ARMAND BOREL

Formes automorphes et séries de Dirichlet

Séminaire N. Bourbaki, 1976, exp. n° 466, p. 183-222
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1974-1975__17__183_0>

Séminaire BOURBAKI 466-01
27e année, 1974/75, n° 466 Juin 1975

FORMES AUTOMORPHES ET SÉRIES DE DIRICHLET

[d'après R. P. LANGLANDS]

par Armand BOREL

Cet exposé tente de donner un aperçu d'un ensemble de résultats, problèmes et conjectures qui établissent, en fait ou conjecturalement, des liens étroits entre formes automorphes sur des groupes réductifs, ou représentations de tels groupes, et une classe générale de produits eulériens comprenant beaucoup de ceux que l'on rencontre en arithmétique ou géométrie algébrique.

A l'heure actuelle, plusieurs des conjectures ou "questions" paraissent tout à fait inaccessibles sous leur forme générale. Elles définissent plutôt un vaste programme, élaboré par R. P. Langlands depuis environ 1967, souvent appelé la "philosophie de Langlands," et déjà illustré de façon très frappante par les résultats classiques ou récents qui sont à sa source, et ceux qui ont été obtenus depuis.

Pour décrire ce programme, on est malheureusement condamné à des préliminaires techniques d'une nature et d'une longueur que beaucoup trouvent décourageantes. Pour y remédier ici dans la mesure du possible, on procèdera par approximations, en commençant par des énoncés vagues ou particuliers, que l'on cherchera ensuite à préciser ou généraliser, sans du reste prétendre atteindre la précision ou généralisation ultime.

Le problème à la base de ce programme est d'associer à une forme automorphe ou à certaines représentations de groupes adéliques (resp. à certaines représentations de groupes sur des corps locaux) un produit (resp. facteur) eulérien. On le discutera en quatre étapes. Cela conduit à un exposé qui se divise en quatre parties, dont les trois premières sont consacrées essentiellement à $\mathbf{GL}_n$.

(i) On associe à une forme automorphe sur $\mathbf{GL}_n(A)/\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q})$, fonction propre d'opérateurs de Hecke, un produit eulérien portant sur presque tous les p (2.4). Pour n = 1 (resp. n = 2) ce procédé redonne les séries L associées par E. Hecke à un Grössencharakter (resp. une forme modulaire). Le §3 donne une première idée des problèmes posés par Langlands [27] à propos de cette application et le §4 indique quelques résultats connus pour n = 1,2.

(ii) On remplace ensuite les formes automorphes par certaines représentations (irréductibles, admissibles) de $\mathbf{GL}_n(A)$, ou plutôt d'une algèbre de Hecke convenable, qui interviennent dans des espaces de formes automorphes (5.1). On veut donc leur associer un produit eulérien. Mais elles se décomposent naturellement en un produit infini de représentations (irréductibles, admissibles) de $\mathbf{GL}_n$ sur des corps locaux, et le problème se subordonne à une question locale (cf. 5.2, et 5.3-5.6 pour quelques résultats).

(iii) Le §6 donne une formulation du problème local qui fait directement intervenir les représentations de groupes de Galois ou de groupes de Weil (6.3) et passe ensuite aux conjectures et résultats le concernant (6.4, 6.5).

(iv) Enfin, les §§7 et 8 sont consacrés au cas général. Le point nouveau essentiel est l'introduction, par Langlands [25, 27, 30], d'un groupe associé à un groupe connexe réductif G sur un corps local, sur lequel sont définis les facteurs L des représentations de G ; aussi, suivant une suggestion de H. Jacquet, nous l'appellerons le L-groupe de G et le noterons ${}^LG$. Si $G = \mathbf{GL}_n$, ce groupe est $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$, ou plutôt le produit direct de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ par un groupe de Galois ou de Weil, ce qui nous a permis d'esquiver cette construction dans les six premiers paragraphes.

§1. Formes automorphes sur G_A/G_F

1.1 La théorie générale concerne un groupe linéaire réductif G défini sur un corps global F , qui sera pour nous un corps de nombres, sauf mention expresse du contraire. Pour ne pas avoir à y revenir, nous introduisons déjà ici quelques notations générales. Cependant, les §§2 à 6 sont essentiellement consacrés au cas $G = \mathbf{GL}_n$ et $F = \mathbf{Q}$, et le lecteur peut sans dommage spécialiser les notations à ce cas (cf. 1.2). Nous y utilisons celles du cas général lorsqu'il s'agit de notions ou résultats qui s'y transposent sans modification importante, ce que nous supposerons du reste être fait dans les §§7, 8.

On note V (resp. V_∞ , resp. V_f) l'ensemble des places (resp. places archimédiennes, resp. non-archimédiennes) de F, F_v la complétion de F en v, O_F (resp. O_v) l'anneau des entiers de F (resp. F_v), $|\,|_v$ la valuation normalisée de F_v , et Nv le nombre d'éléments du corps résiduel $k_v = O_v/\pi_v \cdot O_v$, où π_v est une uniformisante locale. On suppose G réalisé linéairement (ou muni d'une O_F-structure). Si C est une O_F-algèbre, G_C ou $G(C)$ est le groupe des points de G à valeurs dans C . On note A ou A_F l'anneau des adèles de F et G_A ou $G(A)$ le groupe des adèles de G . Ce dernier est le produit restreint des $G_v = G(F_v)$ par rapport aux groupes $G(O_v)$, autrement dit la limite inductive (topologique) des produits

$$\prod_{v\in S} G_v \times \prod_{v\notin S} G(O_v) ,$$

où S parcourt l'ensemble des parties finies de V contenant V_∞ . L'anneau A_f des adèles finies est le produit restreint des F_v par rapport aux O_v ($v \in V_f$) et G_A est le produit direct de $G_\infty = \prod_{v\in V_\infty} G_v$ et du produit restreint $G(A_f)$ des G_v ($v \in V_f$) par rapport aux $G(O_v)$. On choisit un sous-groupe compact maximal K_∞ de G_∞ et on note K_o le produit de K_∞ par $K_{of} = \prod_{v\in V_f} G(O_v)$. Si K est un sous-groupe compact ouvert de $G(A_f)$, il existe une partie finie S de V_f telle que K soit le produit des $G(O_v)$ ($v \in V_f - S$) par un sous-groupe compact ouvert du produit des G_v ($v \in S$) . On identifie G_F au sous-groupe de G_A obtenu en plongeant G_F diagonalement dans le produit des G_v . C'est un sous-groupe discret.

Si $n = 1$, alors $G_A = A^*$ est le groupe des idèles de F, $G_F = F^*$ et

$C_F = G_A/G_F$ est le groupe des classes d'idèles de F. On appellera <u>Grössencharakter de</u> F un caractère de C_F, i.e. un homomorphisme continu de C_F dans $\mathbf{C}^*$. Il est de la forme $a \longmapsto \chi(a)\|a\|^r$ où $|\chi(a)| = 1$, $r \in \mathbf{R}$ et $\|a\| = \Pi_v\ |a_v|_v \quad (a = (a_v) \in A^*)$.

1.2 Sauf mention expresse du contraire, on suppose dans les §§2 à 6 que $G = \mathbf{GL}_n$. Le centre Z de G est donc isomorphe à $\mathbf{GL}_1$. On supposera $F = \mathbf{Q}$ lorsque l'on établit des liens avec la théorie classique (1.3, 1.4, 2.5, en particulier). Dans ce cas V_∞ est formé d'une place ∞, V_f s'identifie à l'ensemble des nombres premiers et si $v = p \in V_f$, alors $F_v = \mathbf{Q}_p$, $O_v = \mathbf{Z}_p$. On convient que $O_\infty = \mathbf{R}$.

1.3 Pour fixer les idées, nous rappelons brièvement la notion de <u>forme automorphe</u> sur G_A, quoiqu'en fait la définition précise n'interviendra guère ici, vu l'absence totale de démonstrations.

Une fonction continue f à valeurs complexes sur G_A est une <u>forme automorphe</u> si:

(i) elle est invariante à droite par G_F ;

(ii) elle est K_o-finie, i.e. l'ensemble de ses translatés à gauche par K_o engendre un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ de dimension finie ;

(iii) il existe un Grössencharakter ψ tel que $f(z\cdot g) = \psi(z)\cdot f(g) \quad (z \in Z_A, g \in G_A)$;

(iv) il existe un idéal I de codimension finie de l'algèbre $\underline{Z}$ des opérateurs différentiels biinvariants sur G_∞ qui, quel que soit $y \in G(A_f)$, annule la fonction $x \longmapsto f(x\cdot y)$ sur G_∞ ;

(v) f satisfait à une condition de croissance convenable.

Enfin, f est <u>parabolique</u> ou <u>cuspidale</u> si $\int_{U_A/U_F} f(u\cdot x)\, du = 0$ quels que soient $x \in G_A$ et le radical unipotent U d'un F-sous-groupe parabolique propre de G.

Il résulte en particulier de (ii), (iv) que $f(x\cdot y)$, vue comme fonction de $x \in G_\infty$ et $y \in G(A_f)$, est analytique en x et localement constante en y ; elle est aussi invariante à gauche par un sous-groupe compact ouvert de $G(A_f)$.

1.4 Cette notion n'est pas essentiellement plus générale que celle de forme automorphe sur G_∞/Γ , où Γ est un sous-groupe de congruence de $G(O_F)$. Indiquons rapidement le lien entre les deux, au moins dans le cas qui nous intéresse ici. Soit $G^+_{\mathbf{R}}$ l'ensemble des éléments de $G_{\mathbf{R}} = \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ de déterminant > 0 . Soit K un sous-groupe compact ouvert de $G(A_f)$, produit direct de groupes $K_p \in G_p$ supposés tels que $x \longmapsto \det x$ applique K_p sur O^*_p quel que soit p. Le groupe $\Gamma = G_{\mathbf{Q}} \cap (G_{\mathbf{R}} \times K)$ est un sous-groupe de congruence de $\mathbf{G}_{\mathbf{Z}}$ et on obtient ainsi un système cofinal de sous-groupes de congruence. En utilisant la relation

(1) $$\mathbf{SL}_n(A) = \mathbf{SL}_n(\mathbf{Q})\cdot(\mathbf{SL}_n(\mathbf{R}) \times (\mathbf{SL}_n(A_f) \cap K))$$

(approximation forte pour $\mathbf{SL}_n$) et l'égalité

(2) $$A^* = \mathbf{Q}^*\cdot\mathbf{R}^+\cdot\prod_p O_p ,$$

qui exprime le fait que le nombre de classes de $\mathbf{Z}$ est 1, on obtient aisément $G_A = (K_f \times G^+_{\mathbf{R}})\cdot G_{\mathbf{Q}}$. On a donc une identification naturelle

(3) $$K\backslash G_A/G_{\mathbf{Q}} = G_{\mathbf{R}}/\Gamma , \qquad \text{avec } \Gamma = (G_{\mathbf{R}} \times K_f) \cap G_{\mathbf{Q}} ,$$

qui permet d'associer canoniquement à une fonction sur $G_{\mathbf{R}}/\Gamma$ une fonction sur $G_A/G_{\mathbf{Q}}$ invariante à gauche par K . Les conditions données plus haut se traduisent en leurs analogues sur $G_{\mathbf{R}}$ (cf. par exemple [13; 14]).

