T. A. SPRINGER

Relèvement de Brauer et représentations paraboliques de $GL_n(\mathbb{F}_q)$

Séminaire N. Bourbaki, 1975, exp. n° 441, p. 89-113

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1973-1974__16__89_0>

Séminaire BOURBAKI 441-01
26e année, 1973/74, n° 441 Novembre 1973

RELÈVEMENT DE BRAUER ET REPRÉSENTATIONS PARABOLIQUES DE $GL_n(\mathbb{F}_q)$
[d'après G. LUSZTIG]

par T. A. SPRINGER

Dans ce qui suit, k désigne un corps fini à q éléments et V un espace vectoriel de dimension finie n sur k. Soit G un groupe fini, soit $r : G \to GL(V)$ une représentation de G dans V. D'après R. Brauer, on associe à r un "caractère modulaire", à valeurs complexes. La construction de Brauer a été modifiée par Green [4], de façon à produire un caractère généralisé (ou virtuel) de G. C'est cette dernière construction qu'on appellera ici "relèvement de Brauer". Le problème étudié par Lusztig dans [7] (voir aussi [6]) est celui d'analyser le relèvement de Brauer dans le cas de la représentation identique de $GL(V)$. Cette étude conduit à des résultats fort intéressants, dont on exposera les principaux ci-après.

1. Relèvement de Brauer

1.1. r étant comme ci-dessus, soit ℓ/k une extension de k contenant les valeurs propres des éléments de $r(G)$. Soit K un corps algébriquement clos de caractéristique 0 (il est bon de ne pas se restreindre au cas $K = \mathbf{C}$) et soit θ un homomorphisme injectif du groupe multiplicatif ℓ^* dans K^*. Si $x \in G$, désignons par $u_i(x)$ $(1 \leq i \leq n)$ les valeurs propres de $r(x)$ dans ℓ^* et posons

$$b_\theta(r)(x) = \sum_{i=1}^{n} \theta(u_i(x)) ,$$

c'est le relèvement de Brauer de r (associé à θ). C'est une fonction centrale sur G à valeurs dans K et le point important est que c'est un <u>caractère généralisé</u> de G, c'est-à-dire une combinaison linéaire, à coefficients entiers, de caractères irréductibles de G, voir [4] ou [2, p. 144].

On va étudier le cas $G = GL(V)$, $r = id$. On écrit alors $b_{V,\theta}$ pour le relèvement de Brauer. On peut analyser la structure de $b_{V,\theta}$ en utilisant les résultats généraux sur la théorie des caractères des groupes de Chevalley finis (voir [10]). Cette analyse n'est pas nécessaire pour obtenir les résultats de [7]. Mais comme peut-être le procédé s'applique à d'autres cas, on en dira quelques mots. On utilisera le résultat ci-dessous, dû à N. Kawanaka [5]. (Si $\underline{H}$ est un groupe algébrique linéaire défini sur k, on écrit $H = \underline{H}(k)$ pour son groupe de k-points. Si $\underline{H}$ est réductif connexe, H est un groupe de Chevalley au sens de [10].)

1.2 PROPOSITION.- <u>Soit</u> G <u>un groupe de Chevalley fini. Soit</u> f <u>une fonction centrale sur</u> G, <u>à valeurs dans</u> K. <u>Supposons que</u> $f(x)$ <u>ne dépende que de la partie semi-simple de</u> $x \in G$. <u>Alors</u>

$$(1) \qquad \sum_{x \in G} f(x) = \sum_{\underline{T}} \sum_{t \in T} f(t) \ ,$$

<u>où</u> $\underline{T}$ <u>parcourt les</u> k-<u>tores maximaux de</u> $\underline{G}$.

Si $x \in G$ est semi-simple, son centralisateur connexe $\underline{Z}(x)^{\circ}$ dans $\underline{G}$ contient tout élément unipotent de G qui commute à x, d'après [1,p.271]. Soit $n(x)$ le nombre de ces éléments. Le premier membre de (1) est égal à

$$\sum_{x \text{ semi-simple}} n(x)\, f(x) \ .$$

(1) résulte alors de l'observation, faite par Steinberg [11, p. 4-5], que $n(x)$ est aussi le nombre de k-tores maximaux de $\underline{Z}(x)^{\circ}$.

Soit $(\underline{T}_i)_{1 \leq i \leq h}$ un système de représentants des classes de conjugaison, par éléments de G, de k-tores maximaux de $\underline{G}$. Soit W_i le quotient par T_i

du normalisateur de $\underline{T}_i$ dans G. Si f et g sont des fonctions sur le groupe G à valeurs dans K, on pose

$$\langle f,g\rangle_G = |G|^{-1} \sum_{x \in G} f(x)\, g(x^{-1}) ,$$

où $|G|$ est l'ordre de G.

1.3 COROLLAIRE.- Si f et g ont la propriété de 1.2, on a

$$\langle f,g\rangle_G = \sum_{i=1}^{h} |W_i|^{-1} \langle f,g\rangle_{T_i} .$$

1.4 COROLLAIRE.- Soit $G = GL(V)$ et soit $b_{V,\theta}$ le relèvement de Brauer de la représentation identique (cf. 1.1). Alors

$$\begin{aligned} \langle b_{V,\theta}, b_{V,\theta}\rangle_G &= n && \text{si } q > 2 \\ &= n+1 && \text{si } q = 2 . \end{aligned}$$

Soit k_i une extension de k de degré i. On sait que si $\underline{T}$ est un k-tore maximal du k-groupe algébrique $\underline{GL}(V)$, le groupe T est isomorphe à un produit direct $k_{i_1}^* \times \ldots \times k_{i_t}^*$, où $i_1 + \ldots + i_t = n$, l'action de T dans V provenant de l'action naturelle de $k_{i_1}^* \times \ldots \times k_{i_t}^*$ dans l'espace vectoriel $k_{i_1} \times \ldots \times k_{i_t}$, qui est isomorphe à V (voir [2, p. 127]). Un calcul facile montre alors que $\langle b_{V,\theta}, b_{V,\theta}\rangle_T = n$ pour tout T, si $q > 2$.

D'autre part, les k-classes des k-tores maximaux dans $\underline{GL}(V)$ sont paramétrées par les classes du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ et on sait (les notations étant comme dans 1.3) que $|\mathfrak{S}_n|\,|W_i|^{-1}$ égale le nombre d'éléments dans la classe de $\mathfrak{S}_n$ qui correspond à $\underline{T}_i$ (voir [loc. cit., p. 189-190]), ce qui implique que $\sum_{i=1}^{t} |W_i|^{-1} = 1$. L'assertion de 1.4, pour $q > 2$, résulte alors de 1.3. Le cas $q = 2$ se traite de façon analogue.

1.5. Rappelons quelques résultats sur les sous-groupes paraboliques de $GL(V)$. Si P est un tel groupe, il existe un drapeau $W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_s$, où les W_i sont des sous-espaces propres distincts de V, avec $W_1 \neq \{0\}$. Soit $V = W'_1 \times W'_2 \times \dots \times W'_{s+1}$ une décomposition de V, avec $W_i = W'_1 \times W'_2 \times \dots \times W'_i$ $(1 \leq i \leq s)$. Alors le sous-groupe L de $GL(V)$ qui stabilise tous les W'_i est un sous-groupe de Levi de P.

