ([7]).- *Si $x \in X_0(N)(\mathbb{Q})$, l'élément $\rho(x)$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est égal à l'une des valeurs suivantes :*

0 ou 1,

1/2 (possible seulement si $N \equiv -1 \pmod 4$),

1/3 ou 2/3 (possible seulement si $N \equiv -1 \pmod 3$).

Voir n° 3.4.

Remarques.- 1) Si $N \equiv -1 \pmod 3$, l'entier n n'est pas divisible par 3, et 1/3 a un sens dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; de même 1/2 a un sens dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ lorsque n est impair, ce qui est le cas si $N \equiv -1 \pmod 4$.

2) On a $\rho(0) = 1$ et $\rho(\infty) = 0$.

Posons maintenant $J_- = (1 - w)J \subset J$; si $x \in X_0(N)$, on vérifie facilement que l'élément $r(x) = \mathrm{cl}((x) - (wx))$ appartient à J_-, d'où un morphisme

$$r : X_0(N) \to J_- .$$

Si $x \in X_0(N)(\mathbb{Q})$, posons $\lambda(x) = \rho(r(x)) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

COROLLAIRE 1.- *On a $\lambda(x) = \pm 1, 0$, ou $\pm\frac{1}{3}$.*

Cela résulte du th. 6 et du fait que $\lambda(x) = 2\rho(x) - 1$.

COROLLAIRE 2.- *Supposons $J_-(\mathbb{Q})$ fini. Alors :*

a) *On a $J_-(\mathbb{Q}) = C$.*

b) *Pour tout $x \in X_0(N)(\mathbb{Q})$, on a $r(x) = \lambda(x).c$, avec $\lambda(x) = \pm 1, 0$ ou $\pm\frac{1}{3}$.*

L'assertion a) résulte de ce que C est contenu dans $J_-(\mathbb{Q})$, et que c'est le sous-groupe de torsion de $J(\mathbb{Q})$, cf. th. 5. L'assertion b) résulte du cor. 1 et du fait que ρ est l'identité sur C.

Remarque.- Un cas particulier important où $J_-(\mathbb{Q})$ est fini est celui où $\widetilde{J} = J^-$ (cf. n° 2.5) puisqu'alors J_- est isogène à $\widetilde{J}$ et l'on peut appliquer le th. 2.

THÉORÈME 7.- a) Si $N \neq 11, 17, 19, 37$, le morphisme $r : X_0(N) \to J_-$ est injectif en dehors des points fixes de w.

b) Si $J_-(\mathbb{Q})$ est fini, et $x \in X_0(N)(\mathbb{Q})$, on a :

$\lambda(x) = \pm\frac{1}{3} \Rightarrow N = 11$ ou 17,

$\lambda(x) = 0 \Rightarrow N = 11, 19, 43, 67,$ ou 163.

L'assertion a) est facile ; l'assertion b) est due à Ogg, Parry et Brumer.

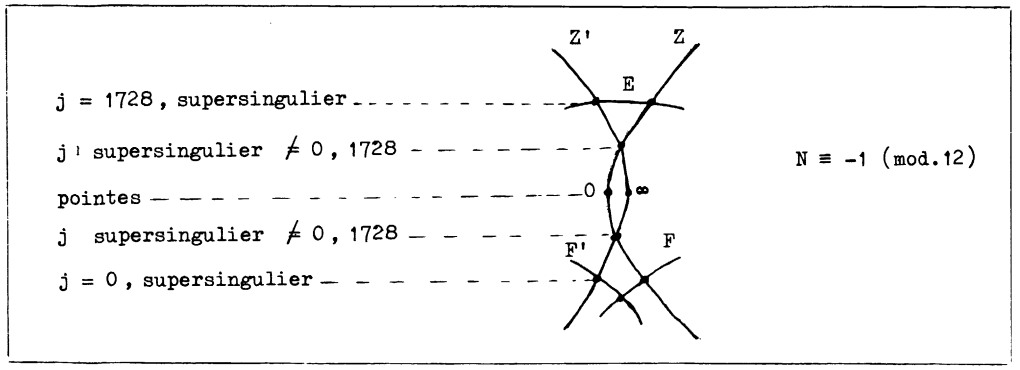
Remarques.- 1) Pour $N = 11, 17$, il existe $x \in X_0(N)(\mathbb{Q})$ tel que $\lambda(x) = \pm\frac{1}{3}$.