1.5 <u>Formes modulaires</u>. On suppose ici $n = 2$. Alors $H = \mathbf{GL}_2(\mathbf{R})/\mathbf{O}(2)$ est le demi-plan de Poincaré, sur lequel $G^+_{\mathbf{R}}$ (resp. $G_{\mathbf{R}}$) opère par transformations holomorphes (resp. holomorphes ou antiholomorphes). Soit Γ un sous-groupe de congruence de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$. Rappelons qu'une <u>forme modulaire de poids</u> k sur Γ est une fonction holomorphe sur H, satisfaisant à

$$(1)\qquad f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k\cdot f(z)\ , \qquad \left(z \in H\ ;\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma\right)$$

et à une condition de régularité aux pointes d'un domaine fondamental. En particulier, si d est le plus petit entier > 0 tel que $z \longmapsto z + d$ soit dans Γ, alors

$$(2)\qquad f(z) = \sum_{j\geq 0} a_j\cdot e^{2\pi i j/d}\ .$$

f est parabolique si $a_o = 0$. Posons

$$(3)\qquad j(g,z) = (\det g)^{-\frac{1}{2}}\cdot(cz+d)\ , \qquad \left(g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G^+_{\mathbf{R}}\right)\ .$$

Soit $\widetilde{f}$ la fonction sur $\Gamma\backslash G^+_{\mathbf{R}}$ définie par

$$\widetilde{f}(g) = f(g\cdot i)\cdot j(g,i)^{-k}\ \ ;$$

alors $\widetilde{f}$ est une forme automorphe sur $\Gamma\backslash G^+_{\mathbf{R}}$, invariante par rapport à $Z^+_{\mathbf{R}}$ et qui satisfait à

$$(4)\qquad f(x\cdot g) = e^{-i\theta(x)\cdot k}\cdot f(g) \qquad (g \in G_{\mathbf{R}}\ ;\ x \in \mathbf{O}(2)\ \text{rotation d'angle}\ \theta(x)\ ).$$

Un des cas les plus importants est celui où Γ est un groupe de Hecke

$$\Gamma_o(N) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})\ \middle|\ c \equiv 0 \mod N\right\}$$

$(N \geq 1)$. Si ψ est un caractère de $(\mathbf{Z}/N\cdot\mathbf{Z})^*$, alors on considère plus généralement des formes modulaires de poids k et caractère ψ, i.e. qui satisfont à

$$(5)\qquad f(\gamma z) = f(z)\cdot(cz+d)^k\cdot\psi(d)\ , \qquad \left(\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma\right)\ .$$

Les formes correspondantes sur $\Gamma\backslash G_{\mathbf{R}}$ ou sur $G_{\mathbf{Q}}\backslash G_A$ satisfont alors à une relation $f(z\cdot g) = \widetilde{\psi}(z)\cdot f(g)$, où $\widetilde{\psi}$ est un caractère convenable du centre de G [13], (pour ces relations, voir aussi [3; 7; 41]).

§2. Produit eulérien attaché à une forme automorphe

Dans cette première étape, nous ne définissons les facteurs locaux des produits eulériens que pour presque toutes les places finies, en évitant toute place où se présentent des phénomènes de ramification en des sens variés. Nous rappelons tout d'abord deux exemples fondamentaux.

2.1 Soit $n = 1$. Une forme automorphe sur G_A est donc un Grössencharakter. On peut écrire $f = \prod_v f_v$ où f_v est un caractère de F_v^*. Soit S le complément dans V de l'ensemble des $v \in V_f$ pour lesquels le noyau de f_v contient O_v^*. Il est fini. On associe à f le produit

$$(1) \qquad L(s,f) = \prod_{v \notin S} (1 - f_p(\pi_v)(Nv)^{-s})^{-1} .$$

Ce produit converge dans le demi-plan $Rs > 1$ et admet un prolongement analytique méromorphe. Complété par des facteurs convenables pour les $v \in V_\infty$, il est holomorphe si f est non trivial, a un (seul) pôle simple si $f \neq 1$, pour $s = 1$, et satisfait à une équation fonctionnelle reliant $L(s,f)$ et $L(1 - s,\bar{f})$, (voir par ex. [44; 48]).

2.2 Pour ce §, voir par ex. [32], [41: Chap. 3]. Soit f une forme modulaire de poids k pour $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$. On lui associe, dans les notations de 1.5(2), avec $d = 1$, la série de Dirichlet

$$(1) \qquad L(s,f) = \sum_{n \geq 1} a_n/n^s .$$

Supposons $a_o = 0$, i.e. f parabolique, $a_1 = 1$, et f fonction propre des opérateurs de Hecke $T(p)$. Alors on a

$$(2) \qquad L(s,f) = \prod_p (1 - a_p \cdot p^{-s} + p^{(k-1)-2s})^{-1} .$$

D'après Hecke, $L(s,f)$ converge dans le demi-plan $Rs > 1 + (k/2)$. La fonction $R(s,f) = (2\pi)^{-s} \cdot \Gamma(s) \cdot L(s,f)$ a un prolongement analytique holomorphe borné dans les bandes verticales et satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(3) \qquad R(s,f) = i^k \cdot R(k - s,f) .$$

Des résultats semblables valent aussi pour les formes modulaires pour $\Gamma_o(N)$, mentionnées en 1.5.

2.3 Pour passer à des cas plus généraux, on utilise une définition "locale" des opérateurs de Hecke. Soit $\mathbf{T}_n$ le tore maximal de $G = \mathbf{GL}_n$ et soit W le groupe de Weyl de $\mathbf{GL}_n$ par rapport à $\mathbf{T}_n$; c'est donc le groupe des automorphismes de $\mathbf{T}_n$ associés aux permutations des vecteurs base canoniques de F^n. Soit $v \in V_f$ et soit $H_{o,v} = H(G_v, K_{ov})$ l'algèbre de Hecke de G_v par rapport à $K_{ov} = \mathbf{GL}_n(O_v)$, i.e. l'algèbre de convolution des fonctions complexes biinvariantes par K_{ov} et à support compact. On sait [35] que $H_{o,v}$ s'identifie canoniquement à l'algèbre P des fonctions polynomiales sur $\mathrm{Hom}(M,\mathbf{C}^*)$, où $M = \mathbf{T}_n(F_v)/\mathbf{T}_n(O_v)$, qui sont invariantes par W. Or $\mathrm{Hom}(M,\mathbf{C}^*)$ s'identifie à $\mathbf{T}_n(\mathbf{C})$, donc P s'identifie à l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathbf{T}_n(\mathbf{C})$ qui sont invariantes par W. Si $\chi : H_{o,v} \longrightarrow \mathbf{C}$ est un caractère, il existe une et une seule orbite de W dans $\mathbf{T}_n(\mathbf{C})$ telle que $h \longmapsto \chi(h)$ soit l'évaluation en un point de l'orbite, et cela établit une bijection entre $\mathrm{Hom}(H_{o,v},\mathbf{C})$ et $\mathbf{T}_n(\mathbf{C})/W$. D'autre part les orbites de W dans $\mathbf{T}_n(\mathbf{C})$ représentent (exactement) les classes de conjugaison d'éléments semi-simples de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$. Il existe donc une <u>bijection canonique entre caractères de degré un de</u> $H_{o,v}$ <u>et classes de conjugaison semi-simples de</u> $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$. Lorsque $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ intervient dans cette capacité, on le note ${}^LG_v^o$ et on l'envisage comme un sous-groupe du L-groupe de G_v (cf. §7).

On étend cette terminologie aux places infinies. Si $G_v = \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ (resp. $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$), soit $K_{ov} = \mathbf{O}(n)$ (resp. $\mathbf{U}(n)$). L'algèbre $H_{o,v}$ est l'algèbre de convolution des mesures à support compact sur G_v biinvariantes par K_{ov}. L'assertion précédente reste valable, et l'on pose de nouveau $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C}) = {}^LG_v^o$.

2.4 Soit f une forme automorphe sur G_A/G_F. En particulier, f est invariante à gauche par un sous-groupe compact ouvert K_1 de $G(A_f)$. Il existe une partie finie S de V contenant V_∞ et telle que K_1 ait K_{ov} comme facteur direct si $v \notin S$. <u>Supposons que</u> f <u>soit fonction propre de</u> $H_{o,v}$ <u>pour</u> $v \notin S$, l'algèbre $H_{o,v}$ opérant par convolution à gauche, et soit χ_v le caractère de $H_{o,v}$ tel que $h * f = \chi_v(h)\cdot f$, $(h \in H_{o,v})$. A χ_v correspond par 2.3 une classe de conjugaison semi-simple $\{g_v\}$ de ${}^L G_v = \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$. On associe alors à f le produit

$$(1) \qquad L(s,f) = \prod_{v \notin S} L(s,\chi_v), \qquad \text{avec } L(s,\chi_v) = (\det(1 - Nv^{-s}\cdot g_v))^{-1} .$$

Plus généralement, si r est une représentation de dimension finie de ${}^L G^o$, on pose

$$(2) \qquad L(s,f,r) = \prod_{v \notin S} L(s,\chi_v,r), \qquad \text{avec } L(s,\chi_v,r) = (\det(1 - Nv^{-s}\cdot r(g_v)))^{-1} .$$

Cette construction est donnée dans [25] pour les groupes déployés, dans [27] pour le cas général (cf. 7.4). Le produit $L(s,f,r)$ converge absolument pour Rs assez grand [25; 27].

2.5 Nous supposons ici $n = 2$, et faisons le lien avec 2.2. Soit $T(p)$ (resp. $\widetilde{T}(p)$) l'opérateur de Hecke associé à la double classe de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ modulo $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ (resp. $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$). Soit f comme en 2.2, soit $\widetilde{f}$ la forme automorphe correspondante sur $G_A/G_{\mathbf{Q}}$ (<u>via</u> 1.4, 1.5). Alors [13: p. 48] on a

$$(1) \qquad (f|T(p))^{\sim} = p^{(k/2)-1}\,(\widetilde{T}(p) * \widetilde{f}) .$$

Par conséquent, si f est fonction propre de $T(p)$, de valeur propre a_p, alors $\widetilde{f}$ est fonction propre de $\widetilde{T}(p)$ de valeur propre $\widetilde{a}_p = p^{1-k/2}\cdot a_p$.
D'autre part, f est invariante par Z_A, et par $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ pour tout p.
L'algèbre $H_{o,p}$ est engendrée par $T(p)$ et la double classe $T(p,p)$ de $p.\mathrm{Id}.$, donc $\widetilde{f}$ est fonction propre de $H_{o,p}$. En fait, le procédé de 2.4 associe à $\widetilde{f}$ le produit

$$(2) \qquad L(s,\widetilde{f}) = \prod_p (1 - p^{(1-k)/2} a_p\cdot p^{-s} + p^{-2s})^{-1} .$$

On a donc $L(s,\widetilde{f}) = L(s + (k-1)/2, f)$.

§3. Problèmes globaux

Ils se rangent en gros en trois types:

3.1 Prolongement analytique, équation fonctionnelle. Les résultats de Hecke rappelés en 2.1, 2.2, suggèrent évidemment de se demander si les séries L de 2.4 admettent un prolongement analytique méromorphe, n'ayant qu'un nombre fini de pôles, et si la définition de $L(s,f,r)$ peut être complétée aux $v \in S$ de manière à ce que $L(s,f,r)$ et $L(1-s,f,r^{\vee})$, où $r^{\vee}$ est la représentation contragrédiente de r, soient liés par une équation fonctionnelle, et que $L(s,f,r)$ soit holomorphe si f est parabolique.

On y reviendra dans les §§4, 5, 6, 8.

3.2 Surjectivité. Etant donné f comme dans 2.3, on lui a associé pour presque tout $v \in V_f$ une classe de conjugaison semi-simple dans $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$, autrement dit un polynôme caractéristique complexe, de degré n, à racines non nulles. Or il y a plusieurs procédés bien connus pour faire cela, en particulier

(i) Séries d'Artin. Soit E une extension galoisienne de F et soit σ une représentation linéaire complexe de degré n du groupe de Galois $G(E/F)$ de E sur F. Pour v non ramifiée dans E, soit φ_v un élément de Frobenius en v; il est déterminé à conjugaison près. On peut alors former la série

$$L(s,\sigma,E/F) = \prod_{v \text{ non ram.}} (\det(1 - \sigma(\varphi_v)Nv^{-s}))^{-1} . \tag{1}$$

Elle admet un prolongement méromorphe au plan complexe. On sait comment multiplier cette série par des facteurs locaux correspondant aux $v \in S$ de manière à ce que le produit ainsi complété soit méromorphe et ait une équation fonctionnelle liant $L(s,\sigma)$ et $L(1-s,\sigma^{\vee})$. La conjecture d'Artin est que cette fonction est holomorphe si σ est irréductible non triviale. Pour la forme de l'équation fonctionnelle, cf. [5].