Fixons une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de V et posons $V_i = ke_1 + \dots + ke_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$. Soit P_i le stabilisateur de V_i, c'est un sous-groupe parabolique maximal. Soit χ un caractère de $GL(V_i)$. A l'aide de l'homomorphisme de restriction $P_i \to GL(V_i)$, on peut relever χ en un caractère (encore noté χ) de P_i. Soit $i_{P_i \to G}(\chi)$ le caractère induit correspondant.

Soit $Q_i \subset P_i$ le stabilisateur du drapeau

$$V_i \subset V_i + ke_{i+1} \subset \dots \subset V_i + ke_{i+1} + \dots ke_{n-1} .$$

Un groupe de Levi de Q_i est isomorphe à $GL(V_i) \times (k^*)^{n-i}$.

Pour les résultats sur l'induction de caractères paraboliques qu'on va utiliser voir par exemple [10]. Rappelons qu'une représentation r de G dans un K-espace vectoriel est dite <u>parabolique</u> si la restriction de r au radical unipotent de tout sous-groupe parabolique propre de G ne contient pas la représentation unité.

1.6 THÉORÈME.- (i) <u>Il existe un caractère parabolique irréductible unique</u> $\pi_{V,\theta}$ <u>de</u> $GL(V)$ <u>tel que</u> $\langle b_{V,\theta}, \pi_{V,\theta}\rangle_G \neq 0$;

(ii) <u>On a</u>

(2) $$b_{V,\theta} = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1}\, i_{P_i \to G}(\pi_{V_i,\theta}) + (-1)^{n-1}\, \pi_{V,\theta} ;$$

(iii) <u>Les caractères</u> $i_{P_i \to G}(\pi_{V_i}, \theta)$ <u>sont irréductibles si</u> $i > 1$ <u>ou si</u> $q > 2$. <u>Si</u> $q = 2$, <u>le caractère</u> $i_{P_1 \to G}(\pi_{V_1}, \theta)$ <u>est somme d'un caractère irréductible et du caractère unité.</u>

On procède par induction sur $n = \dim V$, le cas $n = 1$ étant trivial. Supposons d'abord $q > 2$. Soit P un groupe parabolique propre, soit L un groupe de Levi de P et soit χ un caractère irréductible parabolique de L. Calculons l'entier $\langle b_{V,\theta}, i_{P\to G}(\chi)\rangle_G$. Par dualité de Frobenius, il est égal à $\langle r_{G\to L}(b_{V,\theta}), \chi\rangle_L$ ($r_{G\to L}$ désignant la restriction de G à L). D'après 1.5, L est isomorphe à un produit $\prod_i GL(V'_i)$ et on voit que $r_{G\to L}(b_{V,\theta})$ devient la <u>somme</u> $\sum_i b_{V'_i, \theta}$. Il est alors facile de voir que $\langle b_{V,\theta}, i_{P\to G}(\chi)\rangle_G = 0$ si P n'est pas associé à l'un des Q_i. Si $P = Q_i$, cet entier est 0 sauf si χ est le caractère $\pi_{V_i}, \theta \times (1)^{n-i}$ du groupe de Levi $GL(V_i) \times (k^*)^{n-i}$, auquel cas il vaut $(-1)^{i-1}$. Il résulte de tout ceci que le caractère généralisé $b_{V,\theta}$ contient exactement $(n-1)$-caractères irréductibles non paraboliques distincts, à coefficients ± 1. D'où (i), en vertu de 1.4. On voit aussi que (ii) résulte de (iii). Or, (iii) est une conséquence d'un résultat qui se trouve dans [2, p. 107, 4.12]. La discussion du cas $q = 2$ est laissée au lecteur.

1.7 COROLLAIRE.- <u>Le degré de</u> $\pi_{V,\theta}$ <u>est</u> $(q-1)\dots(q^{n-1}-1)$.

Cela résulte de (2). On peut se reporter à [7, 1.14].

2. Etude de quelques complexes simpliciaux

On note A un anneau commutatif à élément unité.

2.1. Soit X un complexe simplicial fini. Soit Σ l'ensemble des simplexes de X, ordonné de la manière suivante : $x \leq y$, si x est une partie de y. Rappelons qu'un système de coefficients (homologique) formé de A-modules est un système projectif (F_x, f_{xy}) sur Σ. Autrement dit, les F_x sont des A-modules et f_{xy} est un homomorphisme de A-modules $F_x \to F_y$, défini si $x \geq y$ et vérifiant les identités habituelles.

On définit alors les A-modules d'homologie $H_i(X; F)$ et, X' étant un sous-complexe de X, les modules d'homologie relatifs $H_i(X, X'; F)$.

Soit $d = \dim X$. On dira que X est <u>sphérique pour</u> F (ou F-sphérique) si $H_i(X; F) = 0$ lorsque $0 < i < d$. On dira que X est <u>sphérique</u> s'il l'est pour le système de coefficients constants $\mathbb{Z}$ et si $H_0(X; \mathbb{Z})$ et $H_d(X; \mathbb{Z})$ sont des groupes abéliens libres. Alors X est sphérique pour tout système de coefficients constants.

2.2. <u>Homologie d'ensembles ordonnés</u>

Soit S un ensemble ordonné fini. Soit $X(S)$ le complexe simplicial fini dont les i-simplexes sont les sous-ensembles $x = \{s_0, s_1, \dots, s_i\}$, avec $s_0 < s_1 < \dots < s_i$, de S. Soit $F = (F_s, f_{st})$ un système inductif de A-modules sur S. On lui associe un système de coefficients $X(F)$ sur $X(S)$ de la manière suivante. Si $x = \{s_0, \dots, s_i\}$ est un i-simplexe, on pose $X(F)_x = F_{s_0}$. Si $y = \{s_0, \dots, \hat{s}_j, \dots, s_i\}$ est une face de x, l'homomorphisme $X(F)_x \to X(F)_y$ est l'identité si $j > 0$ et est f_{s_0, s_1} si $i = 0$. Ceci détermine $X(F)$.

On note $H_i(S; F)$ les modules $H_i(X(S); X(F))$. On a $H_0(S; F) = \varinjlim_{s \in S} F_s$. On dira que S est F-sphérique si $X(S)$ est $X(F)$-sphérique, etc.

Si S' est un sous-ensemble ordonné de S, le complexe $X(S')$ est un sous-complexe de $X(S)$. On pose $H_i(S, S'; F) = H_i(X(S), X(S'); X(F))$.

