FRANÇOIS COMBES

Les facteurs de von Neumann de type III

Séminaire N. Bourbaki, 1976, exp. nº 461, p. 124-137
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1974-1975__17__124_0>

Séminaire BOURBAKI 461-01
27e année, 1974/75, n° 461 Février 1975

LES FACTEURS DE VON NEUMANN DE TYPE III

[d'après A. CONNES]

par François COMBES

Introduction et rappels

Soit H un espace de Hilbert complexe. On appelle algèbre de von Neumann sur H, toute sous-algèbre involutive unifère M de $\mathcal{L}(H)$ égale à son bicommutant. J. Dixmier a montré que M est le dual d'un espace de Banach M_*, dit prédual de M, qui est unique à isomorphisme près. Dans tout cet exposé, c'est la topologie faible de dual $\sigma(M, M_*)$ que l'on considèrera sur M.

On appelle poids sur M^+ toute application φ de M^+ dans $[0, +\infty]$ qui est linéaire ($\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$; $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ en posant $0 . +\infty = 0$). Nous noterons $P(M)$ l'ensemble des poids sur M^+ qui sont s. c. i., semi-finis (la face des $x \in M^+$ tels que $\varphi(x) < +\infty$ est dense dans M^+) et fidèles ($\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$). Si $\varphi(xx^*) = \varphi(x^*x)$ pour tout $x \in M$, on dit que φ est une trace. Les poids s. c. i. finis (tels que $\varphi(x) < +\infty$ pour tout $x \in M^+$) sont les restrictions à M^+ des éléments de $(M_*)^+$.

Si M est commutative, il existe un espace mesuré (T, ψ) tel que M soit isomorphe à $L^\infty(T, \psi)$ [qui opère par multiplications sur $L^2(T, \psi)$ et dont le prédual est $L^1(T, \psi)$]. Si φ est une autre mesure σ-finie sur l'espace mesurable T, absolument continue par rapport à ψ, l'application $x \mapsto \int_T x(t)\, d\varphi(t)$ est un poids semi-fini et s. c. i. sur M^+. Il est fidèle si et seulement si φ est équivalente à ψ. Réciproquement, tout élément de $P(M)$ s'obtient ainsi.

A l'opposé du cas commutatif, M est un facteur si son centre $Z(M)$ se réduit aux scalaires. Les facteurs étaient classés par von Neumann de la manière suivante. Si M est isomorphe à $\mathcal{L}(K)$ pour un certain espace de Hilbert K, on dit qu'il est de type I ou discret. La trace canonique $tr : x \mapsto \sum_{i \in I} (xe_i | e_i)$, où $(e_i)_{i \in I}$ est une base orthonormale de K, est un poids qui joue un rôle important. Les facteurs qui ne sont pas de type I sont dits continus : si $P(M)$ contient une trace, M est alors de type II et si $P(M)$ n'en contient pas, M est de type III.

1. Equivalence extérieure pour certaines représentations de groupes

1.1 Notations. Dans cet exposé M est une algèbre involutive unifère sur $\mathbf{C}$. On notera :

$Z(M)$ le centre de M,

$I(M)$ le groupe des éléments unitaires de M (qui vérifient $u^*u = uu^* = 1$),

$\text{Aut}\, M$ le groupe des automorphismes involutifs de M,

$\text{Int}\, M$ le sous-groupe distingué des automorphismes intérieurs $\text{Ad}\, u : x \mapsto uxu^*$ définis par les éléments de $I(M)$ [Pour $\theta \in \text{Aut}\, M$, on a $\theta \circ (\text{Ad}\, u) \circ \theta^{-1} = \text{Ad}\, \theta(u)$.],

$\text{Out}\, M$ le groupe quotient $\text{Aut}\, M / \text{Int}\, M$,

ε l'homomorphisme canonique $\text{Aut}\, M \to \text{Out}\, M$.

Par ailleurs, nous considèrerons un groupe G et nous noterons

$\text{Act}(G,M)$ l'ensemble des représentations de G sur l'espace vectoriel M, à valeurs dans $\text{Aut}\, M$ (actions de G par automorphismes).

Soit $U \in \text{Act}(G,M)$. On notera M^U la sous-algèbre involutive des points de M fixes par U_t pour tout $t \in G$.

Enfin, pour tout entier $n \geq 2$, nous aurons à utiliser l'algèbre involutive F_n des matrices carrées complexes de type n, n équipée d'une unité matricielle (e_{ij}) [avec $e_{ij}^* = e_{ji}$ et $e_{ij} e_{k\ell} = \delta_{jk} e_{i\ell}$].