(ii) Soit Z une variété projective lisse sur F. Pour tout $v \in V_f$ où Z admet une bonne réduction $Z_{(v)} = Z \times \bar{k}_v$, soit φ_v l'endomorphisme de Frobenius de $Z_{(v)}$. Fixons un entier $m \geq 1$. Pour ℓ premier et premier à Nv, l'endomorphisme φ_v induit un endomorphisme $\varphi_{v,m}$ du m-ième groupe de cohomologie ℓ-adique de $Z_{(v)}$. Soit $P_v(T) = \det(1 - \varphi_{v,m} \cdot T)$. Il est à coefficients entiers rationnels indépendants de ℓ [9]. On considère alors le produit

$$(2) \qquad L_m(s,Z) = \prod_v P_v(Nv^{-s})^{-1} ,$$

étendu aux v de bonne réduction. On conjecture qu'il admet un prolongement analytique méromorphe à nombre fini de pôles. Modulo d'autres conjectures, non toutes réglées par [9], Serre [38] a montré comment compléter cette définition aux $v \in V$ restants, et donné la forme d'une équation fonctionnelle conjecturale liant les valeurs du produit complet en s et $m + 1 - s$.

(iii) Comme dans (i), à partir d'un système strictement compatible de représentations rationnelles ℓ-adiques de $G(E/F)$ [37], voire d'un groupe de Weil.

Le problème est ici de savoir si 2.4 (ou son extension à des groupes plus généraux), donne beaucoup des séries obtenues par l'un de ces procédés, ou des variantes. La "philosophie" espère qu'il en est bien ainsi. Comme le montrent les exemples connus, dont certains seront mentionnés plus loin, cela est d'un intérêt considérable pour les deux classes d'objets en question.

3.3 Comparaison. Soit D une algèbre à division centrale sur F , de rang n . Soit H le F-groupe algébrique associé à D : pour toute F-algèbre L , le groupe H(L) est le groupe des éléments inversibles de $D \otimes_F L$. Pour presque tout v , on a $H_v = \mathbf{GL}_{n,v}$. La construction de 2.4 associe donc aussi des séries L(s,f) aux formes automorphes sur H_A/H_F qui sont fonctions propres des $H_{o,v}$ pour presque tout v . Le problème est ici de voir si les séries L obtenues à partir de H proviennent aussi de G , ou en tout cas s'il y a des liens entre elles et par suite entre formes automorphes sur $H_A/H_{\mathbf{Q}}$ et sur $G_A/G_{\mathbf{Q}}$. Pour n = 2 , une réponse affirmative est donnée dans [20] (cf. 8.6(b)).

3.4 Il y a en gros deux types de réponses ou de conjectures concernant le problème de surjectivité. Dans l'un on impose des conditions analytiques au produit eulérien considéré, et à d'autres qui en sont dérivés, suivant le modèle de la réciproque de Weil au théorème de Hecke (4.2). Une autre manière de poser le problème se trouve dans [27], et ne se formule bien qu'une fois introduits représentations, groupe de Weil et L-groupe (cf. 8.3). A titre d'exemple, donnons déjà ici un cas particulier de la question 3 de [27].

Soit $M = \prod_1^m \mathbf{GL}_{n_i}$, $(n_1 + \cdots + n_m \leq n)$. On pose ${}^L M_v^o = \prod_i \mathbf{GL}_{n_i}(\mathbf{C})$. Soit E comme en 3.2. Soit $\mu : {}^L M_v^o \times G(E/F) \longrightarrow {}^L G^o$ un homomorphisme continu, injectif sur ${}^L M_v \times \{1\}$, indépendant de v . Soit f une forme automorphe sur M_A/M_F , fonction propre des opérateurs de Hecke ($H_{o,v}$ est ici le produit des algèbres $H_{o,v}$ des facteurs) pour presque tout v , et soit $\{m_v\}$ la classe de conjugaison semi-simple de M_v associée à f et à un tel v par 2.4, ou son extension évidente à un produit. La question est alors de savoir si le produit

$$\prod \det(1 - \mu((m_v,\varphi_v))(Nv)^{-s})^{-1}$$

étendu aux v précédents qui sont de plus non ramifiés en E , provient par 2.4 d'une forme automorphe sur G_A/G_F .

§4. Quelques réponses pour $\mathbf{GL}_1$ et $\mathbf{GL}_2$

4.1 Le cas particulier non trivial le plus simple de 3.4 est celui où $M = \{e\}$, et $n = 1$. Le produit 3.4(1) est une série d'Artin abélienne et l'on demande si elle est associée à un Grössencharakter. La réponse (affirmative) est la loi de réciprocité d'Artin pour les extensions cyclique, qui, plus précisément, établit une bijection entre caractères de degré 1 du groupe de Galois $G(F_s/F)$ d'une clôture séparable de F et les Grössencharaktere d'ordre fini de F. Cela démontre aussi la conjecture d'Artin (cf. 3.2) pour σ de degré 1. Dans [46], Weil a introduit une autre classe de Grössencharaktere qui doivent avoir une interprétation arithmétique intéressante, les Grössencharaktere χ de "type A_o": la restriction de χ à $F_\infty^* = \prod_{v\in V_\infty} F_v^*$, identifié au groupe des points réels du groupe algébrique $R_{F/\mathbf{Q}}\, \mathbf{GL}_1$, est le produit d'un caractère de groupe algébrique de ce groupe par un caractère d'ordre fini. Les Grössencharaktere de type (A_o) qui ne sont pas "triviaux," i.e. produits de $\| \ \|^m$ $(m \in \mathbf{Z})$ par un Grössencharakter d'ordre fini, donnent lieu à des séries L susceptibles d'intervenir dans des fonctions zêta de variétés algébriques, et dont certaines au moins sont connues pour le faire [46].

4.2 Soit $n = 2$. Hecke a déjà donné une réciproque aux résultats de 2.2 pour $\Gamma = \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$. Si une série de Dirichlet $\Sigma\, a_n \cdot n^{-s} = D(s)$ se prolonge analytiquement en une fonction holomorphe et si $R(s) = (2\pi)^{-s}\, \Gamma(s)\cdot D(s)$ satisfait à $R(s) = i^k \cdot R(k-s)$ et est bornée dans des bandes verticales, alors $D(s)$ est associée à une forme modulaire pour $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$. Weil [47] a étendu cela aux formes modulaires pour les sous-groupes $\Gamma_o(N)$: il faut imposer des conditions du type précédent non seulement à $D(s)$ mais à des séries $\Sigma\, a_n \chi(n)/n^{-s}$ obtenues en tordant $D(s)$ par certains caractères de Dirichlet, avec de plus une valeur prescrite à l'avance, dépendant de χ, de la constante intervenant dans l'équation fonctionnelle. Ce résultat est généralisé dans [22; 49] (cf. 5.3).

4.3 Considérons la série d'Artin de 3.2(i) pour $F = \mathbf{Q}$ et supposons σ irréductible de degré deux. Supposons que, pour tout caractère de degré un de $G(E/\mathbf{Q})$, la fonction $L(s, \sigma \otimes \chi)$ satisfasse à la conjecture d'Artin. Alors les résultats mentionnés en 4.2 entraînent que $L(s,f)$ provient d'une forme modulaire de poids 1. C'est donc un analogue de la loi de réciprocité pour des extensions non abéliennes dont le groupe de Galois a une représentation fidèle de degré deux, <u>mais</u> prouvé modulo la conjecture d'Artin. On préfèrerait bien entendu le démontrer directement et en déduire la conjecture d'Artin, comme pour $n = 1$. Il y a tout de même au moins un nouveau cas où Tate, Atkin and Co ont construit directement une forme modulaire dont la série de Dirichlet associée est la série d'Artin donnée, et ainsi prouvé la conjecture d'Artin pour cette dernière. Dans ce cas, l'image de σ dans $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{C})$ est le groupe alterné $\mathcal{A}_4$, et on ne peut se ramener au cas abélien car aucun multiple de σ n'est monomial.

Par ailleurs [10] fournit une réciproque (cf. 6.5(b)).

4.4 Soit f une forme modulaire pour un $\Gamma_o(N)$ de poids $k \geq 2$ qui soit primitive. Alors Deligne a montré que sa série de Dirichlet était justiciable de 3.2(ii) et ainsi déduit la conjecture de Ramanujan-Petersson de sa démonstration des conjectures de Weil [9] (en fait, cette réduction n'est explicitée dans [4] que pour la fonction τ de Ramanujan).

4.5 Considérons le produit eulérien défini à partir du H^1 d'une courbe elliptique sur F, que les spécialistes savent écrire pour tout v. Le théorème de Weil montre que, si ce produit et les produits obtenus en le tordant par certains Grössencharaktere satisfont à des conditions d'analyticité convenables, alors le produit provient d'une forme modulaire de poids 2. Si F est un corps de fonctions, ces conditions sont satisfaites et l'on a un vrai théorème. Si $F = \mathbf{Q}$, elles ont été vérifiées dans de nombreux cas, et cela conduit à se demander si une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ est isogène à un facteur de la jacobienne de la compactification naturelle d'un quotient $H/\Gamma_o(N)$ [47]. En fait, l'évidence en faveur de cette conjecture et la possibilité d'associer des séries L à des formes automorphes sur des groupes semi-simples [25] ont rapidement amené Serre à suggérer que les séries L de 3.2(ii) proviennent de formes automorphes.

On reviendra encore plusieurs fois à $\mathbb{GL}_2$ (cf. 5.3, 6.4, 6.5, 8.4 d)e)f), 8.6).

§5. Facteur ou produit eulérien à associer à une représentation

5.1 Soit ψ un Grössencharakter de F. On note ${}_oL^2_\psi(G_A/G_F)$ ou ${}_oL^2_\psi$ l'espace des fonctions mesurables f sur G_A/G_F satisfaisant à 1.3(iii), telles que $x \longmapsto f(x)\cdot|\psi(\det x^{-1})|^{\frac{1}{n}}$ soit de carré intégrable sur G_A/Z_AG_F et qui sont cuspidales (cf. 1.3, la condition étant imposée pour presque tout $x \in G_A$). C'est un G_A-module, somme directe discrète à multiplicités finies de G_A-modules unitaires irréductibles. Les formes paraboliques sont, en gros, les combinaisons linéaires finies des éléments K_o-finis des composants irréductibles de ${}_oL^2_\psi$ et en forment un sous-espace dense. Soit (π, M) un tel composant. Il existe alors pour tout $v \in V$ une représentation unitaire irréductible (π_v, M_v) de G_v qui, pour presque tout v, est "de classe 1," (l'espace $(M_v)^{K_{ov}}$ des vecteurs fixes par K_{ov} est $\neq 0$, et alors nécessairement de dimension 1), de sorte que l'on puisse envisager M comme un produit tensoriel complété $M = \hat{\otimes}_v M_v$, et l'espace M^∞ des formes automorphes contenues dans M comme un produit tensoriel $\otimes_v M_v^\infty$, où M_v^∞ est l'espace des éléments K_{ov}-finis de M_v. Par définition $\otimes_v M_v^\infty$ est engendré par des produits $\otimes_v x_v$ avec $x_v \in M_v^\infty$, et $x_v = e_v$ pour presque tout v, où e_v est un générateur de $(M_v)^{K_{ov}}$ choisi une fois pour toutes.

