JEAN-LOUIS KOSZUL

Travaux de S. S. Chern et J. Simons sur les classes caractéristiques

Séminaire N. Bourbaki, 1975, exp. n° 440, p. 69-88

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1973-1974__16__69_0>

Séminaire BOURBAKI
26e année, 1973/74, n° 440

TRAVAUX DE S. S. CHERN ET J. SIMONS SUR LES CLASSES CARACTÉRISTIQUES

par Jean-Louis KOSZUL

Il s'agit d'un prolongement de la Théorie de Chern-Weil. Soient G un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $I(G)$ l'algèbre graduée des fonctions polynômiales à valeurs réelles sur $\mathfrak{g}$ qui sont invariantes par l'action adjointe de G. Soit $\pi : E \to M$ une fibration principale $\mathcal{C}^{\infty}$ de base M et de groupe G. Le choix d'une forme de connexion γ sur E détermine un homomorphisme W_γ de $I(G)$ dans l'algèbre $\mathcal{D}(M)$ des formes différentielles sur M. Cet homomorphisme double les degrés ; pour tout $P \in I^{\ell}(G)$, $W_\gamma P$ est une forme fermée de degré 2ℓ. Les classes de cohomologie des images de W_γ sont les classes caractéristiques réelles de la fibration. Pour $\ell > 0$ et $P \in I^{\ell}(G)$, l'image réciproque de $W_\gamma P$ par π est une forme exacte sur E. Il existe en fait un homomorphisme $T_\gamma : I^{\ell}(G) \to \mathcal{D}^{2\ell-1}(E)$, ne dépendant que de la connexion γ tel que $\pi^*(W_\gamma P) = d\, T_\gamma P$. Lorsque $W_\gamma P = 0$, $T_\gamma P$ est donc une forme fermée qui détermine une classe de cohomologie appartenant à $H^{2\ell-1}(E , \mathbb{R})$. Les classes qui s'obtiennent ainsi ont été étudiées pour la première fois par Chern et Simons dans [3]. Ils ont montré que si $E \to M$ est le fibré des repères de M muni de la connexion γ définie par une structure riemannienne sur M, la classe de cohomologie de $T_\gamma P$ est un invariant de la structure conforme de M. Ces invariants conduisent à des obstructions cohomologiques à l'existence d'une immersion conforme de M dans un espace euclidien. Dans la recherche de ces obstructions interviennent des propriétés d'intégralité des classes définies par les formes $T_\gamma P$ correspondant à certains polynômes P liés aux classes de cohomologie entière du classifiant. Guidé par ces propriétés, Simons a montré dans [10] que l'objet qu'il convient d'associer à un tel polynôme P n'est pas une classe de cohomologie de degré $2\ell - 1$ de E, mais un <u>caractère</u> à valeurs dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ sur le groupe des cycles de degré $2\ell - 1$ de la base. Ce caractère peut être défini même si $W_\gamma P \neq 0$. On s'écarte là sensiblement des constructions qui conduisent aux invariants du type Godbillon-Vey d'un feuilletage. Dans ces dernières, on doit supposer que $T_\gamma P$ est une forme fermée basique par rapport à un sous-groupe compact maximal de G et on déduit de $T_\gamma P$ une classe de cohomologie réelle de la base.

Les caractères que Simons associe à une fibration principale munie d'une connexion ont rarement une signification géométrique simple. Lorsque $G = SO(2)$, ils décrivent l'holonomie de la fibration. Leur étude a débouché notamment sur de nouveaux résultats concernant les immersions conformes et la cohomologie de certains espaces classifiants [1], [4], [7], [10].

1. Les homomorphismes W_γ et T_γ

Comme plus haut, $\pi : E \to M$ désigne une fibration principale de groupe G et γ désigne une (forme de) connexion sur E. La forme γ est une forme différentielle de degré 1 sur E à valeurs dans $\mathfrak{g}$ qui est G-équivariante et vérifie la condition $\gamma(ya) = a$ quels que soient $y \in E$ et $a \in \mathfrak{g}$. La forme de courbure de γ est la forme $\Omega = d\gamma + \frac{1}{2}[\gamma,\gamma]$. Pour tout entier $\ell > 0$, on identifie $I^\ell(G)$ à l'espace des formes linéaires symétriques sur $\overset{\ell}{\otimes}\mathfrak{g}$ qui sont invariantes par G. L'homomorphisme W_γ est alors défini par

$$(1.1) \qquad W_\gamma P = P(\overbrace{\Omega \wedge \ldots \wedge \Omega}^{\ell})$$

pour $P \in I^\ell(G)$. Noter que dans cette formule, la puissance extérieure

$\Omega^{\ell} = \Omega \wedge \ldots \wedge \Omega$ de Ω s'obtient en considérant Ω comme une forme différentielle à valeurs dans l'algèbre tensorielle de $\mathfrak{g}$. Pour tout $P \in I^{\ell}(G)$, $W_{\gamma}P$ est une forme différentielle de degré 2ℓ sur E . Puisque P est invariante par G , c'est une forme basique. On notera encore $W_{\gamma}P$ la forme différentielle sur M qui lui correspond par l'injection $\pi^* : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(E)$.

L'homomorphisme de transgression T_{γ} est défini pour $P \in I^{\ell}(G)$ par

$$(1.2) \qquad T_{\gamma}P = \ell \int_0^1 P(\gamma \wedge \overbrace{\Omega_t \wedge \ldots \wedge \Omega_t}^{\ell-1})\, dt$$

où $\Omega_t = t(d\gamma) + \frac{t^2}{2}[\gamma,\gamma]$. On a $T_{\gamma}P \in \mathcal{D}^{2\ell-1}(E)$ et

$$(1.3) \qquad dT_{\gamma}P = W_{\gamma}P \ .$$

Si $\gamma(s)$ est une famille différentiable de connexions sur E , on a pour toute valeur du paramètre s :

$$(1.4) \qquad \frac{d}{ds} W_{\gamma(s)}P = \ell\, d(P(\Delta(s) \wedge \overbrace{\Omega(s) \wedge \ldots \wedge \Omega(s)}^{\ell-1})) \ ,$$

où $\Delta(s) = \frac{d}{ds}\gamma(s)$ et où $\Omega(s)$ est la forme de courbure de $\gamma(s)$ (cf. [5]). Les formes $\Delta(s)$ étant G-équivariantes et nulles sur les vecteurs verticaux, la forme $P(\Delta(s) \wedge \Omega(s) \wedge \ldots)$ est basique quel que soit s . La relation (1.4) montre donc que la classe de cohomologie de $W_{\gamma}P$ est un élément de $H^{2\ell}(M, \mathbb{R})$ indépendant du choix de la connexion γ . On obtient ainsi un homomorphisme $w : I(G) \to H^*(M, \mathbb{R})$ qui double les degrés ; c'est l'homomorphisme de Weil de la fibration $E \to M$.