Si $s \in S$, on appellera <u>dimension</u> de s (notation $\dim(s)$) la longueur maximale d'une chaîne totalement ordonnée $s_1 < s_2 < \ldots < s_i < s$. On pose $\dim(S) = \max\limits_{s \in S} \dim(s) = \dim X(S)$. Soit S_i le sous-ensemble ordonné des éléments de dimension $\leq i$. On pose

$$S(s) = \{t \in S \mid t \leq s\} ,$$

$$S'(s) = \{t \in S \mid t < s\} .$$

Comme $H_o(S'(s) ; F) \simeq \varinjlim\limits_{t < s} F_t$, il existe un homomorphisme canonique

$$H_o(S'(s) ; F) \rightarrow F_s .$$

2.3 <u>Lemme</u>.- <u>Soit</u> F <u>un système inductif sur</u> S . <u>Alors</u>

(1) $$H_j(S_i , S_{i-1} ; F) \simeq \coprod_{\dim(s) = i} H_{j-1}(S'(s) ; F) \qquad \underline{\text{si}}\ j \geq 2 ,$$

(2) $$H_1(S_i , S_{i-1} ; F) \simeq \coprod_{\dim(s) = i} \operatorname{Ker}(H_o(S'(s) ; F) \rightarrow F_s) .$$

Soient $C_*(S'(s) ; F)$ et $C_*(S_i , S_{i-1} ; F)$ les complexes de chaînes gradués. Les éléments du premier sont les sommes formelles

$$\sum_{s_o , \ldots, s_j} a.(s_o , \ldots, s_j) ,$$

où $s_o < s_1 < \ldots < s_j < s$, avec $a \in F_{s_o}$, de même pour le second. Il existe un homomorphisme φ de degré 1

$$\coprod_{\dim(s) = i} C(S'(s) ; F) \rightarrow C(S_i , S_{i-1} ; F)$$

tel que

$$\varphi(a.(s_o , \ldots, s_j)) = a.(s_o , \ldots, s_j , s) .$$

φ commute avec le bord et est bijectif en dimension ≥ 2 . Ceci implique (1) et (2) en résulte facilement.

2.4 PROPOSITION.- <u>Supposons</u> F <u>tel que</u> :

(a) S <u>et les</u> $S'(s)$ $(s \in S)$ <u>soient</u> F-<u>sphériques</u>,

(b) l'homomorphisme $H_o(S'(s) ; F) \to F_s$ soit bijectif si $\dim(s) \geq 2$ et surjectif si $\dim(s) = 1$.

Alors, il y a une suite exacte (où $d = \dim(s)$)

$$0 \to H_d(S ; F) \to \coprod_{\dim(s)=d} H_{d-1}(S'(s) ; F) \to \coprod_{\dim(s)=d-1} H_{d-2}(S'(s) ; F) \to ..$$

$$.. \to \coprod_{\dim(s)=2} H_1(S'(s) ; F) \to \coprod_{\dim(s)=1} \mathrm{Ker}(H_o(S'(s) ; F) \to F_s) \to$$

$$\to \coprod_{\dim(s)=0} F_s \to H_o(S ; F) \to 0 .$$

Cela résulte de 2.3, en utilisant les suites exactes

$$\dots \to H_j(S_{i-1} ; F) \to H_j(S_i ; F) \to H_j(S_i , S_{i-1} ; F) \to H_{j-1}(S_{i-1} ; F) \to \dots .$$

On va maintenant introduire des ensembles ordonnés auxquels on appliquera, d'après Lusztig, les résultats précédents.

2.5. Les exemples

Soit V un espace vectoriel sur le corps fini k , de dimension finie $n \geq 2$. On a alors les ensembles ordonnés suivants.

(a) L'ensemble $P(V)$ des sous-espaces propres et $\neq \{0\}$ de V , avec l'ordre évident. Le complexe simplicial $X(P(V))$, qui a dimension $n - 2$, est l'immeuble de Tits de $GL(V)$. On sait que $P(V)$ est sphérique, mais nous n'aurons pas besoin de ce résultat ici (il est vrai pour l'immeuble de Tits de tout groupe de Chevalley fini, voir [10] ; on trouve d'ailleurs dans [7, 1.8] une démonstration rapide pour $P(V)$).

On utilisera le système de coefficients déduit du système inductif F de k-espaces vectoriels sur $P(V)$, qui associe à chaque $W \in P(V)$ l'espace W lui-même.

(b) Soit W un sous-espace vectoriel propre de V, de dimension $m \geq 1$. On note $P(V,W)$ l'ensemble ordonné des sous-espaces propres V' de V transversaux à W (i.e. tels que $V' + W = V$). On a $\dim P(V,W) = m - 1$.

(c) L'ensemble ordonné $A(V)$ des sous-espaces affines propres de V. On a $\dim A(V) = n - 1$.

(d) L'ensemble ordonné $L(V)$ des sous-espaces affines propres de V ne contenant pas 0. On a $\dim L(V) = n - 1$.

Dans les cas (b), (c), (d), on n'aura besoin que de systèmes de coefficients constants.

Le théorème suivant résume les "vanishing theorems" démontrés dans [7].

2.6 THÉORÈME.- (i) $P(V,W)$, $A(V)$ *et* $L(V)$ *sont sphériques* ;

(ii) $P(V)$ *est* $X(F)$-*sphérique*.

On esquissera la démonstration pour $L(V)$ (d'après [*loc. cit.*, 1.10]). Dans les cas de $P(V,W)$ et de $P(V)$, elle est analogue [*loc. cit.*, 1.11, 1.12] ; celle pour $A(V)$ est plus facile [*loc. cit.*, 1.9].

Si $s \in L(V)$, on dénote par $Y(s)$ le sous-ensemble des $s' \geq s$. Les complexes $X(Y(s))$ avec $s \in L(V)$ minimal, recouvrent $X(L(V))$; soit N le nerf de ce recouvrement. Il suffit alors de démontrer la proposition suivante.

2.7 PROPOSITION.- *On a* $H_0(N ; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$, $H_i(N ; \mathbf{Z}) = 0$ *pour* $0 < i < n - 1$.

Il est facile de voir que N est connexe, d'où la première formule. Soit $C = \coprod_{i \geq 0} C_i$ le complexe de chaînes simplicial qui donne l'homologie de N. Soit F la famille des sous-ensembles $\{v_0, \ldots, v_i\}$ de V engendrant un espace affine ne contenant pas 0. Alors C_i a une base formée des chaînes $(v_0, \ldots, v_i)$, où $\{v_0, \ldots, v_i\} \in F$. On définit le support d'une chaîne de façon évidente.

Fixons une base $(e_i)_{1\le i\le n}$ de V . Soit $F_\ell \subset F$ la sous-famille des $\{v_o, \dots, v_i\}$ avec $(kv_o + \dots + kv_i) \cap (ke_1 + \dots + ke_{\ell-1} + e_\ell) = \emptyset$.

2.8 Lemme.- Soit $c \in C_i$ $(i \geq 1)$ un cycle avec $\mathrm{supp}(c) \subset F_\ell \cup \dots \cup F_n$. Alors, la classe d'homologie de c contient un cycle c' avec $\mathrm{supp}(c') \subset F_{\ell+1} \cup \dots \cup F_n$.