Pour pouvoir faire entrer dans ce cadre des espaces de formes automorphes plus généraux, il est devenu usuel d'algébriser la situation et de considérer directement des espaces du type $\otimes_v M_v^\infty$ plutôt que des complétions. Malheureusement, pour v archimédienne, M_v n'est pas un G_v-module. Mais c'est tout de même un module pour K_{ov} et pour l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G_v. On peut exprimer cela en envisageant cet espace comme un module sur une algèbre $\underline{H}_v$, dite aussi de Hecke, algèbre de convolution engendrée par les fonctions C^∞ à support compact K_{ov}-finies (des deux côtés) et les coefficients des représentations de dimension finie de K_{ov}. Pour $v \in V_f$ on note $\underline{H}_v$ l'algèbre de convolution des fonctions à support compact sur G_v qui sont bi-invariantes par un sous-groupe compact ouvert de G_v (dépendant de la fonction). Dans tous les cas, on définit une notion de $\underline{H}_v$-module admissible; c'est, entre autres, un K_{ov}-module dont tous les éléments sont K_{ov}-finis et dans lequel les représentations de K_{ov} sont de multiplicité finie. (Pour $v \in V_f$, cette notion équivaut en fait à celle de G_v-module admissible.) Si (π_v, N_v) est admissible irréductible, et de classe 1 pour presque tout v, alors on peut former $N = \otimes_v N_v$ comme plus haut. C'est un $\underline{H}$-module irréductible, admissible, où $\underline{H}$ est l'algèbre de Hecke globale; par définition $\underline{H} = \otimes_v \underline{H}_v$ est le produit tensoriel des $\underline{H}_v$, i.e. l'espace engendré par les produits $\otimes_v h_v$ où les h_v sont égaux à 1 pour presque tout v, avec le produit évident. Dans la suite on considère uniquement des représentations $\pi = \otimes_v \pi_v$ de ce type. Ce sont donc des $\underline{H}$-modules, mais on se permettra d'en parler comme des G_A-modules. Une telle représentation est dite <u>automorphe</u> si elle est réalisée dans un $\underline{H}$-module de formes automorphes, ou plus généralement comme un sous-quotient d'un $\underline{H}$-module de formes automorphes. On note $\underline{A}(G_v)$ ou $\underline{A}_v$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\underline{H}_v$-modules admissibles irréductibles (pour tout cela, voir [17; 22]).

5.2 On veut maintenant associer à une représentation automorphe (irréductible admissible) un produit eulérien indexé par V tout entier. Ce problème global se subordonne à une question locale: associer à toute représentation admissible irréductible de $\underline{H}_v$ un "facteur eulérien" convenable, i.e. si $v \in V_f$, une fonction de la forme $(P((Nv)^{-s}))^{-1}$ où $P \in \mathbf{C}[T]$ et $P(0) = 1$; si $v \in V_\infty$, un produit de facteurs $\pi^{-s/2}\,\Gamma((s+m)/2)$ et $\pi^{-s}\,\Gamma(s+m)$ par une exponentielle e^{as+b}. De façon un peu moins vague, Langlands [27] a d'abord posé les problèmes suivants (dans le cas général, en fait, cf. §8) qui, pour $n = 1$, sont traités dans la Thèse de Tate [44].

(i) Fixons un caractère additif non trivial ψ_v de F_v. Il faut assigner à $\pi_v \in \underline{A}_v$ et à une représentation holomorphe r de dimension finie de ${}^LG^o$ un facteur eulérien $L(s,\pi_v,r)$ et un facteur $\varepsilon(s,\pi_v,r,\psi_v)$ de la forme $c \times$ exponentielle. Si π_v est de classe 1, la représentation naturelle de $H_{o,v}$ sur l'espace des vecteurs fixes par K_{ov} définit un caractère χ_v de $H_{o,v}$; on veut que $L(s,\pi_v,r)$ soit égal au $L(s,\chi_v,r)$ de 2.4; de plus, on pose $\varepsilon(s,\pi_v,r,\psi_v) = 1$ si O_v est le plus grand idéal sur lequel ψ_v est trivial.

(ii) Supposons ψ_v associé à un caractère additif donné ψ de A/F quel que soit $v \in V$. On voudrait que la solution de (i) ait la propriété suivante:

Soit $(\pi,M) = \otimes_v(\pi_v,M_v)$ un $\underline{H}$-module automorphe irréductible admissible. Alors

$$(1) \qquad L(s,\pi,r) = \prod_v L(s,\pi_v,r)\ , \quad \text{et} \quad L(s,\pi,r^\vee)$$

admettent des prolongements analytiques méromorphes avec nombre fini de pôles, qui satisfont à une équation fonctionnelle

(2) $$L(s,\pi,r) = \varepsilon(s,\pi,r)L(1-s,\pi,\check{r}), \quad \text{où} \quad \varepsilon(s,\pi,r) = \prod_v \varepsilon(s,\pi_v,r,\psi_v) ,$$

et sont holomorphes si $M \subset {}_oL^2$ et r est irréductible non triviale.

Remarquons que les facteurs L et ε sont en tout état de cause définis pour presque tout v, indépendamment de la résolution du problème local. La construction de 2.4 s'applique donc à tout $\underline{H}$-module irréductible admissible.

5.3 Ces problèmes sont résolus affirmativement lorsque $n = 2$ et que r est la représentation identique ([22], voir aussi [13; 17]). Le problème local est en fait traité par deux méthodes, qui fournissent (heureusement) les mêmes facteurs L et ε. L'une généralise assez directement celle de Tate [44]. On considère des fonctions zêta locales de la forme

$\zeta(\Phi,c,s) = \int_{G_v} \Phi(x)\ c(x)\ |\det x|_v^{s+\frac{1}{2}} dx$, où Φ est une fonction de Schwartz-Bruhat sur $\mathbf{M}_2(F_v)$ et c est un coefficient de π. Cette intégrale converge pour $Rs \gg 0$, admet un prolongement analytique méromorphe. Il existe un facteur eulérien $L(\pi,s)$, combinaison linéaire de telles fonctions, tel que $L(\pi,s)^{-1}\cdot\zeta(\Phi,c,s)$ soit entière quels que soient Φ et c. C'est le facteur cherché. Le facteur ε s'obtient en considérant l'équation fonctionnelle qui lie $\zeta(\Phi,c,s)$ et $\zeta(\hat{\Phi},\bar{c},1-s)$, où $\hat{\Phi}$ est la transformée de Fourier de Φ. L'autre méthode utilise des intégrales sur F_v^* formées en considérant une réalisation de π dans un espace de fonctions sur G_v, le modèle de Whittaker de π.

Par exemple, si $k_v = \mathbf{R}$ et π est dans la série discrète, alors $L(s,\pi)$ est formé d'un facteur gamma; si v est archimédienne et π est dans la série principale, alors $L(s,\pi)$ est produit de 2 facteurs gamma (se réduisant parfois à 1 par la formule de multiplication). Si v est ultramétrique, $L(s,\pi)^{-1} = 1$ si π est supercuspidale, est de degré 1 si π est spéciale, de degré 2 sinon. Dans tous les cas, les fonctions $L(s,\pi \otimes \chi)$ et $\varepsilon(s,\pi \otimes \chi)$, où χ parcourt les caractères du centre, caractérisent π à équivalence près parmi les représentations dont la restriction au centre est donnée [22: 2.19, 5.18, 6.7].

De plus [22] établit une réciproque: soit $\pi = \otimes_v \pi_v$ admissible irréductible. On suppose qu'il existe un Grössencharakter ψ_v tel que $\pi_v(a\cdot \mathrm{Id.}) = \psi_v(a)\cdot\mathrm{Id.}$ quels que soient $v \in V$, $a \in F_v^*$ et surtout que, pour tout Grössencharakter, $L(s,\pi \otimes \chi)$ et $L(s,\pi^\vee \otimes \chi^{-1})$ admettent des prolongements analytiques holomorphes, bornés dans des bandes verticales, satisfaisant à l'équation 5.2(2). Alors π intervient dans ${}_oL^2_\psi$. [$\pi \otimes \chi$ est le produit tensoriel de π et de la représentation $x \longmapsto \chi(\det x)$.]

Remarquons que, même dans ce cas, on sait très peu de choses lorsque r n'est pas la représentation identique. En fait, on n'a des renseignements que pour $r = \mathrm{Sym}^m$ avec $m = 2,3$. Si $m = 2$, et π provient d'une forme modulaire parabolique, prolongements analytiques et équations fonctionnelles sont établis dans [34], et l'holomorphie dans [42; 43]. Si $m = 3$, l'existence d'un prolongement analytique méromorphe résulte de [25].

5.4 Pour $\mathbf{GL}_n$ (même sur une algèbre à division) une solution est donnée par Godement-Jacquet [18] et obtenue par une méthode généralisant celle esquissée ci-dessus.

5.5 Le rôle joué par les Grössencharaktere dans la réciproque de 5.3 a amené Gelfand et Kazdan [15] à poser un problème différent pour $\mathbf{GL}_n$, mettant en jeu $\mathbf{GL}_n$ et $\mathbf{GL}_{n-1}$, (cf. 6.3(d)). Du point de vue de 5.3, cela conduit à la question suivante: associer à tout couple de représentations irréductibles admissibles π_v de G_v et π'_v de $G'_v = \mathbf{GL}_{n-1,v}$ des facteurs $L(s,\pi_v \times \pi'_v)$ et $\varepsilon(s,\pi_v \times \pi'_v,\psi_v)$, de manière à ce que, si $\pi = \otimes_v \pi_v$ et $\pi' = \otimes_v \pi'_v$ sont automorphes pour G_A et G'_A respectivement, alors $L(s,\pi \times \pi') = \prod_v L(s,\pi_v \times \pi'_v)$ et $L(s,\pi^\vee \times \pi'^\vee)$ admettent des prolongements analytiques méromorphes, holomorphes si π est parabolique, satisfaisant à

$$L(s,\pi \times \pi') = \varepsilon(s,\pi \times \pi')\cdot L(1-s,\pi^\vee \times \pi'^\vee), \quad \text{où} \quad \varepsilon(s,\pi \times \pi') = \prod_v \varepsilon(s,\pi_v,\pi'_v,\psi_v).$$

Pour $n = 3$, ce programme est réalisé dans [23] (au moins si π' est aussi parabolique et F est un corps de fonctions). De plus [21] annonce une réciproque, aussi due à Jacquet et Shalika: supposons π irréductible admissible et satisfaisant aux conditions précédentes pour tout π' automorphe pour $\mathbf{GL}_2$ et pour tout Grössencharakter χ , alors π est automorphe parabolique.

5.6 Très récemment, Piateckiĭ-Šapiro a annoncé qu'il a démontré pour $\mathbf{GL}_3$ les analogues des théorèmes de Jacquet-Langlands. En particulier, il suffit de nouveau que $\pi \otimes \chi$ satisfasse à des conditions d'analyticité et équations fonctionnelles quel que soit le Grössencharakter χ pour que π soit automorphe parabolique. Il a également donné un exemple simple montrant que cette réciproque cesse d'être valable pour $n \geq 4$. En fait, il construit une infinité continue de représentations irreductibles admissibles non équivalentes de $\mathbf{GL}_{4A}$, qui ont toutes les mêmes facteurs locaux L et ε, et dont l'une est automorphe parabolique. Ces représentations satisfont donc aux conditions de Jacquet-Langlands, mais ne peuvent être toutes automorphes puisque le spectre de ${}_0L^2(G_A/G_F)$ est dénombrable.

§6. Représentations de $\mathbf{GL}_n$ et représentations de groupes de Weil

Les caractères d'ordre fini de F_v^* correspondent canoniquement aux caractères du groupe de Galois $G(F_{v,ab}/F_v)$ de l'extension abélienne maximale de F_v, d'après la loi de réciprocité locale. Langlands conjecture pour $\mathbf{GL}_n$ des relations analogues entre représentations irréductibles admissibles de G_v et représentations complexes de dimension n du groupe de Galois d'une clôture séparable de F_v , qui se globaliseraient en une loi de réciprocité non abélienne liant séries d'Artin et représentations automorphes de G_A (en partie démontrée pour $n = 2$, modulo la conjecture d'Artin). En fait, les conjectures mettent en jeu plus généralement des représentations de groupe de Weil et séries L d'Artin-Hecke (6.5); en principe, elles comprennent même les séries L obtenues à partir de "motifs," mais le conférencier n'ira pas jusque là.