2) Pour $N = 11, 19, 43, 67, 163$, les courbes elliptiques à multiplication complexe par $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{-N})/2]$ fournissent des exemples de points rationnels x tels que $\lambda(x) = 0$.

COROLLAIRE.- Si $N \neq 11, 17, 19, 37, 43, 67, 163$, et si $J_-(\mathbb{Q})$ est fini, les seuls points rationnels de $X_0(N)$ sont les pointes 0 et ∞.

3.4 Démonstrations des ths. 4 et 6

Elles utilisent le modèle minimal régulier $X_0(N)_{/\mathbb{Z}}$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ de la courbe $X_0(N)$. Rappelons (cf. [1], p. 290) que ce schéma est obtenu en faisant éclater certains points (super)singuliers du schéma modulaire attaché à $X_0(N)$. La fibre en N de $X_0(N)_{/\mathbb{Z}}$ a la structure indiquée ci-dessous (dans le cas particulier $N \equiv -1 \pmod{12}$, qui est le plus compliqué) :



Elle est formée de deux droites projectives Z et Z' (correspondant à j(z) et j(Nz) , si l'on ose dire...) se coupant transversalement aux valeurs supersingulières de j distinctes de 0 , 1728 ; lorsque N+1 est divisible par 4 (resp. par 3), on ajoute à Z et Z' une droite E (resp. deux droites F et F') correspondant à l'éclatement de la valeur supersingulière j = 1728 (resp. j = 0).

Cette description explicite de $X_0(N)_{/\mathbb{Z}}$, jointe à un résultat de Raynaud [11], permet de démontrer le th. 4. En ce qui concerne le th. 6, on remarque qu'un point rationnel de $X_0(N)$ se spécialise en un point lisse de la fibre en N , c'est-à-dire en un point de l'une des courbes $\tilde{Z}$, $\tilde{Z}'$, $\tilde{E}$, $\tilde{F}$, $\tilde{F}'$ obtenues en retirant de Z ,..., F' ses points d'intersection avec les autres. Tout revient alors à prouver que

$$\rho(\tilde{Z}) = 1 \ , \quad \rho(\tilde{Z}') = 0 \ , \quad \rho(\tilde{E}) = \tfrac{1}{2} \ , \quad \rho(\tilde{F}) = \tfrac{2}{3} \ , \quad \rho(\tilde{F}') = \tfrac{1}{3} \ ;$$

le calcul se trouve dans l'Appendice de [7].

§ 4. Compléments

4.1 Résultats numériques

La TABLE des pages 16-17 résume l'essentiel des résultats connus pour $N < 250$. On y trouvera :

la valeur de $n = \mathrm{Num}\left(\frac{N-1}{12}\right)$;

la dimension g_+ (resp. g_-) de J_+ (resp. J_-), décomposée en somme des g_α correspondant aux différents facteurs simples J_α (cf. n° 2.3) ; les g_α correspondant aux facteurs de $\tilde{J}$ sont soulignés ;

le nombre ν de points rationnels de $X_0(N)$ distincts des pointes 0 et ∞ ;

les valeurs des invariants $\lambda(x)$ du n° 3.3.

Remarques.- 1) Les valeurs de g_+ , g_- et des g_α sont tirées de tables de Wada et d'Atkin.