Ceci s'établit en utilisant l'homomorphisme de degré 1

$$T_\ell : \{c \in C \mid \mathrm{supp}(c) \in F_\ell\} \to C ,$$

défini par

$$T_\ell(v_o, \dots, v_i) = (e_\ell, v_o, \dots, v_i) .$$

On a, si c est comme dans 2.8,

$$T_\ell(\partial c) + \partial(T_\ell c) = c .$$

La proposition 2.7 résulte de 2.8 et de l'observation que

$$\mathrm{supp}(c) \in F_1 \cup \dots \cup F_n ,$$

si $c \in C_i$, $0 \le i \le n-2$.

La détermination de l'homologie, dans les cas de 2.5, est complétée par le résultat suivant (où $\tilde{H}_i$ dénote l'homologie réduite).

2.9 PROPOSITION.- (i) $H_o(P(V,W) ; \mathbb{Z}) = 0$ si $n > m \geq 2$, $\tilde{H}_{m-1}(P(V,W) ; \mathbb{Z})$ est libre de rang $(q^{n-m} - 1)\dots(q^{n-1} - 1)$;

(ii) $H_o(A(V) ; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, $H_{n-1}(A(V) ; \mathbb{Z})$ est libre de rang $(q-1)\dots(q^n - 1)$;

(iii) $H_o(L(V) ; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, $H_{n-1}(L(V) ; \mathbb{Z})$ est libre de rang $\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i-1}(q^i - 1)\dots(q^n - 1) + (-1)^n$;

(iv) Si $n > 2$, on a $H_o(P(V) ; F) \simeq V$ et $H_{n-2}(P(V) ; F)$ est un k-espace vectoriel de dimension $(q-1)\dots(q^{n-1} - 1)$. Si $n = 2$, il existe une surjection $H_o(P(V) ; F) \to V$ dont le noyau est un k-espace vectoriel de dimension $q-1$.

Les assertions sur les H_o sont faciles. Les autres en résultent grâce à la suite exacte de 2.4. Voir [7, 1.14].

Il est clair que $GL(V)$ opère dans $H_{n-1}(A(V)\,;\mathbf{Z})$, $H_{n-1}(L(V)\,;\mathbf{Z})$ et $H_{n-2}(P(V)\,;F)$. Soit $G(V,W)$ le stabilisateur de W dans V, alors $G(V,W)$ opère dans $\widetilde{H}_{m-1}(P(V,W)\,;\mathbf{Z})$.

3. Construction d'un $GL(V)$-module

Soit encore V un k-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soit $G = GL(V)$ son groupe d'automorphismes. A dénote un anneau commutatif et $\theta : k^* \to A^*$ un homomorphisme de k^* dans le groupe A^* des éléments inversibles de A. On suppose que $\theta \neq 1$. Si S est un ensemble fini, on écrit $C(S\,;A)$ pour le A-module des fonctions sur S à valeurs dans A.

3.1. Soit D l'ensemble des drapeaux affines $d = (E_o,\dots,E_{n-1})$, où E_i est un sous-espace affine de V de dimension i, avec $E_{i-1} \subset E_i$, tel que $0 \notin E_i$ $(0 \leq i \leq n-1)$. G opère sur D et, en particulier, k^* opère sur D par homothéties. En outre, $C(D\,;A)$ est un G-module.

Posons

$$C(D\,;A)_\theta = \{f \in C(D\,;A) \mid f(\lambda d) = \theta(\lambda)f(d) \ (d \in D\ ,\ \lambda \in k^*)\}\ .$$

Alors, $L(V)$ étant comme dans 2.5, le module $H_{n-1}(L(V)\,;A)$ s'identifie à un sous-module de $C(D\,;A)$. Posons $H_{n-1}(L(V)\,;A)_\theta = H_\theta = C(D\,;A)_\theta \cap H_{n-1}(L(V)\,;A)$.

Lusztig introduit un endomorphisme $P = P_A$ de $C(D\,;A)_\theta$ qui joue un rôle essentiel dans la suite. Voici sa définition géométrique. Soit $d = (E_o, E_1, \dots, E_{n-1}) \in D$, alors

$$(1)\qquad (Pf)(d) = (-1)^{n-1}\,\Sigma\, f(d')\ ,$$

où la somme porte sur les $d' = (E'_o,\dots,E'_{n-1})$ tels que $E'_o \subset E_{n-1} - E_{n-2}$ et que E'_i soit parallèle au sous-espace linéaire engendré par E_{i-1} $(1 \leq i \leq n-1)$.

Il est clair que P commute à l'action de G .

3.2 PROPOSITION.- P <u>stabilise</u> H_θ .

Ceci est démontré dans [7, 3.1]. On esquissera ci-dessous une démonstration plus algébrique, qui utilise des formules connues sur la structure de $GL_n(k)$, qu'on va d'abord rappeler.

3.3. Fixons une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de V . Définissons les éléments $x_{ij}(\lambda)$ $(i \neq j\ ,\ \lambda \in k)$ de G par

$$\begin{cases} x_{ij}(\lambda)e_i = e_i + \lambda e_j \\ x_{ij}(\lambda)e_h = e_h & (h \neq i\ ,\ j)\ , \end{cases}$$

et les éléments w_i $(1 \leq i \leq n-1)$ par

$$w_i . e_i = e_{i+1}\ ,\quad w_i . e_{i+1} = e_i\ ,\quad w_i . e_j = e_j \qquad (j \neq i\ ,\ i+1)\ .$$

Alors, on a les formules suivantes, où (g,h) dénote le commutateur $ghg^{-1}h^{-1}$,

$$(2)\qquad \begin{cases} (x_{ij}(\lambda)\ ,\ x_{h\ell}(\mu)) = 1 & \text{si } i \neq \ell \text{ et } j \neq h\ , \\ (x_{ij}(\lambda)\ ,\ x_{j\ell}(\mu)) = x_{i\ell}(\lambda\mu) & \text{si } i \neq \ell\ , \\ (x_{ij}(\lambda)\ ,\ x_{hi}(\mu)) = x_{hj}(-\lambda\mu) & \text{si } j \neq h\ . \end{cases}$$

Soit T le sous-groupe de G qui stabilise les ke_i $(1 \leq i \leq n)$. Définissons les caractères $\omega_i : T \to k^*$ par

$$te_i = \omega_i(t)e_i\ .$$

On a alors

$$(3)\qquad x_{i\,,\,i+1}(\lambda)x_{i+1\,,\,i}(-\lambda^{-1}) = w_i x_{i\,,\,i+1}(\lambda^{-1})t_i(\lambda) \quad (\lambda \in k^*)\ ,$$

où $t_i(\lambda) \in T$ est tel que $\omega_i(t_i(\lambda)) = \lambda$, $\omega_{i+1}(t_i(\lambda)) = -\lambda^{-1}$, $\omega_j(t_i(\lambda)) = 1$ si $j \neq i\,,\,i+1$.