6.1 Groupes de Weil. On note $W_{E'/E}$ le groupe de Weil associé à un corps local ou global E et une extension galoisienne finie E' de E [1; 45]. Parmi leurs nombreuses propriétés, on rappelle l'existence:

a) d'une suite exacte

(1) $$1 \longrightarrow W_{E'/E'} \longrightarrow W_{E'/E} \longrightarrow G(E'/E) \longrightarrow 1 ,$$

b) d'isomorphismes

(2) $W_{E/E} = E^*$ si E est local, $W_{E/E} = C_E$ si E est un corps de nombres,

c) d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & W_{E'_{v'}/E'_{v'}} & \longrightarrow & W_{E'_{v'}/E_v} & \longrightarrow & G(E'_{v'}/E_v) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & W_{E'/E'} & \longrightarrow & W_{E'/E} & \longrightarrow & G(E'/E) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

si E est global, $v \in V_E$, et $v' \in V_{E'}$ prolonge v , et enfin

d) d'un homomorphisme canonique surjectif $\alpha_{E',E''} : W_{E'/E} \longrightarrow W_{E''/E}$ compatible avec $G(E'/E) \longrightarrow G(E''/E)$ si E'' est intermédiaire entre E et E' et galoisien sur E , d'où en particulier, si E est local, un homomorphisme $a : W_{E'/E} \longrightarrow \mathbf{Z}$ composé d'applications

(4) $$W_{E'/E} \xrightarrow{\alpha_{E'/E}} W_{E/E} = E^* \xrightarrow{\text{ord.}} \mathbf{Z} .$$

6.2 Une représentation continue complexe de dimension finie de $W_{E'/E}$ est dite admissible si son image est formée d'éléments semi-simples.

Dans [28] et un célèbre diplodocus non publié (mais Deligne a fourni des démonstrations dans [8]), Langlands a associé à toute paire E, E' (E local, E' galoisien de degré fini sur E) et toute représentation admissible σ de $W_{E'/E}$ un facteur $\varepsilon(s,\sigma,\psi)$ de manière à ce que les $\varepsilon(s,\sigma,\psi)$ et les facteurs $L(s,\sigma,E'/E)$ de Weil [45] satisfassent, entre autres, à la condition suivante: soit F' une extension galoisienne finie de F et soit σ une représentation admissible de $W_{F'/F}$. Pour $v \in V$, soit σ_v la classe de représentations de $W_{F'_v/F_v}$ obtenue à partir de σ à l'aide de 6.1(3). Alors la série d'Artin-Hecke $L(s,\sigma) = \prod_v L(s,\sigma_v)$ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad L(s,\sigma) = \varepsilon(s,\sigma)\cdot L(1-s,\sigma^\vee) \ , \quad \text{avec} \quad \varepsilon(s,\sigma) = \prod_v \varepsilon(s,\sigma_v,\psi_v) \ .$$

Suivant Artin et Weil, on conjecture que $L(s,\sigma)$ est holomorphe si σ est irréductible "non triviale," i.e. non de la forme $w \longrightarrow \|\alpha_{F'/F}(w)\|^t$ $(t \in \mathbf{R})$. Rappelons que

$$(2) \qquad L(s,\sigma,E'/E) = (\det(1-\sigma^I(\varphi_v)\cdot Nv^{-s}))^{-1} \ ,$$

où σ^I est la restriction de σ à l'espace des points fixes du groupe d'inertie local et φ_v un Frobenius.

6.3 Le problème local. Soit E un corps local. Si E est archimédien, le problème local est d'associer canoniquement à tout $\pi \in \underline{A}(\mathbf{GL}_n/E)$ une représentation admissible $\sigma = \sigma(\pi)$ de degré n de $W_{\bar{E}/E}$, de manière à ce qu'en passant aux classes d'équivalence de telles représentations modulo automorphismes intérieurs de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ on obtienne une bijection.

Si E est ultramétrique, le problème est en principe analogue, mais on a remarqué rapidement que, ainsi posé, il n'admettait pas une réponse affirmative déjà pour $\mathbf{GL}_2$. On veut évidemment que dans ce cas π et $\sigma(\pi)$ ait les mêmes facteurs L et ε (cf. 5.3, 6.2). Or, en caractéristique résiduelle impaire, cas où les deux ensembles à comparer sont connus, on constate l'existence d'une bijection naturelle satisfaisant à cette condition pour autant que l'on laisse de côté les représentations spéciales, i.e. celles dont le facteur L est de degré 1. Mais la théorie des courbes elliptiques mène à attribuer un tel facteur à une représentation ℓ-adique dans le module de Tate d'une courbe alliptique d'invariant j non entier et il y a plusieurs raisons qui suggèrent d'associer cette représentation à la représentation spéciale de $\mathbf{GL}_2$ qui est triviale sur le centre [4: §3]. Cela a conduit à raffiner le problème de manière à inclure les représentations ℓ-adiques de groupes de Weil [8: §8]. On peut cependant le formuler en restant sur les complexes. On considère des paires (σ, X) où σ est comme précédemment et X un élément nilpotent de l'algèbre de Lie de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ qui satisfont à la condition:

$$(1) \qquad \mathrm{Ad}\,\sigma(w)\cdot X = (Nv)^{a(w)}\cdot X\ , \qquad (w \in W_{E'/E}\ ;\ a(w) \text{ donné par } 6.1(4))\ .$$

Soit $\Phi(G/E)$ l'ensemble des classes d'équivalence de telles paires (ou de σ si $E = \mathbf{R}, \mathbf{C}$), modulo automorphismes intérieurs de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ (opérant simultanément sur σ et X) et passage à des extensions plus grandes de E. On demande encore d'établir une bijection canonique entre $\underline{A}(G_E)$ et $\Phi(G/E)$. Dans les deux cas, on associe alors à $\pi \in \underline{A}(G_E)$ les facteurs L et ε de l'élément correspondant de $\Phi(G/E)$ mentionnés ci-dessus. Cette correspondance doit satisfaire à plusieurs conditions données *a priori*, notamment:

(a) la représentation $\pi(\sigma, X)$ associée à (σ, X) est de carré intégrale modulo le centre si et seulement s'il n'existe pas de sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique propre de ${}^LG^o$ qui contienne l'image de σ et dont l'algèbre de Lie contienne X ;

(b) si π est de classe 1 et E' non ramifiée, on demande, pour être en accord avec 2.4, que σ soit triviale sur le groupe d'inertie et envoie un Frobenius sur un élément de la classe analogue au $\{g_v\}$ de 2.4, et on prend $X = 0$.

Une autre formulation est donnée dans [8: §8]. On remplace $W_{E'/E}$ par un groupe de Weil "élargi" $W'_{E'/E}$ produit semi-direct d'un groupe distingué N isomorphe au groupe additif du corps par $W_{E'/E}$, l'élément $w \in W_{E'/E}$ opérant par l'homothétie de rapport $(Nv)^{a(w)}$. On considère alors des représentations complexes de dimension finie de $W'_{E'/E}$ qui sont admissibles sur $W_{E'/E}$ et unipotentes sur N, et $\Phi(G/E)$ est l'ensemble de leurs classes d'équivalence.

6.4 <u>Conjectures et résultats locaux</u>. (a) Si $E = \mathbf{R}, \mathbf{C}$, le problème de 6.3

est résolu affirmativement. Si $E = \mathbb{C}$, c'est contenu dans [30], pour tout n. Si $E = \mathbb{R}$ et $n = 2$, cf. [22]; pour $n \geq 3$, le résultat général de [30] donne une partition de $\underline{A}(G_E)$ en parties finies non vides indexées par les σ ; mais il sera prouvé, Jacquet dixit, dans l'article donnant les démonstrations des résultats annoncés dans [21, 23], que ces parties de $\underline{A}(G_E)$ se réduisent à un élément. Cependant, pour $n \geq 3$, on ignore si les facteurs L et ε ainsi obtenus sont ceux de [18].

Les représentations de $W_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ qui sont triviales sur $\mathbb{C}^*$, i.e. proviennent de représentations de $G(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2$, correspondent biunivoquement aux classes de conjugaison d'éléments d'ordre deux de ${}^L G$. Les π_v correspondants seront dits de type A_{oo}. Par analogie avec [46], les π_v associés aux représentations de $W_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ dont la restriction à $\mathbb{C}^*$ est somme de caractères de la forme $z \longmapsto z^a \cdot \bar{z}^b$ $(a,b \in \mathbb{Z})$ seront dits de type A_o.

Supposons $n = 2$. Les représentations irréductibles de $W_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ sont induites d'un caractère de $\mathbb{C}^*$ dont la restriction à $\mathbb{U}(1)$ est non-triviale. Elles correspondent à la série discrète. Pour $n > m > 0$ entiers, soit $\sigma_{n,m}$ la représentation induite de $W_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ à partir du caractère $z \longmapsto z^{-n}\bar{z}^{-m}$ de $\mathbb{C}^*$. L'élément $\pi_{n,m}$ de la série discrète lui correspondant est de caractère central $z \longmapsto z^{1-n-m}$, et a même opérateur de Casimir que la représentation holomorphe $\tau_{n,m}$ de $\mathbf{GL}_2$ de degré n-m et caractère central $z \longmapsto z^{n+m-1}$ [29: p. 388]. Les représentations réductibles sont d'image commutative et sont sommes de deux caractères ω_1, ω_2 de $\mathbb{R}^*$. La représentation $\omega_1 \oplus \omega_2$ correspond à la représentation de la série principale $\pi(\omega_1,\omega_2)$ (notation de [22: 5.11], cela inclut les représentations de dimension finie). Il y en trois de type A_{oo}, $\pi(1,\mathrm{sgn})$, $\pi(1,1)$, $\pi(\mathrm{sgn},\mathrm{sgn})$, correspondant aux classes de conjugaison $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, Id. et -Id., où sgn est le caractère $t \longmapsto \mathrm{sgn}\ t$ de $\mathbb{R}^*$.

(b) Supposons E ultramétrique et $n = 2$. Si la caractéristique résiduelle est impaire, il y a correspondance biunivoque; cela résulte de [22] et de la formule de Plancherel (voir [4: §3] pour une description de la correspondance et des références). Dans [22: §12], on associe, par voie globale, un élément $\pi(\sigma) \in \underline{A}(G_E)$ à une représentation admissible σ de degré 2 d'un groupe de Weil $W_{E'/E}$, modulo la conjecture d'Artin, ce qui n'est donc pas une restriction si E est de caractéristique non nulle. En s'appuyant notamment sur ce fait et des résultats de Drinfeld [12], Deligne a établi la bijectivité pour E de caractéristique non nulle quelconque.

(c) Dans [15], Gelfand et Kazdan associent à toute paire $\pi \in \underline{A}(\mathbf{GL}_n)$, $\pi' \in \underline{A}(\mathbf{GL}_{n-1})$, un nombre $\Gamma(\pi,\pi')$; ils conjecturent pour $j \geq 1$ l'existence d'une injection $\varkappa_j : \hat{W}_j(E) \longrightarrow \underline{A}(\mathbf{GL}_j)$, où $\hat{W}_j(E)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de représentations de degré j de groupes de Weil sur E, de manière à ce que l'on ait

$$\Gamma(\varkappa_n\,\sigma,\varkappa_{n-1}\tau) = L(\tfrac{1}{2},\sigma \otimes \tau^{\vee})\cdot\varepsilon(\tfrac{1}{2},\sigma \otimes \tau^{\vee})^{-1}\cdot L(\tfrac{1}{2},\sigma^{\vee} \otimes \tau)^{-1} , \tag{1}$$

quels que soient $\sigma \in \hat{W}_n(E)$, $\tau \in \hat{W}_{n-1}(E)$, où L et ε sont les fonctions de Langlands.

6.5 <u>Conjectures et résultats globaux</u>. (a) Soit F' une extension galoisienne finie de F et soit $\sigma : W_{F'/F} \longrightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ une représentation admissible. A l'aide de 6.1(3), on déduit de σ une représentation admissible σ_v d'un groupe de Weil local sur F_v $(v \in V)$, dont la classe ne dépend que de σ et v. On conjecture que la série d'Artin-Hecke $L(s,\sigma)$ est associée à un espace irréductible admissible de formes automorphes, ou plus précisément, admettant 6.3 résolu, que $\otimes_v \pi(\sigma_v)$ est automorphe. De plus, ces formes doivent être paraboliques si σ est irréductible non triviale.

Modulo la conjecture d'Artin, cela résulte de [22] si $n = 2$.

(b) Disons qu'une représentation admissible irréductible globale $\pi = \otimes_v \pi_v$ de $\underline{H}$ (5.1) est de type A_{oo} (resp. A_o) si π_v est de type A_{oo} (resp. A_o) pour v archimédienne (6.4(a)).