2) On constate que, pour $N < 250$ et $N \neq 151 , 227$, on a $\dim(J_-) = \dim(\tilde{J})$ ou $\dim(J_-) = \dim(\tilde{J}) + 1$. Dans le second cas, J_- est isogène au produit de

$\tilde{J}$ par une courbe elliptique E de conducteur N n'ayant qu'un nombre fini de points rationnels (cela a été démontré par Brumer et Kramer au moyen d'une " 2-descente "). Vu le th. 2, il en résulte que $J_-(\mathbb{Q})$ est fini, et le th. 7 du n° 3.3 est applicable ; cela explique que, pour ces valeurs de N , on puisse déterminer presque complètement les points rationnels de $X_0(N)$.

4.2 Points d'ordre fini des courbes elliptiques

Si M est un entier ≥ 1 , rappelons que l'on note $Y_1(M)$ la courbe modulaire dont les points correspondent aux couples (E,P) , où E est une courbe elliptique et P un point d'ordre M sur E . La courbe projective obtenue en adjoignant à $Y_1(M)$ ses "pointes" est notée $X_1(M)$; c'est un revêtement (en général ramifié) de $X_0(M)$, le groupe de Galois du revêtement étant $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*/\{\pm 1\}$.

Lorsque $M = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12$, la courbe $X_1(M)$ est de genre 0 , et $Y_1(M)$ a une infinité de points rationnels. En dehors de ces cas (i.e. pour $M \geq 13$ et $M = 11$), on ne connaît aucun point rationnel de $Y_1(M)$ et il paraît raisonnable de conjecturer avec Ogg qu'il n'en existe pas. On a à ce sujet le résultat suivant :

THÉORÈME 8.- Supposons $M \geq 13$ ou $M = 11$. Alors :

a) La courbe $Y_1(M)$ n'a qu'un nombre fini de points rationnels.

b) Si $M < 250$, et $M \neq 151, 227$, la courbe $Y_1(M)$ n'a aucun point rationnel.

D'après Kubert [6], a) et b) sont vrais si tous les facteurs premiers de M sont < 23 . Si d'autre part M possède un facteur premier $N \geq 23$, la courbe $X_1(M)$ se projette sur la courbe $X_0(N)$; comme $X_0(N)(\mathbb{Q})$ est fini (th. 3), il en est de même de $X_1(M)(\mathbb{Q})$, ce qui démontre a) ; l'assertion b) se démontre par un argument analogue, basé sur les déterminations explicites du n° 4.1.

Remarque.- Demjanenko a publié [2] une démonstration de l'assertion suivante :

(?) Pour tout corps de nombres algébriques k fini sur $\mathbb{Q}$, il existe un entier m(k) tel que $Y_1(M)$ n'ait pas de point rationnel sur k pour $M \geq m(k)$.

Malheureusement, sa démonstration ne semble pas complète.

4.3 Autres courbes modulaires

Les résultats de cet exposé sont relatifs aux courbes modulaires définies par le sous-groupe de Borel $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ du groupe $GL_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$. On aimerait pouvoir traiter aussi les courbes modulaires liées aux autres sous-groupes de $GL_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$, notamment :

a) au sous-groupe "exceptionnel" formé des éléments dont l'image dans $PGL_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$ appartient au sous-groupe $\mathfrak{S}_4$ $(N \not\equiv \pm 1 \pmod 8)$;

b) aux normalisateurs de sous-groupes de Cartan, tant déployés que non déployés.

La multiplication complexe permet de construire des points rationnels sur les courbes de type b). Ces points sont-ils les seuls points rationnels de ces courbes (à part les pointes) pour N assez grand, par exemple $N \geq 13$? Il serait intéressant de le savoir.