Introduisons, en outre, les endomorphismes S_i $(1 \leq i \leq n)$ de $C(G\,;A)$ définis par

$$(S_1 f)(g) = \sum_{\lambda \in k} f(gx_{12}(\lambda))\ ,$$

$$(S_i f)(g) = \sum_{\lambda \in k} f(gx_{i+1\,,\,i}(\lambda)w_i) \qquad (2 \leq i \leq n-1)\ ,$$

$$(S_n f)(g) = \sum_{\lambda \in k} f(gx_{n1}(\lambda))\ .$$

Les S_i commutent à G, opérant sur $C(G\,;A)$ par translations à gauche.

3.4 Lemme.- (i) Le G-module $C(D\,;A)_\theta$ est isomorphe au sous-module S de $C(G\,;A)$ formé des f telles que

$$f(gx_{ij}(\lambda)) = f(g) \qquad (2 \leq j < i \leq n)\ ,$$

$$f(gt) = \theta(\omega_1(t))f(g) \qquad (t \in T)\ .$$

(ii) Le G-module H_θ est isomorphe au sous-module de S formé des f telles que

$$S_i f = 0 \quad (i = 1\,,\,n)\ , \qquad S_i f = -f \quad (2 \leq i \leq n-1)\ .$$

L'isomorphisme $C(D\,;A)_\theta \to S$ en question associe à $f \in C(D\,;A)_\theta$ la fonction $g \mapsto f(gd_o)$ sur G, où d_o est le drapeau affine $(e_1\,,e_1 + ke_2\,,\ldots,\,e_1 + ke_2 + \ldots + ke_{n-1})$. La démonstration de 3.4 consiste en une vérification directe.

On identifiera $C(D\,;A)_\theta$ et H_θ à leurs images dans $C(G\,;A)$.

3.5 Quelques formules

Soit $\ell = (\lambda_2\,,\ldots,\,\lambda_{n-1}\,,\lambda_n) \in k^{n-2} \times k^*$ et définissons $w(\ell) \in G$ par

$$(4) \qquad \begin{cases} w(\ell)e_1 = e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n \\ w(\ell)e_i = e_{i-1} & (2 \leq i \leq n)\ . \end{cases}$$

Il résulte alors de (1) que

$$(5) \qquad (Pf)(g) = (-1)^{n-1} \sum_{\ell \in k^{n-2} \times k^*} f(gw(\ell))\ ,$$

si $f \in C(D\,;A)_\theta$, ce qu'on peut aussi écrire de deux autres manières, à savoir

$$(6)\quad \begin{cases} (Pf)(g) = (-1)^{n-1} \displaystyle\sum_{\substack{\lambda_2,\ldots,\lambda_n \in k \\ \lambda_2 \neq 0}} f(gcx_{1n}(\lambda_n)x_{1,n-1}(\lambda_{n-1})\ldots x_{12}(\lambda_2))\theta(\lambda_2)^{-1} \\ = (-1)^{n-1} \displaystyle\sum_{\substack{\lambda_2,\ldots,\lambda_n \in k \\ \lambda_2 \neq 0}} f(gx_{n,n-1}(\lambda_n)w_{n-1}x_{n-1,n-2}(\lambda_{n-1})w_{n-2}\ldots \\ \ldots x_{12}(\lambda_2)w_1)\theta(\lambda_2)^{-1} \ , \end{cases}$$

où on a posé $c = w_{n-1}w_{n-2}\ \cdots\ w_1$.

On vérifie alors les formules suivantes, pour $f \in C(D\,;A)_\theta$,

$$(7)\qquad S_iPf = PS_{i+1}f \qquad (2 \leq i \leq n-2)\ ,$$

$$(8)\qquad S_nPf = 0\ ,$$

$$(9)\quad (S_1Pf)(g) = (-1)^{n-1} \sum_{\substack{\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1} \\ \lambda_2\neq 0}} (S_1S_2f)(gcx_{1n}(\lambda_{n-1})\ldots x_{14}(\lambda_3)w_2x_{13}(\lambda_2))\theta(\lambda_2)^{-1}\ ,$$

$$(10)\qquad (S_{n-1}Pf)(g) =$$
$$-(Pf)(g)+(PS_nf)(g)+(-1)^{n-1}\sum_{\substack{\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1} \\ \lambda_2\neq 0}} (S_nf)(gx_{n-1,n-2}(\lambda_{n-1})w_{n-1}\ldots x_{21}(\lambda_2)w_1)\theta(\lambda_2)^{-1}.$$

(7), (8) et (9) résultent de (2) et (6) et (10) de (2), (3) et (6). Dans la démonstration de (8), on utilise que $\theta \neq 1$.

3.2 est une conséquence de (7), (8), (9), (10), tenant compte de 3.4 (ii).

3.6 <u>Lemme</u>.- <u>Soit</u> $f \in C(D\,;A)_\theta$ <u>tel que</u> $f(gx_{21}(\lambda)) = f(g)$ $(g \in G\ ,\ \lambda \in k)$. <u>Alors</u>

(i) $f(gx_{ij}(\lambda)) = f(g)$ <u>si</u> $1 \leq j < i \leq n$;

(ii) $f(gx_{12}(\lambda)) = f(gx_{21}(\lambda^{-1})w_1)\theta(\lambda)$ $(\lambda \in k^*)$;

(iii) $(Pf)(g) = (-1)^n(S_{n-1}\ldots S_2f)(g) + (-1)^{n-1}\displaystyle\sum_{\lambda_3,\ldots,\lambda_n}(S_1f)(gx_{n,n-1}(\lambda_n)w_{n-1}\ldots$

$\ldots x_{32}(\lambda_3)w_2)$.

(i) résulte de (2), (ii) de (3) et (iii) est une conséquence de (ii) et (6).

3.7 Le cas d'une k-algèbre A

Supposons maintenant que A soit une k-algèbre. Posons $\chi(\lambda) = \lambda^{-1}.1$ $(\lambda \in k^*)$. Il résulte alors de (6) que

$$(11)\quad (Pf)(gx_{21}(\lambda)) = (Pf)(g) + (-1)^{n-1}\lambda \sum_{\lambda_3,\ldots,\lambda_n} \lambda_3(S_1 f)(gcx_{1n}(\lambda_n)\ldots x_{13}(\lambda_3)) ,$$

si $f \in C(D\,;A)_\chi$.

3.8 PROPOSITION.- Sous ces hypothèses, P induit un endomorphisme idempotent de H_χ, qui commute à l'action de G. On a $(Pf)(gx_{ij}(\lambda)) = (Pf)(g)$ si $1 \leq j < i \leq n$, pour toute $f \in H_\chi$.

La dernière assertion résulte de (11) et 3.6 (i). Alors 3.6 (iii) implique que $P^2 f = Pf$ pour $f \in H_\chi$.

Posons maintenant

$$D(V\,;A) = PH_\chi ,$$

c'est un G-module. Soient $P(V)$ et F comme dans 2.5.

3.9 PROPOSITION.- Si $n > 2$, le G-module $D(V\,;A)$ est isomorphe à $H_{n-2}(P(V)\,;F \otimes_k A)$; si $n = 2$, il est isomorphe au noyau de l'homomorphisme $H_o(P(V)\,;F \otimes_k A) \to V \otimes_k A$ (voir 2.9 (iv)).