2. Anneau $K(G)$

On désigne par B_G un espace classifiant pour les fibrations de groupe G et par U_G un fibré principal universel de groupe G et de base B_G . Soit ξ une fibration principale $\mathcal{C}^{\infty}$ de groupe G et de base M . Soit w_{ξ} l'homomorphisme de Weil de ξ . Tous les morphismes de ξ dans la fibration $U_G \to B_G$ sont homotopes et définissent le même homomorphisme "caractéristique" $b_\xi : H^*(B_G, \ ) \to H^*(M, \ )$. On montre qu'il existe un homomorphisme canonique $w : I(G) \to H^*(B_G, \mathbb{R})$ tel que, pour toute fibration ξ de groupe G , $b_\xi \circ w = w_\xi$.

Dans la suite, on supposera que le nombre des composantes connexes de G est fini. L'homomorphisme w est alors surjectif. De plus, pour ℓ impair, $H^\ell(B_G, \mathbb{R}) = 0$.

On note $K(G)$ le sous-anneau de $I(G) \times H^*(B_G, \mathbb{Z})$ formé par les couples (P,u) tels que

$$w(P) = r(u) ,$$

où r est l'homomorphisme canonique $H^*(B_G, \mathbb{Z}) \to H^*(B_G, \mathbb{R})$. Cet anneau est gradué par les sous-groupes $K^\ell(G) = K(G) \cap (I^\ell(G) \times H^{2\ell}(B_G, \mathbb{R}))$.

Remarques.- Puisque $w : I(G) \to H^*(B_G, \mathbb{R})$ est surjective, la projection de $K(G)$ dans $H^*(B_G, \mathbb{Z})$ est surjective. Si G est compact, alors w est un isomorphisme et $K(G)$ est isomorphe à $H^*(B_G, \mathbb{Z})$. Dans le cas général, si H est un sous-groupe compact maximal de G , w se factorise en $w = w' \circ \lambda$ où λ est l'homomorphisme canonique de $I(G)$ dans $I(H)$ et où w' est un isomorphisme de $I(H)$ sur $H^*(B_G, \mathbb{R})$. Le noyau de la projection $K(G) \to H^*(B_G, \mathbb{Z})$ est alors $\mathrm{Ker}(\lambda) \times 0$.

Soient ξ une fibration principale de groupe G et w_ξ son homomorphisme de Weil. Pour tout $(P,u) \in K^\ell(G)$, on a $w_\xi P = b_\xi(w P) = b_\xi(r u) = r(b_\xi u)$. Quelle que soit la connexion γ sur ξ , $W_\gamma P$ est donc une forme fermée à périodes entières appartenant à la classe $r(b_\xi u)$. C'est le point de départ de la construction qui sera faite au numéro 4.

3. Caractères différentiels

Soit M une variété $\mathcal{C}^\infty$. On utilisera dans la suite le complexe $C(M)$ des chaînes singulières cubiques $\mathcal{C}^\infty$ dans M . On note $Z_\ell(M)$ le groupe des cycles de degré ℓ dans $C(M)$ et $B_\ell(M)$ le groupe des bords $\partial C_{\ell+1}(M)$.

Soit ω une forme différentielle fermée de degré ℓ sur M . On l'identifie à une cochaîne singulière à valeurs dans $\mathbb{R}$ en posant $\omega(c) = \int_c \omega$ pour tout $c \in C_\ell(M)$. Supposons que les périodes de ω soient entières. Il existe alors une classe $u \in H^\ell(M, \mathbb{Z})$ telle que ω appartienne à la classe $r(u)$. La classe u étant choisie, soit a un cocycle singulier à valeurs entières appartenant à u . Considéré comme cochaîne à valeurs réelles, $\omega - a$ est un cobord. Soit φ une cochaîne de degré $\ell - 1$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\omega - a = d\varphi$. Notons $t \mapsto \bar{t}$ le passage au quotient $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. L'application $\bar{\varphi}$ est un caractère du groupe $C_{\ell-1}(M)$ dont la restriction à $B_{\ell-1}(M)$ est donnée par $\bar{\varphi}(\partial c) = \overline{d\varphi(c)} = \overline{\omega(c)}$ quel que soit $c \in C_\ell(M)$. Cette restriction est donc déterminée par ω . Pour le reste $\bar{\varphi}$ dépend des choix de u , a et φ .

Dans [1], Cheeger et Simons appellent <u>caractère différentiel</u> (de degré ℓ) sur M un caractère χ du groupe $Z_{\ell-1}(M)$ ayant la propriété suivante : il existe une forme différentielle ω_χ de degré ℓ sur M telle que

(3.1) $$\chi \circ \partial = \overline{\omega_\chi} \qquad \text{sur } C_\ell(M) .$$

Les caractères différentiels de degré ℓ sur M forment un sous-groupe $S^\ell(M)$ du groupe $\mathrm{Hom}(Z_{\ell-1}(M), \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ et S^ℓ est un foncteur contravariant sur la catégorie des variétés $\mathcal{C}^\infty$.

La relation (3.1) détermine ω_χ à partir de χ . En effet, une forme différentielle ω telle que $\omega(c) \in \mathbb{Z}$ pour tout $c \in C_\ell(M)$ est nécessairement la forme nulle. Pour tout $\chi \in S^\ell(M)$, ω_χ est une forme fermée à périodes entières.