1.2 Remarque.- Soient $U, V \in \text{Act}(G,M)$. On a $\varepsilon \circ U = \varepsilon \circ V$ si et seulement si pour tout $t \in G$, on peut choisir $u_t \in I(M)$ tel que $V_t = \text{Ad}\, u_t \circ U_t$. Avec un tel choix de $u : t \mapsto u_t$, et du fait que U et V sont des homomorphismes de groupes $v_{t,s} = u_t\, U_t(u_s)\, u_{t+s}^{-1}$ est un unitaire de $Z(M)$ pour tous $t, s \in G$. Autrement dit, $t \mapsto u_t$ est un 1-cocycle modulo le groupe $I(Z(M))$, pour l'action de U sur $I(M)$. Notons que $(t,s) \mapsto v_{t,s}$ est un 2-cocycle de la cohomologie abélienne due à l'action de U sur $I(Z(M))$. Donc, si le groupe $H^2(G, I(Z(M)))$ est trivial, on aura $v = dw$ et $t \mapsto v_t w_t^{-1}$ sera exactement un 1-cocycle, d'où la notion suivante

1.3 DÉFINITION.- On dira que deux éléments U et V de $Act(G,M)$ sont <u>extérieurement équivalents</u>, et on écrira $U \sim V$ s'il existe un 1-cocycle u pour l'action de U dans $I(M)$ tel que $V_t = (\mathrm{Ad}\, u_t) \circ U_t$ pour tout $t \in G$, soit

(1) $\qquad V_t(x) = u_t\, U_t(x)\, u_t^*$ $\qquad$ pour tout $t \in G$ et tout $x \in M$.

On dira que le cocycle u relie U à V . Sur $Act(G,M)$ on obtient ainsi une relation d'équivalence. [1]

1.4 PROPOSITION.- <u>Soient</u> U^1 , $U^2 \in Act(G,M)$. <u>On a</u> $U_1 \sim U_2$ <u>si et seulement s'il existe</u> $W \in Act(G, M \otimes F_2)$ <u>tel que pour tous</u> $t \in G$ <u>et</u> $x \in M$

(2) $\qquad W_t(x \otimes e_{11}) = U_t^1(x) \otimes e_{11} \quad , \qquad W_t(x \otimes e_{22}) = U_t^2(x) \otimes e_{22}$.

<u>De plus, si cette condition est vérifiée, pour tout</u> $t \in G$, <u>il existe</u> $u_t \in I(M)$ <u>unique tel que</u> $W_t(I \otimes e_{21}) = u_t \otimes e_{21}$ <u>et</u> $u : t \mapsto u_t$ <u>est un 1-cocycle pour l'action de</u> U^1 <u>sur</u> $I(M)$, <u>qui relie</u> U^1 <u>à</u> U^2 .

Si $U^1 \sim U^2$, soit u un 1-cocycle pour U^1 qui relie U^1 à U^2 . Comme (e_{ij}) est une base de F_2 , tout $x \in M \otimes F_2$ a une écriture unique de la forme
$x = \sum_{i,j} x_{ij} \otimes e_{ij} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ où $x_{ij} \in M$. Posons

$W_t(x) = \begin{pmatrix} U_t^1(x_{11}) & U_t^1(x_{12})u_t^* \\ u_t\, U_t^1(x_{21}) & u_t\, U_t^1(x_{22})u_t^* \end{pmatrix}$. On vérifie facilement par le calcul que $W : t \mapsto W_t$ est élément de $Act(G, M \otimes F_2)$ et qu'il vérifie (2).

Réciproquement, soit $W \in Act(G, M \otimes F_2)$ vérifiant (2). Alors
$E_{11} = I \otimes e_{11} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{22} = I \otimes e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ sont fixes par $W(G)$.
Comme $E_{21} = I \otimes e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}$ vérifie les relations

$$E_{21}\, E_{12} = E_{22} \quad , \quad E_{12}\, E_{21} = E_{11} \quad , \quad E_{21}^* = E_{12}$$
$$E_{21}\, E_{11} = E_{12} \quad , \quad E_{22}\, E_{21} = E_{21} \quad ,$$

$a_t = W_t(E_{21})$ vérifie $a_t a_t^* = E_{22}$, $a_t^* a_t = E_{11}$, et a_t est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_t & 0 \end{pmatrix} = u_t \otimes e_{21}$ avec $u_t u_t^* = I = u_t^* u_t$. De plus, $u : t \mapsto u_t$ est un 1-cocycle pour U^1 car

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_{t+s} & 0 \end{pmatrix} = W_{t+s}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix} = W_t W_s \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix} = W_t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_s & 0 \end{pmatrix} =$$

$$W_t\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_t^1(u_s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_t U_t^1(u_s) & 0 \end{pmatrix} . \quad (^2)$$

1.5 Remarques.- a) La cohomologie à coefficients dans $I(M)$ associée ici à $U \in \mathrm{Act}(G,M)$ est non abélienne. Notons que u reliant U à V est un cobord $du_o : s \mapsto u_o^{-1} U_s(u_o)$ lorsque $V_s = (\mathrm{Ad}\, u_o^*) \circ U_s \circ (\mathrm{Ad}\, u_o)$, $\forall\, s \in G$.

b) Dans la suite, G et M seront topologiques. Bien que nous conservions la notation $\mathrm{Act}(G,M)$, nous ne considèrerons que les homomorphismes de G dans $\mathrm{Aut}\, M$ qui sont continus quand $\mathrm{Aut}\, M$ est muni de la topologie de la convergence simple sur M , et nous restreindrons la relation $U \sim V$ en supposant que U est relié à V par un cocycle continu. Les résultats du § 1 sont encore valables.