Soit d_o le drapeau de sous-espaces linéaires $(ke_1, ke_1 + ke_2, \ldots, ke_1 + \ldots + ke_{n-1})$. Son stabilisateur dans G est le groupe de Borel engendré par T et les $x_{ij}(k)$ avec $1 \leq j < i \leq n$. Soit $f \in D(V\,;A)$ et définissons une fonction φf sur G, à valeurs dans $V \otimes_k A$, par

$$(\varphi f)(g) = g(e_1) \otimes f(g) .$$

Alors $(\varphi f)(gb) = (\varphi f)(g)$ si $b \in B$. Par conséquent, φf s'interprète comme une fonction sur l'ensemble G/B des drapeaux maximaux, à valeurs dans $V \otimes_k A$. On démontre sans difficulté que φ est l'isomorphisme voulu.

3.10 COROLLAIRE.- $D(V;A)$ <u>est un</u> A-<u>module libre de rang</u> $(q-1)\ldots(q^{n-1}-1)$.

Ceci résulte de ce qu'on a établi au numéro 2, vu 3.9.

Soit B comme ci-dessus et soit U son radical unipotent, engendré par les $x_{ij}(k)$ avec $j<i$. Désignons par B^- le groupe de Borel opposé, engendré par T et les $x_{ij}(k)$ avec $j>i$. Soit N le groupe engendré par T et les w_i $(1\leq i\leq n-1)$ et posons $W=N/T$, c'est le groupe de Weyl, isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Si $s_i=w_iT$, $S=\{s_1,\ldots,s_{n-1}\}$ alors (W,S) est un système de Coxeter. Soit w_o l'élément dans W de longueur maximale. Si $w\in W$, désignons par n_w un représentant de w dans N .

3.11 <u>Lemme</u>.- <u>Une fonction de</u> $D(V;A)$ <u>est déterminée par sa restriction à</u> B^- .

Si $f\in D(V;A)$, on a $f(gu)=f(g)$ pour tout $u\in U$ (d'après 3.8) et

$$(12)\quad \begin{cases} f(g) = -\displaystyle\sum_{\lambda\in k} \lambda f(gx_{21}(\lambda)w_1) \\ f(g) = -\displaystyle\sum_{\lambda\in k} f(gx_{i+1,i}(\lambda)w_i) \qquad (2\leq i\leq n-1) \end{cases}$$

(d'après 3.4 (ii) et 3.6 (ii)). Supposons $w\in W$, $\ell(ws_j)=\ell(w)+1$ (où ℓ est la longueur). Si $g\in n_{w_o}Bn_wU$, on a alors

$$gx_{j+1,j}(\lambda)w_j \in n_{w_o}Bn_{ws_j}U \qquad (\lambda\in k)\ ,$$

d'après les propriétés des systèmes de Tits. Il résulte de (12) que $f|n_{w_o}Bn_wU=0$ si $f|n_{w_o}Bn_{ws_j}U=0$. Utilisant le lemme de Bruhat, on voit que $f=0$ si $f|B^-=0$, d'où 3.11.

3.12 <u>Le cas d'un anneau de valuation</u>

Soit ℓ une extension finie de k . On va maintenant relever le G-module $D(V;\ell)$ en caractéristique 0 .

Soit R un anneau de valuation discrète complet de caractéristique 0 , à corps résiduel ℓ . Soit $\pi : R\to\ell$ la projection canonique. On sait qu'il existe un caractère injectif γ unique $\ell^* \to R^*$ tel que $\pi \circ \gamma = \mathrm{id}$. Nous posons $\theta = \gamma^{-1}$. Si χ est sa réduction, on a $\chi(\lambda) = \lambda^{-1}$ si $\lambda \in k^*$. On a

$$H_{n-1}(L(V)\,;\ell)_\chi = H_{n-1}(L(V)\,;R)_\theta \otimes_R \ell\ ,$$

et

$$P_\ell = P_R \otimes \mathrm{id}\ .$$

Soit $r = |\ell|$ et posons

$$D(V\,;R) = \{f \in H_{n-1}(L(V)\,;R)_\theta \,|\, \lim_{n\to\infty} P_R^{r^n} f = f\}\ .$$

Il résulte de 3.8, utilisant le lemme de Hensel, que $D(V\,;R)$ est un facteur direct de $H_{n-1}(L(V)\,;R)_\theta$ et on a

$$D(V\,;\ell) = D(V\,;R) \otimes_R \ell\ .$$

3.10 montre alors que $D(V\,;R)$ est un R-module libre de rang $(q-1)\ldots(q^{n-1}-1)$. D'après 3.4, $D(V\,;R)$ s'identifie à un sous-module de $C(G\,;R)$ stable par les translations à gauche ; c'est donc un G-module. Le résultat suivant est une conséquence de 3.11.

3.13 Lemme.- Une fonction de $D(V\,;R)$ est déterminée par sa restriction à B^-.

3.14. Il y a un choix minimal pour R, à savoir l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt sur k. Posons $D(V) = D(V\,;W(k))$. Si R est comme ci-dessus, il y a un homomorphisme unique $W(k) \to R$ induisant l'homomorphisme donné $k \to \ell$ des corps résiduels. On a alors

(13) $\qquad D(V\,;R) = D(V) \otimes_{W(k)} R\ .$

Nous définissons $D(V\,;R)$, où R est une $W(k)$-algèbre quelconque, par la formule (13).

4. La représentation de G dans $D(V)$.

Conservons les notations des numéros précédents. Soit K une extension algébriquement close du corps des quotients de $W(k)$. Soit r_V la représentation de G dans $D(V\,;K)$; désignons par c_V le caractère de r_V.

4.1 PROPOSITION.- r_V <u>est une représentation irréductible parabolique.</u>

Soit P un sous-groupe parabolique propre de G , à radical unipotent U . Il faut établir que la restriction de r_V à U ne contient pas la représentation unité et il suffit de le faire si $P \supset B^-$ est maximal ($\neq G$) . Soit U engendré par les $x_{ij}(k)$ avec $1 \leq i \leq h$, $h+1 \leq j \leq n$. Soit $f \in D(V;K)$ telle que $f(ug) = f(g)$ si $u \in U$, $g \in G$. On a $f(pu) = f(p)$ si $p \in P$, $u \in U$. On montrera que $f(pn_w) = 0$ pour tout $w \in W = \gamma_n$ tel que $w(1) \leq h$. Alors $f = 0$, par 3.13, donc r_V est parabolique. Soit $\ell < n$ tel que $w(1),\ldots,w(\ell) \leq h$, $w(\ell+1) > h$. Si $\ell = 1$, on a $f(pn_w) = f(pn_w x_{12}(\lambda))$ et $S_1 f = 0$ implique que $f(pn_w) = 0$. Si $\ell > 1$, il résulte de $S_\ell f = -f$ que $qf(pn_w) = -f(pn_{ww_\ell})$. Comme $ww_\ell(1) \leq h$, $ww_\ell(\ell) > h$, une récurrence sur ℓ démontre que $f(pn_w) = 0$.