L'application $\chi \longmapsto \omega_\chi$ est un homomorphisme. Pour tout $\chi \in S^\ell(M)$, il existe une cochaîne réelle f de degré $\ell - 1$ telle que $\overline{f(z)} = \chi(z)$ quel que soit $z \in Z_{\ell-1}(M)$. La cochaîne $\omega_\chi - df$ est un cocycle à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Sa classe $u_\chi \in H^\ell(M, \mathbb{Z})$ est indépendante du choix de f . En effet, si g est une autre cochaîne réelle de degré $\ell - 1$ telle que $\overline{g(z)} = \chi(z)$, $f - g$ prend des valeurs entières sur $Z_{\ell-1}(M)$ et on peut donc l'écrire $f - g = h + db$ où $h \in C^{\ell-1}(M, \mathbb{Z})$ et où $b \in C^{\ell-2}(M, \mathbb{R})$. On a alors $\omega_\chi - df = \omega_\chi - dg - dh$. L'application $\chi \longmapsto u_\chi$ est un homomorphisme de $S^\ell(M)$ dans $H^\ell(M, \mathbb{Z})$.

Il est clair que pour tout $\chi \in S^\ell(M)$, la classe de cohomologie de ω_χ est $r(u_\chi)$. Le raisonnement fait plus haut montre que $\chi \longmapsto (\omega_\chi , u_\chi)$ est un homomorphisme du groupe $S^\ell(M)$ sur le sous-groupe de $\mathcal{D}^\ell(M) \times H^\ell(M, \mathbb{Z})$ formé par les couples (ω,u) tels que $d\omega = 0$ et $\omega \in r(u)$. Cet homomorphisme n'est en général pas injectif. Le caractère χ n'est qu'en partie déterminé par ω_χ et u_χ . La forme ω_χ donne la restriction du caractère χ aux bords. Pour la suite, il est important de remarquer que le couple (ω_χ , u_χ) détermine χ sur le groupe $Z^{\mathrm{tor}}_{\ell-1}(M)$ des cycles de torsion de degré $\ell - 1$. Soient en effet $z \in Z^{\mathrm{tor}}_{\ell-1}(M)$, m un entier > 0 et $y \in C_\ell(M)$ tels que $mz = \partial y$. Choisissons un cocycle c de la classe u_χ et une cochaîne réelle f telle que $\overline{f} = \chi$ sur $Z_{\ell-1}(M)$. Pour tout $z \in Z_{\ell-1}(M)$, on a

$$\chi(z) = \overline{f(z)} = \overline{\frac{1}{m}\, f(mz)} = \overline{\frac{1}{m}\, f(dy)} = \overline{\frac{1}{m}\, (df)(y)} \ .$$

Puisque $\omega_\chi - df$ est un cocycle de la classe u_χ , il existe une cochaîne b de degré $\ell - 1$ à valeurs entières telle que $\omega_\chi - df = c + db$. On a donc

$$\chi(z) = \overline{\frac{1}{m}\, (\omega_\chi(y) - c(y) - b(dy))} = \overline{\frac{1}{m}\, (\omega_\chi(y) - c(y))} \ .$$

Exemple.- Soient $E \to M$ une fibration principale de groupe $SO(2)$ munie d'une connexion et Ω la forme de courbure. Pour tout chemin fermé c dans M, soit $\chi(c)$ l'élément de R/Z tel que l'holonomie le long de c soit une rotation d'angle $2\pi\,\chi(c)$. La fonction χ se prolonge d'une manière et d'une seule en un caractère de $Z_1(M)$ de sorte que $\chi(\partial x) = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_x \Omega}$ pour tout $x \in C_2(M)$ On obtient ainsi un caractère différentiel. Si M est un cercle, on a $\omega_\chi = u_\chi = 0$. Si la connexion n'est pas globalement plate, on a $\chi \neq 0$.

<u>Les caractères différentiels sont invariants par subdivision</u>. Si $\Delta : C(M) \to C(M)$ est l'endomorphisme de subdivision, il existe un opérateur d'homotopie ψ tel que $I - \Delta = \partial\psi + \psi\partial$. On peut choisir ψ de sorte que pour tout cube singulier σ l'image de $\psi(\sigma)$ soit contenue dans celle de σ . Si $\chi \in S^\ell(M)$, pour tout cycle z de degré $\ell - 1$, on a

$\chi(\Delta z) = \chi(z) - \chi(\partial\psi(z)) = \chi(z) - \overline{\omega_\chi(\psi(z))}$. Or $\omega_\chi(\psi(\sigma)) = 0$ pour tout cube singulier σ de dimension $\ell - 1$. Par conséquent $\chi(\Delta z) = \chi(z)$.

Pour qu'un caractère différentiel $\chi \in S^\ell(M)$ soit nul sur les bords de degré $\ell - 1$, il faut et il suffit que $\omega_\chi = 0$. Si $\omega_\chi = 0$, χ définit une classe appartenant à $H^{\ell-1}(M, R/Z)$; on voit facilement que cette classe a pour Bokstein $-u_\chi \in H^\ell(M, Z)$.

Dans [1], Cheeger et Simons définissent sur $\oplus\, S^\ell(M)$ une structure d'algèbre graduée anticommutative telle que $\chi \mapsto \omega_\chi$ et $\chi \mapsto u_\chi$ soient des homomorphismes d'algèbres. Pour tout sous-anneau propre Λ de R , ils définissent aussi des caractères différentiels à valeurs dans R/Λ qui jouissent des mêmes propriétés que ceux dont il est question plus haut.

4. Caractères différentiels associés aux éléments de $K(G)$

On désigne par $\mathcal{E}(G)$ la catégorie des fibrations principales de groupe G munies d'une connexion. Si ξ est un objet de $\mathcal{E}(G)$, on note respectivement E_ξ, M_ξ et γ_ξ l'espace fibré, la base et la forme de connexion de ξ. Un morphisme $\varphi : \xi \to \eta$ est une application différentiable G-équivariante $\varphi_E : E_\xi \to E_\eta$ telle que $\gamma_\eta \circ \varphi_E^T = \gamma_\xi$. On note φ_M l'application de M_ξ dans M_η qui s'en déduit par passage aux quotients. Les homomorphismes W_{γ_ξ} et T_{γ_ξ} définis au numéro 1 seront notés W_ξ et T_ξ. Si $\varphi : \xi \to \eta$ est un morphisme on a $\varphi_M^* \circ W_\eta = W_\xi$ et $\varphi_E^* \circ T_\eta = T_\xi$.