Si la représentation σ est en fait une représentation du groupe de Galois $G(E'/E)$, donc $L(s,\sigma)$ est une série d'Artin, alors l'hypothétique π sera de type A_{oo}. Réciproquement, on conjecture ou, disons plus prudemment on se demande, si tout π de type A_{oo} dans l'espace des formes paraboliques est associé à une série d'Artin. Si $n = 1$, cela résulte de la loi de réciprocité d'Artin. Si $n = 2$, $F = \mathbf{Q}$, et si π est associé à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (cf. 6.4(a)), cela est démontré par Deligne-Serre [10]. Ainsi [10] et [22] fournissent, modulo la conjecture d'Artin, une correspondance bijective canonique entre formes modulaires primitives paraboliques de poids un et représentations irréductibles de degré deux de $G(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ à déterminant impair. Le cas où π_∞ correspond à Id. ou -Id. (cf. 6.4) n'est pas encore traité cependant. Par ailleurs on sait, depuis Hecke, que les représentations réductibles correspondent aux séries d'Eisenstein.

(c) Les séries L associées à la cohomologie de variétés sur F, ou à des représentations ℓ-adiques de groupes de Galois ou de Weil, doivent de même conduire à des π paraboliques de type A_o, voire à tous. Pour $n = 1$, [46] donne quelques exemples, mais cette question a été étudiée surtout pour $n = 2$. On a déjà mentionné quelques cas en 4.4, 4.5. Supposons $F = \mathbf{Q}$. Si K_f est un sous-groupe compact ouvert de $G(A_f)$ suffisamment petit, alors $M_{K_f} = (K_\infty K_f)\backslash G_A/G_{\mathbf{Q}}$ est réunion d'un nombre fini de courbes modulaires lisses, quotients du demi-plan de Poincaré par un sous-groupe de congruence de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$. D'après Eichler-Shimura, [41], les fonctions zêta de telles courbes sont associées par 2.2 à des formes modulaires paraboliques. Cette relation est étudiée du point de vue représentations dans [29; 33]. Soient n, m, $\pi_{n,m}$ et $\sigma_{n,m}$ comme dans 6.4(a). Dans [29], Langlands associe à tout $\pi = \otimes_v \pi_v$ automorphe parabolique, tel que $\pi_\infty = \pi_{n,m}$, une représentation ℓ-adique σ de degré 2 de $G(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, par considération de la cohomologie ℓ-adique des courbes M_{K_f}, à coefficients dans un faisceau associé à la représentation $\sigma_{n,m}$; il conjecture que, pour tout $v \in V$, les facteurs L et ε de π_v sont ceux associés à σ et v. [29] le démontre pour les facteurs L et en partie pour les facteurs ε. Les cas restants ont été ensuite traités par Deligne, sauf pour $p = 2$

(lettre à Piateckiĭ-Šapiro). [33] est aussi consacré à cette question, dans le cas $n = 1$, $m = 0$, pour les p non ramifiés.

(d) Soient $n = 2$, $F = \mathbf{Q}$, et supposons que π provienne d'une forme modulaire parabolique sur $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$. La conjecture de Ramanujan-Petersson équivaut à demander que les valeurs propres des g_p soient de module 1, [13; 27; 36]. Une généralisation de cette condition est donc que les classes g_p rencontrent $\mathbf{U}_n$. Vu [27], cela aura lieu si $L(s,\pi,r)$ est holomorphe pour $Rs > 1$ quelle que soit r. Si de plus $L(s,\pi,r)$ est holomorphe pour $Rs \geq 1$ et r irréductible non triviale, alors les g_v sont équidistribués pour la mesure de Haar normalisée de $\mathbf{U}_n$ [37: I, A.2].

§7. Le L-groupe d'un groupe réductif. Généralisation de 2.4

7.1 Le L-groupe d'un groupe réductif. Soient E un corps et G un E-groupe connexe réductif quasi-déployé. Soient B un sous-groupe résoluble connexe maximal de G défini sur E et T un tore maximal de B défini sur E. Soient $X^*(T) = \mathrm{Morph}(T,\mathbf{GL}_1)$ le groupe des caractères rationnels de T et $X_*(T) = \mathrm{Morph}(\mathbf{GL}_1,T)$ celui des sous-tores de dimension ≤ 1 de T. Ces deux derniers groupes sont commutatifs libres, de rang égal à $\dim T$, en dualité naturelle. Soient encore $\Phi = \Phi(T,G)$ le système des racines de G par rapport à T, Δ la base de Φ définie par B et $\Phi^\vee \subset X_*(T)$ l'ensemble des coracines. On a donc une bijection canonique $\alpha \longmapsto \alpha^\vee$ de Φ sur $\Phi^\vee$ telle que $\langle \alpha,\alpha^\vee \rangle = 2$ et $\langle \alpha,\beta^\vee \rangle$ soit un entier (de Cartan). Il existe un groupe réductif complexe, déterminé à isomorphisme près, ayant un tore maximal $T^\vee$, un sous-groupe résoluble maximal $B^\vee$ contenant $T^\vee$ par rapport auxquels $X_*(T)$, $\Phi^\vee$, $\Delta^\vee$ jouent les rôles de $X^*(T)$, Φ, Δ. On le notera ${}^LG^o$.

Soit E' une extension galoisienne finie de E sur laquelle G et T sont déployés. Alors $G(E'/E)$ opère sur les données précédentes et on en déduit une représentation de $G(E'/E)$ comme groupe d'automorphismes de ${}^LG^o$ préservant un épinglage dont $T^\vee$ et $B^\vee$ font partie. On peut donc former le produit semi-direct (direct si G est déployé sur E, auquel cas T l'est aussi)

(1) $\quad {}^LG = {}^LG^o \rtimes G(E'/E)$.

C'est une première forme, dite "galoisienne," du L-groupe de G, notée $\hat{G}^{\bullet}_{E'/E}$ dans [27], ${}^cG$ dans [25], $G^{\wedge}$ dans [30], (et appelée groupe associé). Si G_1 est aussi quasi-déployé sur F et est une forme intérieure de G (i.e. correspond à un élément de $H^1(G(E_s/E),\mathrm{Ad}\ G))$, alors ${}^LG$ et ${}^LG_1$ sont isomorphes [27; 30]. Enfin, si G n'est pas quasi-déployé, il existe un groupe G' quasi-déployé sur F dont G est une forme intérieure. On pose alors ${}^LG = {}^LG'$ par définition. Il y a un certain nombre de vérifications à faire pour s'assurer que cette définition est suffisamment canonique, pour lesquelles on renvoie à [27; 30].

Si $G = \mathbf{GL}_n$, alors ${}^LG^o = \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$. Si $G = \mathbf{SL}_n$ (resp. $\mathbf{Sp}_{2n}$) alors ${}^LG^o = \mathbf{PSL}_n(\mathbf{C})$ (resp. $\mathbf{SO}_{2n+1}(\mathbf{C})$).

7.2 Supposons E local ou global. Comme $W_{E'/E}$ s'envoie sur $G(E'/E)$, on peut aussi former le produit semi-direct (toujours direct si G est déployé) ${}^LG^o \rtimes W_{E'/E}$. C'est la "forme de Weil" du L-groupe [30], qui sera aussi notée ${}^LG$. Il y a donc une forme galoisienne et une forme de Weil, et on utilise l'une ou l'autre suivant les besoins du contexte. On se permet aussi d'agrandir E' à volonté. Le lecteur que cette dernière indétermination gêne peut toujours passer à la limite et remplacer $W_{E'/E}$ par un groupe de Weil absolu [8]. Suivant la littérature, ${}^LG^o$ est complexe, mais rien n'empêche de considérer ses points dans d'autres corps, en particulier, il devient utile de considérer ${}^LG^o(\mathbf{Q}_\ell)$.

Si $E = F$ est global, $v \in V_F$ et v' prolonge v, le groupe associé à $G \times F_v$ est ${}^LG^o \rtimes W_{F'_{v'}/F_v}$ ou ${}^LG^o_v \rtimes G(F'_{v'}/F_v)$. Il sera noté ${}^LG_v$.

7.3 Dorénavant, G est un F-groupe connexe réductif réalisé linéairement et F' une extension galoisienne finie de F sur laquelle G est déployé. Pour presque tout v, le groupe $G \times F_v$ est quasi-déployé sur F_v et $G(O_v)$ est un sous-groupe compact maximal spécial de G_v . Modulo Bruhat-Tits, cela implique que l'algèbre de Hecke $H_{o,v} = H(G_v, G(O_v))$ est commutative et justiciable de [35]. Supposons encore v non ramifiée dans F' et soit $\varphi_v \in G(F'_{v'}/F_v)$ le Frobenius. Alors [35] fournit <u>une bijection canonique entre caractères de</u> $H_{o,v}$ <u>et classes de conjugaison, par rapport à</u> ${}^LG^o$, <u>d'éléments de la forme</u> $(g,\varphi_v) \in {}^LG$ <u>avec</u> g <u>semi-simple</u> (cf. [27]).

Cela étant, si l'on se donne de plus une représentation r holomorphe de dimension finie de ${}^LG^o$, on peut répéter <u>verbatim</u> la construction de 2.4, ou son analogue en termes de représentations. Par exemple, si $(\pi,M) = \otimes_v (\pi_v, M_v)$ est automorphe, alors, pour presque tout v, l'espace des vecteurs fixes de $G(O_v)$ dans M_v est de dimension un, définit un caractère χ_v de $H_{o,v}$, d'où une classe $(g_v, \varphi_v) \in {}^LG$, et l'on peut former le produit

$$(1) \qquad L(s,\pi,r) = \prod_v L(s,\pi_v,r), \qquad \text{avec} \qquad L(s,\pi_v,r) = (\det(1-r(g_v)\cdot Nv^{-s}))^{-1} .$$

Il converge pour Rs assez grand [27].

7.4 <u>Sous-groupes paraboliques de</u> ${}^LG$. Par définition [30], ce sont les normalisateurs dans ${}^LG$ des sous-groupes paraboliques de ${}^LG^o$, qui de plus rencontrent toute classe de ${}^LG$ modulo ${}^LG^o$. Un sous-groupe de Levi M d'un sous-groupe parabolique P est, par définition, un sous-groupe fermé contenant un sous-groupe de Levi au sens usuel de $P \cap {}^LG^o$ et tel que P soit produit semi-direct de M et du radical unipotent de $P \cap {}^LG^o$. L'ensemble $\underline{p}({}^LG)$ des classes de conjugaison par rapport à ${}^LG^o$ de tels sous-groupes est en correspondance bijective naturelle avec l'ensemble des parties de $\Delta^\vee$ qui sont stables par $G(E'/E)$. Si G est quasi-déployé la bijection $\Delta \longmapsto \Delta^\vee$ établit donc une bijection entre $\underline{p}({}^LG)$ et l'ensemble $\underline{p}(G)$ des classes de conjugaison de F-sous-groupes paraboliques de G.

Si G n'est pas quasi-déployé, il y a encore une injection canonique $\underline{p}(G) \longrightarrow \underline{p}({}^LG)$ dont l'image sera notée ${}^L\underline{p}({}^LG)$. Si G est anisotrope, cette image se réduit à $\{{}^LG\}$.

§8. Problèmes et résultats

Nous passons aux problèmes posés par [27], à cela près que nous tenons compte de la formulation plus récente et plus précise du problème local à l'aide de groupes de Weil.

8.1 Le problème local. Soient E un corps local, G un E-groupe connexe réductif et E' une extension galoisienne finie de E sur laquelle G est déployé. On a la suite exacte

$$(1) \qquad 1 \longrightarrow {}^LG^o \longrightarrow {}^LG \xrightarrow{\nu} G(E'/E) \longrightarrow 1 .$$

On considère des homomorphismes continus $\varphi : W_{E'/E} \longrightarrow {}^LG$ ou aussi, si E est ultramétrique, des paires (φ, X), où X est un élément nilpotent de l'algèbre de Lie de ${}^LG^o$, et φ, X satisfont à 6.3(1). L'homomorphisme φ, ou la paire (φ,X), est admissible si les conditions suivantes sont satisfaites:

(i) l'image de φ est formée d'éléments semi-simples;

(ii) $\nu \circ \varphi$ est la projection canonique;

(iii) si un sous-groupe parabolique propre P de ${}^LG$ (7.4) possède un sous-groupe de Levi M tel que $\mathrm{Im}\,\varphi \subset M$ et que X soit dans l'algèbre de Lie de $M \cap {}^LG^o$, alors $P \in {}^L\underline{P}({}^LG)$ (cf. 7.4).