2. Dérivée de Radon-Nikodym et invariant $T(M)$

Soient M une algèbre de von Neumann et φ un poids sur M^+ , élément de $P(M)$. Soit $\mathfrak{N}_\varphi = \{x \in M ; \varphi(x^*x) < +\infty\}$. Alors $\mathfrak{A}_\varphi = \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*$ est une algèbre hilbertienne à gauche (si $M = L^\infty(T,\varphi)$, on a $\mathfrak{N}_\varphi = \mathfrak{A}_\varphi = L^\infty(T,\varphi) \cap L^2(T,\varphi)$; si $M = \mathcal{L}(H)$ et si φ est la trace canonique, on obtient l'algèbre des opérateurs de Hilbert-Schmidt).

La théorie de Tomita associe à $\mathfrak{A}_\varphi$, donc à φ , un élément σ^φ de $\mathrm{Act}(\mathbf{R}, M)$ appelé groupe modulaire de φ , caractérisé par la condition :

(K.M.S.) φ est invariant par σ^φ et pour tous $x , y \in \mathfrak{A}_\varphi$, il existe une fonction $F_{x,y}$ continue et bornée sur la bande $B = \{z \in \mathbf{C} ; 0 \leq \mathrm{Im}\, z \leq 1\}$, analytique à l'intérieur de B et telle que, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$F_{x,y}(t) = \varphi[\sigma_t^{\varphi}(x)y] \quad , \qquad F_{x,y}(t+i) = \varphi[y\,\sigma_t^{\varphi}(x)] \ .$$

2.1 Lemme.- Supposons que $\varphi \in P(M)$ soit fini sur M^+ et soit $x \in M$. Alors

$$\sigma_t^{\varphi}(x) = x \ , \ \forall\, t \in \mathbf{R} \ \Leftrightarrow \ \varphi(xy) = \varphi(yx) \ , \ \forall\, y \in M \ .$$

Si $\sigma_t^{\varphi}(x) = x$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, alors $F_{x,y}$ est constante sur $\mathbf{R}$, donc sur B , et on a $F(i) = F(0)$, soit $\varphi(xy) = \varphi(yx)$, $\forall\, y \in M$.

Réciproquement, si $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ pour tout $y \in M$, alors $F_{y,x}(t+i) = F_{y,x}(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ et $F_{y,x}$ se prolonge par périodicité en une fonction holomorphe et bornée sur $\mathbf{C}$. D'après le théorème de Liouville, elle est constante. On a donc $F_{y,x}(t) = F_{y,x}(0)$, soit $\varphi[\sigma_t^{\varphi}(y)x] = \varphi[y\,\sigma_{-t}^{\varphi}(x)] = \varphi(yx)$. En prenant $y = (\sigma_{-t}^{\varphi}(x) - x)^*$, la fidélité de φ donne $\sigma_{-t}^{\varphi}(x) = x$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

2.2 COROLLAIRE.- φ est une trace si et seulement si $\sigma_t^{\varphi} = I$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

(En effet, φ est une trace lorsque $\varphi(yx) = \varphi(xy)$ pour tous $x, y \in M$.)

Précisons que ce corollaire reste valable si $\varphi \in P(M)$ n'est pas fini.

2.3 Lemme.- Soient N une sous-algèbre involutive fermée de M et $\varphi \in P(M)$. Si $\varphi|N^+$ est semi-fini (élément de $P(N)$ donc) et si $\sigma_t^{\varphi}(N) = N$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, alors $t \mapsto \sigma_t^{\varphi}|N$ est le groupe modulaire de $\varphi|N^+$ sur N .

En effet, $t \mapsto \sigma_t^{\varphi}|N$ vérifie la condition (K.M.S.) sur N pour $\varphi|N^+$.

2.4 THÉORÈME.- Si φ décrit $P(M)$, alors σ^{φ} décrit toute une classe de conjugaison extérieure dans $\mathrm{Act}(\mathbf{R}, M)$. (Voir [1], lemme 1.2.2 et théorème 1.2.4.)

a) Montrons d'abord que $\sigma^{\varphi} \sim \sigma^{\psi}$ pour tout couple φ, ψ d'éléments de $P(M)$. Pour simplifier légèrement, supposons φ et ψ finis. D'après 1.4, il suffit de construire $W \in \mathrm{Act}(\mathbf{R}, M \otimes F_2)$ telle que pour $x \in M$ et $t \in \mathbf{R}$

(3) $\qquad W_t(x \otimes e_{11}) = \sigma_t^{\varphi}(x) \otimes e_{11} \quad , \quad W_t(x \otimes e_{22}) = \sigma_t^{\psi}(x) \otimes e_{22}$.