Soient $(P,u) \in K^\ell(G)$ et ξ un objet de $\mathcal{E}(G)$. On pose $u(\xi) = b_\xi(u) \in H^{2\ell}(M_\xi, \mathbf{Z})$. Puisque $w_\xi P = b_\xi(w P) = b_\xi(r(u)) = r(u(\xi))$, il existe des caractères différentiels $\chi \in S^{2\ell}(M_\xi)$ tels que $\omega_\chi = W_\xi P$ et $u_\chi = u(\xi)$. Tous ces caractères coïncident sur les cycles de torsion.

4.1 THÉORÈME (Simons [10]).- <u>Soit</u> $(P,u) \in K^\ell(G)$. <u>Il existe pour tout</u> $\xi \in \mathcal{E}(G)$ <u>un caractère différentiel</u> $\chi(\xi) \in S^{2\ell}(M_\xi)$ <u>et un seul tel que</u>

a) $\omega_{\chi(\xi)} = W_\xi P$,

b) $u_{\chi(\xi)} = u(\xi)$,

c) <u>si</u> $\varphi : \xi \to \eta$ <u>est un morphisme,</u> $\chi(\xi) = \chi(\eta) \circ \varphi_M$.

La démonstration repose sur l'existence pour tout entier N d'un objet η de $\mathcal{E}(G)$ qui est " N-classifiant " dans le sens suivant (cf. Narashiman-Ramanan [9]) : 1) quel que soit $\xi \in \mathcal{E}(G)$ avec $\dim M < N$, il existe un morphisme $\varphi : \xi \to \eta$,

2) si φ et ψ sont deux morphismes de ξ dans η, les applications

φ_E et ψ_E sont homotopes dans l'espace des applications G-équivariantes de E_ξ dans E_η . Pour N est assez grand, si η est N-classifiant, on a $H^{2\ell-1}(M_\eta , \mathbb{R}) = H^{2\ell-1}(B_G , \mathbb{R}) = 0$, donc $Z_{2\ell-1}(M_\eta) = Z^{tor}_{2\ell-1}(M_\eta)$. Le caractère $\chi(\eta)$ est donc déterminé par les conditions a) et b). Cela étant, soit $\xi \in \mathcal{E}(G)$; on choisit un objet N-classifiant η tel que $N > \dim M_\xi$ et $Z_{2\ell-1}(M_\eta) = Z^{tor}_{2\ell-1}(M_\eta)$. On pose $\chi(\xi) = \chi(\eta) \circ \varphi_M$ où φ est un morphisme de ξ dans η . On montre que le caractère ainsi obtenu est indépendant des choix de φ et de η . Le comportement des formes $W_\xi P$ et des classes $u(\xi)$ vis à vis des morphismes permet alors de vérifier les conditions a), b) et c).

On note dans la suite $S_{P,u}(\xi)$ le caractère appartenant à $S^\ell(M_\xi)$ qui est défini par le théorème 4.1. Il détermine la forme $W_\xi P$, et la classe caractéristique $u(\xi)$.

4.2 <u>La valeur de</u> $S_{P,u}(\xi)$ <u>sur la projection</u> πz <u>d'un cycle</u> z <u>de</u> E <u>se calcule au moyen de la forme</u> $T_\xi P$. <u>Plus précisément,</u>

$$S_{P,u}(\xi) \circ \pi = \overline{T_\xi P} \qquad \underline{\text{sur}} \ Z_{2\ell-1}(E_\xi) .$$

En utilisant un morphisme de ξ dans un objet N-classifiant convenable, on se ramène au cas où z est le bord d'une chaîne $y \in C_{2\ell}(E_\xi)$. Dans ce cas,

$$(S_{P,u}(\xi))(\pi z) = (S_{P,u}(\xi))(\partial \pi y) = \overline{(W_\xi P)(y)} = \overline{(dT_\xi P)(y)} = \overline{(T_\xi P)(z)} .$$

Si la connexion γ_ξ est globalement plate, la fibration ξ est trivialisable et il existe un morphisme de ξ dans un objet de $\mathcal{E}(G)$ dont la base est réduite à un point. Par suite $S_{P,u}(\xi) = 0$ quel que soit $(P,u) \in K(G)$.

La manière dont $S_{P,u}(\xi)$ dépend de la connexion γ_ξ est décrite par le résultat suivant ([1]) :

4.3 THÉORÈME (Simons, [10]).- Soit $\xi(s)$ une famille d'objets de $\mathcal{E}(G)$ ayant même fibration principale sous-jacente $E \to M$ et dépendant différentiablement d'un paramètre réel s . Soit $\gamma(s)$ la connexion de $\xi(s)$ et $\Omega(s)$ la forme de courbure de $\gamma(s)$. Pour tout $(P,u) \in K^{\ell}(G)$, on a sur $Z_{2\ell-1}(M)$:

$$S_{P,u}(\xi(1)) - S_{P,u}(\xi(0)) = \ell \int_0^1 P\left(\frac{d}{ds}\gamma(s) \wedge \Omega(s) \dots \Omega(s)\right) ds .$$

Sur les cycles de torsion, l'égalité résulte de la relation (1.4). Le cas général s'en déduit en montrant qu'il existe une fibration principale $E' \to M'$ avec $H^{2\ell-1}(M', \mathbb{R}) = 0$, une famille différentiable $\gamma'(s)$ de connexions sur E' et un morphisme φ de $E \to M$ dans $E' \to M'$ tels que $\gamma(s) = \gamma'(s)\varphi^T$ pour tout s .

5. Caractères associés aux classes de Pontrjagin et invariants conformes

Soient M une variété différentielle de dimension n et $\mathcal{R}$ le fibré des repères de TM . On note $\theta : T\mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ la forme différentielle canonique de $\mathcal{R}$. Soient γ_0 et γ_1 deux connexions sur $\mathcal{R}$. Puisque $\gamma_1 - \gamma_0$ est nulle sur les vecteurs verticaux qui sont les vecteurs annulés par θ , on peut factoriser $\gamma_1 - \gamma_0$ et écrire $\gamma_1 - \gamma_0 = 2\rho \circ \theta$ où ρ est une application $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{R}$ dans $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$. On suppose maintenant que γ_0 et γ_1 ont même torsion. On a alors $d\theta + [\gamma_0, \theta] = d\theta + [\gamma_1, \theta]$, donc $[\gamma_1 - \gamma_0, \theta] = 0$. Ceci signifie que

$$(\rho(a)\theta(u))(\theta(v)) - (\rho(a)\theta(v))(\theta(u)) = 0$$

quel que soit $a \in \mathcal{R}$ et $u , v \in T_a\mathcal{R}$. Considérée comme forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $\rho(a)$ est donc une forme symétrique.