On note $\Phi(G/E)$ l'ensemble des classes d'équivalence de φ (resp. (φ,X)) admissibles modulo automorphismes intérieurs par éléments de ${}^LG^o$ et passage à des extensions plus grandes. On peut aussi considérer la forme de Weil de ${}^LG$, i.e. remplacer $G(E'/E)$ par $W_{E'/E}$ dans (1). A ce moment, φ sera un scindage de (1), admissible s'il satisfait à (i), (iii), et $\Phi(G/E)$ sera l'ensemble des classes d'équivalence de scindages admissibles [30].

Le problème est alors de définir une partition de $\underline{A}(G_E)$ en parties finies non vides Π_σ ou $\Pi_{(\sigma,X)}$ indexées par $\Phi(G/E)$, satisfaisant à un certain nombre de conditions données *a priori*, en particulier:

les éléments de $\Pi_{(\sigma,X)}$ ou Π_σ sont simultanément de carré intégrable modulo le centre ou non; ils le sont si et seulement si il n'existe pas de sous-groupe de Levi M d'un sous-groupe parabolique propre $P \in {}^L\underline{P}({}^LG)$ qui contienne l'image de σ et tel que l'algèbre de Lie de $M \cap {}^LG^o$ contienne X (7.4).

Il s'ensuit par exemple que, si G est anisotrope et si G' est une forme intérieure quasi-déployée de G, alors $\Phi(G/E)$ s'identifie à la partie de $\Phi(G'/E)$ qui doit définir une partition de la série discrète de $G'(E)$.

On exige également l'analogue de 6.3(b), et des compatibilités avec l'induction de représentations. Contrairement à ce qui se passe, ou est conjecturé, pour $\mathbf{GL}_n$, on ne peut espérer ici que les Π_σ ou $\Pi_{(\sigma,X)}$ soient réduits à un élément. Par exemple, des éléments de la série discrète ayant même caractère infinitésimal sont dans le même paquet. Les éléments d'un tel ensemble sont dits L-indiscernables.

Si $E = \mathbf{R}, \mathbf{C}$, ce problème est résolu dans [30]. Si $E = \mathbf{C}$, les Π_σ sont réduits à un élément. Si G est un tore, alors ${}^LG^o$ est le tore dual, X est automatiquement nul, et il y a une bijection canonique entre $\underline{A}(G)$, i.e. les homomorphismes continus de $G(E)$ dans $\mathbf{C}^*$, et les représentations admises de $W_{E'/E}$ dans ${}^LG$ [26]. Si E est ultramétrique on n'a à part cela de résultats que pour $\mathbf{GL}_2$ (6.4). Il y a tout de même des signes encourageants. Par exemple, les résultats annoncés par Lusztig sur la conjecture de Macdonald (C.R. 280 (1975), 317-320) et démontrés dans un article de Deligne et Lusztig à paraître aux Annals of Mathematics fournissent, par induction, des représentations supercuspidales (étudiées par P. Gérardin) que Langlands veut associer à des σ modérément ramifiés.

8.2 Prolongement analytique. Equation fonctionnelle. On se place dorénavant sous les hypothèses de 7.3. On demande tout d'abord si la série L de 7.3(1) admet un prolongement analytique méromorphe. [25] donne un certain nombre de paires (G,r), où G est simple déployé, pour lesquelles cela est vrai pour tout $\pi = \otimes_v \pi_v$ automorphe parabolique dont les facteurs locaux π_v appartiennent presque tous à la série principale (voir aussi [16]). La méthode consiste à envisager G, ou un groupe isogène, comme un sous-groupe semi-simple maximal d'un sous-groupe parabolique propre maximal d'un sous-groupe semi-simple déployé

G' et à se ramener aux résultats de [24] (voir aussi [19]) sur le prolongement analytique et équations fonctionnelles des séries d'Eisenstein de G'.

Si l'on admet 8.1 résolu pour G/F_v $(v \in V)$, le problème plus précis est le suivant: soit $\pi = \otimes_v \pi_v$ une représentation automorphe (5.1). A π_v est associé $\varphi_v \in \Phi(G/F_v)$ donc des facteurs $L(s, r\circ\varphi_v)$ et $\varepsilon(s, r\circ\varphi_v, \psi_v)$ d'après 6.2. On demande alors si les produits globaux correspondants admettent un prolongement analytique méromorphe à nombre fini de pôles et satisfont à une équation fonctionnelle comme en 5.2(1).

Si $G = \mathbf{GL}_2 \times \mathbf{GL}_2$ et si π, π' sont automorphes paraboliques pour $\mathbf{GL}_2$ cela est démontré pour $\pi \times \pi'$ dans [20]. A l'origine de ce résultat est le fait que si $\Sigma\, a_n\, n^{-s}$ et $\Sigma\, b_n\, n^{-s}$ sont associées à des formes modulaires paraboliques (cf. 1.5, 2.2) alors $\Sigma\, a_n\, b_n\, n^{-s}$ admet un prolongement analytique avec équation fonctionnelle [34].

8.3 Surjectivité. Soient H un F-groupe réductif connexe et F'' une extension galoisienne finie de E' sur laquelle H est déployé. Soit $\alpha : {}^LH \longrightarrow {}^LG$ un homomorphisme continu, holomorphe sur ${}^LH^o$, tel que le diagramme

$$(1)\qquad \begin{array}{ccc} {}^LH & \longrightarrow & G(F''/F) \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ {}^LG & \longrightarrow & G(F'/F) \end{array}$$

soit commutatif, β étant l'homomorphisme canonique. Par restriction, on en déduit pour $v'' \in V_{F''}$ prolongeant $v' \in V_{F'}$, un diagramme commutatif

$$(2)\qquad \begin{array}{ccc} {}^LH_v & \longrightarrow & G(F''_{v''}/F_v) \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha_v} & & \downarrow{\scriptstyle\beta_v} \\ {}^LG_v & \longrightarrow & G(F'_{v'}/F_v) \end{array} .$$

Soit $\pi' = \otimes_v \pi'_v$ une représentation automorphe pour H. Pour presque tout v, il lui est associé une classe (h_v, Fr_v), avec h_v semi-simple dans ${}^LH^o$ (7.3). On demande alors si $\{\alpha_v(h_v, Fr_v)\}$ est associé de la même manière à une représentation automorphe sur G [27: Question 3].

On peut de nouveau préciser si l'on admet 8.1. A π'_v est associé un élément φ_v (ou (φ_v, X_v) si v est ultramétrique) de $\Phi(H/F_v)$. Supposons que $\alpha_v \circ \varphi_v$ (ou $(\alpha_v \circ \varphi_v, \alpha_v(X_v))$ soit dans $\Phi(G/F_v)$ (la condition (iii) de 8.1 empêche de dire que c'est automatique). On demande alors si l'on peut choisir $\pi_v \in \underline{A}_v$ assigné à l'élément donné de $\Phi(G/F_v)$ de manière à ce que $\pi = \otimes_v \pi_v$ soit automorphe pour G.

Ce problème qui maintenant englobe celui de comparaison (cf. 8.6) apparait en somme comme le problème de base de la théorie globale.

8.4 Exemples. (a) Supposons $H = \{e\}$. On a déjà remarqué que si $G = \mathbf{GL}_1$, une réponse positive à cette question est fournie par la loi de réciprocité d'Artin, (4.1) et que si $G = \mathbf{GL}_n$, elle donnerait une "loi de réciprocité non abélienne."

(b) Si $H = \{e\}$ et G est un tore, la réponse est aussi affirmative, grâce à la dualité de Tate-Nakayama [26]. En fait, les représentations automorphes sont ici les caractères de G_A/G_F et [26] fournit une surjection canonique, de noyau fini, du groupe des représentations admises de $W_{F'/F}$ (F' extension galoisienne finie de F) dans ${}^LG$ sur le groupe des caractères de G_A/G_F.

(c) Si H est un sous-groupe de Levi d'un F-sous-groupe parabolique propre de G, alors ${}^LH$ est un sous-groupe de Levi (cf. 8.1) d'un sous-groupe parabolique de ${}^LG$ appartenant à ${}^L\underline{p}({}^LG)$ (7.4, 8.1), et la théorie des séries d'Eisenstein [24] conduit aussi à des exemples.

(d) Soit E une extension quadratique séparable de F et soient $H = R_{E/F}\mathbf{GL}_1$, $G = \mathbf{GL}_2$. Alors H s'identifie à un F-tore maximal de G. On a

$$
{}^LH = (\mathbf{GL}_1 \times \mathbf{GL}_1) \rtimes G(E/F) ,
$$

l'élément non trivial de $G(E/F)$ permutant les deux facteurs $\mathbf{GL}_1$. Soit μ_1 un isomorphisme de ${}^LH$ sur le normalisateur d'un tore maximal de ${}^LG^o = \mathbf{GL}_2(\mathbf{C})$. L'homomorphisme

$$
\mu : {}^LH \longrightarrow {}^LG = \mathbf{GL}_2(\mathbf{C}) \times G(E/F) ,
$$

est alors défini par $\mu(h) = (\mu_1(h), \mu_2(h))$ où $\mu_2 : {}^L H \longrightarrow G(E/F)$ est la projection canonique. Une forme automorphe pour H est un Grössencharakter χ de E. On demande donc de lui associer une forme automorphe sur $\mathbf{GL}_2$ dont la série L est la série L de Hecke de χ. Si $F = \mathbf{Q}$ et E est imaginaire quadratique, Hecke a ainsi obtenu des formes modulaires paraboliques. Du point de vue représentations, on obtient des représentations automorphes paraboliques $\pi = \otimes_p \pi_p$ pour lesquelles π_∞ appartient à la série discrète. Si $F = \mathbf{Q}$ mais par contre E est réel quadratique, alors la série L a deux facteurs Γ et l'hypothétique π_∞ doit appartenir à la série principale. Du point de vue formes automorphes, les premiers exemples sont dûs à H. Maass, qui a ainsi construit des formes paraboliques non-holomorphes sur le demi-plan de Poincaré, et a jeté les bases de la théorie des formes automorphes non-holomorphes précisément à cette occasion (Math. Annalen 121 (1949), 121-143). Cela a été généralisé dans [22; 39] (voir aussi [13]).

On peut de même partir d'une extension galoisienne E de degré n et d'un Grössencharakter χ de E. On est alors amené à chercher s'il existe une représentation ou forme automorphe sur $\mathbf{GL}_n$ dont la série L est celle de χ. Le résultat de Piateckiĭ-Šapiro mentionné en 5.6 devrait entraîner que c'est bien le cas pour $n = 3$ et ainsi permettre (enfin) d'exhiber des formes paraboliques pour $\mathbf{GL}_3$.

(e) Supposons que G soit le groupe multiplicatif d'une algèbre de quaternions D sur F. Une extension quadratique E de F contenue dans D définit un F-tore maximal H de G. Les formes automorphes de H sont les Grössencharaktere de E. On est donc conduit à vouloir leur associer des formes automorphes sur G, à série L prescrite, ce qui est fait dans [39] (voir aussi [13]), pour des Grössencharaktere convenables.

(f) Soit F' une extension quadratique séparable de F. Prenons $H = \mathbf{GL}_2$ et $G = R_{F'/F}H$. Le groupe $G(F)$ (resp. $G(A_F)$) s'identifie donc canoniquement à $H(F')$ (resp. $H(A_{F'})$). La forme galoisienne la plus simple de ${}^L G$ est

$$^LG = (\mathbf{GL}_2(\mathbf{C}) \times \mathbf{GL}_2(\mathbf{C})) \rtimes G(F'/F) \ ,$$

l'élément non trivial de $G(F'/F)$ échangeant les deux facteurs $\mathbf{GL}_2(\mathbf{C})$. Soit

$$\mu : {}^LH = \mathbf{GL}_2(\mathbf{C}) \times G(F'/F) \longrightarrow {}^LG \ ,$$

l'homomorphisme qui applique $\mathbf{GL}_2(\mathbf{C})$ sur la diagonale de ${}^LG^o$ et est l'identité sur $G(F'/F)$. Le problème est donc ici d'associer à une forme ou représentation automorphe de $\mathbf{GL}_{2,A_F}$ une forme ou représentation automorphe de $\mathbf{GL}_{2,A_{F'}}$. Cela a été fait dans certains cas par Doi-Naganuma [11] et H. Jacquet [20: Thm 20.6].