Soit $x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \Sigma\, x_{ij} \otimes e_{ij} \in M \otimes F_2$ positif. On a $x_{11} \geq 0$,

$x_{22} \geq 0$, donc $x \mapsto \theta(x) = \varphi(x_{11}) + \psi(x_{22})$ est un élément de $P(M \otimes F_2)$.
Avec $E_{11} = I \otimes e_{11}$, on a

$$E_{11}\, x = x_{11} \otimes e_{11} + x_{12} \otimes e_{12} \quad , \quad x\, E_{11} = x_{11} \otimes e_{11} + x_{21} \otimes e_{21}$$

d'où $\theta(E_{11}\, x) = \varphi(x_{11}) = \theta(x\, E_{11})$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, le lemme 2.1 donne $\sigma_t^{\theta}(E_{11}) = E_{11}$, et de même $\sigma_t^{\theta}(E_{22}) = E_{22}$. Le lemme 2.3 montre que (3) est vérifié avec $W = \sigma^{\theta}$.

b) La surjectivité de $\varphi \mapsto \sigma^{\varphi}$ est plus difficile à établir. Donnons une idée de la démonstration. Soient $U \in \mathrm{Act}(\mathbf{R}, M)$ et $\varphi \in P(M)$ tels que $U \sim \sigma^{\varphi}$ et soit u un 1-cocycle pour σ^{φ} tel que

$$U_t(x) = u_t\, \sigma_t^{\varphi}(x) u_t^* \qquad \text{pour } x \in M \text{ et } t \in \mathbf{R} .$$

Sur $K = L^2(\mathbf{R})$, le groupe à un paramètre des translations a un générateur infinitésimal h auto-adjoint non borné (dérivation des fonctions). Sur $B = \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}))$, le poids $\omega : x \mapsto \mathrm{tr}[(\exp h)x]$ est élément de $P(B)$. Posons $\bar{\omega} = \varphi \otimes \omega$ sur $M \otimes B$. Sur l'espace hilbertien $\mathbf{H} \otimes L^2(\mathbf{R}) \simeq L^2_{\mathbf{H}}(\mathbf{R})$ de $M \otimes B$ l'opérateur de multiplication par $u : t \mapsto u_t$ est un unitaire v et $t \mapsto u_t \otimes I$ est le 1-cobord $t \mapsto v\, \sigma_t^{\bar{\omega}}(v^*)$. Considérons alors le poids $\psi_0 : x \mapsto \bar{\omega}(v^* x\, v)$. Pour une "restriction" convenable $\psi : x \mapsto \psi_0(x \otimes a)$ de ψ_0 à M^+ , on obtient $\sigma^{\psi} \sim \sigma^{\varphi}$ avec σ^{φ} relié à σ^{ψ} par u , d'où $\sigma^{\psi} = U$.

2.5 DÉFINITIONS.- Le cocycle u tel que $\sigma_t^{\theta}(I \otimes e_{21}) = u_t \otimes e_{21}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, canoniquement défini par φ et ψ et reliant σ^{φ} à σ^{ψ} (voir 1.4) est appelé la <u>dérivée de Radon-Nikodym</u> de ψ par rapport à φ et se note $(D\psi : D\varphi)$.

Quand φ décrit $P(M)$, la classe d'équivalence extérieure $\mathrm{Mod}\, M$ décrite par σ^{φ} dans $\mathrm{Act}(\mathbf{R}, M)$ est canoniquement attachée à M . Si α est un isomorphisme de M sur N , il transporte $P(M)$ sur $P(N)$ et $\mathrm{Mod}\, M$ sur $\mathrm{Mod}\, N$ car

$$(4) \qquad \sigma_t^{\varphi \circ \alpha^{-1}} = \alpha \circ \sigma_t^{\varphi} \circ \alpha^{-1} , \quad \forall\, t \in \mathbf{R} .$$

Le noyau $T(M)$ de l'homomorphisme $\delta_M = \varepsilon \circ \sigma^{\varphi}$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathrm{Out}\, M$ défini par cette classe, est donc un sous-groupe de $\mathbf{R}$, invariant algébrique de M .

2.6 Quelques propriétés de la dérivée de Radon-Nikodym, de δ_M et $T(M)$

1) $\sigma^\varphi = \sigma^\psi \Leftrightarrow \psi = \varphi(h\cdot)$ avec h auto-adjoint positif affilié à $Z(M)$. ([3])

2) En particulier, si $M = L^\infty(T,\varphi)$, soit $\psi \in P(M)$ une mesure équivalente à φ et soit $h = \frac{d\psi}{d\varphi}$ la dérivée de Radon-Nikodym usuelle. Alors $(D\psi : D\varphi)_t = h^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3) $(D\varphi : D\psi)_t = (D\psi : D\varphi)_t^{-1}$ (cf. démonstration du théorème 2.4).