Soient G un sous-groupe fermé de $G\ell(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et E un sous-fibré principal différentiable de groupe G dans $\mathcal{R}$. Supposons que les connexions γ_0 et γ_1 soient les prolongements à $\mathcal{R}$ de connexions sur E . Dans ce cas, $\gamma_1(u) - \gamma_o(u) \in \mathfrak{g}$ pour tout vecteur u dont l'origine est dans E. Ceci montre que, pour tout $a \in E$, $\rho(a)$ appartient au premier prolongement $\mathfrak{g}^{(1)}$ de $\mathfrak{g}$.

On va appliquer ces remarques au cas où γ_o et γ_1 sont les connexions de torsion nulle définies par deux métriques riemanniennes conformes g^o et g^1 sur M. Soit E le sous-fibré principal de groupe $CO(n) \subset G\ell(n, \mathbb{R})$ formé par les repères conformes pour g^o ou g^1. Les formes γ_o et γ_1 sont les prolongements de formes de connexion sur E. Par conséquent, sur E, on a $\gamma_1 - \gamma_o = 2\rho\theta$ où ρ est une application différentiable de E dans le premier prolongement $\mathfrak{co}(n)^{(1)}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{co}(n)$ de $CO(n)$. Cela signifie que, sur E, la matrice de ρ est de la forme

$$(5.1) \qquad \rho^k_{ij} = \tfrac{1}{2}(c_j\,\delta_{ik} + c_i\,\delta_{jk} - c_k\,\delta_{ij}) ,$$

où (c_i) est la matrice d'une application différentiable de E dans $\mathbb{R}^n$.

5.2 Lemme (Chern-Simons, [2]).- Pour tout entier $\ell > 0$, soit Q_ℓ l'élément de $I^\ell(G\ell(n, \mathbb{R}))$ défini par $Q_\ell(X) = \operatorname{Tr} X^\ell$. Si $\Omega(s)$ est la courbure de la connexion $\gamma(s) = (1 - s)\gamma_o + s\gamma_1$, on a pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout ℓ pair :

$$Q_\ell((\gamma_1 - \gamma_o) \wedge \Omega(s) \wedge \ldots \wedge \Omega(s)) = 0 .$$

Puisque $Q_\ell((\gamma_1 - \gamma_o) \wedge \Omega(s) \wedge \ldots \wedge \Omega(s))$ est une forme basique, il suffit de démontrer l'égalité sur E. D'après (5.1), la restriction de $\gamma_1 - \gamma_o$ à E a une matrice de la forme $(\Sigma\, c_i\theta^i)\delta_{jk} + c_j\theta^k - c_k\theta^j$. Dans le calcul de $Q_\ell((\gamma_1 - \gamma_o) \wedge \Omega(s) \wedge \ldots \wedge \Omega(s))$, les termes provenant de $(\Sigma\, c_i\theta^i)\delta_{jk}$ sont nuls du fait que $\Omega(s)$ est à valeurs dans $\mathfrak{o}(n)$ et que par suite $Q_{\ell-1}(\Omega(s)) = 0$. Les autres donnent 0 du fait que $\theta \wedge \Omega(s) = 0$ (identité de Bianchi).

Kobayashi et Ochiai démontrent le Lemme (5.2), ainsi que des résultats analogues s'appliquant aux connexions projectivement équivalentes, par un procédé qui explique mieux les choses (cf. [6]). Ils considèrent l'algèbre de Lie $\mathfrak{h} = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{co}(n) \oplus \mathfrak{co}(n)^{(1)}$; c'est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs polynômiaux sur $\mathbb{R}^n$ qui est isomorphe à $\mathfrak{o}(n+1\,,1)$. Ils observent que $2\rho \circ \theta$ peut s'écrire en utilisant le crochet de $\mathfrak{h}$ sous la forme $[\rho,\theta]$. Par suite, si Q est une fonction polynômiale sur $\mathfrak{h}$ invariante par la représentation adjointe de $\mathfrak{h}$, l'identité de Bianchi donne tout de suite $Q((2\rho \circ \theta)\wedge\Omega(s) \wedge \ldots \wedge \Omega(s)) = 0$ (sur E). Il suffit donc de vérifier que, pour ℓ pair, Q_ℓ coïncide sur $\mathfrak{co}(n)$ avec la restriction d'une fonction polynômiale invariante sur $\mathfrak{h}$.

5.3 THÉORÈME (Simons, [10]).- <u>Soit</u> M <u>une variété de dimension</u> n . <u>Soient</u> g^0 <u>et</u> g^1 <u>deux métriques riemanniennes conformes sur</u> M <u>et</u> ξ_0 (resp. ξ_1) <u>le fibré des repères de</u> TM <u>muni de la connexion définie par</u> g^0 (resp. g^1) . <u>Pour tout</u> $(P,u) \in K(G\ell(n\,,\mathbb{R}))$, <u>on a</u>

$$S_{P,u}(\xi_0) = S_{P,u}(\xi_1) .$$

Supposons que $(P,u) \in K^\ell(G\ell(n\,,\mathbb{R}))$. Si ℓ est impair, on a $S_{(P,u)}(\xi_0) = S_{(P,u)}(\xi_1)$ parce que, les connexions étant riemanniennes, $W_{\xi_0}(P) = W_{\xi_1}(P) = 0$. Supposons ℓ pair. Puisque P est un polynôme en les Q_i , on déduit de (5.2) que

$$P((\gamma_1 - \gamma_0)\wedge \Omega(s)\wedge \ \ldots \wedge \Omega(s)) = 0 .$$

L'assertion résulte alors du théorème 4.3.

Pour $i = 1\,,2\,,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]$, on note p_i la i-ème classe de Pontrjagin de $B_{G\ell(n\,,\mathbb{R})}$. Si $P_i(X)$ est le coefficient de λ^{n-2i} dans $\det(\lambda - X)$ pour $X \in \mathfrak{gl}(n\,,\mathbb{R})$, alors $P_i \in I^{2i}(G\ell(n\,,\mathbb{R}))$ et $w(P_i) = r(p_i)$. On a donc $(P_i\,, p_i) \in K^{2i}(G\ell(-n\,,\mathbb{R}))$. Le théorème 5.3 montre que les $S_{P_i\,,\,p_i}$, appliqués aux fibrés de repères des variétés riemanniennes, donnent des invariants conformes.