8.5 <u>Fonctions zêta de variétés de Shimura</u>. Supposons que le quotient G_∞/K_∞ soit un domaine borné symétrique; soient K_f un sous-groupe compact ouvert de $G(A_f)$ et $K = K_\infty K_f$. Le quotient $K\backslash G_A/G_F$ admet alors une structure de variété quasi-projective. Dans beaucoup de cas, où ce quotient paramètre certaines familles de variétés abéliennes, Shimura en a donné un corps de définition naturel; [6] énonce une conjecture générale "de Shimura" sur ce corps. En prenant K_f suffisamment petit, on peut toujours faire en sorte que cette variété soit lisse. Suivant une voie inaugurée par Eichler, Shimura et Shimura-Kuga ont dans certains cas construit une forme automorphe parabolique dont la série L associée est essentiellement la fonction zêta de Hasse-Weil (le produit alterné des $L_m(s,Z)$ de 3.2(2)), (cf. [2]). Dans un certain nombre de cas où le quotient est compact, Langlands a un procédé conjectural pour décrire cette fonction, ou la série L associée à la cohomologie à coefficients dans un faisceau défini à partir d'une représentation de G , à l'aide de séries L de représentations automorphes, et a démontré l'égalité en question pour certains d'entre eux, en particulier lorsque G est le groupe multiplicatif d'une algèbre de quaternions sur un corps totalement réel non ramifiée à l'infini (non publié, cf. [31] pour quelques indications sur ce problème).

8.6 <u>Comparaison</u> (<u>locale et globale</u>). Ce problème, qui était distinct de la surjectivité dans le cadre du §4, en est maintenant en fait un cas particulier, celui où H est <u>une forme intérieure</u> de G .

(a) Supposons H et G définis sur un corps local E , et G quasi-déployé. Alors ${}^LH = {}^LG$ et ${}^L\underline{p}({}^LH)$ s'identifie à une partie de ${}^L\underline{p}({}^LG)$. Il s'ensuit que $\Phi(H/E)$ s'identifie à une partie de $\Phi(G/E)$. Une solution positive à 8.1 entraîne donc l'existence d'une injection qui associe à tout paquet de représentations L-indiscernables de $\underline{A}(H)$ une partie L-indiscernable de $\underline{A}(G)$. Si E est archimédien, cela est contenu dans [30]. Si H est le groupe multiplicatif d'une algèbre de quaternions sur E , $G = \mathbf{GL}_2$, c'est un des résultats frappants de [22]. On a alors en fait une bijection entre éléments de $\underline{A}(H)$ et les éléments de la série discrète dans $\underline{A}(G)$ telle que les caractères de deux éléments prennent, au signe près, les "mêmes valeurs" sur les éléments elliptiques réguliers. D'autre part, les résultats de R. Howe sur les représentations du groupe multiplicatif d'une algèbre à division sur un corps local plaident en faveur d'une telle correspondance.

(b) Supposons maintenant H et G définis sur F . Alors ${}^LH_v$ est isomorphe à ${}^LG_v$ pour tout v et $H \times F_v$ est isomorphe à $G \times F_v$, et quasi-déployé sur F_v , pour presque tout v . Supposons de nouveau G quasi-déployé. On a donc $\Phi(H/F_v) \hookrightarrow \Phi(G/F_v)$ pour tout v et $\Phi(H/F_v) = \Phi(G/F_v)$ pour presque tout v . Le problème de surjectivité prend la forme suivante: supposons que $\pi' = \otimes_v \pi'_v$ soit automorphe pour H . Peut-on trouver $\pi_v \in \underline{A}(G_v)$ correspondant au même élément de $\Phi(G/F_v) \supset \Phi(H/F_v)$ que π'_v , et égal à π'_v pour presque tout v , de manière à ce que $\pi = \otimes_v \pi_v$ soit automorphe pour G ?

Supposons que H soit le groupe multiplicatif d'une algèbre de quaternions D sur F et que $G = \mathbf{GL}_2$. Une réponse positive est alors fournie par [22], (voir aussi [13]) et généralise des résultats antérieurs de Shimizu [40]. Plus précisément, soit S l'ensemble des places de F en lesquelles D est ramifiée. Alors [22] établit une bijection entre représentations automorphes de H de degré > 1 et les représentations automorphes paraboliques $\pi = \otimes_v \pi_v$ de G telles que π_v soit dans la série discrète quel que soit $v \in S$.

Remarquons enfin que comme $H \times F_v$ et $G \times F_v$ sont isomorphes pour presque tout v , on peut déjà poser un problème global dans le cadre de 7.3, indépendamment de 8.1, comme cela est fait dans [27]: à savoir si, pour r donné, les séries L de 7.3(1) associées aux représentations automorphes de H proviennent aussi de représentations automorphes de G.

[Texte revisé en septembre 1975.]

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. ARTIN and J. TATE - Class Field Theory, Benjamin, N.Y., 1967

[2] A. BOREL - Opérateurs de Hecke et Fonctions Zêta, Sém. Bourbaki, 18e année, 1965/66, Exp. 307, Benjamin, N.Y.

[3] W. CASSELMAN - On representations of $\mathbf{GL}_2$ and the arithmetic of modular curves, Modular Functions of One Variable II, Springer Lecture Notes 349 (1973), 107-142.

[4] P. DELIGNE - Formes modulaires et représentations ℓ-adiques, Sém. Bourbaki, 1968/69, Exp. 355, Springer Lecture Notes 179, 139-186.

[5] P. DELIGNE - Les Constantes des Equations Fonctionnelles, Sém. Delange-Pisot-Poitou, 11e année, 1969/70, n^o 19 bis.

[6] P. DELIGNE - Travaux de Shimura, Sém. Bourbaki, 1970/71, Exp. 389, Springer Lecture Notes 244, 123-165.

[7] P. DELIGNE - Formes modulaires et représentations de $\mathbf{GL}_2$, Modular Functions of One Variable, Springer Lecture Notes 349 (1973), 55-106.

[8] P. DELIGNE - Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L, ibid., 501-597.

[9] P. DELIGNE - La conjecture de Weil I, Publ. Math. I.H.E.S., vol. 43 (1974), 273-307.

[10] P. DELIGNE et J.-P. SERRE - Formes modulaires de poids 1, Annales E.N.S., (4), t. 7 (1974), 507-530.

[11] K. DOI and H. NAGANUMA - On the functional equation of certain Dirichlet series, Inv. Math. 9 (1969), 1-14.

[12] V. G. DRINFELD - Modules elliptiques, Math. Sbornik 94 (1974), 594-627.

[13] S. S. GELBART - Automorphic functions on adele groups, Annals of Math. Studies 83 (1975), Princeton University Press.

[14] I. M. GELFAND, M. I. GRAEV and I. I. PIATECKIĬ-ŠAPIRO - Representation theory and automorphic functions, Saunders, Philadelphia 1969.

[15] I. M. GELFAND and D. A. KAZDAN - Representations of the group $\mathbf{GL}(n,K)$ where K is a local field, Inst. for Applied Mathematics, Moscow 1971.

[16] R. GODEMENT - Fonctions automorphes et produits eulériens, Sém. Bourbaki, 1968/69, Exp. 349, Springer Lecture Notes 179, 37-53.

[17] R. GODEMENT - Notes on Jacquet-Langlands Theory, Institute for Advanced Study, Princeton, N. J., 1970.

[18] R. GODEMENT and H. JACQUET - Zeta-Functions of Simple Algebras, Springer Lecture Notes 260, 1972.

[19] HARISH-CHANDRA - Automorphic Forms on a Semi-Simple Group, Springer Lecture Notes 62, 1968.

[20] H. JACQUET - Automorphic Forms on GL(2), Part II, Springer Lecture Notes 278, 1972.

[21] H. JACQUET - Euler products and automorphic forms, Proc. I.C.M. Vancouver.

[22] H. JACQUET and R. P. LANGLANDS - Automorphic Forms on GL(2), Springer Lecture Notes 114, 1970.

[23] H. JACQUET and J. A. SHALIKA - Hecke theory for GL(3), Comp. Math. (to appear).

[24] R. P. LANGLANDS - On the functional equations satisfied by Eisenstein series, preprint, Yale University.

[25] R. P. LANGLANDS - Euler Products, Yale University Press, 1967.

[26] R. P. LANGLANDS - Representations of abelian algebraic groups, preprint, Yale University, 1968.

[27] R. P. LANGLANDS - Problems in the theory of automorphic forms, in Lectures in Modern Analysis and Applications, Springer Lecture Notes 170 (1970), 18-86.

[28] R. P. LANGLANDS - On Artin's L-functions, in Complex Analysis, Rice Univ. Studies 56 (1970), 23-28.

[29] R. P. LANGLANDS - Modular forms and ℓ-adic representations, in Modular Functions of One Variable II, Springer Lecture Notes 349 (1973), 361-500.

[30] R. P. LANGLANDS - On the classification of irreducible representations of real algebraic groups, preprint.

[31] R. P. LANGLANDS - Some contemporary problems with origins in the Jugendtraum, to appear.

[32] A. OGG - Modular Forms and Dirichlet Series, Benjamin Lecture Notes, N.Y., 1968.

[33] I. I. PIATECKIĬ-ŠAPIRO - Zeta-functions of modular curves, Modular Functions of One Variable II, Springer Lecture Notes 349, 1973, 317-360.

[34] R. A. RANKIN - Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions, I, II, Proc. Cambridge Phil. Soc. 35 (1936), 351-372.

[35] I. SATAKE - Theory of spherical functions on reductive algebraic groups, Publ. Math. I.H.E.S., 18 (1963), 5-69.

[36] I. SATAKE - Spherical functions and Ramanujan conjecture, in Proc. Symp. Pure Math., 9 (1966), 258-264, A.M.S., Providence, R. I.

[37] J.-P. SERRE - Abelian ℓ-Adic Representations, Benjamin Lecture Notes, 1968.

[38] J.-P. SERRE - Facteurs Locaux des Fonctions Zêta des Variétés Algébriques (Définitions et Conjectures), Sém. Delange-Pisot-Poitou, 11e année, 1969/70, Exp. 19.

[39] J. A. SHALIKA and S. TANAKA - On an explicit construction of a certain class of automorphic forms, Amer. J. Math., 91 (1969), 1049-1076.

[40] H. SHIMIZU - On zeta functions of quaternion algebras, Annals of Math., (2) 81 (1965), 166-193.

[41] G. SHIMURA - Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions, Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, 1971.

[42] G. SHIMURA - Modular forms of half-integral weight, in Modular Functions of One Variable I, Springer Lecture Notes 320 (1973), 57-74.

[43] G. SHIMURA - On the holomorphy of certain Dirichlet series, Proc. London Math. Soc. (3), 31 (1975), 79-98.

[44] J. TATE - Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-functions, in Algebraic Number Theory, Cassels and Fröhlich, ed., Thompson Book Co., 1967, pp. 305-347.

[45] A. WEIL - Sur la théorie du corps de classes, Jour. Math. Soc. Japan, 3 (1951), 1-35.

[46] A. WEIL - On a certain type of characters of the idèle-class group of an algebraic number field, Proc. Int. Colloq. on Alg. Number Theory, Tokyo-Nikko, 1955, 1-7.

[47] A. WEIL - Ueber die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, Math. Annalen 168 (1967), 149-167.

[48] A. WEIL - Basic Number Theory, Grundl. der Math. Wiss. 144, Springer, 1967.

[49] A. WEIL - Dirichlet Series and Automorphic Forms, Springer Lecture Notes 189, 1971.