4) Si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in P(M)$ alors $(D\varphi_3 : D\varphi_1)_t = (D\varphi_3 : D\varphi_2)_t (D\varphi_2 : D\varphi_1)_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (sur $M \otimes F_3$, considérer $\theta(x) = \Sigma\, \varphi_i(x_{ii})$).

5) $\delta_M = \varepsilon \circ \sigma^\varphi$ prend ses valeurs dans le centre de Out M (d'après (4)).

6) Si $P(M)$ contient une trace φ (M de type I ou II), on a $\sigma_t^\varphi = I$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (corollaire 2.2), d'où $\delta_M(t) = I$. L'invariant $T(M) = \mathbb{R}$ est peu intéressant.

7) Réciproquement, supposons $\delta_M \equiv I$ (soit $T(M) = \mathbb{R}$) et soit $\psi \in P(M)$. Supposons que M opère sur un espace hilbertien séparable H. Un théorème de Kallmann (basé sur un théorème de sections boréliennes de J. Dixmier) donne un groupe à un paramètre continu $u : t \mapsto u_t = h^{it}$ d'unitaires de M tels que $\sigma_t^\psi(x) = u_t x u_t^*$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in M$. Alors $\varphi = \psi(h^{-1}\cdot)$ est une trace (car $\sigma^\varphi \equiv I$). Donc si H est séparable

$$\delta_M \equiv I \Leftrightarrow T(M) = \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{type}(M) = \text{I ou II} .$$

En particulier, si M est de type III, le centre de Out M est non trivial.

8) $T(M \otimes N) = T(M) \cap T(N)$. En effet, si $\varphi \in P(M)$ et $\psi \in P(N)$, alors $\sigma_t^{\varphi\otimes\psi} = \sigma_t^\varphi \otimes \sigma_t^\psi$ est intérieur si et seulement si σ_t^φ et σ_t^ψ le sont.

2.7 Calcul de $T(M)$ pour les facteurs d'Araki-Woods et de Powers

a) Soit (n_k) une suite d'entiers ≥ 2. Pour tout k, soit $a_k \in F_{n_k}$ positif dont les valeurs propres $\lambda_{k,1}, \ldots, \lambda_{k,n_k}$ ont pour somme 1. Pour $x \in F_{n_k}$, posons $\varphi_k(x) = \mathrm{tr}(x a_k)$ et soit $M = \bigotimes_{k=0}^{\infty} (F_{n_k}, \varphi_k)$.

b) En particulier, pour tout $\lambda > 0$, notons R_λ le facteur obtenu en prenant $n_k = 2$ et $\lambda_{k,1} = (1+\lambda)^{-1}$, $\lambda_{k,2} = \lambda(1+\lambda)^{-1}$ pour tout k.

THÉORÈME.- Soit M le facteur d'Araki-Woods décrit en a). Alors

(i) $\quad T_0 \in T(M) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \left|\sum_{p=1}^{n_k} \lambda_{k,p}^{1+iT_0}\right|\right) < +\infty$.

(ii) L'invariant $\rho(M) = \{\lambda \,;\, M \otimes R_\lambda \simeq R_\lambda\}$ d'Araki-Woods est image de $T(M)$ par l'application $T \mapsto \exp(-2\pi/T)$.

On retrouve donc la classification donnée par $\rho(M)$. En particulier, on a $T(R_\lambda) = \mathbb{Z}a$ avec $a = 2\pi/\mathrm{Log}\,\lambda$. Donc pour $\lambda \in]0,1[$, les facteurs R_λ sont non isomorphes (et de type III puisque $T(M) \neq \mathbb{R}$).

COROLLAIRE.- Soit $U(G_2)$ le facteur engendré par la représentation régulière gauche du groupe libre à deux générateurs G_2. Les facteurs $R_\lambda \otimes U(G_2)$ forment une famille de facteurs de type III, non hyperfinis et non isomorphes (pour $\lambda \in]0,1[$).

Comme G_2 est unimodulaire, $N = U(G_2)$ possède une trace donc $T(N) = \mathbb{R}$. D'après 2.6,8), on a $T(R_\lambda \otimes N) = T(R_\lambda)$. On sait par ailleurs que $R_\lambda \otimes U(G_2)$ est non hyperfini (et de type III car $T(R_\lambda \otimes N) \neq \mathbb{R}$).

2.8 Calcul de $T(M)$ pour les facteurs de Krieger en théorie ergodique

Soient μ une mesure positive σ-finie sur un espace mesurable T et G un groupe de bijections bi-mesurables de T sur T tel que $g\cdot\mu$ soit équivalente à μ, pour tout $g \in G$. On suppose que G opère presque librement dans T. Soit M l'algèbre de von Neumann produit croisé de $L^\infty(T,\mu)$ par G.

THÉORÈME.- (i) $T(M) = \{T_0 \in \mathbb{R} \,;\, \exists\, \nu \sim \mu,\ [d\nu(g\cdot t)/d\nu(t)]^{iT_0} = 1,\ \forall\, t,\ \forall\, g\}$.