4.1 résulte alors du fait, établi par exemple dans [2, p. 149, 155], que les représentations irréductibles paraboliques de G sur $\mathbf{C}$ ont pour dimension $(q-1)\ldots(q^{n-1}-1) = \dim D(V;K)$ (voir 3.10).

Nous utiliserons le fait suivant, contenu implicitement dans les résultats de Green sur les caractères de G (voir [<u>loc</u>. <u>cit</u>., p. 142, 149]).

4.2 <u>Lemme</u>.- <u>Deux caractères irréductibles paraboliques complexes de</u> G <u>sont égaux s'ils le sont sur les éléments semi-simples.</u>

Soit ℓ une extension de k contenant les valeurs propres des éléments de G et soit $R \subset K$ une $W(k)$-algèbre avec les propriétés de 3.12. L'homomorphisme θ de 3.12 est une injection de ℓ^* dans K^* . Soit $\pi_{V,\theta}$ le caractère défini dans 1.6.

4.3 THÉORÈME.- $\pi_{V,\theta}$ <u>est le caractère</u> c_V <u>de</u> r_V .

Nous procédons par induction sur $n = \dim V$, le cas $n = 1$ étant trivial. Supposons le théorème vrai pour les espaces vectoriels de dimension $< n$. D'après 4.2, il suffit de démontrer que $c_V(x) = \pi_{V,\theta}(x)$ si $x \in G$ est semi-simple. Mais dans ce cas, on peut déterminer $c_V(x)$ à partir de l'action de x dans l'espace vectoriel $D(V;R)\otimes_R \ell = D(V;\ell)$, duquel on a donné une interprétation homologique dans 3.9. On écrit la suite exacte de 2.4, en prenant pour S l'immeuble de Tits $P(V)$, avec le système de coefficients $F\otimes_k \ell$, F étant comme dans 2.5 (d'après 2.9 (iv) les hypothèses de 2.4 sont satisfaites dans ce cas). La suite exacte permet de calculer la trace de $r_V(x)$ et on trouve que

$$b_{V,\theta}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1}\, i_{P_i \to G}(c_{V_i}) + (-1)^{n-1} c_V$$

(notations du n° 1). Par induction, on a $c_{V_i} = \pi_{V_i,\theta}$ et le théorème résulte alors de 1.6.

4.4 COROLLAIRE.- Soit H un groupe fini qui opère dans V. Il existe une famille $(L_i)_{1\le i\le n}$ de $W(k)$-modules libres de type fini, dans lesquels H opère, telle qu'on a une suite exacte de H-espaces vectoriels

$$0 \to L_n \otimes_{W(k)} k \to \dots \to L_1 \otimes_{W(k)} k \to V \to 0 .$$

4.5. Nous appelons la représentation r_V de G dans $D(V)$ ou $D(V;K)$ la représentation spéciale de G.

Le théorème précédent est un des résultats principaux de Lusztig. Il donne, en conjonction avec 1.6, une analyse très précise de la structure du relèvement de Brauer $b_{V,\theta}$, pour le caractère θ de 3.12. Dans la démonstration de 4.3, nous avons invoqué quelques résultats sur les caractères complexes de G. Dans [7], ces résultats ne sont pas utilisés et 4.3 y est établi à l'aide de propriétés supplémentaires de la représentation spéciale, qu'on va discuter brièvement.

4.6. Le groupe affine

Soit $\mathrm{Aff}(V)$ le groupe affine de V ; c'est le produit semi-direct de $G = GL(V)$ et V. Le groupe $\mathrm{Aff}(V)$ opère sur l'ensemble ordonné $A(V)$ de 2.5.

Soit maintenant K un corps algébriquement clos de caractéristique 0 quelconque. Le résultat suivant est dû à S. I. Gelfand [3].

4.7 PROPOSITION.- (i) *Le degré d'une* K-*représentation irréductible de* $\mathrm{Aff}(V)$ *est au plus* $(q-1)(q^2-1)\dots(q^n-1)$;

(ii) *si* $q > 2$, *il existe une seule classe de* K-*représentations irréductibles de* $\mathrm{Aff}(V)$ *de degré* $(q-1)(q^2-1)\dots(q^n-1)$; *si* $q = 2$, *il y en a deux*.

Appelons *spéciales* les représentations de $\mathrm{Aff}(V)$ de 4.7 (ii).

4.8 PROPOSITION.- *La représentation de* $\mathrm{Aff}(V)$ *dans* $\tilde{H}_{n-1}(A(V)\,;K)$ *est spéciale* ; *elle a multiplicité* 1 *dans la représentation de* $\mathrm{Aff}(V)$ *dans l'espace de chaînes* $C_{n-1}(A(V)\,;K)$.

Ceci est établi dans [7, n° 2] à l'aide d'un "lemme de Bruhat" pour $\mathrm{Aff}(V)$. Des résultats analogues ont été obtenus par L. Solomon [8, 9].

Soit $n \geq 2$, soit W un sous-espace vectoriel propre de V de dimension $m \geq 1$. Introduisons alors l'ensemble ordonné $P(V,W)$ de 2.5. Soit A un anneau commutatif.

4.9 PROPOSITION.- *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\tilde{H}_{n-m-1}(A(V/W)\,;A) \otimes_A \tilde{H}_{m-1}(P(V,W)\,;A) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}(A(V)\,;A) .$$

On trouve une démonstration homologique dans [7, 2.4].

Soit maintenant H un hyperplan de V . On identifie $\mathrm{Aff}(H)$ au sous-groupe de $G = GL(V)$ qui stabilise H et induit l'identité sur V/H .

4.10 PROPOSITION.- *Il existe un isomorphisme canonique de* $W(k)$-*modules*

$$D(V) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_{n-2}(A(H)\,;W(k)) .$$

La démonstration utilise 3.9, 3.13 et 4.8. Cette proposition implique que la restriction à $\mathrm{Aff}(H)$ de la représentation spéciale de G est une représentation spéciale de $\mathrm{Aff}(H)$.

Soit W comme ci-dessus.

4.11 PROPOSITION.- Il existe un isomorphisme canonique de $W(k)$-modules

$$D(V/W) \otimes_{W(k)} \widetilde{H}_{m-1}(P(V,W)\,;W(k)) \xrightarrow{\sim} D(V) .$$

Ceci se démontre à l'aide de 4.9 et 4.10, voir [7, 3.10].

4.11 détermine la restriction à un sous-groupe parabolique maximal de G de la représentation spéciale et peut servir à déterminer la restriction à un sous-groupe parabolique quelconque. Ces résultats sont utilisés dans [loc. cit. n° 4] pour démontrer 4.3.

5. Compléments

5.1. Un théorème de Swan

Soit H un groupe fini, soit $R(H\,;A)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des A-modules de type fini où H opère. Des résultats discutés au n° 4, on obtient une démonstration facile du théorème suivant de [12]. (k et $W(k)$ sont comme auparavant, $Q(k)$ est le corps des quotients de $W(k)$.)