TABLE

N	n	g_+	g_-	ν	valeurs de $\lambda(x)$
11	5	0	$\underline{1}$	3	$0, \pm 1/3$
17	4	0	$\underline{1}$	2	$\pm 1/3$
19	3	0	$\underline{1}$	1	0
23	11	0	$\underline{2}$	0	
29	7	0	$\underline{2}$	0	
31	5	0	$\underline{2}$	0	
37	3	1	$\underline{1}$	2	± 1
41	10	0	$\underline{3}$	0	
43	7	1	$\underline{2}$	1	0
47	23	0	$\underline{4}$	0	
53	13	1	$\underline{3}$	0	
59	29	0	$\underline{5}$	0	
61	5	1	$\underline{3}$	0	
67	11	2	$1+\underline{2}$	1	0
71	35	0	$\underline{3}+\underline{3}$	0	
73	6	2	$\underline{1}+\underline{2}$	0	
79	13	1	$\underline{5}$	0	
83	41	1	$\underline{6}$	0	
89	22	1	$\underline{1}+\underline{5}$	0	
97	8	3	$\underline{4}$	0	
101	25	1	$\underline{7}$	0	
103	17	2	$\underline{6}$	0	
107	53	2	$\underline{7}$	0	
109	9	3	$1+\underline{4}$	0	
113	28	3	$\underline{1}+\underline{2}+\underline{3}$	0	
127	21	3	$\underline{7}$	0	
131	65	1	$\underline{10}$	0	
137	34	4	$\underline{7}$	0	
139	23	3	$1+\underline{7}$	0	
149	37	3	$\underline{9}$	0	

TABLE (suite)

N	n	g_+	g_-	ν	valeurs de $\lambda(x)$
151	25	3	3 + 6	??	??
157	13	5	7	0	
163	27	1 + 5	7	1	0
167	83	2	12	0	
173	43	4	10	0	
179	89	3	1 + 11	0	
181	15	5	9	0	
191	95	2	14	0	
193	16	2 + 5	8	0	
197	49	1 + 5	10	0	
199	33	4	2 + 10	0	
211	35	3 + 3	2 + 9	0	
223	37	2 + 4	12	0	
227	113	2 + 3	2 + 2 + 10	??	??
229	19	1 + 6	11	0	
233	58	7	1 + 11	0	
239	119	3	17	0	
241	20	7	12	0	

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. DELIGNE et M. RAPOPORT - Les schémas de modules de courbes elliptiques, Lecture Notes in Math. n° 349, p. 143-316, Springer, 1973.

[2] V.A. DEMJANENKO - Sur la torsion des courbes elliptiques [en russe], Izv. Akad. N. CCCP, 35 (1971), p. 280-307 [MR 44, 2755].

[3] E. HECKE - Mathematische Werke, 2ème édition, Göttingen, 1970.

[4] N. KATZ - p-adic properties of modular schemes and modular forms, Lecture Notes in Math. n° 350, p. 69-190, Springer, 1973.

[5] M. KOIKE - On the congruences between Eisenstein series and cusp forms, à paraître.

[6] D. KUBERT - Universal bounds on the torsion of elliptic curves, à paraître.

[7] B. MAZUR - Modular curves and the Eisenstein ideal, en préparation.

[8] A. NÉRON - Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux, Publ. Math. I.H.E.S., 21 (1964), p. 361-483 [MR 31, 3424].

[9] A. OGG - a) Rational points on certain elliptic modular curves, Proc. Symp. Pure Math., 24 (1973), AMS, Providence, p. 221-231.

b) Diophantine equations and modular forms, Bull. AMS, 81 (1975), p. 14-27.

[10] A. OGG - Hyperelliptic modular curves, Bull. Soc. math. France, 102 (1974), p. 449-462.

[11] M. RAYNAUD - Spécialisation du foncteur de Picard, Publ. Math. I.H.E.S., 38 (1970), p. 27-76.

[12] K. RIBET - Endomorphisms of semi-stable abelian varieties over number fields, Annals of Math., 101 (1975), p. 555-562.

[13] J.-P. SERRE - p-torsion des courbes elliptiques (d'après Y. MANIN), Séminaire Bourbaki, 22e année, 1969/70, exposé 380, Lecture Notes in Math. n° 180, Springer, 1971.

[14] G. SHIMURA - Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Publ. Math. Soc. Japan, n° 11, Tokyo-Princeton, 1971.