6. Caractères et fibrations vectorielles inverses

On désigne par n et k deux entiers > 0 . Soit $G_{n,k}$ la variété grassmannienne des sous-espaces de dimension k dans R^{n+k} . On identifie $G_{n,k}$ et $G_{k,n}$ par la bijection qui associe à un sous-espace de R^{n+k} le sous-espace orthogonal pour la structure euclidienne canonique. Soit $V_{n,k}$ le sous-fibré vectoriel de rang k du fibré trivial $R^{n+k} \times G_{n,k}$ ensemble des couples (x,a) avec $x \in a$. Le fibré $V_{n,k} \oplus V_{k,n}$ est canoniquement isomorphe à $R^{n+k} \times G_{n,k}$. Cette trivialisation de $V_{n,k} \oplus V_{k,n}$ définit une connexion linéaire globalement plate qui induit des connexions linéaires canoniques dans $V_{n,k}$ et $V_{k,n}$. Le groupe $O(n + k)$ opère dans $R^{n+k} \times G_{n,k}$ par action simultanée dans les deux facteurs. La connexion plate et les sous-fibrés $V_{n,k}$, $V_{k,n}$ sont invariants par $O(n+k)$. Par conséquent $O(n + k)$ laisse invariantes les connexions linéaires canoniques de $V_{n,k}$ et $V_{k,n}$. Soit η (resp. ξ) l'objet de $\mathcal{E}(G\ell(k, R))$ (resp. $\mathcal{E}(G\ell(n, R))$) défini par $V_{n,k}$ (resp. $V_{k,n}$) et sa connexion canonique. La forme de connexion γ_ξ est invariante par l'action de $O(n + k)$ dans le fibré des repères de $V_{k,n}$. Par suite, pour tout $P \in I(G\ell(n, R))$, $W_\xi P$ est une forme sur $G_{k,n}$ qui est invariante par $O(n + k)$.

Puisque $V_{n,k} \oplus V_{k,n}$ est trivialisable, on a

$$(6.1) \qquad (1 + p_1(\xi) \dots p_{\left[\frac{n}{2}\right]}(\xi))(1 + p_1(\eta) \dots p_{\left[\frac{k}{2}\right]}(\eta)) = 1 .$$

Pour tout entier $i \geq 0$, on définit $p_i^\perp \in H^{4i}(B_{G\ell(n, R)}, Z)$ par la condition

$$(1 + p_1 + \dots + p_{\left[\frac{n}{2}\right]})(p_0^\perp + p_1^\perp + \dots) = 1 .$$

De même, on définit pour tout $i \geq 0$ un polynôme $P_i^\perp \in I^{2i}(G\ell(n, R))$ par la condition

$$(1 + P_1 + \dots + P_{\left[\frac{n}{2}\right]})(P_0^\perp + P_1^\perp + \dots) = 1 .$$

Pour tout i , on a alors $(P_i^{\perp}, p_i^{\perp}) \in K^{2i}(G\ell(n, \mathbb{R}))$ et la relation (6.1) montre que $p_i^{\perp}(\xi) = p_i(\eta)$ pour $1 \leq i \leq \left[\frac{k}{2}\right]$ et que $p_i^{\perp}(\xi) = 0$ pour $i > \left[\frac{k}{2}\right]$. Il en résulte que $W_{\xi}P_i^{\perp} - W_{\eta}P_i$ est une forme exacte pour $1 \leq i \leq \left[\frac{k}{2}\right]$ et que $W_{\xi}P_i^{\perp}$ est exacte pour $i > \left[\frac{k}{2}\right]$. Comme ces formes sont invariantes par $O(n + k)$ et que $G_{k,n}$ est un espace symétrique de groupe $O(n + k)$, ceci entraîne que $W_{\xi}P_i^{\perp} = W_{\eta}P_i$ pour $1 \leq i \leq \left[\frac{k}{2}\right]$ et $W_{\xi}P_i^{\perp} = 0$ pour $i > \left[\frac{k}{2}\right]$. Tous les cycles de degré impair sur $G_{k,n}$ étant de torsion, il en résulte que

$$(6.2) \qquad S_{P_i^{\perp}, p_i^{\perp}}(\xi) = S_{P_i, p_i}(\eta) \qquad 1 \leq i \leq \left[\tfrac{k}{2}\right] ,$$

$$S_{P_i^{\perp}, p_i^{\perp}}(\xi) = 0 \qquad i > \left[\tfrac{k}{2}\right] .$$

On va passer de ce résultat à un résultat sur les caractères de deux fibrés vectoriels inverses. Deux fibrés vectoriels V et $V^{\perp}$, munis de connexions ∇ et $\nabla^{\perp}$ sont dits <u>inverses</u> s'ils ont même base et s'il existe sur $V \oplus V^{\perp}$ une connexion linéaire globalement plate induisant respectivement par projection ∇ et $\nabla^{\perp}$ sur V et $V^{\perp}$.

Si V est un fibré vectoriel de rang n muni d'une connexion linéaire ∇ , le fibré des repères de V et la forme de connexion définie par ∇ constituent un objet ξ de $\mathcal{E}(G\ell(n, \mathbb{R}))$. On posera pour alléger :

$$S_{P_i, p_i}(\xi) = S_{p_i}(\nabla) \quad , \quad S_{P_i^{\perp}, p_i^{\perp}}(\xi) = S_{p_i^{\perp}}(\nabla) .$$

6.3 THÉORÈME (Cheeger, Simons, [1]).- <u>Soit</u> V (resp. $V^{\perp}$) <u>un fibré vectoriel muni d'une connexion linéaire</u> ∇ (resp. $\nabla^{\perp}$). <u>Si</u> (V,∇) <u>et</u> $(V^{\perp},\nabla^{\perp})$ <u>sont inverses et si</u> $V^{\perp}$ <u>est de rang</u> k , <u>on a</u>

$$S_{p_i^{\perp}}(\nabla) = S_{p_i}(\nabla^{\perp}) \qquad \underline{\text{pour}} \quad 1 \leq i \leq \left[\tfrac{k}{2}\right] ,$$

$$S_{p_i^{\perp}}(\nabla) = 0 \qquad \underline{\text{pour}} \quad i > \left[\tfrac{k}{2}\right] .$$