(ii) L'invariant $\rho(M)$ de Krieger est image de $T(M)$ par $t \mapsto \exp(-2\pi/t)$.

3. Invariant $\Gamma(M)$

Soient M un facteur, G un groupe localement compact commutatif, c une classe d'équivalence extérieure dans $\mathrm{Act}(G,M)$. Outre le noyau T_c de l'homomorphisme $\delta_c = \varepsilon \circ U$ (où $U \in c$), on associe à c la partie $\Gamma_c = \bigcap_{V \in c} \mathrm{Sp}\, V$ du groupe dual $\hat{G}$ de G.

Le support spectral $\mathrm{Sp}\cdot V$ de V est l'ensemble des caractères du spectre $\hat{G}$ de l'algèbre de Banach commutative $L^1(G)$ nuls sur le noyau de l'homomorphisme $\bar{V} : f \longmapsto \int_G f(t)\, V_t\, dt$ de $L^1(G)$ dans $\mathcal{L}(M)$ obtenu par intégration de V (cette intégration est possible car M dual de M_* est quasi-complet).

3.1 THÉORÈME.- Γ_c <u>est un sous-groupe fermé non vide de</u> $\hat{G}$ <u>inclus dans l'orthogonal du sous-groupe</u> T_c <u>de</u> G. <u>Pour tout représentant</u> U <u>de</u> c, <u>on a</u>

$$\Gamma_c = \bigcap_{e \in P} \mathrm{Sp}\, U^e = \bigcap_{e \in Q} \mathrm{Sp}\, U^e ,$$

<u>où l'on note</u> P (resp. Q) <u>l'ensemble des projecteurs orthogonaux éléments de</u> M^U (resp. <u>du centre de</u> M^U) <u>et</u> U^e <u>l'action</u> $t \longmapsto U_t | eMe$ <u>de</u> G <u>sur la sous-algèbre globalement invariante</u> eMe <u>de</u> M.

La démonstration difficile de cet énoncé occupe un chapitre de la thèse de A. Connes.

3.2 <u>Propriétés de</u> $\mathrm{Sp}\, U$ <u>et de</u> Γ_c

1) $\mathrm{Sp}\, U$ est symétrique par rapport à zéro qu'il contient.

2) $\Gamma_c + \mathrm{Sp}\, U \subset \mathrm{Sp}\, U$ pour tout $U \in c$ (d'où $\Gamma_c + \Gamma_c = \Gamma_c$ et le fait que Γ_c est un sous-groupe de $\hat{G}$).

3) Si $[\mathrm{Sp}\, U]/\Gamma_c$ est compact, Γ_c est exactement l'orthogonal de T_c.

4) Si $\hat{G}/\Gamma_c$ est compact, il existe $V \in c$ tel que $\mathrm{Sp}\, V = \Gamma_c$.

3.3 DÉFINITIONS.- Notons $\Gamma(M)$ le sous-groupe fermé Γ_c de $\mathbb{R}$ associé à la classe d'équivalence extérieure modulaire c dans $\mathrm{Act}(\mathbb{R}, M)$. C'est un invariant algébrique pour le facteur M.

Si $P(M)$ contient une trace φ (type I ou II), on a $\sigma_t^\varphi = I$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où $\mathrm{Sp}\, \sigma^\varphi = \{0\}$. Dans ce cas, $\Gamma(M) = \{0\}$ et $T(M) = \mathbb{R}$ sont sans intérêt.

Supposons désormais que M est de type III. Selon que $\Gamma(M) = \{0\}$, ou $\mathbb{Z}\alpha$ avec $\alpha > 0$, ou $\mathbb{R}$, on dit que M est de type III_0 , ou III_λ avec $\lambda = e^{-2\pi\alpha} \in]0,1[$, ou III_1 . Par ailleurs, A. Connes considère deux propriétés algébriquement invariantes. On dit que M est plein si $\mathrm{Int}\, M$ est fermé dans $\mathrm{Aut}\, M$. On dit que M est presque-périodique si l'ensemble $Pp(M)$ des $\varphi \in P(M)$ tels que $\sigma^\varphi(\mathbb{R})$ soit relativement compact dans $\mathrm{Aut}\, M$ est non vide.

3.4 Propriétés des facteurs des divers types

1) La relation $\Gamma(M) \subset T(M)^\perp$ montre que si $\Gamma(M) = \mathbb{R}$ (type III_1), alors $T(M) = \{0\}$ ne permet pas de classer les facteurs.

2) De même, si $T(M)$ est partout dense dans $\mathbb{R}$, alors $\Gamma(M) = \{0\}$ (type III_0). Pour tout sous-groupe dénombrable G de $\mathbb{R}$, A. Connes construit un facteur dont c'est l'invariant $T(M)$ de la façon suivante. Soient N un facteur de type III_1 sur un espace de Hilbert séparable et $\varphi \in P(N)$. On a $T(N) = \{0\}$ d'après 1). On restreint à G l'action σ^φ de $\mathbb{R}$ sur N . Alors le produit croisé discret $M = W^*(G,N)$ convient. Si N est hyperfini, alors M l'est aussi. D'où une infinité non dénombrable de facteurs hyperfinis de type III_0 . Signalons qu'un facteur de type III_0 n'est jamais plein et qu'il est toujours presque-périodique.