5.2 THÉORÈME.- L'homomorphisme $R(H\,;W(k)) \to R(H\,;Q(k))$ induit par l'injection $W(k) \to Q(k)$ est une bijection.

On définit une application $R(H\,;Q(k)) \to R(H\,;W(k))$ de la façon suivante. Soit M un $Q(k)$-espace vectoriel où H opère. Soit L un $W(k)$-réseau dans M stable par H et associons à l'élément $[M]$ de $R(H\,;Q(k))$ défini par M l'élément $[L]$ de $R(H\,;W(k))$. Le théorème est facile, une fois établi que cette application est bien définie. Il faut donc montrer que si L et L' sont deux réseaux H-stables dans M , on a $[L] = [L']$. Il suffit de le faire lorsque $L' \subset L$ et $V = L/L'$ est annulé par l'idéal maximal de $W(k)$. Alors V est un espace vectoriel sur k . En appliquant 4.4 à k , il suffit alors (avec les notations de 4.4) d'établir que $[L_i \otimes_{W(k)} k] = 0$, ce qui est trivial.

5.3. Questions de rationalité

L'endomorphisme $P = P_{W(k)}$ introduit dans 3.1 induit un endomorphisme de $D(V)$ qui commute à G . D'après 4.1 et le lemme de Schur, c'est la multiplication scalaire par un élément $\lambda(V) \in W(k)$ (qui ne dépend que de $n = \dim V$). $\lambda(V)$ est calculé dans [7, n° 4]. Soit R comme dans 3.14 et supposons que ℓ contient une extension k_n de k de degré n .

5.4 PROPOSITION.– $$\lambda(V) = \sum_{\substack{x \in k_n^* \\ Tr_{k_n/k}(x) = 1}} \theta(x) ,$$

(θ est comme dans 3.12).

Il est clair que le G-module $D(V\,;Q(k))$ est défini sur une extension finie L de $\mathbb{Q}$ (identifié au corps premier de $Q(k)$). Soit $L_V \subset L$ l'extension de $\mathbb{Q}$ engendré par les valeurs du caractère c_V de la représentation spéciale de G .

5.5 THÉORÈME.– (i) $D(V\,;Q(k))$ <u>est défini sur</u> L_V ;

(ii) L_V <u>est engendré sur</u> Q <u>par les</u> $\theta(x)$ $(x \in k^*)$ <u>et</u> $\lambda(V)$;

(iii) L_V <u>est une extension galoisienne de</u> $\mathbb{Q}$ <u>de degré</u> $n^{-1}\varphi(q^n - 1)$.

Voir [<u>loc</u>. <u>cit</u>., n° 4].

5.6. Une autre formulation de 5.5 (i) est : l'indice de Schur de la représentation spéciale de G est 1 .

Il résulte de 5.5 (iii) qu'en faisant opérer le groupe de Galois de $L_V/\mathbb{Q}$, on obtient à partir de la représentation spéciale $n^{-1}\varphi(q^n - 1)$ représentations irréductibles paraboliques non-équivalentes de G . Le nombre total de ces classes de représentations étant $\sum_{d \mid n} d^{-1}\mu(d^{-1}n)(q^d - 1)$, on constate que ce procédé ne donne pas toutes les classes de représentations irréductibles paraboliques.

5.7. Remarques finales

Il serait intéressant d'étendre les résultats dont on a parlé ici à d'autres groupes de Chevalley. Voici quelques remarques sur ce genre de questions.

(a) Dans [7, 5.12], on trouve une description conjecturale de la structure du relèvement de Brauer du groupe symplectique $Sp_{2n}(k)$ (pour sa représentation habituelle).

Il est probable que les méthodes du n° 1 s'appliquent au groupe symplectique et donnent un résultat analogue à 1.6 (i), d'où un caractère irréductible parabolique de $Sp_{2n}(k)$.

(b) Peut-on généraliser la construction du module $D(V)$ à d'autres groupes de Chevalley ? Le rédacteur espère que les formules écrites au n° 3 peuvent servir à de telles généralisations.

(c) L'un des résultats homologiques du n° 2 admet une formulation qui a un sens dans le cas général suivant. Soit maintenant G un groupe de Chevalley quelconque sur k . Soit T l'immeuble de Tits de G . Si P est un sous-groupe parabolique propre de G , soit s_P le simplexe de T défini par P . Soit r une représentation de G dans un k-espace vectoriel V de dimension finie. Alors, il existe un système de coefficients $F(r)$ sur T tel que $F(r)_{s_P}$ soit le sous-espace de V des vecteurs fixés par tous les éléments du radical unipotent de P . Si $G = GL(V)$, $r = id$, on retombe sur le système F de 2.5 (a).

2.6 (ii) donne, dans ce cas, un "vanishing theorem" pour l'homologie de $F(r)$ et la question se pose si c'est un cas particulier d'un résultat plus général.

(d) Est-ce qu'on peut utiliser les méthodes de Lusztig pour construire une représentation irréductible admissible parabolique d'un groupe $GL(V)$ p-adique ?

[Note ajoutée en Avril 1974]

Récemment, Lusztig a utilisé la méthode du numéro 1 pour construire des caractères paraboliques pour tous les groupes classiques sur un corps fini. Il a aussi établi la structure du relèvement de Brauer de $Sp_{2n}(k)$, mentionné à la page 23.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BOREL - Linear algebraic groups, Benjamin (1969).

[2] A. BOREL et al. - Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups, Lecture Notes in Math., n° 131, Springer-Verlag, (1970).

[3] S. I. GELFAND - Représentations du groupe linéaire général sur un corps fini, [en russe], Mat. Sbornik, 83 (125), (1970), 15-41.

[4] J.A. GREEN - The characters of the finite linear groups, Trans. Am. Math. Soc., 80 (1955), 402-447.

[5] N. KAWANAKA - A theorem on finite Chevalley groups, Osaka J. Math., 10(1973), p. 1-13.

[6] G. LUSZTIG - On the discrete series representations of the general linear groups over a finite field, Bull. Am. Math. Soc., 79 (1973), 550-554.

[7] G. LUSZTIG - The discrete series representations of the general linear groups over a finite field, à paraître aux Ann. of Math.

[8] L. SOLOMON - On the affine group over a finite field, dans : Proc. Symp. Pure Math., n° 21, Am. Math. Soc. (1971), 145-147.

[9] L. SOLOMON - The affine group I. Bruhat decomposition, J. Alg., 20 (1972), 512-539.

[10] T.A. SPRINGER - Caractères des groupes de Chevalley finis, Sém. Bourbaki, exposé 429, 24 p., Lecture Notes in Math. 383, Springer-Verlag, 1974.

[11] R. STEINBERG - Endomorphismes of linear algebraic groups, Mem. Am. Math. Soc., n° 80 (1968).

[12] R.G. SWAN - The Grothendieck group of a finite group, Topology, 2 (1963), 85-110.