On fera la démonstration dans le cas particulier suivant qui suffit pour les principales applications (cf. [10]) : on suppose que sur $V \oplus V^{\perp}$, en plus de la connexion globalement plate induisant ∇ et $\nabla^{\perp}$, il existe une structure euclidienne dans les fibres, invariante par transport parallèle et telle que en tout point a de la base M, V_a et $V_a^{\perp}$ soient orthogonales. Soit n le rang de V. Le choix d'une base orthonormale de sections plates de $V \oplus V^{\perp}$ définit une application f de M dans $G_{k,n}$ telle que $V = f^* V_{k,n}$ et $V^{\perp} = f^* V_{n,k}$. La connexion ∇ (resp. $\nabla^{\perp}$) est l'image réciproque de la connexion linéaire canonique de $V_{k,n}$ (resp. $V_{n,k}$). Le théorème s'obtient donc en transportant sur M les relations (6.2).

La démonstration du cas général (cf. [1]) repose sur des formules explicitant les caractères S_{p_i} de la somme directe de deux fibrés vectoriels munis de connexions. Ces formules mettent en jeu la structure multiplicative de l'espace des caractères différentiels.

7. Obstructions aux immersions conformes

7.1 THÉORÈME (Simons, [10]).- Soient M une variété riemannienne de dimension n et ∇ la connexion linéaire riemannienne dans TM. Pour qu'il existe une immersion conforme de M dans R^{n+k}, il faut que $S_{p_i^{\perp}}(\nabla) = 0$ pour $i > \left[\frac{k}{2}\right]$.

Soit en effet ζ la fibration principale définie par les repères de TM. Elle est munie d'une forme de connexion correspondant à ∇. Si l'immersion $\varphi : M \to R^{n+k}$ est isométrique, elle définit un morphisme de ζ dans la fibration ξ des repères de $V_{k,n}$ munie de la connexion canonique (cf. n° 6). Le théorème résulte dans ce cas de (6.2). Le cas général s'en déduit en observant que si $\varphi : M \to R^{n+k}$ est une immersion conforme, c'est une immersion isométrique pour une métrique riemannienne sur M conformément équivalente à la métrique donnée. Les caractères S_{p_i} étant des invariants conformes, le résultat subsiste.

7.2 <u>Avec les hypothèses du théorème, les formes</u> $T_\zeta P_i^\perp$ <u>pour</u> $i > \left[\frac{k}{2}\right]$ <u>sont des formes fermées à périodes entières sur le fibré des repères de</u> TM . En effet, puisque $S_{p_i^\perp}(\nabla) = 0$, on a $W_\zeta P_i^\perp = 0$, donc $dT_\zeta P_i^\perp = 0$ d'après (1.3). On a d'autre part $(T_\zeta P_i^\perp)(z) \in \mathbb{Z}$ pour tout cycle z de degré $4i - 1$ d'après (4.2).

Millson a appliqué ce résultat aux espaces lenticulaires de dimension $4k-1$, munis de leur métrique canonique ([7]). Il a calculé la valeur des caractères S_{p_k} sur le cycle fondamental et a montré notamment qu'il existe une infinité d'espaces lenticulaires de dimension $4k - 1$ qui sont différentiablement immergeables dans $\mathbb{R}^{4k}$ mais ne peuvent être immergés de manière conforme dans $\mathbb{R}^{6k-1}$.

L'énoncé 7.2 est une forme affaiblie d'un résultat obtenu par Chern et Simons dans [3]. Avec les hypothèses du théorème, <u>pour</u> $\left[\frac{k}{2}\right] < i \leq \left[\frac{n}{2}\right]$, <u>la forme</u> $\frac{1}{2} T_\zeta P_i^\perp$ <u>est une forme fermée à périodes entières.</u>

Si M est l'espace projectif de dimension 3 avec sa métrique riemannienne canonique, on montre que pour toute section σ du fibré des repères de TM , on a $\int_{\sigma M} T_\zeta P_1^\perp = 1$. Par conséquent, il n'existe pas d'immersion conforme de M dans $\mathbb{R}^4$.

8. <u>Cas plat</u>

Avec les notations du numéro 4, si $\xi \in \mathcal{E}(G)$ est plat, c'est-à-dire si la courbure de la connexion θ_ξ est nulle, on a $W_\xi P = 0$ pour tout $P \in I(G)$ de degré > 0 . Si ξ est plat, pour tout $\ell > 0$ et tout $(P,u) \in K^\ell(G)$, le caractère $S_{P,u}(\xi)$ est nul sur les bords de degré $2\ell - 1$; on peut donc identifier $S_{P,u}(\xi)$ à une classe appartenant à $H^{2\ell-1}(M, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Le théorème 4.3 montre que, si $\xi(s)$ est une famille différentiable d'objets plats de $\mathcal{E}(G)$ ayant même fibration principale sous-jacente, alors pour tout $\ell > 1$ et tout $(P,u) \in K^{\ell}(G)$, le caractère $S_{P,u}(\xi(s))$ est indépendant de s .

Soit G^{o} le groupe G muni de la topologie discrète et soit μ l'homomorphisme canonique de $H^*(B_G, R/\mathbf{Z})$ dans $H^*(B_{G^o}, R/\mathbf{Z})$ défini par l'injection $G^{o} \to G$. Si $\xi \in \mathcal{E}(G)$ est plat, sa connexion définit dans E_ξ une structure de fibré principal de groupe G^{o} de base M_ξ , d'où un homomorphisme $b_\xi^o : H^*(B_{G^o}, R/\mathbf{Z}) \to H^*(M_\xi, R/\mathbf{Z})$ tel que $b_\xi = b_\xi^o \circ \mu$. On montre qu'il existe pour tout ℓ un homomorphisme $(P,u) \mapsto s_{P,u}$ de $K^{\ell}(G)$ dans $H^{2\ell-1}(B_{G^o}, R/\mathbf{Z})$ tel que, pour tout objet plat ξ de $\mathcal{E}(G)$ et pour tout $(P,u) \in K^{\ell}(G)$, on ait

$$S_{P,u}(\xi) = b_\xi^o\,(s_{P,u}) \ .$$

Ceci permet dans certain cas d'obtenir des informations sur $H^*(B_{G^o}, R/\mathbf{Z})$.