3) Si M est de type III_λ avec $0 < \lambda < 1$, alors $\Gamma(M) = \mathbb{Z}\alpha$ et 3.2,3) montre que $T(M) = \mathbb{Z}T_0$ avec $T_0 = -2\pi/\mathrm{Log}\,\lambda$. Pour tout $\lambda \in]0,1[$, le facteur R_λ de Powers est de type III_λ . De même pour certains facteurs P_λ construits par Pukanszky à partir du groupe libre G_2 à deux générateurs. Notons que P_λ est plein et que R_λ ne l'est pas.

4) Pour les facteurs d'Araki-Woods et pour les facteurs de Krieger, le ratio-set $r(M)$, deuxième invariant considéré par ces auteurs, est la fermeture de l'image de $\Gamma(M)$ par $x \mapsto \exp(-2\pi x)$. La classification de A. Connes redonne donc celle qui existait pour ces exemples.

5) Pour les facteurs de type III_1 , les invariants $T(M) = \{0\}$ et $\Gamma(M) = \mathbb{R}$ sont sans effet classifiant. A. Connes pousse son analyse en construisant un facteur de type III_1 non presque périodique (les facteurs de type I, II, III_0, III_λ pour $0 < \lambda < 1$ étant presque périodiques, c'est le seul facteur non presque périodique connu). Par ailleurs, pour les facteurs presque périodiques et pleins

sur un espace de Hilbert séparable, il introduit l'invariant $\Gamma d(M)$ suivant. Notons $\mathbb{B}$ le compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$. Si $\varphi \in Pp(M)$, il existe $\bar{\sigma}^{\varphi} \in Act(\mathbb{B}, M)$ unique prolongeant σ^{φ}. Si φ décrit $Pp(M)$, alors $\bar{\sigma}^{\varphi}$ décrit une classe d'équivalence extérieure c dans $Act(\mathbb{B}, M)$. Alors $\Gamma d(M) = \Gamma_c$ est un sous-groupe discret de $\hat{\mathbb{B}} = \mathbb{R}$, dénombrable et tel que $\Gamma(M) = \overline{\Gamma d(M)}$.

Pour tout sous-groupe dénombrable partout dense de $\mathbb{R}$, A. Connes construit un facteur plein et presque périodique M dont c'est l'invariant $\Gamma d(M)$, d'où une infinité non dénombrable de facteurs de type III_1 non isomorphes.

6) Soit M un facteur plein, presque périodique de type III_1. Alors $\delta_M(\mathbb{R})$ est distinct du centre Z de Out M. En effet, si $\varphi \in Pp(M)$, $\varepsilon \circ \bar{\sigma}^{\varphi}(\mathbb{B})$ est un sous-groupe compact de Z, car Out M est séparé, et contenant $\delta_M(\mathbb{R})$. Si on avait $\delta_M(\mathbb{R}) = Z$, on voit que $\delta_M(\mathbb{R})$ serait compact et que $T(M)$ serait $\neq \{0\}$.

4. Structure des facteurs de type III

Depuis von Neumann, la théorie ergodique a donné des facteurs de tous les types connus, soit comme produit croisé $W^*(L^{\infty}(T,\mu),\theta)$, où θ est un automorphisme de $L^{\infty}(T,\mu)$ induit par un automorphisme de (T,μ) (bijection bimesurable de T transformant μ en une mesure équivalente), soit comme produit croisé continu $W^*(L^{\infty}(T,\mu),U)$, où $U \in Act(\mathbb{R}, L^{\infty}(T,\mu))$ est induit par un flot continu d'automorphismes de (T,μ).

En sens inverse, A. Connes (resp. M. Takesaki) décompose tout facteur de type III_λ avec $\lambda < 1$ (resp. de type III) comme produit croisé $W^*(N,\theta)$ avec $\theta \in$ Aut M (resp. $W^*(N,U)$ avec $U \in Act(\mathbb{R}, N)$) et N de type II.

4.1 THÉORÈME (A. Connes).- <u>Soit</u> M <u>un facteur de type</u> III_λ $(0 < \lambda < 1)$.

(i) <u>Il existe</u> $\varphi \in P(M)$ <u>non fini tel que l'algèbre</u> N <u>des points fixes pour</u> σ^{φ} <u>dans</u> M <u>soit un facteur et tel que</u> $\varphi_0 = \varphi|N^+$ <u>soit une trace semi-finie</u>.

(ii) <u>Si</u> ψ <u>est un autre tel élément de</u> $P(M)$, <u>pour tout</u> $\alpha \in \Gamma(M)$, <u>il existe</u> $u \in I(M)$ <u>tel que</u> $\psi(x) = e^{2\pi\alpha}\varphi(u x u^*)$ <u>pour tout</u> $x \in M$.