<u>Caractère d'Euler</u>. Soit $u \in H^{2n}(B_{SO(2n)}, \mathbf{Z})$ la classe d'Euler de $B_{SO(2n)}$ et soit $P \in I^n(SO(2n))$ le polynôme tel que $w(P) = r(u)$. Pour tout objet ξ de $\mathcal{E}(SO(2n))$, on appelle <u>caractère d'Euler</u> de ξ le caractère $\chi_\xi = S_{P,u}(\xi)$. Pour $n = 2$, c'est le caractère différentiel décrit au n° 3 (exemple).

Lorsque ξ est plat, le caractère d'Euler peut se calculer comme suit. Soit $S^{2n-1}\xi$ le fibré en sphères associé à ξ . Notons ω la forme volume invariante par $SO(2n)$ sur la sphère S^{2n-1} telle que $\int_{S^{2n-1}} \omega = 1$. La connexion de ξ permet de projeter les vecteurs de $S^{2n-1}\xi$ sur les vecteurs verticaux et par conséquent définit une forme $\tilde{\omega}$ sur $S^{2n-1}\xi$ telle que, pour toute application $\alpha : S^{2n-1} \to S^{2n-1}\xi$ associée à un élément de E_ξ , on ait $\omega = \alpha^* \tilde{\omega}$. Puisque la projection $\pi : S^{2n-1}\xi \to M_\xi$ définit un homomorphisme surjectif $H_{2n-1}(S^{2n-1}\xi) \to H_{2n-1}(M_\xi)$, pour tout cycle $z \in Z_{2n-1}(M_\xi)$, il existe un cycle $y \in Z_{2n-1}(S^{2n-1}\xi)$ tel que $z \sim \pi y$. On vérifie que l'on a $\chi_\xi(z) = \underline{\int_y \tilde{\omega}}$. Par ce procédé, on peut du reste définir un caractère de degré m pour tout objet plat de $\mathcal{E}(SO(m))$, même si m est impair (cf. [1]).

Soit χ l'élément $s_{P,u}$ de $H^{2n-1}(B_{SO(2n)^o}, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$. On peut le considérer comme un homomorphisme de $H_{2n-1}(B_{SO(2n)^o})$ dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Pour $n = 1$, χ est l'isomorphisme canonique de $H_1(B_{SO(2)^o}) = SO(2)^o$ sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

8.1 THÉORÈME.- Pour tout n, l'image de $\chi : H_{2n-1}(B_{SO(2n)^o}) \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ contient $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Soit en effet Γ un sous-groupe fini de $SO(2n)$ opérant librement dans S^{2n-1}. Soit ξ la fibration principale de groupe $SO(2n)$ définie par $SO(2n) \times_{\Gamma} S^{2n-1} \to \Gamma\backslash S^{2n-1}$. Elle est munie d'une connexion plate canonique. La méthode de calcul indiquée plus haut donne $\chi_{\xi}(M_{\xi}) = \frac{1}{\text{Card }\Gamma}$ mod $\mathbf{Z}$. Puisque Card Γ est arbitraire et que χ_{ξ} se factorise en $\chi \circ b^o_{\xi}$, ceci démontre le théorème.

On sait que $H^*(B_{SO(2n)^o}, \mathbf{R}/\mathbf{Z})$ est la cohomologie du complexe des cochaînes standard sur $SO(2n)$ à valeurs dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Dans [1], Cheeger et Simons indiquent comment on obtient des cocycles standard appartenant à la classe χ. Soit e un point de S^{2n-1}. Une suite $\sigma = (s_o, \dots, s_{2n-1}) \in SO(2n)^{2n}$ est dite générique si les $s_i e$ forment une base de $\mathbf{R}^{2n}$. Pour toute suite générique $\sigma = (s_o, \dots, s_{2n-1})$, on note $\hat{\sigma}$ le simplexe géodésiquement convexe de S^{2n-1} ayant pour sommets les points $s_i e$. On définit une fonction v à valeurs dans R/Z sur l'ensemble des suites génériques en posant $v(\sigma) = \overline{\omega(\hat{\sigma})}$ (c'est-à-dire que $v(\sigma)$ est le volume normalisé de $\hat{\sigma}$ modulo $\mathbf{Z}$). On a $v(h\sigma) = v(\sigma)$ pour tout $h \in SO(2n)$. Si la suite $(s_o, \dots, s_{2n}) \in SO(2n)^{2n+1}$ est telle que, pour tout i, la suite $\sigma_i = (s_o \dots \widehat{s_i} \dots s_{2n})$ soit générique, alors $\Sigma (-1)^i \widehat{\sigma_i}$ est un cycle de degré $2n - 1$ dans S^{2n-1} et par suite

$\Sigma(-1)^i v(\sigma_i) = 0$. D'après un résultat de C. Moore ([8]), il existe des $(2n-1)$-cocycles à valeurs dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ ayant v pour restriction à l'ensemble des suites génériques et tous les cocycles qui prolongent v sont cohomologues. On montre que leur classe de cohomologie est χ .

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. CHEEGER - J. SIMONS - Differential characters and geometric invariants, (preprint).

[2] S. S. CHERN - J. SIMONS - Some cohomology classes in principal fiber bundles and their application to riemannian geometry, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 68 (1971), 791-794.

[3] S. S. CHERN - J. SIMONS - Characteristic formes and geometric invariants, Annals of Math., (à paraître).

[4] J. L. HEITSCH - H. BLAINE LAWSON - Transgressions, Chern-Simons invariants and the classical groups, (preprint).

[5] S. KOBAYASHI - K. NOMIZU - Foundations of differential geometry II, Interscience, N. Y. 1969.

[6] S. KOBAYASHI - T. OCHIAI - G-structures of order two and transgression opetors, J. of Diff. Geometry, 6 (1971), 213-230.

[7] J. MILLSON - Ph. D. thesis, Berkeley (1973).

[8] C. MOORE - Extension and low dimensional cohomology of locally compact groups, Trans. Am. Math. Soc., 113 (1964), 40-63.

[9] M. S. NARASHIMAN - S. RAMANAN - Existence of universal connections, Am. J. Math., 83 (1961), 563-572 ; 85 (1963), 223-231.

[10] J. SIMONS - Characteristic forms and transgression II : Characters associated to a connection, (preprint).