(iii) <u>Prenant</u> $\alpha = \operatorname{Log} \lambda / 2\pi$ <u>et</u> $\psi = \varphi$, <u>alors</u> $\theta = \operatorname{Ad} u|N$ <u>est un automorphisme de</u> N <u>qui multiplie la trace</u> φ_0 <u>par</u> λ .

(iv) M <u>est isomorphe au produit croisé</u> $W^*(N,\theta)$ <u>et</u> N <u>est de type</u> II <u>muni de la trace</u> φ_0 <u>non finie</u>.

(v) <u>Soit</u> N_1 <u>un facteur de type</u> II <u>muni d'une trace non finie et soit</u> $\theta_1 \in \operatorname{Aut} N_1$. <u>Pour que</u> $W^*(N_1,\theta_1)$ <u>soit isomorphe à</u> M , <u>il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme</u> J <u>de</u> N_1 <u>sur</u> N <u>tel que l'automorphisme</u> $J^{-1}\theta_1 J\theta^{-1}$ <u>de</u> N <u>soit intérieur</u>.

4.2 <u>Remarques</u>.- a) Evidemment, si N est un facteur de type II muni d'une trace non finie φ et si $\theta \in \operatorname{Aut} N$ multiplie φ par un scalaire $\lambda \in]0,1[$, alors $W^*(N,\theta)$ est de type III_λ.

b) A. Connes caractérise de manière voisine les facteurs de type III_0 comme produits croisés $W^*(N,\theta)$ où N est une algèbre de von Neumann à centre diffus, de type II, munie d'une trace $\tau \in \dot{P}(N)$ et où $\theta \in \operatorname{Aut} N$ est tel qu'il existe $\alpha < 1$ vérifiant $\tau(\theta(x)) \leq \alpha\tau(x)$ pour tout $x \in N^+$.

4.3 THÉORÈME (M. Takesaki).- <u>Soit</u> M <u>une algèbre de von Neumann de type</u> III.

(i) <u>Il existe une algèbre de von Neumann</u> N <u>de type</u> II, $U \in \operatorname{Act}(\mathbf{R}, N)$, <u>une trace</u> $\varphi \in P(N)$ <u>vérifiant</u> $\varphi \circ U_t = e^{-t}\varphi$ <u>pour tout</u> $t \in \mathbf{R}$, <u>tels que</u> M <u>soit isomorphe à</u> $W^*(N,U)$.

(ii) <u>Soient</u> N_1 , φ_1 , U^1 <u>comme ci-dessus</u>. <u>Pour que</u> $W^*(N_1,U^1)$ <u>soit isomorphe à</u> M , <u>il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme</u> J <u>de</u> N <u>sur</u> N_1 <u>tel que</u> $t \longmapsto J \circ U_t \circ J^{-1}$ <u>soit extérieurement équivalent à</u> U_1.

4.4 <u>Remarques</u> (Quelques résultats de W. Krieger).- 1) Pour $i = 1 , 2$, soient (T_i , μ_i) un espace mesuré et θ_i un automorphisme ergodique de (T_i , μ_i) . Pour que les deux facteurs $W^*(L^\infty(T_i , \mu_i),\theta_i)$ soient isomorphes, il faut et il suffit que θ_1 et θ_2 soient faiblement équivalents (autrement dit, qu'il existe un isomorphisme d'espaces mesurés α de (T_1,μ_1) sur (T_2,μ_2) échangeant pour presque tout $x \in T_1$ les orbites $\{\theta_1^n \cdot x \,;\, n \in \mathbf{Z}\}$ et $\{\theta_2^n \cdot \alpha(x) \,;\, n \in \mathbf{Z}\}$).

2) Les classes d'équivalence faible de systèmes dynamiques (T,μ,θ) de type III_0 sont en bijection avec les classes d'isomorphismes de flots ergodiques, apériodiques et conservatifs sur $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue, résultat à rapprocher des théorèmes 4.1 et 4.3.

---

(1) Rappelons que $U \sim V$ signifie que les deux extensions du groupe $I(M)$ par G obtenues en effectuant les produits semi-directs $I(M) \times_U G$ et $I(M) \times_V G$ sont congrues.

(2) En appliquant W_t à $x \otimes e_{22} = (I \otimes e_{21})(x \otimes e_{11})(I \otimes e_{12})$, on voit que u relie U_1 à U_2 .

(3) On a alors $(D\psi : D\varphi)_t = h^{it}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. CONNES - Une classification des facteurs de type III, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., t. 6, 1973, p. 133-252.

[2] A. CONNES - Almost periodic states and factors of type III_1, J. Funct. Anal., t. 6, 1974, p. 415-445.

[3] W. KRIEGER - On ergodic flows and the isomorphism of factors, à paraître.

[4] M. TAKESAKI - Duality for cross-products and the structure of von Neumann algebras of type III, à paraître.